Résolution de la logique de Presburger par élimination de quantificateur
Stage L3 de l'ENS-Lyon
Lieu: Bordeaux

Jérôme Leroux
LaBRI (CNRS UMR 5800), MVTSI Team, Bordeaux, France.
leroux@labri.fr

March 7, 2006

Décrire l'ensemble des solutions entières à une contrainte linéaire de la forme $2.x + 3.y = 1$ est un problème assez facile. Il suffit en effet de calculer des coefficients de Bézout pour en déduire qu'un couple (x, y) est solution de $2.x + 3.y = 1$ si et seulement si il existe p tel que $x = 3.p + 5$ et $y = -2.p - 3$. Le problème réciproque qui consiste à trouver la contrainte linéaire $2.x + 3.y = 1$ à partir de la formule $\exists p;\ x = 3.p + 5 \wedge y = -2.p - 3$ est un cas particulier du problème appelé *l'élimination de quantificateur dans la logique de Presburger* (dans notre exemple, on souhaite éliminer le quantificateur $\exists p$).

La *logique de Presburger* [Pre29] correspond intuitivement à toutes les formules linéaires que l'on peut écrire à partir de contraintes linéaires $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i = c$ ou $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i.x_i \leq c$ où les α_i et c sont des constantes entières, des conjonctions et disjonctions de formules, des quantifications existentielles $\exists p$ et universelles $\forall p$.

Différents algorithmes ont été proposés pour décider si une formules de Presburger admet au moins une solution: par des automates [WB00], par des semi-linéaires [GS66], ou encore par élimination de quantificateurs [Kla04] implémentés dans l'outil Omega [Ome].

L'objectif du stage est d'*étudier* les différentes méthodes connues pour éliminer les quantificateurs dans la logique de Presburger et d'*implémenter* en C une de ces méthodes.

References

[GS66] Seymour Ginsburg and Edwin H. Spanier. Semigroups, Presburger formulas and languages. *Pacific J. Math.*, 16(2):285–296, 1966.

[Kla04] Felix Klaedtke. On the automata size for presburger arithmetic. In *Proc. 19th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS'04), Turku, Finland July 2004*, pages 110–119. IEEE Comp. Soc. Press, 2004.

[Ome] Omega homepage. `http://www.cs.umd.edu/projects/omega/`.

[Pre29] M. Presburger. Uber die volstandigkeit eines gewissen systems der arithmetik ganzer zahlen, in welchem die addition als einzige operation hervortritt. In *C. R. 1er congres des Mathematiciens des pays slaves, Varsovie*, pages 92–101, 1929.

[WB00] Pierre Wolper and Bernard Boigelot. On the construction of automata from linear arithmetic constraints. In *Proc. 6th Int. Conf. Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS'2000), Berlin, Germany, Mar.-Apr. 2000*, volume 1785 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–19. Springer, 2000.