

Bin Packing avec Contrainte de Distance

Olivier Beaumont, Nicolas Bonichon, Hubert Larchevêque

INRIA Bordeaux Sud-Ouest, LaBRI, Université de Bordeaux, ENSEIRB
{olivier.beaumont,nicolas.bonichon,hubert.larcheveque}@labri.fr

Mots-clés : *Bin packing, espace métrique, algorithmes d'approximation, augmentation de ressources*

1 Introduction

Nous considérons ici une variante de problèmes d'optimisation classiques liés au placement de serveurs et de réplicats dans les réseaux [4]. Plus précisément, nous supposons que l'ensemble des utilisateurs d'un réseau souhaite accéder à un service particulier et l'objectif est alors de distinguer un ensemble de fournisseurs de services qui sont susceptibles de mettre à disposition une quantité suffisante de ressources pour pouvoir satisfaire les demandes des clients. De plus, il est nécessaire d'assurer une qualité de service répondant à certaines exigences, comme le temps de réponse, le temps de transmission des éventuelles données liées au service considéré, etc. Il est également souhaitable que les serveurs soient suffisamment bien répartis dans le réseau, soit pour minimiser les temps de latence client-serveur, soit pour obtenir une plus grande tolérance aux pannes.

Nous formalisons le problème d'optimisation associé comme un problème de *Bin Packing avec Contrainte de Distance* (BPCD), inspiré de *Bin Packing* classique [2] : soient un ensemble d'éléments appartenant à un espace métrique donné (qui représente l'ensemble des noeuds d'un réseau et les latences les séparant, par exemple) et une borne d_{\max} sur la distance maximale pouvant séparer deux éléments appartenant à un même groupe (modélisant le fait que deux éléments associés à un même serveur ne doivent pas se trouver trop loin l'un de l'autre). L'objectif est de construire un minimum de groupes satisfaisant cette contrainte de distance et dont le poids ne dépasse pas une certaine valeur fixée (correspondant à la capacité de traitement d'un serveur), de façon à ce que chaque élément soit exactement dans un groupe. L'idée est d'associer à chacun de ces groupes un serveur de capacité fixe, qui traitera l'ensemble des requêtes des éléments de ce groupe.

2 Bin Packing avec Contrainte de Distance

2.1 Définition

Une instance I de BPCD peut être décrite par un 5-uplet $I = (S, d, w, W, d_{\max})$ où S est un ensemble d'éléments $S = \{e_1, \dots, e_n\}$, (S, d) est un espace métrique fini, w une fonction de poids, W une valeur de poids limite, et d_{\max} un diamètre limite. On obtient donc la définition suivante :

Définition 1 *Étant donnée une instance $I = (S, d, w, W, d_{\max})$, trouver une partition en sous-ensembles disjoints S_1, \dots, S_K de S de cardinalité minimale K telle que $\forall i \leq K, \sum_{e \in S_i} w(e) \leq W, \forall (e_u, e_v) \in S_i, d(e_u, e_v) \leq d_{\max}$.*

Il est clair que BPCD est NP-difficile, puisque si on supprime la contrainte de distance (ou quand d_{\max} est plus grand que la plus grande des distances entre deux éléments), on se ramène au problème de BIN PACKING classique. On s'intéresse alors à l'étude d'algorithmes d'approximation, assurant, pour toute instance de BPCD, la construction d'un nombre de groupes à un facteur multiplicatif constant près du nombre de groupes optimal. Via une réduction au problème de coloration de graphes [1], on peut montrer qu'il n'existe pas d'algorithme s'exécutant en temps polynomial et assurant un facteur d'approximation constant pour résoudre BPCD. BPCD est dit inapproximable à facteur constant.

2.2 Inapproximabilité et augmentation de ressources

Comme BPCD est inapproximable à facteur constant, une solution consiste à recourir à un procédé d'augmentation de ressources consistant à comparer le nombre de groupes obtenus lors de l'exécution d'un algorithme s'exécutant en temps polynomial et autorisé à construire des groupes de diamètre au plus βd_{\max} , pour $\beta > 1$, au nombre optimal de groupes de diamètre au plus d_{\max} .

Dans la suite nous dirons qu'un algorithme \mathcal{A} utilisant une augmentation de ressources de β est un (α, β) -algorithme d'approximation pour BPCD s'il s'exécute en temps polynomial et s'autorise à relâcher la contrainte sur le diamètre des groupes en travaillant à la place avec la valeur βd_{\max} , tout en assurant un facteur d'approximation de α , *i.e.* en construisant au plus $\alpha |\text{OPT}_{\text{BPCD}}|$ groupes, avec $\alpha \geq 1$, où $|\text{OPT}_{\text{BPCD}}|$ est le nombre de groupes d'une solution optimale contrainte à construire des groupes de diamètre d_{\max} .

Nous dirons alors que BPCD n'est pas (α, β) -approximable, pour certaines valeurs de α et de β , s'il n'existe pas d' (α, β) -algorithme d'approximation s'exécutant en temps polynomial pour BPCD pour ces valeurs de α et β , à moins que $P = NP$.

On peut voir cette façon de fixer un des paramètres (ici le diamètre) et d'optimiser l'autre (ici le nombre de groupes) comme un moyen de contourner le fait que BPCD est un problème d'optimisation multi-critères : on commence par identifier la contrainte dure (le poids de chaque groupe), puis parmi celles restantes, on identifie celle qu'il convient le mieux d'optimiser, selon notre problème (ici nous optimisons le nombre de groupes), et on s'autorise à relâcher (de manière contrôlée par l'augmentation de ressources) les contraintes plus faibles.

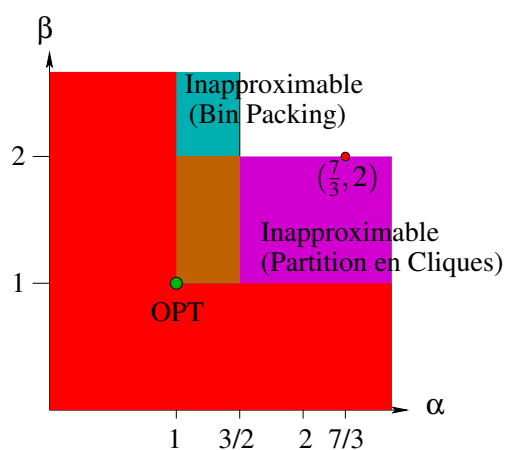


FIG. 1 – Résumé des résultats concernant BPCD dans un espace métrique général.

La Figure 1 résume les résultats d'inapproximabilité et d'approximation que nous obtenons pour BPCD dans le cas d'un espace métrique général. Les parties colorées correspondent aux couples (α, β) pour lesquels nous avons prouvé que BPCD n'est pas (α, β) -approximable. En particulier, même avec une augmentation de ressources de $(2 - \epsilon)$, BPCD reste inapproximable à facteur constant ; et quelle que soit l'augmentation de ressources qu'on s'autorise à utiliser, il n'existe pas d'algorithme assurant une approximation de BPCD à un facteur strictement inférieur à $3/2$ et s'exécutant en temps polynomial, à moins que $P = NP$.

Par ailleurs, en utilisant les travaux d'Epstein et Levin sur le BIN PACKING avec Conflits [3], nous avons démontré l'existence d'un $(\frac{7}{3}, 2)$ -algorithme d'approximation.

Nous avons également été en mesure d'utiliser nos résultats pour améliorer des résultats d'approximation existants pour une variante du K -centre, un problème classique de placement de réplicats.

Références

- [1] M. Bellare, O. Goldreich, and M. Sudan. Free bits, pcps and non-approximability-towards tight results. *Foundations of Computer Science, Annual IEEE Symposium on*, 0 :422, 1995.
- [2] Jr. E. G. Coffman, M. R. Garey, and D. S. Johnson. Approximation algorithms for bin packing : a survey. pages 46–93, 1997.
- [3] L. Epstein and A. Levin. On Bin Packing with Conflicts. *SIAM Journal on Optimization*, 19(3) :1270–1298, 2008.
- [4] M. Pál, É. Tardos, and T. Wexler. Facility location with nonuniform hard capacities. In *FOCS '01 : Proceedings of the 42nd IEEE symposium on Foundations of Computer Science*, page 329, Washington, DC, USA, 2001. IEEE Computer Society.