

## TD 1 : Logique propositionnelle (syntaxe et sémantique)

**Exercice 1.** Les expressions suivantes sont-elles des formules syntaxiquement valides de la logique propositionnelle si  $\mathbf{P} = \{p, q\}$  ? Donnez une preuve pour chaque réponse.

- $(p \Rightarrow (p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \Rightarrow p))$
- $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
- $(\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow \neg p))$
- $(q \Rightarrow (p \neg \Rightarrow q))$
- $(p \Rightarrow q)$
- $(\neg p)$
- $(q \Rightarrow (p \Rightarrow q))$
- $(\neg(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg \neg(q \Rightarrow \neg p))$

**Exercice 2.** Justifiez en détail que  $f_1, f_2, f_3, f_4$  et  $f_5$  sont ou non des formules syntaxiquement correctes lorsque si  $\mathbf{P} = \{p, q, r, s\}$ .

- $f_1 = ((p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))) \Rightarrow (\neg s \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)))$
- $f_2 = ((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow \neg s \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r))$
- $f_3 = (((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)))$
- $f_4 = (\neg((p \Rightarrow \neg(r \Rightarrow q)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(r \Rightarrow q)))$
- $f_5 = (\neg((p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)) \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)))$

### Rappel sur l'algèbre de Boole :

1. Donnez la table de vérité :  $a + b$

2.  $a$  et  $b$  sont des variables booléennes. Déterminez les valeurs booléennes des égalités suivantes

- $a + \text{faux} =$
- $a + \text{vrai} =$
- $a + \overline{a} =$
- $a + a =$
- $\frac{a}{\overline{a}} =$

### **Exercice 3.**

- $f_{10} = (p \Rightarrow p)$
- $f_{11} = ((p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p)$
- $f_{12} = ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p))$

1. Prouvez que  $f_{10}, f_{11}$  et  $f_{12}$  sont des tautologies.

2. Prouvez que  $f_3, f_4$  et  $f_5$  sont des tautologies.

Pour prouver que  $f$  est une tautologie, il faut établir que  $I(f)$  est égale à vrai pour toute interprétation. Chaque ligne des preuves devra être justifiée.

Utilisez uniquement les rappels sur l'algèbre booléenne et les faits suivants où  $f_a$  et  $f_b$  sont des formules logiques :

- $I((f_a \Rightarrow f_b)) = \overline{I(f_a)} + I(f_b),$
- $I(\neg f_a) = \overline{I(f_a)}$

**Exercice 4.** Déterminez si  $f_1$  est satisfaisable, insatisfaisable, est une tautologie.

**Exercice 5.** On définit les « raccourcis »  $\wedge$  et  $\vee$  de la façon suivante :

$$(p \wedge q) \equiv \neg (p \Rightarrow \neg q)$$

$$(p \vee q) \equiv (\neg p \Rightarrow q)$$

1. Donnez la table de vérité de chacun de ces opérateurs.

2. En déduire que pour toute interprétation des variables propositionnelles  $I : \{p, q\} \rightarrow B$ , nous avons :

$$I((p \wedge q)) = I(\neg(\neg p \vee \neg q))$$

$$I((p \vee q)) = I(p) + I(q)$$

3. Prouvez les lois:

$$I(\neg(p \wedge q)) = I((\neg p \vee \neg q))$$

$$I(\neg(p \vee q)) = I((\neg p \wedge \neg q))$$

**Exercice 6.** Donnez la table de vérité du raccourci  $\oplus$  défini de la façon suivante :

$$(p \oplus q) \equiv ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$$