

TD 2 : Logique propositionnelle (démonstrations logiques)

Exercice 0. Question de cours

Pour chaque séquent suivant, déterminez ses prémisses et sa conclusion

séquent 1 : $(\{(\neg p \Rightarrow q), \neg p\}, q)$

séquent 2 : $(\{p, \neg p\}, q)$

Existe-il une interprétation I telle que le séquent 1 est vrai ? Si oui, donnez une telle interprétation.

Existe-il une interprétation I telle que le séquent 2 est vrai ? Si oui, donnez une telle interprétation.

Le séquent 1 est-il valide? Justifiez votre réponse.

Le séquent 2 est-il valide? Justifiez votre réponse.

Rappelons les six règles de déduction logique :

- | | |
|--|-----------------------------|
| • si $F \in \mathcal{F}$, alors $\mathcal{F} \vdash F$ | utilisation d'une hypothèse |
| • si $F' \notin \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \vdash F$, alors $\mathcal{F}, F' \vdash F$ | augmentation des hypothèses |
| • si $\mathcal{F} \vdash (F \Rightarrow F')$ et $\mathcal{F} \vdash F$, alors $\mathcal{F} \vdash F'$ | modus ponens |
| • si $\mathcal{F}, F \vdash F'$, alors $\mathcal{F} \vdash (F \Rightarrow F')$ | synthèse |
| • $\mathcal{F} \vdash F$ si et seulement si $\mathcal{F} \vdash \neg\neg F$ | double négation |
| • si $\mathcal{F}, F \vdash F'$ et $\mathcal{F}, F \vdash \neg F'$ alors $\mathcal{F} \vdash \neg F$ | raisonnement par l'absurde |

Exercice 1. Précisez les règles utilisées dans la démonstration suivante :

1. $\neg p, p, \neg q \vdash p$
2. $\neg p, p, \neg q \vdash \neg p$
3. $\neg p, p \vdash \neg\neg q$
4. $\neg p, p \vdash q$
5. $\neg p \vdash (p \Rightarrow q)$

Exercice 2. Précisez les règles utilisées dans les démonstrations suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $\neg(p \Rightarrow q), p, q \vdash \neg(p \Rightarrow q)$ | 4. $\neg(p \Rightarrow q), p, q \vdash (p \Rightarrow q)$ |
| 2. $\neg(p \Rightarrow q), p, q \vdash q$ | 5. $p, q \vdash \neg\neg(p \Rightarrow q)$ |
| 3. $\neg(p \Rightarrow q), q \vdash (p \Rightarrow q)$ | 6. $p, q \vdash (p \Rightarrow q)$ |
| 1. $\neg q, \neg p, (\neg p \Rightarrow q) \vdash \neg q$ | 6. $\neg q, (\neg p \Rightarrow q) \vdash p$ |
| 2. $\neg q, \neg p, (\neg p \Rightarrow q) \vdash \neg p$ | 7. $\neg p, \neg q, (\neg p \Rightarrow q) \vdash p$ |
| 3. $\neg q, \neg p, (\neg p \Rightarrow q) \vdash (\neg p \Rightarrow q)$ | 8. $\neg p, (\neg p \Rightarrow q) \vdash \neg\neg q$ |
| 4. $\neg q, \neg p, (\neg p \Rightarrow q) \vdash q$ | 9. $\neg p, (\neg p \Rightarrow q) \vdash q$ |
| 5. $\neg q, (\neg p \Rightarrow q) \vdash \neg\neg p$ | |

Exercice 3. Remettez la preuve suivante « dans l'ordre » et précisez les règles utilisées :

1. $(p \Rightarrow q), \neg q, p \vdash q$
2. $(p \Rightarrow q), \neg q \vdash \neg p$
3. $(p \Rightarrow q), \neg q, p \vdash (p \Rightarrow q)$
4. $(p \Rightarrow q) \vdash (\neg q \Rightarrow \neg p)$
5. $(p \Rightarrow q), \neg q, p \vdash \neg q$
6. $(p \Rightarrow q), \neg q, p \vdash p$

Exercice 4. Le séquent suivant est-il valide $(\{p \Rightarrow q\}, (\neg q \Rightarrow \neg p))$?

Exercice 5. Prouvez les séquents suivants :

- $\vdash (p \Rightarrow p)$
- $\vdash (p \Rightarrow \neg\neg p)$
- $\vdash (\neg\neg p \Rightarrow p)$

Exercice 6. Indiquez les prémisses et la conclusion du séquent suivant :

$$(\{p \Rightarrow q\}, p, q)$$

1. Trouvez une interprétation pour laquelle ce séquent est vrai.
2. Ce séquent est-il valide ?
3. Prouvez ce séquent.

Exercice 7. Indiquez les prémisses et la conclusion du séquent 3 :

$$(\emptyset, (((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\neg r \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q))))$$

1. Trouvez une interprétation pour laquelle le séquent 3 est vrai.
2. Donnez la définition de séquent valide. Le séquent 3 est-il valide ?
3. Prouvez le séquent 3.

Indice : initialement, $\mathcal{F} = ((p \Rightarrow q) \Rightarrow r), \neg r, (p \Rightarrow q)$

4. Existe-il un séquent prouvable et non valide ?
5. A l'inverse, existe-il un séquent valide et non prouvable ?

Exercices 8.

1. Prouvez que : $\vdash (p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q))$

a. Indice : initialement, $\mathcal{F} = p, \neg p, \neg q$

2. Le séquent suivant est-il valide $(\emptyset, (p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)))$?

Exercice 9. Prouvez les séquents suivants

1. $((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \vdash ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)))$

indice le séquent initial est : $((p \Rightarrow (q \Rightarrow r)), p, (p \Rightarrow q) \vdash$

2. $(p \Rightarrow q), (q \Rightarrow r) \vdash (p \Rightarrow r)$

indice le séquent initial est : $(p \Rightarrow q), (q \Rightarrow r), p \vdash$

3. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \vdash (q \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

indice le séquent initial est : $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)), p, q \vdash$

Exercice 10. Remettez la preuve suivante « dans l'ordre » et précisez les règles utilisées dans la démonstration suivante

1	$\neg q, p, r, ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \vdash \neg q$
2	$\neg q, r, ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \vdash (p \Rightarrow \neg q)$
3	$\neg q, p, r, ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \vdash (p \Rightarrow \neg q)$
4	$\neg q, p, r, ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \vdash r$
5	$\neg q, p, r, ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \vdash ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r)$
6	$\neg q, p, r, ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \vdash \neg r$
7	$p, r, ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \vdash \neg\neg q$
8	$p, r, ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \vdash q$
9	$r, ((p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg r) \vdash (p \Rightarrow q)$