

THÈSE

PRÉSENTÉE À

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

Par Olivier Ly

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

Etude algorithmique de complexes simpliciaux infinis

Soutenue le : 6 juillet 2000

Après avis des rapporteurs : D. B. A. Epstein
A. Slissenko

Devant la Commission d'examen formée de :

B. Courcelle	Professeur	Président
D. B. A. Epstein	Professeur	Rapporteur
E. Grädel	Professeur	Examineur
Ph. Narbel	Maître de conférence	Directeur
J.-E. Pin	Directeur de Recherche ...	Examineur
G. Sénizergues	Professeur	Directeur
A. Slissenko	Professeur	Rapporteur

— 2000 —

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude envers ceux qui m'ont guidé dans ce travail : David Epstein, Philippe Narbel et Géraud Sénizergues. Je remercie David pour m'avoir reçu à Warwick, pour son aide précieuse, notamment en tant que rapporteur de ma thèse; je suis honoré de l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je remercie Philippe pour nos longues discussions au bord de l'eau, ses conseils, son soutien constant et son amitié. Ce que j'ai appris de Géraud est pour moi inestimable; je le remercie de m'avoir accepté comme élève et je ne cacherai pas la fierté que j'éprouve à exprimer ma gratitude envers lui.

Je remercie Bruno Courcelle pour ses conseils et ses remarques tout au long de ces années passées au LaBRI; je le remercie d'avoir accepté de présider le jury de ma thèse, qui n'aurait pu voir le jour sans ses travaux.

Je remercie Alexandre Zvonkin pour son soutien bienveillant, pour les nombreuses références bibliographiques qu'il m'a indiquées.

Je remercie Igor Rivin pour les conversations toujours déterminantes que j'ai pu avoir avec lui à Warwick.

Je remercie Erich Grädel et Jean-Eric Pin pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury de thèse, ainsi qu'Anatol Slissenko, également membre du jury en tant que rapporteur; leurs conseils et leurs remarques m'ont beaucoup apporté.

Je voudrais souligner l'ambiance chaleureuse qui règne au LaBRI, il fait bon y apprendre tant le métier de chercheur que celui d'enseignant.

Je voudrais aussi confesser les nombreuses incantations aux dieux compteurs de bouchons auxquelles j'ai pu me livrer en compagnie de Cedric, Guillaume, Jeff, Benoît, Laurent, Pierre et bien d'autres.

Je remercie enfin tous mes sémaphores : mon père, ma mère, mon frère Nicolas, mon grand-père, mes grand-mères, Tru, Jean-Claude, Leslie, Claudine, Patrick, Chantal, Alain, Loïc, Guenaël, Hélène, Françoise, Marie-Christine, Michel, Richard, Olivier, Nicolas, Yann pour leur soutien sans faille.

Ma dernière pensée sera pour Irène à qui je dédie ce travail.

Table des matières

Introduction	1
1 Concepts de base	15
1.1 Polyèdres HR-équationnels	15
1.1.1 Complexes simpliciaux, polyèdres et hypergraphes	15
1.1.2 Hypergraphes HR-équationnels	17
1.1.3 Arborescence et régularité	19
1.1.4 Polyèdres HR-équationnels	22
1.2 Variétés	23
2 Surfaces HR-équationnelles	31
2.1 Surfaces non compactes sans bord et arborescence	31
2.1.1 Notion de bout	31
2.1.2 Théorème de Kerékjartó-Richards	33
2.1.3 Bouts, langages de mots infinis, arbres	34
2.1.4 Sommes connexes arborescentes	35
2.2 Régularité arborescente, algorithme	38
2.2.1 Surfaces HR-équationnelles et sommes connexes arborescentes	38
2.2.2 Espaces de dimension zéro de types finis	42
2.2.3 Régularité arborescente, algorithme	45
2.3 Exemples de surfaces non HR-équationnelles	46
2.4 Surfaces planaires à bord	50
2.4.1 Topologie florale	51
2.4.2 Classification des surfaces à bord planaires	64
2.4.3 Considérations algorithmiques	67
3 Arborescence et régularité en dimension 3	69
3.1 Variétés HR-équationnelles de dimension 3	69
3.1.1 Arborescence	69
3.1.2 Régularité	71
3.2 Rigidité des 3-variétés arborescentes	76
3.2.1 Groupe fondamental, revêtements	76
3.2.2 Variétés hyperboliques de dimension 3 arborescentes	77
3.2.3 Rigidité	82
3.3 Arborescence, régularité et groupes fondamentaux	90

3.3.1	Groupes fondamentaux de 3-variétés arborescentes	90
3.3.2	Logique monadique du second ordre, régularité et revêtements	94
4	Graphes automatiques	103
4.1	Graphes automatiques	103
4.2	Graphe des configurations d'une machine de Turing	106
4.3	Machines de Turing auto-stabilisantes	107
4.4	Indécidabilité du problème des bouts	109
4.5	<i>D0L</i> -systèmes de graphes et graphes automatiques	113
4.5.1	<i>D0L</i> -systèmes de graphes	113
4.5.2	Connexité dans les <i>D0L</i> -suites de graphes et bouts de graphes auto- matiques	115
4.5.3	Emulation des grammaires de remplacement de sommets	120
4.5.4	Annexe au chapitre 4	122
	Quelques questions	129

Introduction

Complexes simpliciaux, polyèdres et hypergraphes

L'étude développée dans ce mémoire se tient à l'interface de la topologie et de l'informatique théorique. Son objet central est le concept de *complexe simplicial* qui consiste à coder des objets topologiques au moyen de structures combinatoires.

Les objets en question, les *polyèdres*, sont des espaces topologiques fabriqués à la manière d'un jeu de construction en recollant entre eux des segments, des triangles, des tétraèdres, et plus généralement des objets appelés *simplexes*, qui généralisent les segments, triangles et tétraèdres aux dimensions supérieures¹.

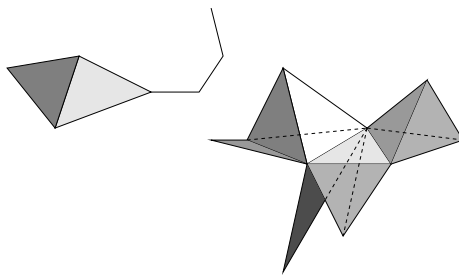


FIG. 1: *Polyèdres*

Ces objets sont de nature topologique: nous ne nous préoccupons ni des longueurs, ni des angles, ni de tout autre paramètre lié à la métrique. Deux polyèdres sont considérés comme équivalents s'ils sont *homéomorphes*²; c'est le cas par exemple si l'un s'obtient à partir de l'autre par une déformation continue; par exemple, une boule et un cube sont homéomorphes, mais une sphère et un tore ne le sont pas. En particulier, lorsque l'on fabrique un tel objet, on considère toujours deux segments quelconque comme équivalents, de même que deux triangles, ou deux tétraèdres; on s'autorise toujours à les recoller l'un sur l'autre.

Un polyèdre est donc un espace topologique que l'on peut décomposer en simplexes; une telle décomposition s'appelle une *triangularisation* du polyèdre; ce concept généralise la notion de triangularisation de surface, tout comme les simplexes généralisent les triangles. Une triangularisation est totalement décrite par un *hypergraphe*. Formellement, un hypergraphe est un ensemble de sommets V muni d'un ensemble E de parties finies de V ; les éléments de

1. cf. chapitre 1.1

2. deux espaces topologiques sont *homéomorphes* s'ils ont la même structure topologique, i.e. s'il existe un *homéomorphisme*, i.e. une bijection bi-continue, de l'un sur l'autre (cf. [HY61])

E sont appelés des hyperarêtes (cf. [Ber73, Ber87]). Notons que ce concept généralise celui de graphe non-orienté³ en ceci qu'un graphe non-orienté est un hypergraphe dont chaque hyperarête ne possède que deux sommets. Pour comprendre comment le concept d'hypergraphe apparaît naturellement pour le codage des polyèdres triangulés, considérons à titre d'exemple le polyèdre à cinq sommets obtenu en recollant deux tétraèdres sur deux de leurs faces (voir figure page 2); on décrit cet objet au moyen d'un hypergraphe à cinq sommets possédant deux hyperarêtes de quatre sommets chacune, avec trois sommets en commun. De

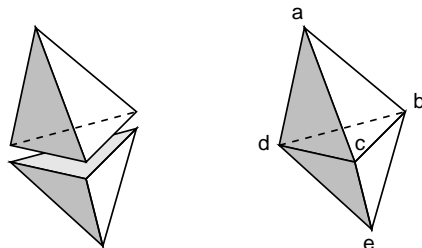


FIG. 2: Dans cette figure, nous avons schématisé le recollement de deux tétraèdres; le polyèdre obtenu est représenté dans la partie droite de la figure. Cet objet peut être codé par l'hypergraphe dont l'ensemble des sommets est $\{a, b, c, d, e\}$, qui possède deux hyperarêtes $\{a, b, c, d\}$ et $\{b, c, d, e\}$ qui codent les tétraèdres; les deux hyperarêtes ont trois sommets en commun: b, c et d , les sommets de la face commune aux deux tétraèdres.

façon générale, on décrit un polyèdre triangulé par un hypergraphe en considérant l'ensemble de ses sommets et en codant chaque simplexe par une hyperarête.⁴

Un complexe simplicial est un polyèdre triangulé muni d'un hypergraphe qui décrit sa triangularisation (cf. [HY61, FM97]). Dans notre travail, nous ne considérerons que des complexes simpliciaux faisant intervenir un nombre au plus dénombrable de simplexes⁵.

Le concept de complexe simplicial est naturel du point de vue de l'informatique théorique en ceci qu'il est inhérent à l'un de ses concepts fondamentaux: les graphes. Par définition, un graphe est un objet purement combinatoire³; cependant, dès lors que l'on veut s'en donner une représentation géométrique, par exemple le dessiner, on considère en fait le polyèdre qui lui est associé. Ainsi, le concept de complexe simplicial est sous-jacent à l'intuition géométrique usuelle des graphes.

De fait, il autorise par exemple une formalisation de la notion de planarité, omniprésente en théorie des graphes: un graphe est dit *planaire* si et seulement si le polyèdre qui lui est associé peut se plonger dans la sphère. Notons à cet égard que le concept de *carte*, qui tire ses origines dans le problème du codage des graphes planaires plongés dans la sphère (cf. [Cor75], [CM92]), coïncide, dans le cas des cartes à faces triangulaires, avec la notion de surface triangularisée au sens des complexes simpliciaux. Pour une étude systématique du

3. i.e. un ensemble de sommets muni d'un ensemble de paires de sommets (cf. [Ber83])

4. Le concept d'hypergraphe, classique en théorie des graphes, équivaut à celui de complexe simplicial abstrait (cf. [HY61]) à la condition d'hérédité près.

5. i.e. l'ensemble des simplexes intervenant dans une triangularisation est fini ou bien en bijection avec l'ensemble des entiers naturels.

INTRODUCTION
problème du plongement des graphes dans les surfaces, voir [GT87], dans le cas des cartes, voir [Mar97, Sch98].

Problème de l'homéomorphisme

L'introduction du concept de complexe simplicial au début du siècle par H. Poincaré [Poi00] se place dans une direction de recherche qui consiste à étudier les propriétés globales des espaces topologiques: la *topologie combinatoire*, ancêtre de la topologie algébrique (cf. [Da78]).

L'un des problèmes fondamentaux de ce domaine consiste à élaborer un algorithme pour décider si deux triangularisations représentent des polyèdres homéomorphes. On sait aujourd'hui qu'un tel algorithme n'existe pas en toute généralité (cf. [Mar58, Mas67, BHP68]). Néanmoins, nombre de travaux consistent à isoler des classes particulières de complexes simpliciaux pour lesquelles le problème de l'homéomorphisme possède une solution effective. C'est dans cette ligne que s'inscrit ce travail.

Durant les quinze dernières années, l'informatique théorique a vu naître plusieurs classes de graphes et d'hypergraphes infinis jouissant de propriétés algorithmiques importantes. Nous nous proposons de conjuguer ces travaux avec la topologie pour tenter d'apporter une contribution au problème de l'homéomorphisme des complexes simpliciaux *infinis*.

Les différents polyèdres auxquels nous nous intéresserons sont tous des *variétés*; c'est-à-dire que localement, ils ont une géométrie très simple, et leur complexité naît de leurs formes globales. Formellement, une variété est un espace topologique dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n pour un entier n fixé que l'on appelle la dimension de la variété (cf. [BG87]). Nous ne considérerons dans notre travail que les variétés triangularisées⁶.

Les variétés sont présentes dans de nombreux domaines en mathématiques comme en physique. Par exemple, elles apparaissent souvent comme espaces de solutions d'équations différentielles. En dimension 3, ce concept correspond à l'intuition que nous avons de l'espace dans lequel nous vivons; notons à cet égard que la forme globale de l'univers au sens topologique du terme est l'objet de recherches actives (cf. [CW98]). Par ailleurs, étudier le problème de l'homéomorphisme pour le cas des variétés est une restriction raisonnable; en effet, cela permet de se dégager des considérations locales et de se concentrer sur la recherche de critères globaux.

En dimension 1, la situation est simple: toute variété est soit homéomorphe à un cercle, soit homéomorphe à une droite (cf. [Mil65]). Rappelons que l'on se borne à ne considérer que les complexes simpliciaux dont le nombre de simplexes est au plus dénombrable. Le problème général de l'homéomorphisme des polyèdres de dimension 1, i.e. les polyèdres formés uniquement de sommets et d'arêtes, est quasiment équivalent au problème de l'isomorphisme des graphes⁷; en particulier, dans le cas fini, il possède évidemment une solution effective; le cas des graphes infinis sera discuté par la suite.

6. Toute variété compacte de dimension inférieure ou égale à 3 est triangularisable. Ce n'est que récemment que des variétés de dimension 4 non triangularisables ont été découvertes.

7. à ceci près qu'il faut contracter les chaînes maximales de longueurs finies supérieures à 1 constituées d'arêtes ne contenant que des sommets de degré 2.

En dimension 2, le problème est plus compliqué, mais néanmoins totalement cerné dans le cas des complexes simpliciaux finis. Les variétés de dimension 2 formalisent le concept commun de surface; le plan, la sphère ou encore le tore en sont les exemples classiques. Les surfaces *compactes*, i.e. les surfaces obtenues en recollant un nombre fini de triangles, sont totalement classifiées, à homéomorphisme près, par deux paramètres: le *genre* et l'*orientabilité*. Une surface triangularisée est dite *orientable* si l'on peut associer à chacun de ses triangles une permutation circulaire de ses sommets de telle sorte que pour chaque arête de la triangularisation, les orientations induites par les permutations circulaires associées aux deux triangles dont elle est un côté, soient contraires (cf. [HY61, Mas67, RS72]). Par exemple, la sphère et le tore sont des surfaces orientables; les exemples classiques de surfaces non-orientables sont le célèbre ruban de Möbius, le plan projectif ou encore la bouteille de Klein. Ce concept est une version combinatoire de l'orientabilité au sens de la géométrie différentielle classique (cf. [BG87, Mal72]). Ensuite, le genre g d'une surface se calcule en fonction de la *caractéristique*

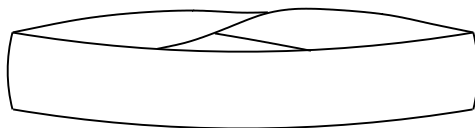


FIG. 3: *Le ruban de Möbius*

d'Euler χ , égale à la somme du nombre de triangles et du nombre de sommets d'une triangularisation à laquelle on retranche le nombre de ses arêtes; on montre que ce nombre ne dépend pas de la triangularisation en question (cf. [Mas67, HY61]); dans le cas d'une surface orientable, $g = 1 - \frac{1}{2}\chi$, dans le cas non-orientable $g = 2 - \chi$. Dans le cas orientable, g possède une interprétation géométrique agréable: c'est le nombre de "trous" dans la surface, ainsi une sphère est de genre 0, un tore de genre 1, etc... Ces deux critères sont calculables de façon effective à partir d'une triangularisation. Il existe donc un algorithme pour décider si deux surfaces compactes sont homéomorphes (cf. [Mas67]). En fait, on montre que cet algorithme s'étend au cas plus général des complexes simpliciaux finis de dimension 2; cela fait partie du folklore de la topologie simpliciale (cf. e.g. [FM97]).

Quant à la dimension 3, le problème est ouvert. Néanmoins, une méthode générale initiée par Poincaré⁸ consiste à tenter de réduire le problème de l'homéomorphisme à un problème d'isomorphisme de groupe; pour en donner les idées directrices, il nous faut introduire le concept de *groupe fondamentale*, notion centrale de la topologie algébrique.

Dans cette introduction, notre approche est informelle, pour une définition rigoureuse, voir chapitre 3.2.1 ou bien [HY61, Mas67, Rot88, Spa66]. Soit K un polyèdre et x_0 un point de K . On considère les lacets de K de point de base x_0 , i.e. les chemins continus dans K qui commencent et terminent en x_0 ; on ne s'intéresse à ces chemins qu'à déformation près, c'est-à-dire que l'on considère que deux chemins sont équivalents s'il existe une déformation continue qui transforme l'un en l'autre. On munit l'ensemble de ces lacets d'une loi de composition définie de la façon suivante: le produit de deux lacets γ_1 et γ_2 est le lacet obtenu en parcourant d'abord γ_1 puis γ_2 . On montre que cette loi de composition est compatible avec l'équivalence

8. Et E. Noether pour l'homologie

des lacets en ce sens que la classe d'équivalence du lacet obtenu en composant deux lacets donnés ne dépend que des classes d'équivalence des deux lacets en question; ainsi, l'ensemble des classes d'équivalence de lacets hérite aussi d'une loi de composition, et devient alors un groupe noté $\pi_1(K, x_0)$ que l'on appelle le *groupe fondamental* de K de point de base x_0 . On montre que la classe d'isomorphisme de ce groupe ne dépend pas du point de base.

Etudier l'ensemble des lacets d'un polyèdre donné vise, entre autre, à comprendre ses propriétés globales. Puisqu'on ne considère les lacets qu'à déformation près, deux polyèdres homéomorphes ont des groupes fondamentaux isomorphes; on dit que le groupe fondamental est un *invariant* de la structure topologique. Le problème est de savoir si la réciproque est vraie, i.e. si les propriétés topologiques qui sont codées dans la structure du groupe fondamental suffisent à caractériser les classes d'homéomorphisme. Si c'est le cas, le problème de l'homéomorphisme se réduit au problème de l'isomorphisme des groupes fondamentaux.

Cette méthode, qui vise *a priori* à donner des solutions effectives partielles au problème de l'homéomorphisme, permet aussi de montrer qu'en général, il est indécidable. On montre pour ce faire que tout groupe finiment présenté est le groupe fondamental d'une variété de dimension 4 [Mar58, BHP68]. Par ailleurs, le problème de l'isomorphisme des groupes finiment présentés est indécidable. Ces faits impliquent qu'il n'existe pas d'algorithme pour décider de l'homéomorphisme de deux variétés compactes en dimensions strictement supérieures à 3 (cf. [Mas67, Mar58, BHP68]).

Le cas de la dimension 3 est encore très énigmatique. En général, le groupe fondamental ne caractérise pas les classes d'homéomorphisme des variétés de dimension 3. On sait en effet que certaines d'entre elles, qui ont des groupes fondamentaux finis isomorphes, ne sont pas homéomorphes. Beaucoup d'efforts ont cependant été accomplis pour isoler des classes de variétés de dimension 3 qui sont caractérisées par leurs groupes fondamentaux. A cet égard, citons la fameuse conjecture de Poincaré qui affirme que toute variété de dimension 3 dont le groupe fondamental est trivial est homéomorphe à la sphère $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \|x\|_2 = 1\}$. La conjecture centrale de classification est la suivante : si deux variétés de dimension 3 compactes, sans bord et irréductibles⁹ ont des groupes fondamentaux infinis isomorphes, alors elles sont homéomorphes. Cette conjecture est vérifiée pour la classe des *variétés de Haken*¹⁰, i.e. les 3-variétés sans bord compactes orientables et irréductibles qui contiennent une surface incompressible⁹ [Wal68, Hei63]. Citons également le résultat de [Sco85] selon lequel une variété de dimension 3 compacte orientable et irréductible dont le groupe fondamental est infini et isomorphe à celui d'un *espace fibré de Seifert* lui est homéomorphe.

Une classe particulière de variétés s'est avérée fondamentale en ceci que pour elle, le problème de l'homéomorphisme possède une solution algorithmique, il s'agit des *variétés hyperboliques de volume fini*, i.e. les variétés munies de métriques hyperboliques complètes de volume fini⁹. Ces variétés sont caractérisées par leurs groupes fondamentaux, en ceci que deux telles variétés, dont les groupes fondamentaux sont isomorphes, sont *isométriques*; on dit qu'elles sont *rigides*. Mostow le démontre pour les variétés hyperboliques compactes de toutes dimensions [Mos68], ce résultat est généralisé aux variétés de volume fini dans [Pra73]. Cela étant, la solution au problème de l'homéomorphisme pour les variétés com-

9. voir chapitre 3

10. aussi appelées les variétés suffisamment grandes

0

pactes hyperboliques¹¹ repose sur l’algorithme de Sela [Sel95] de décision du problème de l’isomorphisme dans la classe des groupes hyperboliques au sens de Gromov sans torsion (cf. [GdlH90, Gro87, CDP90]), dont font partie les groupes fondamentaux des variétés hyperboliques compactes. Notons que les groupes hyperboliques au sens de Gromov jouissent de propriétés algorithmiques très importantes. Ils sont fortement automatiques, i.e. leurs structures peuvent être décrites de façon constructive au moyen de langages rationnels (cf. [Eps88, ECH⁺92] ou bien chapitre 4); ce résultat a été généralisé dans [BG96] au cas des groupes fondamentaux de variétés de dimension 3 satisfaisant la conjecture de Thurston (voir plus loin). Il en résulte en particulier que pour ces groupes, le problème du mot est décidable. On a en fait un résultat plus fort : l’algorithme de Makanin pour la résolution des équations dans le groupe libre (cf. [Mak80, Mak82]) a été étendu au cas des groupes hyperboliques au sens de Gromov (cf. [RS95]), ce qui constitue la première partie de la construction de l’algorithme de décision du problème de l’isomorphisme (cf. [Sel95]).

Outre la décidabilité du problème de l’homéomorphisme, la classe des variétés hyperboliques est fondamentale en ceci que la “plupart” des variétés de dimension 3 lui appartiennent, c’est le *théorème d’uniformisation de Thurston*¹² : les 3-variétés de Haken atoroidales⁹ sont hyperboliques. Notons que ce résultat s’inscrit dans un projet visant à établir la conjecture de Thurston selon laquelle toute variété de dimension 3 se décompose en morceaux géométrisables (cf. [Sco83, Thu82]).

Par ailleurs, beaucoup de travaux concernant la dimension 3 se sont développés ces dernières années dans une direction de recherche indépendante de la géométrie; c’est le cas de la théorie des *surfaces normales* (cf. [FM97]), qui a donné lieu notamment à un résultat fondamental : il existe un algorithme pour reconnaître la sphère de dimension 3 [Mat, FM97, Rub95]. Nous ne développerons pas ce point de vue dans ce mémoire.

Complexes simpliciaux infinis constructifs

Nous nous proposons d’étudier les propriétés algorithmiques de complexes simpliciaux infinis. Telle qu’elle est formalisée dans la thèse de Church, la notion d’algorithme appliquée à des objets infinis n’a, *a priori*, pas de sens. Pour remédier à cela, nous devons adopter un point de vue *constructif* qui consiste à considérer des objets infinis décrits eux-même par des algorithmes. Un complexe simplicial infini pourra par exemple être défini par deux algorithmes; l’un énumérera l’ensemble de ses sommets, donné par exemple sous la forme d’une suite d’entiers naturels et l’autre énumérera l’ensemble de ses simplexes sous la forme d’une suite d’ensembles finis de sommets. Un tel objet est donc décrit par une donnée finie, en l’occurrence, deux algorithmes; dans un cadre plus formel, on parlerait de machines de Turing. Ainsi, lorsque nous parlerons d’algorithmes prenant pour entrées des complexes simpliciaux infinis, c’est en fait à ces données auxquelles nous nous réfèrons.

Notons que la notion d’objets constructifs est très restrictive comme le montre l’argument qui suit : l’ensemble des complexes simpliciaux infinis n’est pas dénombrable alors que

11. notons qu’il résulte du résultat de Mostow que deux telles variétés sont homéomorphes si et seulement si elles sont isométriques.

12. en référence au théorème d’uniformisation de Riemann pour la dimension 2 (cf. [AS60])

l'ensemble des algorithmes l'est, il y a ainsi beaucoup plus de complexes simpliciaux non-constructifs que de complexes simpliciaux constructifs.

C'est cependant une classe trop large pour ce qui nous intéresse. Sans restriction aucune, il y a fort à parier que beaucoup de questions ayant trait aux complexes simpliciaux constructifs soient indécidables. Par exemple, on ne peut pas décider algorithmiquement si un complexe simplicial constructif au sens précédent est fini ou infini; c'est une conséquence immédiate de l'indécidabilité du problème de l'arrêt des machines de Turing.

La modélisation des schémas de programmes entre autre à fait apparaître, ces dernières années, plusieurs familles de graphes et d'hypergraphes infinis constructifs. Citons à titre d'exemples les graphes *context-free* au sens de [MS85], les *hypergraphes HR-équationnels* [Cou89, Cou90b], les graphes VR-équationnels [Bar], les graphes de transitions [Cau96], les graphes *automatiques* [CS, KN95, Pel97, Sén92], les graphes *rationnels* [Mor99], ou encore les graphes *autosimilaires* [Nar94]. Nous nous intéresserons en premier lieu, et en fait principalement, à la classe des hypergraphes HR-équationnels [Cou89, Cou90b] qui généralise celle des *graphes context-free* apparue dans [MS83, MS85]. Un hypergraphe HR-équationnel est décrit de façon constructive au moyen de ce que l'on appelle une *grammaire de remplacement d'hyperarcs* [DKA97, Cou90a, Cou90c]; ce concept, qui généralise les grammaires context-free, classiques en théorie des langages formels, consiste à définir des familles d'hypergraphes en les engendrant par applications successives de règles de remplacement d'hyperarcs. Plus précisément, définir une grammaire de remplacement d'hyperarcs consiste, tout d'abord, à se donner un ensemble fini de symboles que l'on appelle les symboles non-terminaux; de façon arbitraire, on en distingue un, que l'on appelle le symbole initial ou axiome; ensuite, on associe à chacun de ces symboles un hypergraphe fini dont certaines hyperarêtes sont étiquetées par des symboles non-terminaux. Considérons maintenant un tel hypergraphe; la transformation de cet hypergraphe, selon notre grammaire, consiste à supprimer chaque hyperarête étiquetée par un symbole non-terminal et recoller à sa place l'hypergraphe qui lui est associé. Une telle grammaire définit alors un hypergraphe infini de la façon suivante: on commence par considérer l'hypergraphe associé au symbole initial; ensuite, on lui applique la transformation décrite précédemment, on obtient alors un hypergraphe "plus gros" dont certaines hyperarêtes sont étiquetées par des symboles non-terminaux; en itérant cette opération, on obtient à l'infini, par limite inductive, un hypergraphe qui en général, est infini; un tel objet s'appelle un hypergraphe HR-équationnel¹³.

Ces hypergraphes sont en général de degré infini, ils généralisent les graphes context-free au sens de [MS83, MS85] en ceci que ces derniers sont exactement les graphes HR-équationnels de degré fini, i.e. chaque sommets n'appartient qu'à un nombre fini d'hyperarêtes et toutes les hyperarêtes ne contiennent que deux sommets.

Le concept d'hypergraphe HR-équationnel formalise l'idée de *régularité arborescente*. Pour comprendre cela, il faut se faire une idée plus précise de la forme globale d'un hypergraphe HR-équationnel; on montre qu'un tel objet est obtenu en recollant un nombre éventuellement infini d'hypergraphes finis, mais en nombre fini à isomorphisme près, agencés

13. La définition rigoureuse de ce procédé nécessite un formalisme qui sera introduit dans le chapitre 1. Le terme "équationnel" provient du fait que les hypergraphes équationnels peuvent être vus comme les solutions de systèmes d'équations dans un certain magma (cf. [Cou89, Cou96], voir aussi [Bar]); le terme "HR" signifie "hyperedge replacement".

le long d'un arbre infini régulier¹⁴; ils sont recollés entre eux le long des arêtes de l'arbre. L'arborescence provient du fait que les hypergraphes sont recollés suivant la forme d'un arbre et qu'ils sont en nombres finis à isomorphisme près; intuitivement, la forme globale du graphe reste proche de celle de l'arbre. La régularité provient du fait que l'arbre, considéré comme étiqueté par les hypergraphes finis en question, est un arbre régulier.

Au plan algorithmique, cette notion de régularité arborescente a des implications profondes: toute propriété exprimable dans le langage de la *logique monadique du second ordre* est décidable (cf. [Cou89, Cou90a]); c'est-à-dire qu'il existe un algorithme qui décide si un hypergraphe HR-équationnel donné satisfait ou non une propriété donnée, cette dernière étant exprimée au moyen d'une formule logique dont les quantifications ne se font que sur les ensembles de sommets et d'hyperarêtes. Ce résultat s'appuie sur les travaux de Rabin [Rab69] dans lesquels le concept de régularité évoqué plus haut est utilisé pour démontrer la décidabilité de la logique monadique du second ordre des arbres, ce résultat fut ensuite étendu dans [MS83, MS85] au cas des graphes context-free au sens de [MS83, MS85].

Comme corollaire, on peut par exemple décider de façon algorithmique si un hypergraphe HR-équationnel est connexe ou non (cf. [Cou89] ou bien chapitre 3); en effet, on montre que la propriété de connexité pour les hypergraphes peut s'exprimer par une formule de la logique monadique du second ordre. On montre également par cette méthode, et c'est là un résultat très fort, qu'il existe un algorithme pour décider si deux hypergraphes HR-équationnels sont isomorphes (cf. [Cou90b]).

La majeure partie de notre travail a consisté à étudier les polyèdres HR-équationnels i.e. les polyèdres possédant une triangularisation codée par un hypergraphe HR-équationnel, et plus particulièrement à chercher des solutions algorithmiques au problème de l'homéomorphisme associé.

C'est une généralisation du problème de l'isomorphisme qui, comme nous l'avons vu précédemment, est décidable pour le cas des graphes HR-équationnels: un polyèdre de dimension 1 est codé par un hypergraphe dont toutes les hyperarêtes possèdent exactement deux sommets, i.e. un graphe. Par ailleurs, par un procédé de contraction, effectif dans le cas HR-équationnel, on peut transformer ce graphe de sorte qu'il ne possède aucune chaîne maximale de longueur finie supérieure à 1 constituée d'arêtes ne contenant que des sommets de degré 2; on fabrique ainsi un codage canonique. On montre alors que deux polyèdres de dimension 1 sont homéomorphes si et seulement si les graphes associés sont isomorphes. Ainsi, le problème de l'homéomorphisme pour les polyèdres HR-équationnels de dimension 1 est décidable.

Nous avons essentiellement étudié le cas des complexes simpliciaux qui sont des triangularisations de variétés. Sachant que tout hypergraphe fini est HR-équationnel, tout complexe simplicial fini est HR-équationnel; la notion de variété HR-équationnelle apparaît alors comme une généralisation des variétés compactes; elle s'insère de manière d'autant plus satisfaisante que l'on montre que les *surfaces pointées*, i.e. une surface obtenue à partir d'une surface compacte en lui retirant un nombre fini de points, sont HR-équationnelles; dans le

14. i.e. un arbre qui ne possède qu'un nombre fini de sous-arbres à isomorphisme près ou de façon équivalente, le développement d'un automate à nombre fini d'états; ce concept généralise aux arbres celui de suite ultimement périodique (voir chapitre 1).

même esprit, on montre aussi que toute variété hyperbolique de volume fini possède une triangularisation HR-équationnelle. Notons bien qu'un hypergraphe HR-équationnel est en général infini; et le polyèdre qu'il code est en général non-compact.

Contributions

Surfaces

La première partie de notre travail concerne les surfaces HR-équationnelles sans bord, i.e. les surfaces sans bord qui possèdent des triangularisations codées par des hypergraphes HR-équationnels. Nous avons pu montrer que dans ce cas, le problème de l'homéomorphisme est décidable. Ce résultat s'appuie sur deux points: d'une part sur le théorème de classification des surfaces non compactes sans bord, et d'autre part sur la notion de régularité formalisée par le concept d'HR-équationnalité. Le théorème de classification, d'abord énoncé par Kérékjárto en 1923 et démontré complètement dans [Ric63], nous dit, essentiellement, qu'une surface non-compacte sans bord est caractérisée à homéomorphisme près par, outre son genre et son type d'orientabilité, *l'espace de ses bouts*, que l'on appelle aussi sa *frontière idéale*. Le concept de bout formalise l'idée de "chemin à l'infini"; une droite, par exemple à deux bouts, mais le plan n'en a qu'un seul, et un polyèdre compact n'en a pas du tout (cf. [AS60, Mas67] ou bien chapitre 2). Ce résultat n'a cependant rien d'effectif; le concept de surface HR-équationnelle apporte une solution algorithmique au problème. Il formalise une notion de régularité globale pour les surfaces non compactes dont nous donnerons deux autres caractérisations sur lesquelles la construction de l'algorithme s'appuie: premièrement en termes de sommes connexes, et ensuite, en terme d'espace des bouts.

Le procédé de somme connexe consiste à recoller deux surfaces en découpant dans chacune d'entre elles un disque et en recollant les bords restants entre eux. On montre que toute surface compacte qui n'est pas une sphère est homéomorphe à une somme connexe de tores et de plans projectifs (cf. figure 2.1.4 page 36, ou encore [Mas67]). Nous avons généralisé ce concept au cas non compact par un procédé que nous avons baptisé *somme connexe arborescente*; il s'agit d'une méthode de recollement de surface qui consiste à définir une surface non-compacte de la façon suivante: on se donne une infinité de surfaces compactes sans bord agencées selon les nœuds d'un arbre lui-même infini; puis on les recolle entre elles en faisant une somme connexe locale le long de chaque arête de l'arbre. Une relecture de la démonstration du théorème de classification montre que les surfaces sans bord non-compactes sont toutes obtenues par sommes connexes arborescentes de sphères, de tores et de plans projectifs. Ce résultat nous éclaire sur les différentes façons de coder une surface non-compacte; d'abord, en terme de triangularisation, cela montre que toute surface sans bord est codée par un hypergraphe de largeur arborescente borné au sens de [RS84], et ce, indépendamment de la surface en question. Ensuite, en terme de somme connexe, puisqu'il autorise le codage de toute surface par un arbre, objet *a priori* plus simple qu'un hypergraphe. On montre alors que les surfaces sans bord non-compactes HR-équationnelles sont les surfaces obtenues par sommes connexes arborescentes sur des arbres réguliers. Ainsi, les grammaires de remplacement d'hyperarcs décrivent les surfaces HR-équationnelles en termes de triangularisation, et les arbres réguliers les décrivent en terme de sommes connexes arborescentes.

La seconde caractérisation porte sur l'espace des bouts, elle s'énonce en terme d'*espaces*

de types finis au sens de Pierce (cf. [Pie72]). Un espace métrique de dimension 0 sera dit de type fini au sens de Pierce si l'ensemble de ses sous-ensembles, muni des opérations booléennes usuelles d'union, d'intersection, de complémentaire et d'ensemble vide, ainsi que des opérations topologiques d'adhérence et de dérivée, possède une sous-algèbre de cardinal fini; un tel espace est alors caractérisé à homéomorphisme près par la plus petite sous-algèbre de l'ensemble de ses parties. En ces termes, les surfaces HR-équationnelles sont exactement les surfaces dont les espaces de bouts sont des espaces de type fini au sens de [Pie72]. La démonstration de ce résultat est fondée sur un codage de l'espace des bouts d'une surface HR-équationnelle par le langage des chemins infinis d'un arbre régulier; ce codage est ensuite mis à profit au moyen d'une méthode initiée dans [Hea86] où il est démontré que les espaces de types finis au sens de [Pie72] sont exactement les clotures des langages rationnels.

Une surface non-compacte sans bord peut-être définie en terme de triangularisation, en terme de somme connexe arborescente ou encore en terme de frontière idéale. Nous avons caractérisé l'idée de régularité arborescente à ces trois niveaux; une surface HR-équationnelle peut être définie constructivement par une grammaire de remplacement d'hyperarc codant une triangularisation, ou bien par un arbre régulier codant une somme connexe arborescente, ou encore par une algèbre de cardinal fini codant sa frontière idéale. L'équivalence de ces trois caractérisations conduit alors, par une démonstration constructive, à l'élaboration d'un algorithme pour décider si deux surfaces non-compactes sans bord HR-équationnelles sont homéomorphes.

Par ailleurs, la caractérisation des surfaces sans bord HR-équationnelles en terme d'espaces de type finis nous a permis de construire des exemples de surfaces planaires sans bord non HR-équationnelles. De fait, nous en avons construit beaucoup; nous montrerons en effet que l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces planaires sans bord possède la cardinalité du continu.

Nous avons ensuite cherché à étendre ce résultat au cas des surfaces à bord. A cet égard, nous avons pu établir une extension du théorème de classification au cas des surfaces planaires à bord. Pour ce faire, nous avons été amenés à affiner l'invariant que constitue l'espace des bouts en lui donnant une structure additionnelle qui consiste en une partition dont les ensembles, appelés des *fleurs*, sont munis d'un ordre cyclique; cet espace de fleurs suffit alors à caractériser une surface planaire à bord.

Variétés de dimension 3

Pour ce qui concerne la dimension 3, dans le but d'élaborer un algorithme de décision pour le problème de l'homéomorphisme, nous avons suivi la méthode algébrique liée au groupe fondamental. Nous avons atteint une étape qui de notre point de vue est importante: l'idée d'arborescence nous a conduit à définir une famille de 3-variétés non compactes qui sont caractérisées, à homéomorphisme près, par leurs groupes fondamentaux.

Il s'agit des 3-variétés hyperboliques *arborescentes*; ces variétés sont obtenues en recollant une infinité de 3-variétés à bord compactes agencées selon les nœuds d'un arbre. Leurs structures hyperboliques sont conditionnées pour respecter l'idée de largeur arborescente adaptée au cas des espaces métriques triangularisés⁹. La construction de ces variétés suit l'idée des sommes connexes arborescentes; elles sont très proches des variétés HR-équationnelles, à ceci

près qu'elles ne respectent pas comme ces dernières de propriété de régularité globale. Les variétés hyperboliques arborescentes sont caractérisées à isométrie près par leurs groupes fondamentaux. Pour démontrer cela, nous nous baserons essentiellement sur deux résultats fondamentaux de la géométrie hyperbolique : le théorème de Sullivan [Sul79, Sul81] et le théorème de Thurston sur la compacité de l'espace de Teichmüller des variétés compactes de dimension 3 [Thu86]; le théorème de Sullivan nous dit qu'il suffit de montrer que toute équivalence d'homotopie entre deux variétés HR-équationnelles est homotope à une pseudo-isométrie; nous utilisons le théorème de Thurston pour établir un contrôle sur les longueurs des chemins représentants des éléments du groupe fondamental appartenant à une famille génératrice; ce qui nous permettra de fabriquer des pseudo-isométries. Nous ne développerons pas ce point dans cette introduction⁹.

Ce résultat conduit à l'étude des propriétés algorithmiques des groupes fondamentaux des variétés non-compactes HR-équationnelles. Une première remarque à ce propos est que ces groupes ne sont généralement pas finiment présentés, ni même finiment engendrés; ce qui *a priori* pose un problème du point de vue de l'effectivité. Nous montrerons comment il est cependant possible de définir, pour de tels groupes, des présentations infinies mais constructives, en ce sens qu'elles sont décrites en termes de langages rationnels, i.e. les générateurs et les relateurs sont donnés sous forme de mots de langages rationnels.

L'HR-équationnalité se traduit à un niveau plus global par le fait que ces groupes sont obtenus comme graphes infinis de groupes dont les supports sont des arbres infinis réguliers; ainsi, un tel groupe peut s'obtenir en disposant une infinité de groupes de variétés compactes, en nombre fini à isomorphisme près, le long d'un arbre régulier; et de faire des produits amalgamés le long des arêtes de l'arbre. Cela donne un autre moyen de définir ces objets de façon constructive. Notons que cette construction donne à penser qu'il est possible d'établir un concept de forme normale pour les éléments du groupe fondamental d'une variété HR-équationnelle; cela impliquerait la décidabilité du problème du mot, voire du problème de la conjugaison.

Nous poursuivrons ensuite l'exploration du groupe fondamental dans le contexte des variétés HR-équationnelles qui sont revêtements réguliers de variétés compactes. Nous pourrions voir que dans ce cas, si le problème du mot est décidable dans le groupe fondamental de la variété compacte, alors il devient décidable dans le groupe fondamental de la variété HR-équationnelle qui en constitue un revêtement; c'est le cas par exemple s'il l'on a affaire à des *groupes automatiques* [Eps88, ECH⁺92].

Par ailleurs, nous donnerons une caractérisation des revêtements réguliers HR-équationnels en terme de groupes : ce sont exactement ceux dont le graphe de Schreier est le graphe de Cayley d'un groupe virtuellement libre. La démonstration de cette équivalence nécessite de conjuguer différentes méthodes issues de domaines *a priori* éloignés : nous utiliserons d'une part les outils de la théorie des modèles et notamment un résultat profond selon lequel tout graphe de largeur arborescente fini qui est définissable à isomorphisme près par une formule de la logique monadique du second ordre est HR-équationnel (cf. [Cou90b]). D'autre part, nous utiliserons aussi les concepts de groupes context-free, de groupes automatiques et de groupes hyperboliques au sens de Gromov, ainsi que le résultat de [Sén92] selon lequel tout graphe déterministe automatique de largeur arborescente fini est HR-équationnel.

Graphes Automatiques

La dernière partie de ce mémoire traite des structures automatiques. Fort des résultats algorithmiques obtenus pour ce qui concerne les complexes simpliciaux HR-équationnels, il est naturel d'explorer les propriétés algorithmiques de complexes simpliciaux infinis décrits par des méthodes constructives plus générales. C'est dans cet esprit que nous avons abordé l'étude des *graphes automatiques* [BG00, CS, KN95, Pel97, Sén92].

Le principe des structures automatiques [KN95] consiste à considérer des structures relationnelles dont les domaines sont donnés sous forme de langages rationnels et dont les relations sont décrites par des automates. De fait, de multiples variations peuvent être envisagées, comme par exemple, les structures automatiques basées sur des langages d'arbres (voir [BG00]). La définition des relations laisse une grande liberté; on peut considérer de façon très générale des relations rationnelles, des transducteurs équilibrés (cf. [Sén92]), ou encore des automates lettres à lettres comme dans le cas des groupes automatiques.

Les graphes déterministes automatiques sont définissables à isomorphisme près par des formules de la logique monadique faible du second ordre (cf. [Sén92]). Ce résultat indique la façon dont les graphes automatiques s'insèrent dans la faune des graphes infinis: il montre en effet que les graphes déterministes automatiques de largeur arborescente fini sont exactement les graphes context-free au sens de [MS83, MS85] et donc, les graphes déterministes HR-équationnels. Cela étant, un graphe automatique n'est généralement pas de largeur arborescente finie. Ainsi, ce concept apparaît comme une généralisation forte de celui d'HR-équationnalité.

Comme nous l'avons vu dans le cas des surfaces, le concept de bout est essentiel pour l'investigation du problème de l'homéomorphisme. De fait, il constitue un critère classique pour comprendre le comportement d'un graphe à l'infini. Il apparaît donc raisonnable de chercher une méthode constructive d'appréhender l'espace des bouts. Nous avons vu précédemment que l'espace des bouts d'une surface HR-équationnelle peut être codé par un langage rationnel; la situation dans le cas des graphes automatiques est beaucoup moins favorable: la question de savoir si un graphe automatique possède un et un seul bout est indécidable. La démonstration de ce résultat s'appuie sur deux notions: d'une part le graphe des configurations d'une machine de Turing, qui code l'ensemble des calculs d'une machine donnée, c'est un graphe infini automatique, et d'autre part les machines de Turing auto-stabilisantes qui, lors de leurs fonctionnements, contrôlent elles-même la validité de leurs calculs. La preuve du résultat cité ci-dessus résulte alors de l'analyse de propriétés géométriques globales du graphe des configurations d'une machine de Turing autostabilisante¹⁵.

Ce résultat s'applique à deux autres domaines: la théorie combinatoire des groupes et la théorie des transformations de graphes.

D'une part, en vertu du théorème de Stallings [Sta68] (cf. aussi [DD89]), le calcul effectif du nombre de bouts intervient dans la recherche d'algorithmes pour décomposer les groupes finiment présentés en produits amalgamés ou en HNN-extensions sur des groupes finis. Les groupes automatiques, contiennent les groupe hyperboliques au sens de Gromov (cf. [Gro87, CDP90, GdlH90]), et ces derniers contiennent les groupes context-free au sens de [MS83, MS85]. Le Théorème de Stallings a été rendu effectif pour le cas des groupes context-free

15. voir chapitre 4

(cf. [Sén93, Sén96]¹⁶); on montre que cet algorithme peut être étendu au cas des groupes hyperboliques au sens de Gromov; en effet, le nombre de bouts d'un tel groupe est calculable (cf. [Ger99]). Par ailleurs, un logiciel a été développé pour calculer le nombre de bouts d'un groupe automatique (cf. [CB, Hol]); cependant, il n'est pas prouvé qu'il s'arrête dans le cas d'un groupe ne possédant qu'un seul bout; et identifier de façon algorithmique les groupes ne possédant qu'un seul bout demeure une question ouverte. De fait, le résultat cité plus haut montre que s'il l'on abandonne l'hypothèse de la structure de groupe, cette tâche est impossible.

D'autre part, ce résultat possède une interprétation significative en théorie des transformations de graphes. Nous établirons un lien entre les structures automatiques et les systèmes de substitution de graphes, i.e. les *DOL-systèmes*: toute suite de graphes finis produite en itérant un *DOL*-système est exactement la suite des sphères d'un graphe automatique; la réciproque est vraie pour une large classe de graphes automatiques que nous définirons par la suite. Il apparaît alors que l'indécidabilité du problème des bouts d'un graphe automatique est équivalente à l'indécidabilité de la question de savoir si tous les graphes d'une *DOL*-suite sont connexes ou non. Ce résultat contribue à identifier la frontière de décidabilité du problème de connexité en question puisque les *DOL*-systèmes de graphes, tels que nous les avons définis, émulent les grammaires de remplacement de sommets (cf. [ER97, CER93, CE95]), pour lesquelles le problème de la connexité est décidable.

16. voir aussi [MS83, MS85, FSS89] pour une étude algorithmique des groupes context-free

Chapitre 1

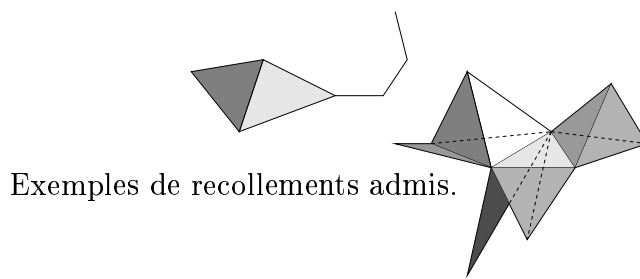
Concepts de base

Ce chapitre est consacré à l'introduction aux concepts de base. D'abord, nous donnerons une définition des complexes simpliciaux. Ensuite, nous définirons les grammaires de remplacement d'hyperarcs ainsi que les hypergraphes HR-équationnels; nous discuterons à ce propos de l'idée de régularité arborescente. Enfin, nous introduirons le concept de polyèdre HR-équationnel, essentiel dans notre travail. Pour finir, nous définirons le concept de variété; à cet égard, nous aborderons quelques questions algorithmiques préliminaires.

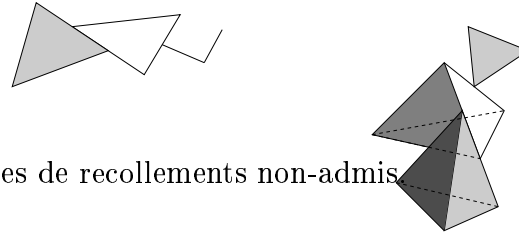
1.1 Polyèdres HR-équationnels

1.1.1 Complexes simpliciaux, polyèdres et hypergraphes

Le concept de *complexe simplicial* [FM97, HY61, Mas67, Rot88, RS72] consiste à fabriquer des espaces topologiques appelés *polyèdres* en recollant entre eux des segments, des triangles, des tétraèdres et plus généralement des *simplexes*, i.e. enveloppes convexes d'ensembles finis de points indépendants dans un espace affine (cf. [Ber90]). Le recollement de deux simplexes entre eux se fait, comme le dicte l'intuition, en identifiant deux de leurs faces. Ce que l'on appelle ici *face* d'un simplexe généralise le concept commun : c'est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble non vide de ses sommets. Par exemple, on peut recoller deux tétraèdres en identifiant deux de leurs faces triangulaires; mais on peut aussi les recoller simplement sur des arêtes ou même sur des sommets. Ces recollements de simplexes se font selon l'idée la plus simple et les cas pathologiques (cf. figure 1.1) ne sont pas considérés, de même qu'on ne recollera pas un simplexe sur lui-même. Notons que ce concept de recollement est purement topologique et ne tient pas compte des propriétés métriques des simplexes : on considère en effet que deux simplexes ayant le même nombre de sommets sont des objets équivalents. Un complexe simplicial est la donnée d'un polyèdre muni d'une décomposition en simplexes. Une telle décomposition est appelée une *triangularisation*. La structure combinatoire sous-jacente est un *hypergraphe non orienté*, i.e. un couple (V, E) où V est un ensemble de sommets et E est un ensemble de parties finies de V , les éléments de E sont appelés les *hyperarêtes* [Ber73, Ber83, Ber87]. L'ensemble des sommets de cet hypergraphe non orienté est l'union des ensembles de sommets de tous les simplexes du complexe simplicial en question quotientée par la relation d'équivalence induite par les identifications de faces. Chaque simplexe est codé



Exemples de recollements admis.



Exemples de recollements non-admis.

FIG. 1.1: *polyèdres*

par une hyperarête qui est simplement l'ensemble des classes d'équivalence de ses sommets.

Définition 1 (Complexes simpliciaux)

Formellement, un **complexe simplicial** est un 3-uplet $(K, H, \{\varphi_e\}_{e \in E})$ où

- K est un espace topologique;
- $H = (V, E)$ est un hypergraphe non-orienté; V est l'ensemble des sommets de H et E son ensemble d'hyperarêtes; les hyperarêtes satisfont la propriété d'hérédité suivante : toute partie non-vide d'une hyperarête de H est aussi une hyperarête de H ;
- pour tout $e \in E$, $\varphi_e : \sigma_e \rightarrow K$ est un plongement, i.e. une application continue qui est un homéomorphisme entre son domaine et son image, où σ_e est un simplexe dont le nombre de sommets est égal au nombre d'éléments de e tel que pour toute paire d'hyperarêtes e_1, e_2 de E , $\varphi_{e_1}(\sigma_{e_1}) \cap \varphi_{e_2}(\sigma_{e_2})$ est égale à $\varphi_{e_1 \cap e_2}(\sigma_{e_1 \cap e_2})$ si $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ et à l'ensemble vide sinon; et pour $i = 1, 2$, $\varphi_{e_i}^{-1} \circ \varphi_{e_1 \cap e_2}$ est un homéomorphisme entre $\sigma_{e_i \cap e_2}$ et une face de σ_i ;
- $K = \bigcup_{e \in E} \varphi_e(\sigma_e)$.

Un **polyèdre** est un espace topologique pour lequel il existe un complexe simplicial dont il est la première composante, un tel complexe simplicial est appelé une **triangularisation** du polyèdre en question. Une application continue d'un polyèdre triangularisé¹ sur un autre polyèdre triangularisé sera dite **simpliciale** si l'image de tout simplexe est un simplexe de même dimension.

1. i.e. un polyèdre muni d'une triangularisation

La donnée d'un hypergraphe définit de façon naturelle un complexe simplicial, et donc un polyèdre. En effet, soit $H = (V, E)$, un hypergraphe dont l'ensemble des hyperarêtes satisfait la condition d'hérédité énoncée précédemment. D'abord, à chaque hyperarête $e \in E$, on associe un simplexe σ_e dont toutes les arêtes sont de longueur 1, i.e. un simplexe équilatéral de côté 1, muni d'une bijection τ_e entre les sommets de σ_e et les éléments de e ; on choisit les σ_e deux à deux disjoints. On définit ensuite le recollement de tous ces simplexes : pour ce faire, on considère pour toute face f de tout simplexe σ_e l'isométrie unique $\psi_f : f \rightarrow \sigma_{e'}$ telle que pour tout sommet x de f , $\psi_f(x) = \tau_{e'}^{-1} \circ \tau_e(x)$, où e' est l'hyperarête incluse dans e qui est définie par les sommets de f via τ_e , i.e. $e' = \{\tau_e(x) \mid x \text{ sommet de } f\}$. La famille $\{\psi_f\}$ définit alors une relation d'équivalence sur $\bigcup_{e \in E} \sigma_e$ engendrée par clôture symétrique et transitive par l'ensemble des couples de la forme $(x, \psi_f(x))$. Le quotient de $\bigcup_{e \in E} \sigma_e$ par cette relation d'équivalence est par définition le polyèdre associé à H . On peut vérifier que cette construction définit un complexe simplicial. Le polyèdre associé, que l'on notera $|H|$, dépend du choix des σ_e ; néanmoins, on montre que sa classe d'homéomorphisme en est indépendante².

Une autre façon de construire un polyèdre associé à H , homéomorphe au précédent, consiste en la méthode suivante : Soit $\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles de carré sommable; soit $(b_n)_{n \geq 0}$ sa base hilbertienne canonique ($b_n = (\delta_{n,k})_{k \geq 0}$). On se donne une injection τ de V dans $\{b_n \mid n \geq 0\}$. Pour chaque hyperarête e de H , on considère σ_e , l'ensemble de tous les barycentres à coefficients positifs de $\{\tau(v) \mid v \in e\}$. K est alors défini comme l'union de tous les σ_e .

Un polyèdre est ainsi une représentation topologique d'un hypergraphe non orienté. Notons que pour les complexes simpliciaux de dimension 1, on n'assemble que des sommets et des segments. De tels objets sont codés par des hypergraphes dont les hyperarêtes, à la condition d'hérédité près, sont simplement des paires de sommets; ce sont en fait des graphes non-orientés. Ainsi les représentations graphiques usuelles des graphes non-orientés n'évoquent rien d'autre que les polyèdres associés.

1.1.2 Hypergraphes HR-équationnels

L'objet de ce mémoire est l'étude de propriétés algorithmiques de certains polyèdres infinis constructifs. Nous nous attacherons particulièrement à étudier des polyèdres donnés par des triangularisations générées par des grammaires de graphes. Pour ce faire, nous avons besoin d'une structure d'hypergraphe plus riche que celle d'hypergraphe non orienté, ceci en vue de définir avec rigueur une généralisation aux hypergraphes de l'opération de concaténation de mots.

Suivant [Cou90b, Roz97], nous appellerons donc *hypergraphe*, ce qui en toute rigueur pourrait s'appeler *multi-hypergraphe orienté*, un 6-uplet $(V, E, A, \text{vert}, \text{lab}, \text{src})$ où V est l'ensemble au plus dénombrable des sommets; E est l'ensemble des *hyperarcs*; la relation d'adjacence est codée par l'application $\text{vert} : E \rightarrow V^*$ qui associe à chaque hyperarc une liste ordonnée de sommets; la longueur de cette liste est appelée l'*arité* de l'hyperarc; les hyperarcs sont étiquetés par des éléments de A qui est un ensemble de symboles; les étiquettes sont définies

2. Plus précisément, $|H|$ n'est défini qu'à homéomorphisme simplicial près

par l'application $lab : V \cup E \rightarrow A$; on distingue dans chaque hypergraphe une liste de sommets $src \in V^*$ dont les éléments sont appelés les *sources*. Un sommet n'apparaissant pas dans cette liste est dit *interne*. Le nombre de sources d'un hypergraphe est appelé son *type*. Notons qu'un hypergraphe $H = (V, E, A, vert, lab, src)$ définit trivialement un hypergraphe non orienté dont l'ensemble des sommets est V et l'ensemble des hyperarêtes est défini par $vert$; il définit donc aussi un complexe simplicial.

Un *système déterministe de remplacement d'hyperarc* est un ensemble $\{H_b\}_{b \in B}$ d'hypergraphes finis indicés sur un ensemble fini de symboles B . Un tel système définit une transformation d'hypergraphe consistant à remplacer chaque hyperarc étiqueté par un élément b de B par l'hypergraphe correspondant H_b . Les sources de H_b sont alors recollées une à une sur les sommets de l'hyperarc en question en respectant les ordres définis par src et $vert$. Une telle transformation n'est possible que sur un hypergraphe étiqueté sur un ensemble A contenant B tel que pour chacun de ses hyperarcs e dont l'étiquette est un élément b de B , l'arité de e est égale au type de H_b , et pour tout i , son i -ième sommet possède la même étiquette que la i -ième source de H_b . Les symboles de B sont dit *non terminaux*, ceux de $A \setminus B$ sont dit *terminaux*. On appelle *grammaire déterministe de remplacement d'hyperarcs* un couple (b_0, θ) où $\theta = \{H_b\}_{b \in B}$ est un système déterministe de remplacement d'hyperarc et b_0 est un élément de B appelé *symbole initial*.

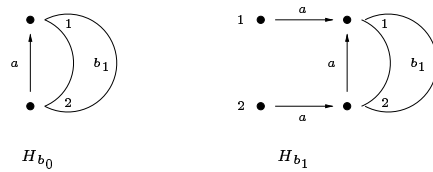


FIG. 1.2: On donne ici un exemple de système déterministe de remplacement d'hyperarc formé de deux hypergraphes H_{b_0} et H_{b_1} . L'ensemble de symboles d'étiquettes est $\{a, b_0, b_1\}$; les symboles non terminaux sont b_0 et b_1 . Les hyperarcs terminaux (i.e. étiquetés par a) sont d'arité 2 et sont représentés par des flèches. Les hyperarcs non terminaux sont représentés sous forme de croissants de lune. H_{b_1} comporte deux sources (les sommets numérotés de 1 à 2), H_{b_0} n'en a pas.

Cette notion offre un moyen simple de génération d'hypergraphes infinis par récurrence. Les itérations successives de la transformation d'hypergraphe associée à une grammaire produisent une suite d'hypergraphes finis "emboîtés". On définit les hypergraphes *HR-équationnels* comme limites inductives de telles suites.

Définition 2 (Hypergraphes HR-équationnels) Un *hypergraphe HR-équationnel* G est défini au moyen d'une grammaire déterministe de remplacement d'hyperarc (b_0, θ) . On suppose que la transformation associée à $\theta = \{H_b\}_{b \in B}$ est définie sur chaque H_b , i.e. pour tout $b \in B$, tout hyperarc e de H_b , étiqueté par un symbole non-terminal b' , est d'arité égale au type de $H_{b'}$ et pour tout i , son i -ième sommet possède la même étiquette que la i -ième source de $H_{b'}$. On suppose aussi que les sources de chaque H_b sont deux à deux distinctes. G est alors défini de la façon suivante: soit $(G_n)_{n \geq 0}$ la suite d'hypergraphes définie par récurrence par $G_0 = H_{b_0}$ et pour tout $n \geq 0$, $G_{n+1} = \theta(G_n)$ (pour un exemple, voir figure 1.3). Pour tout $n \geq$

0, on considère l'hypergraphe \tilde{G}_n obtenu à partir de G_n en supprimant les hyperarcs étiquetés sur B , i.e. les hyperarcs non-terminaux. Pour tout $n \geq 0$, \tilde{G}_n se plonge canoniquement dans \tilde{G}_{n+1} (pour un exemple, voir figure 1.4), soit $i_n : \tilde{G}_n \rightarrow \tilde{G}_{n+1}$ le plongement. $\bigcup i_n$ induit alors une relation d'équivalence sur $\bigcup_{n \geq 0} V_{\tilde{G}_n} \cup E_{\tilde{G}_n}$ dont l'hypergraphe quotient est par définition G .

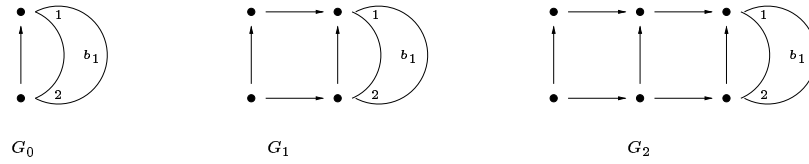


FIG. 1.3: On montre ici les deux premières itérations de la transformation associée au système présenté en figure 1.2. G_0 est en fait H_{b_0} (cf. définition 2); G_1 (respectivement G_2) est obtenu à partir de G_0 (respectivement G_1) en recollant H_{b_1} à la place de l'hyperarc non terminal étiqueté par b_1 . Pour alléger la figure, le symbole a n'est pas représenté.

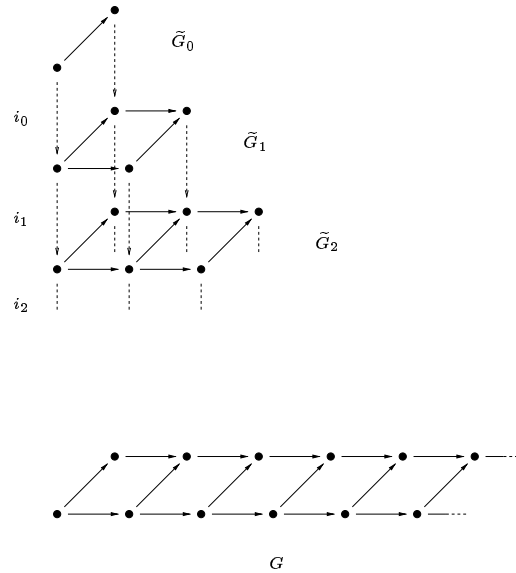


FIG. 1.4: Construction de l'hypergraphe HR-équationnel défini par le couple $(b_0, \{H_{b_0}, H_{b_1}\})$ où H_{b_0}, H_{b_1} sont représentés en figure 1.2. On obtient une échelle infinie.

1.1.3 Arborescence et régularité

La notion d'hypergraphe HR-équationnel donne naissance à un concept de *régularité* dans la classe des *hypergraphes arborescents*.

Afin de préciser cette idée, nous avons besoin des notions de *décomposition* et de *largeur arborescente* introduites dans [RS84] (voir aussi [Cou90b]). Une décomposition arborescente d'un hypergraphe G est un couple (U, f) formé d'un arbre non orienté U et d'une application $f : V_U \rightarrow 2^{V_G}$ tel que tout sommet de G appartient à l'image d'un des nœuds de U , i.e. $V_G = \bigcup_{i \in V_U} f(i)$, 2^{V_G} désigne l'ensemble des parties de V_G ; tout hyperarc de G a tous ses sommets dans un $f(i)$ pour au moins un $i \in V_U$; si $i, j, k \in V_U$ sont tels que j est sur le chemin sans boucle unique connectant i et k , alors $f(i) \cap f(k) \subseteq f(j)$; enfin, toutes les sources de G appartiennent à un $f(i)$ pour au moins un $i \in V_U$. La *largeur* d'une telle décomposition est par définition égale à $\max\{\text{card}(f(i)) \mid i \in V_U\} - 1$; la *largeur arborescente* d'un hypergraphe G est la largeur minimale d'une décomposition arborescente de G . On dira d'un hypergraphe infini qu'il est *arborescent* si sa largeur arborescente est finie. Les arbres sont arborescents, leur largeur arborescente est de 1; la grille infinie par contre, est de largeur arborescente infinie (cf. [RS84]).

Les hypergraphes HR-équationnels sont arborescents. Pour le voir, nous allons développer une construction directe de ces hypergraphes empruntée à [Cou90b]. Soit G un hypergraphe HR-équationnel défini par une grammaire (b_0, θ) où $b_0 \in B$ et $\theta = \{H_b\}_{b \in B}$. Pour tout $b \in B$, soit m_b le nombre d'hyperarcs non terminaux de H_b . Soit m le maximum des m_b . Dans chaque H_b , on ordonne linéairement l'ensemble des hyperarcs non terminaux. Soit maintenant, pour tout $b \in B$, l'arbre T_b étiqueté sur B défini de façon inductive par les propriétés suivantes: la racine de T_b est étiquetée par b ; un nœud de T_b étiqueté par $b' \in B$ possède $m_{b'}$ fils et pour $j = 1, \dots, m_{b'}$ son j -ième fils est étiqueté par le même symbole de B que le j -ième hyperarc non terminal de $H_{b'}$. T_b est appelé l'*arbre syntactique* de symbole b associé à θ (cf. figure 1.8). On obtient G à partir de T_{b_0} de la façon suivante: on associe à chaque nœud μ de T_{b_0} une copie \tilde{H}_μ de \tilde{H}_{b_μ} où b_μ est le symbole d'étiquette de μ et \tilde{H}_{b_μ} désigne l'hypergraphe obtenu à partir de H_{b_μ} après avoir supprimé tout ses hyperarcs non terminaux. La construction de G se fait alors en recollant les \tilde{H}_{b_μ} entre eux le long des arêtes de T_{b_0} . Si par exemple, μ' est le j -ième fils de μ , $\tilde{H}_{\mu'}$ est recollé sur \tilde{H}_μ à la place du j -ième hyperarc non terminal. On obtient finalement une décomposition arborescente (T_{b_0}, f) en définissant pour tout nœud μ de T_{b_0} : $f(\mu) = V_{\tilde{H}_\mu}$. Cette décomposition est de largeur finie.

Par la suite, nous utiliserons aussi une notion plus forte que l'arborescence, basée sur le concept de *décomposition fortement arborescente*. Une décomposition arborescente (U, f) sera dite *fortement arborescente* si l'image par f de tout nœud de U engendre un sous-graphe connexe. On vérifie que la notion de forte arborescence est strictement plus forte que celle d'arborescence. Néanmoins, on montre que tout hypergraphe HR-équationnel est fortement arborescent. Par ailleurs, cette notion possède une interprétation géométrique: Un graphe connexe est fortement arborescent si et seulement si il est quasi-isométrique à un arbre³.

3. On appelle *quasi-isométrie* une application $\varphi : X \rightarrow Y$ d'un espace métrique dans un autre telle qu'il existe deux réels λ et c tels que pour tout $x, x' \in X$: $\frac{1}{\lambda}d(x, x') - c < d(\varphi(x), \varphi(x')) < \lambda d(x, x') + c$; une telle application est dite *quasi-surjective* si pour tout point y de Y il existe un point x de X tel que $d(\varphi(x), y) < c$; dans ce cas, X et Y sont dits *quasi-isométriques* (pour plus de détails, cf. [GdlH90, Gro87, CDP90]).

La régularité annoncée plus haut provient du fait que l'arbre syntactique T_{b_0} est un *arbre régulier* [Cou83, Tho90] en ce sens qu'il ne possède qu'un nombre fini de sous-arbres à isomorphisme près : les T_b pour $b \in B$ (cf. figure 1.8). Un arbre régulier est un objet *a priori* infini. Mais il est cependant décrit par une donnée finie : un *multi-graphe orienté pointé* fini, i.e. un hypergraphe fini de type 1 dont les hyperarcs sont tous d'arité 2; l'unique source d'un tel hypergraphe est souvent appelée sa *racine*. Le codage se fait de la façon suivante : soit t un arbre étiqueté régulier. Notons que t est nécessairement de degré borné; l'ordre défini entre les fils d'un nœud donné est décrit par un étiquetage des arcs de t . On considère le multi-graphe orienté pointé Γ dont les sommets sont les classes d'isomorphisme des sous-arbres de t , l'étiquette d'un sommet est celle de la racine du sous-arbre qui lui est associé; la racine de Γ est la classe d'isomorphisme de t lui-même; enfin, pour chaque classe de sous-arbre $[t']$ et pour chaque fils x de la racine de t' , on définit un arc dans Γ qui connecte $[t']$ à $[t_x]$, où t_x désigne le sous-arbre de t' de racine x ; on affecte cet arc de la même étiquette que celle l'arc connectant la racine de t' à x . Réciproquement, étant donné un multi-graphe orienté pointé fini Γ de racine v_0 dont les sommets sont étiquetés, on considère l'arbre régulier t dont les nœuds sont les chemins dans Γ d'origine v_0 . L'étiquette d'un tel chemin sera définie comme étant celle de son dernier sommet. Un chemin α sera le père d'un chemin α' si et seulement si α est préfixe de α' et leurs longueurs diffèrent de 1; l'étiquette de l'arc connectant α à α' est celle du dernier arc emprunté par α' . On vérifie facilement que t est régulier; t est appelé le *développement* de Γ . Le concept de multi-graphe orienté pointé fini allié à l'usage que nous en faisons est très proche de celui d'automate à nombre fini d'états. Néanmoins, la notion d'état final n'est pas présente ici; de plus, nous considérerons dans la suite des arbres réguliers dont seulement les sommets sont étiquetés.

Notons que le concept de développement de graphe ou d'automate se rapproche de celui de revêtement de graphe. Soit Γ un graphe connexe, par *revêtement* de Γ nous entendons un couple $(\tilde{\Gamma}, p)$ où $\tilde{\Gamma}$ est un graphe connexe et $p : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ est un homomorphisme surjectif tel que pour tout couple $(\tilde{v}, v) \in V_{\tilde{\Gamma}} \times V_{\Gamma}$ avec $p(\tilde{v}) = v$, le sous-graphe de $\tilde{\Gamma}$ formé du sommet \tilde{v} et des arcs qui le contiennent s'applique isomorphiquement par p sur le sous-graphe de Γ formé du sommet v et des arcs qui le contiennent⁴. Un revêtement $(\tilde{\Gamma}, p)$ sera dit *universel* si tout revêtement de $\tilde{\Gamma}$ lui est isomorphe. On montre que le revêtement universel d'un graphe fini est un graphe orienté connexe sans cycles qui est *fortement régulier* en ce sens que l'action de son groupe d'automorphisme sur l'ensemble de ses sommets possède un nombre fini d'orbites; à peu de choses près, on peut dire que c'est un arbre régulier. La réciproque est fautive; cependant, on montre que le concept de développement d'un multi-graphe fini pointé coïncide avec celui de revêtement universel si l'on affaiblit la définition des revêtements comme suit : nous appellerons *revêtement sortant* d'un graphe connexe Γ tout couple $(\tilde{\Gamma}, p)$ où $\tilde{\Gamma}$ est un graphe connexe et $p : \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ est un homomorphisme surjectif tel que pour tout couple $(\tilde{v}, v) \in V_{\tilde{\Gamma}} \times V_{\Gamma}$ avec $p(\tilde{v}) = v$, le sous-graphe de $\tilde{\Gamma}$ formé du sommet \tilde{v} et de ses arcs sortants, i.e. les arcs dont il est l'origine, s'applique isomorphiquement par p sur le sous-graphe de Γ formé du sommet v et de ses arcs sortants; cette notion est étudiée dans [Sak99].

4. Cette définition diffère légèrement de celle des 1-revêtements qui est usuelle en théorie des graphes.

Cette régularité confère aux hypergraphes HR-équationnels des propriétés algorithmiques importantes. Pour donner à cette remarque un sens plus précis, il nous est nécessaire d'introduire le langage de la logique monadique du second ordre (pour une définition rigoureuse, voir page 97, ou bien [Gur85, Tho, Cou90a, Cou97]; pour une initiation à la logique en informatique théorique, voir [LdR96]). Il s'agit des formules logiques ayant trait aux hypergraphes dont les quantifications ne se font que sur des ensembles de sommets ou d'hyperarcs. Ces formules utilisent des variables, qui prennent pour valeurs des ensembles de sommets ou d'hyperarcs; elles sont construites, à l'aide des connecteurs logiques habituels, à partir de formules élémentaires exprimant l'adjacence et les étiquettes. Un résultat fondamental de [Cou89], qui généralise [MS83, MS85], est que l'on peut décider de façon effective si un hypergraphe HR-équationnel donné satisfait une propriété exprimée par une formule donnée de la logique monadique du second ordre. Notons que ce résultat tire ses racines dans [Rab69] où le concept de régularité évoqué plus haut est utilisé pour démontrer la décidabilité de la logique monadique du second ordre des arbres. Les conséquences en matière de décidabilité sont importantes. La connexité par exemple, est exprimable en logique monadique du second ordre (cf. [Cou89] ou bien chapitre 3); il existe donc un algorithme pour décider si un hypergraphe HR-équationnel est connexe. Cette méthode conduit aussi à une solution algorithmique au problème de l'isomorphisme des hypergraphes HR-équationnels [Cou90b]. En effet, la classe d'isomorphisme d'un hypergraphe HR-équationnel est caractérisée par une formule monadique du second ordre que l'on peut construire de façon effective. Ainsi, on peut décider si deux hypergraphes HR-équationnels sont isomorphes en testant si l'un satisfait la formule caractérisant l'autre à isomorphisme près. Ce résultat est essentiel pour nous : restreint au cas des graphes, il montre que le problème de l'homéomorphisme des complexes simpliciaux HR-équationnels de dimension 1 est décidable.

1.1.4 Polyèdres HR-équationnels

Définition 3 (Polyèdres HR-equationnels)

On dira d'un complexe simplicial qu'il est HR-équationnel si son hypergraphe est HR-équationnel. De même, un polyèdre sera dit HR-équationnel s'il possède une triangularisation HR-équationnelle.

Comme tout hypergraphe fini est HR-équationnel [Cou89], on a immédiatement le résultat suivant :

Proposition 1.1.1 (Complexe simpliciaux finis)

Tout complexe simplicial fini est HR-équationnel. En particulier, toute variété topologique compacte de dimension inférieure ou égale à 3 possède une triangularisation HR-équationnelle.

Exemple 1.1.1 (La Sphère à cornes)

La surface non compacte sous-jacente à la célèbre "Sphère à corne" (cf. [HY61]) est une sphère privée d'un ensemble de Cantor. Elle possède une triangularisation HR-équationnelle.

Cette surface, non compacte, peut être en effet représentée comme la surface d'un arbre binaire infini complet légèrement épaissi. Ce point de vue permet de mettre en évidence une décomposition régulière en paires de pantalons (cf. figure 1.5). Cette décomposition conduit à la génération d'une triangularisation par une grammaire de remplacement d'hyperarcs.

Une paire de pantalons peut être obtenue comme recollement de triangles, i.e. un complexe simplicial de dimension 2 (cf. figure 1.6). Et cette triangularisation est elle-même codée par un hypergraphe. On obtient donc une triangularisation de la sphère privée d'un ensemble de Cantor en recollant une infinité de copies de cet hypergraphe. C'est la régularité de ce recollement qui lui permet d'être codé par une grammaire de remplacement d'hyperarcs présentée dans les figures 1.7 et 1.9.

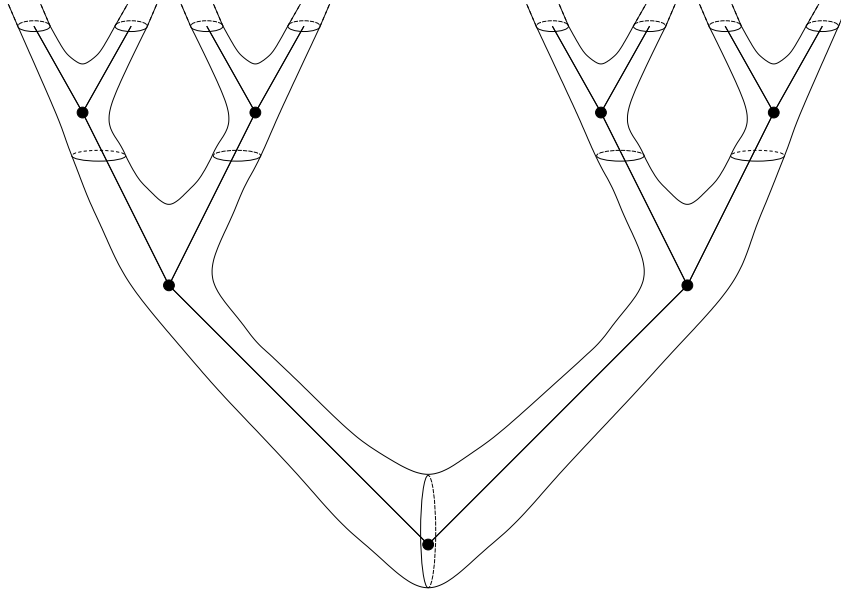


FIG. 1.5: *La sphère privée d'un ensemble de Cantor peut être représentée comme la surface d'un arbre binaire infini complet légèrement épaissi.*

1.2 Variétés

Le travail exposé dans ce mémoire concerne essentiellement le cas des *variétés topologiques* [BG87, Mas67, Rot88, Thu97]. Ce sont des polyèdres connexes “localement simples”, en ceci que chacun de leurs points possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n , pour un entier naturel n fixé appelé la *dimension* de la variété. Nous étudierons également le cas des variétés *à bord*, i.e. les polyèdres dont chaque point possède un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^n ou bien à un demi-espace fermé $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$. Les variétés de dimension 2 sont des objets familiers: ce sont les surfaces; le plan, la sphère ou encore le tore en sont des exemples classiques. Ils se généralisent en dimension n quelconque en considérant respectivement l'espace \mathbb{R}^n , la n -sphère $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$ et le tore de dimension n que l'on peut définir comme le produit cartésien de n cercles $S^1 \times \dots \times S^1$. Notons que les exemples 1.1.1 et 1.2.1 décrivent respectivement des variétés non compactes de dimension 2 et 3.

Tous les exemples évoqués ci-dessus sont des polyèdres HR-équationnels; la n -sphère et le tore de dimension n sont HR-équationnels, comme d'ailleurs toutes les variétés compactes

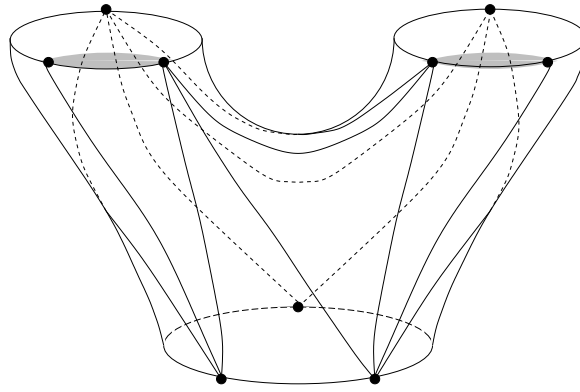


FIG. 1.6: *Triangularisation d'une paire de pantalons : on obtient une paire de pantalons (i.e. une sphère privée de trois disques ouverts disjoints) en recollant entre eux 11 triangles.*

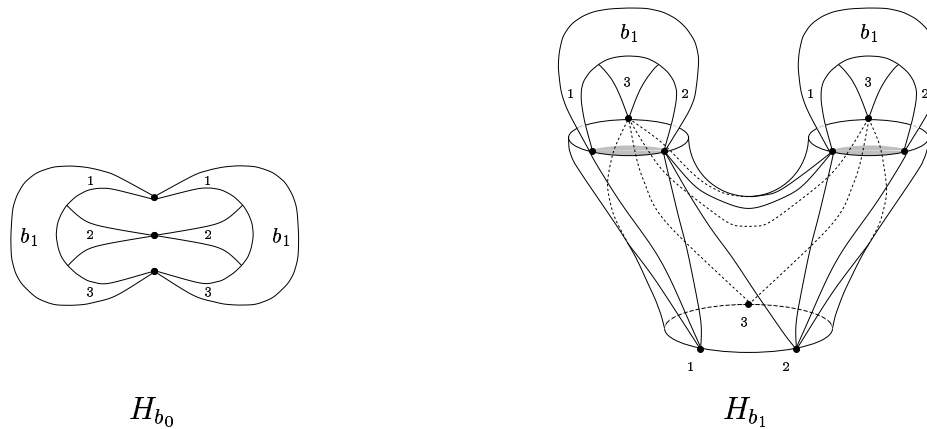


FIG. 1.7: *La grammaire présentée ici permet de générer une triangulation de la sphère privée d'un ensemble de Cantor. Le système associé est formé de deux hypergraphes H_{b_0} et H_{b_1} . H_{b_0} comporte trois sommets et deux hyperarcs terminaux d'arité 3. Les hyperarcs de H_{b_1} , qui sont d'arité 3, forment la triangulation d'une paire de pantalons (cf. figure 1.6). Les symboles non terminaux n'apparaissent pas dans la figure. On peut vérifier que l'hypergraphe HR-équationnel défini par $(b_0, \{H_{b_0}, H_{b_1}\})$ code une triangulation de la sphère privée d'un ensemble de Cantor.*

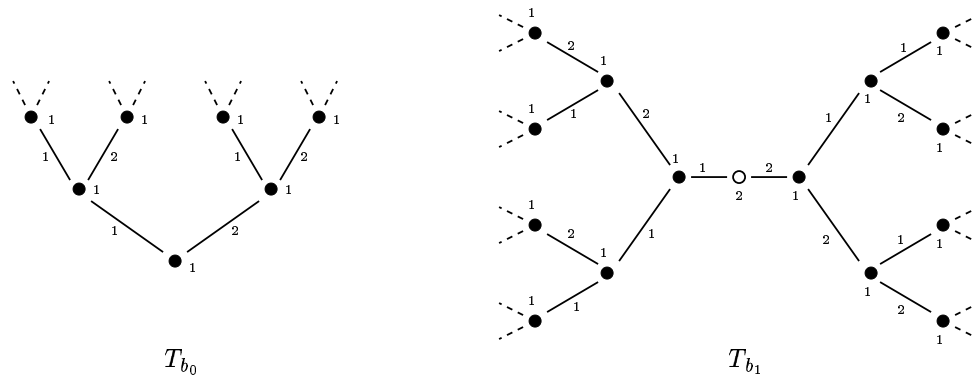


FIG. 1.8: Arbres syntactiques associés à la grammaire présentée dans la figure 1.7.

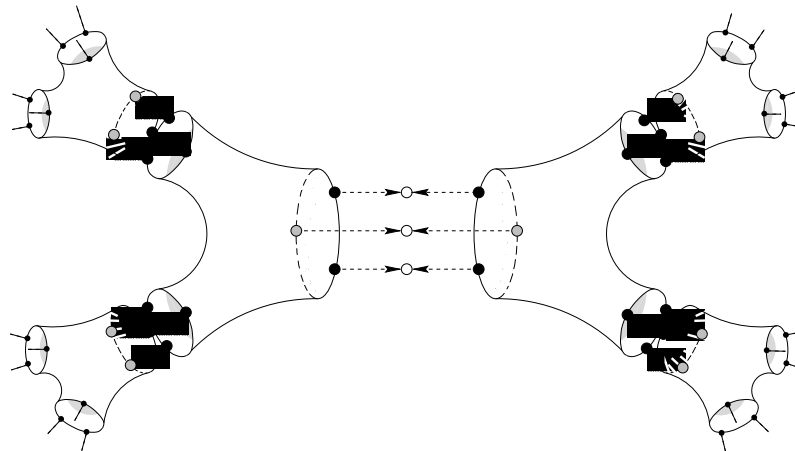


FIG. 1.9: Génération de la triangulation de la sphère privée d'un ensemble de Cantor par le système présenté dans la figure 1.7.

en dimension inférieure ou égale à 3 (voir note de bas de page n° 6 page 3). En effet, une variété compacte peut être triangularisée par un complexe simplicial fini [Thu97] qui, par la proposition 1.1.1 est HR-équationnel. L'espace \mathbb{R}^n quant à lui, peut être découpé en une infinité de couches sphériques épaisses $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n \geq 0} \{x \in \mathbb{R}^n \mid n \leq \|x\|_2 \leq n+1\}$. Exceptée la première qui n'est autre que la boule B^3 de \mathbb{R}^n , chacune de ces couches est homéomorphe à $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq \|x\|_2 \leq 2\}$. C'est une variété à bord que l'on peut triangulariser par un complexe simplicial fini. Ainsi, on obtient une triangularisation de l'espace \mathbb{R}^n en recollant linéairement une infinité de complexes simpliciaux isomorphes. Ce recollement peut être codé par une grammaire de remplacement d'hyperarcs.

Exemple 1.2.1 (Variété de Whitehead Wh_3 [Whi35, McM62])

Considérons M la variété de dimension 3 à bord présenté en figure 1.10. Son bord est constitué de deux tores de dimension 2; l'un forme la surface extérieure, on le note T_1 ; l'autre est creusé dans la matière à l'intérieur, notons le T_2 . T_1 et T_2 sont des surfaces compactes homéomorphes, soit $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ un homéomorphisme.

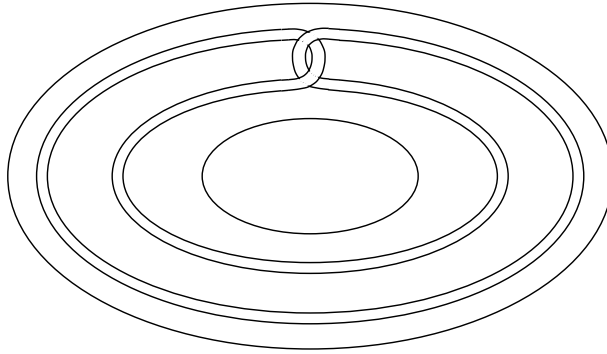


FIG. 1.10: M est obtenue à partir d'un tore plein en creusant à l'intérieur un tunnel en forme de tore noué.

Soient $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ une infinité de copies deux à deux disjointes de M et M_0 un tore plein. Soient T_1^n, T_2^n les deux composantes du bord de M_n , et T_1^0 la surface extérieure de M_0 . T_1^0 et T_2^1 sont homéomorphes, ce sont des tores. Soit $\varphi_0 : T_1^0 \rightarrow T_2^1$ un homéomorphisme. Pour tout $n \geq 1$, φ définit un homéomorphisme $\varphi_n : T_1^n \rightarrow T_2^{n+1}$; cet homéomorphisme induit une relation d'équivalence entre T_1^n et T_2^{n+1} qui peut être vue comme une façon de recoller M_n à l'intérieur de M_{n+1} . L'idée consiste alors à recoller M_0 à l'intérieur de M_1 suivant φ_0 , puis M_1 à l'intérieur de M_2 , etc. La réunion de tous les M_n quotientée par la réunion de toutes les relations d'équivalence définies par les φ_n est la *variété de Whitehead* Wh_3 .

De même que dans l'exemple précédent, la régularité de ce procédé de recollement autorise la construction d'une triangularisation de Wh_3 par remplacement d'hyperarc. On commence par triangulariser M , i.e. la décomposer en tétraèdres. Cette décomposition induit une décomposition de T_1 et de T_2 en triangles. Quitte à subdiviser certains tétraèdres, on peut supposer que les triangularisations de T_1 et T_2 sont isomorphes, et que φ est simpliciale. Cette décomposition de M en tétraèdres donne lieu à un hypergraphe H ; les sources de H

sont définies comme étant les sommets de la triangulation de T_2 dans un ordre arbitraire. C'est à partir de H que l'on construit le système de remplacement d'hyperarc. Pour ce faire, on ajoute à H un hyperarc non terminal connectant tous les sommets de la triangulation de T_1 , l'ordre de cette connection doit respecter l'ordre des sources de H i.e. les sommets de T_2 relativement à l'isomorphisme induit par φ , qui identifie les triangulations de T_1 et T_2 . Cet hyperarc non terminal code le recollement d'une copie de H sur H lui-même. On établit ainsi la récurrence de la construction de la triangulation de Wh_3 . L'hypergraphe initial codera une triangulation du tore plein M_0 . On obtient un système constitué de deux symboles non terminaux dont l'un est le symbole initial. Il génère une triangulation de Wh_3 . La décomposition de M en tétraèdres est plutôt fastidieuse et ne sera pas détaillée ici.

Par une méthode similaire, on peut montrer que le complémentaire du *collier d'Antoine* (cf. [HY61]) dans S^3 possède lui aussi une triangulation HR-équationnelle.

Dans cette partie, nous allons montrer que l'on peut décider de façon effective si un polyèdre HR-équationnel de dimension au plus 3 donné par une grammaire est une variété.

Nous avons vu dans la section précédente, page 22, qu'il existe un algorithme pour décider si un hypergraphe HR-équationnel est connexe. Il s'en suit que la connexité d'un polyèdre HR-équationnel est décidable. D'autre part, un hypergraphe HR-équationnel est de degré infini ou bien de degré uniformément borné [Cou90b]; de plus, ce degré est calculable. Nous ne nous intéresserons pas aux hypergraphes de degré infini; ces derniers codent des complexes simpliciaux définissant des polyèdres qui ne sont pas localement compacts; et nous considérerons ici ce cas comme pathologique. Ainsi, dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux polyèdres connexes localement compacts et donc aux hypergraphes HR-équationnels connexes de degré fini.

Le lemme suivant fait partie du folklore de la théorie des grammaires de remplacement d'hyperarcs.

Lemme 1.2.1

Soit $(b_0, \{H_b\}_{b \in B})$ une grammaire définissant un hypergraphe HR-équationnel G connexe de degré fini. Alors il existe une grammaire $(b'_0, \{H'_b\}_{b \in B'})$ définissant G tel que quelque soit $b \in B'$:

- *les sommets connectés par un hyperarc non terminal de H'_b sont deux à deux distincts;*
- *les hyperarcs non terminaux de H'_b ne contiennent pas de source;*
- *deux hyperarcs non terminaux de H'_b distincts n'ont pas de sommets en commun;*
- *l'hypergraphe obtenu à partir de H'_b en supprimant les hyperarcs non terminaux est connexe.*

Preuve.

- Soit e un hyperarc non terminal de H_b et v un sommet apparaissant plusieurs fois dans $vert_{H_b}(e)$. Soient i_1, \dots, i_k les positions de v dans $vert_{H_b}(e)$. Soit b_e le symbole d'étiquette de e . On définit un nouveau symbole non terminal b'_e ainsi qu'un nouvel hypergraphe $H_{b'_e}$ que l'on

obtient à partir de H_{b_e} en identifiant les sources d'indices i_1, \dots, i_k . Le recollement codé par e de H_{b_e} sur H_b est en fait un recollement de $H_{b'_e}$. On remplace donc e par un nouvel hyperarc e' qui code le recollement de $H_{b'_e}$ sur H_b , dans lequel v n'apparaît maintenant qu'une seule fois. Durant cette opération, on ne crée pas de nouvelle source dans H_{b_e} . Par conséquent, en répétant l'opération, le nombre de nouveaux hypergraphes construits est borné. On itère donc cette opération jusqu'à ce que le système satisfasse le premier point, ce qui sera le cas au bout d'un temps fini.

- Soit e un hyperarc non terminal de H_b contenant une source s de H_b . Quitte à simplement éliminer H_b du système, on peut supposer qu'il est utilisé pour la construction de G . L'hypergraphe G_b produit par la grammaire (b, θ) dont l'axiome est b au lieu de b_0 et où $\theta = \{H_b\}_{b \in B}$, est de degré fini. Par conséquent, il existe $k_s \geq 0$ tel que tous les hyperarcs terminaux de G_b contenant s sont déjà dans $\theta^{k_s}(H_b)$, le k_s -ième itéré de θ sur H_b . Supposons que s appartienne encore à un hyperarc non terminal de $\theta^{k_s}(H_b)$. Cet hyperarc code le recollement de l'un des hypergraphes du système, disons $H_{b'}$ sur $\theta^{k_s}(H_b)$. Dans ce recollement, s est identifié à une source s' de $H_{b'}$ qui n'appartient à aucun hyperarc terminal. En fait, quelque soit $n \geq 0$, aucun hyperarc terminal ne connecte s' à $\theta^n(H_{b'})$. s' donne donc naissance à un sommet isolé de $G_{b'}$. Ce dernier est inutile, on peut le supprimer, et retirer s de tout hyperarc non terminal de $\theta^n(H_{b'})$ qui est étiqueté par b' .

- La deuxième condition étant satisfaite, la troisième devient facile. Il suffit en effet de remplacer chaque H_b par $\theta(H_b)$.

- G est connexe par hypothèse; on peut donc supposer que chaque G_b pour $b \in B$ est aussi connexe. En effet, si G_b n'est pas connexe, on peut séparer ses composantes en plusieurs hypergraphes et leurs attribuer à chacun un nouveau symbole non terminal. Sous cette hypothèse, chacun des H_b est connexe. Notons \tilde{H}_b l'hypergraphe obtenu à partir de H_b en supprimant les hyperarcs non terminaux. Supposons que \tilde{H}_b n'est pas connexe. Comme G_b l'est, pour n_b assez grand, toutes les sources de $\theta^{n_b}(H_b)$ appartiennent à la même composante connexe de $\theta^{n_b}(H_b)$ que l'on note C_b . Soient $K_{b_1}, \dots, K_{b_{k_b}}$ les composantes connexes de $\theta^{n_b}(H_b) \setminus C_b$. On commence par remplacer H_b par C_b dans le système θ , et ce, pour tout $b \in B$ (les sources de H_b sont exactement celles de C_b relativement au plongement canonique). On crée ensuite de nouveaux symboles non terminaux $b_{b_1}, \dots, b_{b_{k_b}}$ qui serviront à coder le recollement des K_{b_k} sur C_b . A cet effet, on ajoute à C_b de nouveaux hyperarcs $e_{b_1}, \dots, e_{b_{k_b}}$ étiquetés respectivement par les $b_{b_1}, \dots, b_{b_{k_b}}$. On ajoute au système θ les nouveaux hypergraphes $H_{b_{b_j}} = K_{b_j}$. On omet le détail de la définition des sources de ces hypergraphes. Il se peut cependant que $\tilde{H}_{b_{b_j}}$ ne soit pas encore connexe; il suffit alors de remplacer chacun de ces hyperarcs non terminaux par l'hypergraphe correspondant donné par notre grammaire (i.e. un C_b).

□

Nous aurons ensuite besoin des notions de *lien* et d'*étoile* d'un simplexe d'un complexe simplicial [FM97, HY61, Mas67, Rot88, RS72]: soit S un complexe simplicial et σ un simplexe de S . L'étoile de σ dans S est par définition le sous-complexe de S formé de tous les simplexes de S dont σ est une face ainsi que toutes leurs faces; on la note $St(\sigma)$. Le *lien* de σ est le sous-complexe simplicial de $St(\sigma)$ formé de tous les simplexes disjoints de σ ainsi que toutes leurs faces; on le note $Lk(\sigma)$. Par extension, on parle aussi de l'étoile et du lien d'un sommet ou d'un hyperarc d'un hypergraphe.

Proposition 1.2.1

Il existe un algorithme pour décider si un polyèdre HR-équationnel est une variété de dimension 1, 2 ou 3.

Preuve. On considère un polyèdre défini par un hypergraphe HR-équationnel G , connexe de degré fini, donné par une grammaire (b_0, θ) où $\theta = \{H_b\}_{b \in B}$, satisfaisant les conditions du lemme 1.2.1. L'idée consiste à vérifier que le voisinage de chaque point possède la forme requise; ce qui se fait, suivant le critère 3.2.5 de [Thu97], en s'assurant que le lien de chaque simplexe σ de G est une sphère de dimension $n - \dim(\sigma) - 1$ où n vaut 2 ou 3 suivant que l'on veut démontrer que G code une surface ou une variété de dimension 3. Le cas $n = 1$ est facile : les seules variétés de dimension 1 sont le cercle et la droite.

L'idée consiste à modifier les H_b de telle sorte qu'un voisinage de chaque simplexe de G apparaisse déjà dans l'un d'eux. On commence par remplacer chaque H_b par $\theta^2(H_b)$; ceci nous assure que le voisinage de chaque sommet et de chaque hyperarc de G est totalement représenté dans l'un des H_b ; précisément : il existe une application $f : V_G \cup E_G \rightarrow \bigcup_b V_{H_b} \cup E_{H_b}$ associant à chaque sommet de G un sommet interne de l'un des H_b et à chaque hyperarc de G un hyperarc terminal de l'un des H_b ne contenant aucune de source et n'ayant pas de sommet en commun avec un hyperarc non terminal, telle que, si σ désigne un élément de $V_G \cup E_G$, l'étoile de σ dans G soit isomorphe à celle de $f(\sigma)$ dans \tilde{H}_b où \tilde{H}_b est l'hypergraphe obtenu à partir de H_b en supprimant les hyperarcs non terminaux.

Il suffit de vérifier que pour tout élément interne $\sigma \in V_{H_b} \cup E_{H_b}$, $Lk(\sigma)$ est soit un cercle, soit une sphère suivant la valeur de la dimension de σ et la valeur de n relativement au critère évoqué plus haut. Il est clair que l'extraction de $Lk(\sigma)$ peut se faire de façon effective. Vérifier que c'est un cercle, s'il y a lieu, est facile. Si l'on doit vérifier que c'est une sphère, on fait simplement appel à la caractéristique d'Euler (cf. introduction ou bien [Mas67])⁵.

□

5. au vu de l'algorithme de [Rub95] pour reconnaître la sphère S^3 , on peut étendre ce résultat à la dimension 4.

Chapitre 2

Surfaces HR-équationnelles

Ce chapitre aborde l'étude du cas des surfaces. Dans un premier temps, nous ferons une relecture, dans un esprit constructif, du résultat de classification des surfaces sans bord non compactes, en vue de le transformer en un résultat effectif. Cela nous conduira notamment à coder les surfaces sans bord non compactes par des arbres. Dans ce contexte, nous étudierons la notion de régularité arborescente, incarnée par les surfaces non compactes HR-équationnelles, et nous en donnerons plusieurs caractérisations à divers niveaux : En termes de triangularisations, en termes de sommes connexes et en termes de frontière idéale. Cette notion permettra alors la mise au point d'un algorithme pour décider de l'homéomorphisme de deux surfaces sans bord non compactes HR-équationnelles.

Par ailleurs, nous donnerons une méthode de construction de surfaces non HR-équationnelles; cela nous conduira à démontrer que l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces non compactes sans bord possède la puissance du continu.

Dans un troisième temps, nous aborderons le problème pour le cas des surfaces à bord. A cet égard, nous généraliserons le théorème de classification au cas des surfaces planaires à bord non compactes; pour ce faire, il est nécessaire d'affiner la structure de la frontière idéale en la partitionnant en sous-ensembles appelés fleurs, caractérisés en termes de courbes plongées dans la surface. Le cas général des surfaces à bord reste quant-à-lui très mystérieux.

2.1 Surfaces non compactes sans bord et arborescence

2.1.1 Notion de bout

Le concept de bout [AS60, Hal64, MS85] est une formalisation de l'idée de "chemin vers l'infini" dans les objets non compacts, tels que les graphes infinis par exemple.

Soit K un polyèdre connexe localement compact. Nous appellerons *région* de K tout ouvert connexe non vide. Nous dirons qu'une région de K est *bornée* si son adhérence est compacte. On considère les suites emboîtées $P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_k \supset \dots$ de régions non bornées de K telles que quelque soit $k \geq 0$, la frontière de P_k , i.e. $\overline{P_k} \cap \overline{P_k}^c$, soit compacte et pour toute région bornée A , $P_k \cap A = \emptyset$ pour k suffisamment grand. On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble de ces suites en convenant que $(P_k)_k$ et $(P'_k)_k$ sont équivalentes si et seulement

si pour tout $k \geq 0$, il existe k' tel que $P'_{k'} \subset P_k$ et *vice versa*.

Définition 4

Une classe d'équivalence relativement à cette relation est appelée un **bout**. L'ensemble des bouts de K est noté $B(K)$.

Par abus de langage, nous parlerons souvent des bouts d'un hypergraphe infini de degré fini, faisant en fait référence aux bouts du polyèdre associé. Dans ce cas, on peut définir les bouts de façon peut-être plus intuitive : soit G , un hypergraphe infini connexe de degré fini, et v_0 un sommet de G . On considère les branches infinies partant de v_0 , i.e. les chemins infinis $v_0v_1\dots v_k\dots$ de G tels que $d(v_0, v_k)$ croît strictement avec k et donc tend vers l'infini. Nous conviendrons que deux branches infinies sont équivalentes si elles restent connectées dans le complémentaire de toute boule centrée en v_0 .

Il existe alors une bijection canonique entre l'ensemble des classes d'équivalence de branches infinies et l'ensemble des bouts de G ; pour la construire, il nous faut auparavant fixer quelques notations. On considère la famille $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ des sous-graphes de G qui sont les composantes connexes des complémentaires des boules centrées en v_0 . Notons que pour toute paire $U_i, U_{i'}$ d'éléments de \mathfrak{U} , $U_i \cap U_{i'}$ est égale à \emptyset , U_i ou bien $U_{i'}$. On montre que tout bout p peut être représenté par une suite emboîtée $(U_{i_k})_{k \geq 1}$ d'éléments de \mathfrak{U} telle que pour tout k , U_{i_k} est une composante connexe du complémentaire de la boule centrée en v_0 de rayon $k - 1$; cette suite est unique. On associe à p une branche infinie définie de la façon suivante : soit, pour tout k , un sommet w_k de U_{i_k} , situé à distance k exactement de w_0 ; on choisit un chemin minimal α_k le connectant à w_0 . On définit maintenant une branche infini $\alpha = v_0v_1v_2\dots$ par induction, par un raisonnement type "lemme de Koenig" : comme les α_k sont en nombre infini et que G est de degré borné, il existe au moins un sommet v_1 à distance 1 de v_0 par lequel passe une infinité d' α_k ; on élimine tous les α_k qui ne passent pas par v_1 . Il existe alors un sommet v_2 à distance 2 de v_0 par lequel passent une infinité d' α_k ; on élimine alors tous les α_k ne passant pas par v_2 . Les α_k restants sont alors en nombre infini et passent tous par v_0, v_1 et v_2 ; ils permettent alors de choisir v_3 , un sommet à distance 3 de v_0 par lequel une infinité d'entre eux passent, etc. On montre que la classe d'équivalence de α ne dépend pas du choix des v_k , c'est par définition l'image de p . La bijectivité de cette correspondance est omise.

Notons que le concept de bout est topologique et non métrique. Par exemple, une grille infinie n'a qu'un seul bout; en effet, le complémentaire de toute boule est connexe. Il en est de même de l'hypergraphe HR-équationnel présenté en figure 1.4.

L'ensemble des bouts $B(K)$ est muni d'une topologie naturelle. Pour toute région U de frontière compacte, on note U^* l'ensemble des bouts de K représentés par les suites emboîtées de régions $(P_n)_n$ telles que $P_n \subset U$ pour n suffisamment grand. Dans le cas des hypergraphes, U^* est l'ensemble des bouts représentés par les branches qui sont ultimement dans U . La topologie de $B(K)$ est alors définie en prenant pour base d'ouverts l'ensemble des U^* . $B(K)$ muni de cette topologie est appelée la *frontière idéale* de K . Dans le cas des hypergraphes, en conservant les notations précédentes, on montre que la famille $\{U_i^*\}_{i \in I}$ constitue déjà une base pour la topologie de la frontière idéale.

Nous énumérons les propriétés classiques de $B(K)$ sans démonstration. La première est que $B(K)$ est métrisable (cf. [HY61, théorème 2.48]); en fait, on peut le plonger dans l'es-

pace de Cantor, lui-même sous-espace de l'intervalle fermé unité $[0, 1]$ de \mathbb{R} . Ensuite, c'est un espace compact (cf. [AS60]). Le terme de frontière provient du fait qu'il réalise une compactification de K . En effet, on munit $K \cup B(K)$ de la topologie définie en prenant pour base d'ouverts l'ensemble des parties de la forme $U \cup U^*$ où U est une région de K de frontière compacte. $K \cup B(K)$ devient alors un espace compact dans lequel K est plongé. Ainsi, le concept de bout s'apparente à celui de "point à l'infini"; notons que la compactification de K par sa frontière idéale est plus fine que la vénérable compactification d'Alexandroff qui consiste à ajouter un seul point à l'infini. Enfin, $B(K)$ est de dimension zéro, i.e. chacun de ses points possède une base de voisinages ouverts de frontières vides (cf. [AS60, HW41]).

2.1.2 Théorème de Kerékjartó-Richards

Comme dans le cas des surfaces compactes, la classification des surfaces non compactes sans bord s'appuie sur les notions de genre et d'orientabilité. Soit S une surface non compacte sans bord. S est dite de *genre* $k \in \mathbb{N}$ si elle contient une région bornée A de genre k telle que $S \setminus A$ soit planaire. Si un tel entier k n'existe pas, S est dite de *genre infini*. De la même manière, S est dite *finiment non orientable* si elle contient une région bornée A non orientable telle que $S \setminus A$ soit orientable; si une telle région n'existe pas, S est dite *infiniment non orientable*. Une surface finiment non-orientable est dite de *type pair* (resp. de *type impair*) de non-orientabilité si toute région suffisamment grande est de genre pair (resp. de genre impair).

Si le genre et l'orientabilité suffisent à classifier les surfaces compactes, il n'en est pas de même dans le cas non-compact; il faut aussi considérer le comportement des surfaces à l'infini. Soit p un bout de S représenté par une suite emboîtée de régions $(P_k)_k$; p est dit *planaire* (resp. *orientable*) si P_n est planaire (resp. orientable) pour n suffisamment grand. On note $B'(S)$ (resp. $B''(S)$) l'ensemble des bouts non planaires (resp. non orientables). $B'(S)$ et $B''(S)$ sont compacts (cf. [AS60]) et trivialement, $B''(S) \subset B'(S)$.

FIG. 2.1: *Surface de genre 1 à deux bouts planaires :*

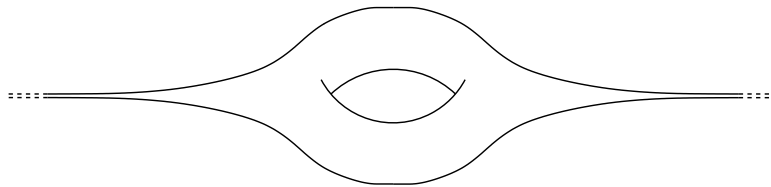
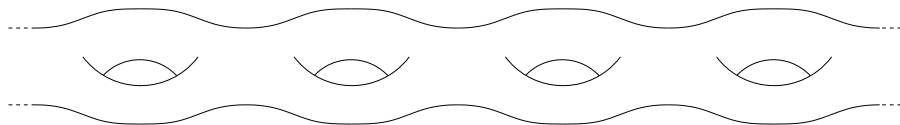


FIG. 2.2: *Surface de genre infini à deux bouts orientables non planaires :*



Théorème 1 (Kerékjártó-Richards [Mas67, Ric63]) Soient S_1 et S_2 deux surfaces non compactes sans bord de même caractéristiques d'orientabilité et de genre. S_1 et S_2 sont alors homéomorphes si et seulement si il existe un homéomorphisme $f : (B(S_1), B'(S_1), B''(S_1)) \rightarrow (B(S_2), B'(S_2), B''(S_2))$, i.e. un homéomorphisme entre $B(S_1)$ et $B(S_2)$ échangeant $B'(S_1)$ avec $B'(S_2)$ et $B''(S_1)$ avec $B''(S_2)$.

2.1.3 Bouts, langages de mots infinis, arbres

Nous allons voir dans cette partie comment la notion de frontière idéale s'apparente à celle de *frontière* d'un langage au sens de [BN80]. Ce point de vue constitue le premier pas vers un codage constructif de la frontière idéale en vue de rendre le théorème de classification effectif.

La frontière d'un langage $L \subset A^*$, où A est un alphabet fini, est l'ensemble $FrL \subset A^\omega$ des mots infinis sur A , dont tout préfixe est préfixe d'au moins un mot de L . De façon équivalente, FrL est la frontière de L comme partie de $A^* \cup A^\omega$ relativement à la topologie usuelle. En particulier, FrL hérite d'une topologie, et en fait d'une métrique, en tant que partie de $A^* \cup A^\omega$ lui-même espace métrique. Considérons maintenant l'arbre t_L dont les nœuds sont les préfixes des mots de L . FrL est alors canoniquement homéomorphe à l'espace des branches infinies de t_L , que l'on note $path(t_L)$. Rappelons que l'on munit l'ensemble des branches infinies d'un arbre d'une métrique en prenant pour distance entre deux branches données l'inverse d'une exponentielle de la longueur de leur partie commune. Réciproquement, l'espace des branches infinies d'un arbre de degré borné est toujours la frontière d'un langage. En effet, on associe une lettre différente à chaque fils d'un nœud donné; chaque nœud définit alors un mot et la frontière du langage défini par l'ensemble des nœuds est l'ensemble des mots infinis codés par les branches infinies de l'arbre. Cette discussion nous permet de voir le résultat suivant comme une interprétation en terme de bout de la notion de frontière d'un langage, et réciproquement.

Lemme 2.1.1 *L'espace des branches infinies d'un arbre est homéomorphe à sa frontière idéale.*

Preuve. Il suffit pour voir cela de considérer la définition des bouts d'un graphe infini à l'aide des branches infinies et de constater que dans un arbre, deux branches infinies distinctes ne sont jamais équivalentes.

□

Ce résultat peut se généraliser au cas des hypergraphes arborescents i.e. de largeur arborescente bornée. Si G est un hypergraphe arborescent, on peut trouver une décomposition arborescente (U, f) de largeur bornée telle que la frontière idéale de U et de G soient homéomorphes. Nous ne développerons pas cette idée ici.

En fait, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1.1 *Soit X un espace de Hausdorff (cf. [HY61]), les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) X est la frontière idéale d'un polyèdre localement compact.

- (ii) X est un espace métrique compact de dimension zéro.
- (iii) X est homéomorphe à l'espace des chemins infinis d'un arbre de degré borné.
- (iv) X est homéomorphe à la frontière idéale d'un arbre de degré borné.
- (v) X est homéomorphe à la frontière d'un langage.

Preuve. (i) \Rightarrow (ii) résume les propriétés classiques qui ont été énoncées dans la définition de la frontière idéale.

La démonstration de (ii) \Rightarrow (iii) consiste en une interprétation en terme d'arbres de [HY61, théorème 2.95]. Par [HY61, théorème 2.94], si X désigne un espace métrique compact de dimension zéro, il existe alors une suite de recouvrements finis $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k, \dots$ où chaque \mathcal{U}_k est une collection d'ouverts-fermés (en anglais "clopen") deux à deux disjoints, de diamètres inférieurs à $1/k$ tels que \mathcal{U}_{k+1} est un raffinement de \mathcal{U}_k pour tout $k \geq 0$, i.e. tout ouvert-fermé de \mathcal{U}_{k+1} est totalement inclus dans un ouvert-fermé de \mathcal{U}_k . Soient $U_{k,0}, U_{k,1}, \dots, U_{k,n_k}$ les éléments de \mathcal{U}_k ; on peut supposer que $\mathcal{U}_0 = \{X\}$. Quitte à introduire des recouvrements intermédiaires, on peut considérer que les n_k sont bornés. Considérons alors l'arbre t_X dont les nœuds sont les $U_{k,\ell}$ et dont les arcs sont définis par la relation d'inclusion: $U_{k',\ell'}$ est fils de $U_{k,\ell}$ si et seulement si $k' = k + 1$ et $U_{k',\ell'} \subset U_{k,\ell}$. On définit un homéomorphisme $\zeta : X \rightarrow \text{path}(t_X)$ de la façon suivante: pour $x \in X$, on définit $\zeta(x)$ comme étant le chemin infini $U_{0,0}U_{1,\ell_1}U_{2,\ell_2}\dots U_{k,\ell_k}\dots$ où pour tout $k, \ell_k \in [0, n_k]$ est l'unique indice tel que $x \in U_{k,\ell_k}$. On vérifie que ζ définit une bijection. En effet, comme le diamètre des $U_{k,\ell}$ converge vers 0 lorsque k tend vers l'infini et que X est complet, on peut définir l'image réciproque d'un chemin $U_{0,0}U_{1,\ell_1}U_{2,\ell_2}\dots U_{k,\ell_k}\dots$ de t_X comme étant l'unique élément de $\bigcap_k U_{k,\ell_k}$. Enfin, pour ce qui concerne la bi-continuité, comme X est compact, il suffit de vérifier la continuité, ce qui est facile en remarquant que la famille des $U_{k,\ell}$ forme une base pour la topologie de X . (iii) \Leftrightarrow (iv) est un cas particulier du lemme 2.1.1; (iii) \Leftrightarrow (v) a déjà été discuté précédemment; enfin, on a trivialement (iv) \Rightarrow (i).

□

2.1.4 Sommes connexes arborescentes

Toute surface compacte sans bord non homéomorphe à la sphère peut être obtenue en recollant entre elles un nombre fini de surfaces homéomorphes au tore ou au plan projectif (cf. [Mas67]); la sphère, le tore et le plan projectif sont ainsi les briques élémentaires à partir desquelles sont construites toutes les surfaces compactes sans bord. Nous allons voir dans cette partie par quel procédé elles permettent en fait de construire toutes les surfaces non compactes sans bord.

L'idée de recollement de surface est formalisée par le concept de *somme connexe* (cf. [Mas67]). La somme connexe de deux surfaces consiste à découper un disque dans chacune d'entre elles, puis de les recoller sur les bords restants (voir figure 2.1.4). On montre que la classe d'homéomorphisme de la surface ainsi obtenue ne dépend ni du choix des disques que l'on découpe, ni du recollement. Notons que dans un contexte topologique, nous ne ferons pas de distinction entre une surface et sa classe d'homéomorphisme; nous nous autoriserons

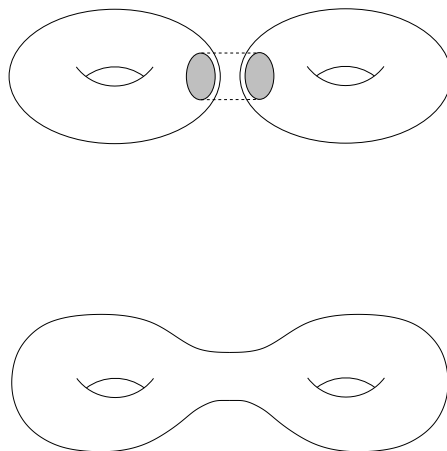


FIG. 2.3: La somme connexe de deux surfaces S_1 et S_2 est définie de la façon suivante : soient D_1 et D_2 , deux disques plongés respectivement dans S_1 et S_2 ; on considère les surfaces \tilde{S}_1 et \tilde{S}_2 , obtenues à partir de S_1 et S_2 en leur retirant les intérieurs de D_1 et de D_2 . La somme connexe de S_1 et S_2 est alors définie comme étant la surface obtenue en identifiant les bords de D_1 et D_2 . Bien sûr, cette surface dépend du choix de D_1 et de D_2 , mais pas sa classe d'homéomorphisme. On montre que toute surface compacte sans bord distincte de la sphère est homéomorphe à une somme connexe de tores et de plans projectifs (cf. [Mas67]).

de somme connexe, qui est en fait définie sur l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces, confère à l'ensemble des classe d'homéomorphisme de surfaces compactes sans bord une structure relativement simple : c'est un monoïde commutatif finiment présenté dont une présentation est : $\langle t, p \mid tp = pt, p^3 = tp \rangle$; l'élément neutre représente la sphère, t , le tore et p , le plan projectif. On peut donner un ensemble de représentants sous la forme suivante : $\{t^n p^m \mid n \in \mathbb{N}, m = 0, 1, 2\}$; notons que n et m sont respectivement le genre et le type d'orientabilité.

Le théorème 1 montre que la frontière idéale d'une surface est un invariant essentiel de sa structure topologique. Nous avons vu dans la partie 2.1.3 comment décrire cette frontière idéale en termes d'arbre. Ces considérations conduisent au fait que toute surface peut être représentée sous forme arborescente. Afin de formaliser cette idée nous introduisons le concept de *somme connexe arborescente*. Construire une surface non compacte par somme connexe arborescente consiste à se donner une infinité de surfaces compactes agencées selon les nœuds d'un arbre infini, puis de les recoller deux à deux le long des arêtes de l'arbre en question.

Formellement, on se donne un arbre t de degré fini muni d'une application τ qui associe à chaque nœud de t une surface compacte sans bord. Pour tout couple de nœuds (w, w') de t tel que w est le père de w' , on se donne un plongement $f_{w,w'} : D \rightarrow \tau(w)$ du disque unité $D = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ dans la surface associée à w . Puis pour tout nœud w' distinct de la racine, on se donne un autre plongement $p_{w'} : D \rightarrow \tau(w')$. On suppose que les

images de tous ces plongements sont deux à deux disjointes. Pour tout nœud w , on considère maintenant la surface, notée $\tilde{\tau}(w)$, obtenue à partir de $\tau(w)$ en découpant les $f_{w,w'}(\overset{\circ}{D})$ avec w' fils de w , et $p_w(\overset{\circ}{D})$ si w est distinct de la racine ($\overset{\circ}{D}$ désigne l'intérieur de D). Soit alors \mathcal{R} la relation d'équivalence sur $K = \bigcup_w \tilde{\tau}(w)$ engendrée par les couples (x, x') tels qu'il existe $z \in S^1 = Fr(D)$, w, w' des nœuds de t avec w père de w' tels que $x = f_{w,w'}(z)$ et $x' = p_{w'}(z)$.

Définition 5 La *somme connexe arborescente* définie par t , notée $\Sigma(t)$, est alors définie comme étant le quotient K/\mathcal{R} . On montre que la classe d'homéomorphisme de $\Sigma(t)$ ne dépend pas des choix des $f_{w,w'}$, ni de ceux des p_w .

On code les bouts de $\Sigma(t)$ par les branches infinies de t : pour toute branche infinie $\alpha = (w_k)_{k \geq 0} \in path(t)$, on définit $b(\alpha)$ comme étant le bout de $\Sigma(t)$ définie par les régions P_k formées par le recollement des surfaces compactes associées au nœuds de t_{w_k} , le sous-arbre de t de racine w_k . En reprenant les idées de la proposition 2.1.1, on obtient le résultat suivant :

Lemme 2.1.2 On reprend les notations de la construction précédente. Soient :

- $path'(t) \subset path(t)$ l'ensemble des branches infinies $(w_k)_{k \geq 0}$ telles qu'il existe des indices k aussi grands que l'on veut tels que $\tau(w_k)$ ne soit pas planaire.
- $path''(t) \subset path(t)$ l'ensemble des branches infinies $(w_k)_{k \geq 0}$ telles qu'il existe des indices k aussi grands que l'on veut tels que $\tau(w_k)$ ne soit pas orientable.

Alors $b : (path(t), path'(t), path''(t)) \longrightarrow (B(\Sigma(t)), B'(\Sigma(t)), B''(\Sigma(t)))$ est un homéomorphisme.

Le résultat suivant consiste en une relecture des résultats de [Ric63].

Lemme 2.1.3

Soit X un espace métrique compact de dimension zéro. Soient $X'' \subset X'$ deux fermés de X . Il existe alors une surface non compacte sans bord S obtenue par somme connexe arborescente de sphères, de tores et de plan projectifs, telle que $(B(S), B(S)', B(S)'')$ est homéomorphe à (X, X', X'') .

Preuve. Considérons l'arbre t_X construit dans la démonstration de la proposition 2.1.1. Rappelons que c'est un arbre de degré borné. Conformément aux notations de cette démonstration, ζ désigne l'homéomorphisme canonique entre X et l'espace des branches infinies de t_X . Pour tout nœud w de t_X , par abus de notation, on désigne par $\zeta^{-1}(w)$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que $\zeta(x)$ est un chemin passant par w . On définit une somme connexe arborescente d'arbre t_X dont l'application τ est définie comme suit. Pour tout nœud w de t_X :

- si $\zeta^{-1}(w) \cap X'' \neq \emptyset$ alors $\tau(w)$ est un plan projectif.
- si $\zeta^{-1}(w) \cap X' \neq \emptyset$ et $\zeta^{-1}(w) \cap X'' = \emptyset$ alors $\tau(w)$ est un tore.
- si $\zeta^{-1}(w) \cap X' = \emptyset$ alors $\tau(w)$ est une sphère.

On vérifie que $b \circ \zeta : (X, X', X'') \rightarrow (B(\Sigma(t)), B'(\Sigma(t)), B''(\Sigma(t)))$ est un homéomorphisme, notons que pour ce faire, l'hypothèse de fermeture sur X' et X'' est essentielle.

□

Théorème 2

Toute surface sans bord est une somme connexe arborescente de sphère, de tore et de plan projectifs.

Preuve. Soit S une surface sans bord. Si, S est compacte, c'est une sphère ou bien une somme connexe de tores et de plans projectifs; dans ce cas on choisit t fini et sa forme ne compte pas. Si S est non compacte, le lemme 2.1.3 fournit une surface S_1 définie par somme connexe arborescente de sphères, de tores et de plans projectifs telle que $(B(S_1), B'(S_1), B''(S_1))$ est homéomorphe à $(B(S), B'(S), B''(S))$; si S est de genre fini ou finiment non-orientable, on colle à la racine de l'arbre définissant S_1 un arbre fini codant une surface compacte de même caractéristiques de genre et d'orientabilité que S . On conclut en appliquant le théorème 1.

□

Question :

(Systèmes de réécritures de termes et homéomorphismes de surfaces)

Nous avons vu page 36 que les surfaces compactes sans bord sont décrites par des mots sur un alphabet à deux lettres. Notons que le langage de représentants des classes d'homéomorphisme, i.e. $\{t^n p^m \mid n \in \mathbb{N}, m = 0, 1, 2\}$, que nous avons donné est un langage rationnel. En fait, on peut montrer que ces représentants sont les formes normales d'un système de réécriture noethérien confluent. Le théorème précédent généralise cette idée en ceci que toute surface, compacte ou non, est codée par un arbre dont les nœuds sont étiquetés sur un alphabet de trois lettres. L'homéomorphisme des surfaces définit donc une relation d'équivalence sur l'ensemble de ces arbres. Nous posons le problème qui consiste à déterminer si cette relation d'équivalence peut être engendrée par un système fini de réécriture de termes. Notons qu'un tel système permettrait, s'il était noethérien et confluent, de mettre en oeuvre un algorithme élégant pour résoudre le problème de l'homéomorphisme.

2.2 Régularité arborescente, algorithme

2.2.1 Surfaces HR-équationnelles et sommes connexes arborescentes

Une somme connexe arborescente n'est définie qu'à homéomorphisme près. Ainsi, au lieu d'attacher des surfaces compactes aux nœuds de l'arbre qui la définit, il est en réalité plus naturel de leurs attacher des classes d'homéomorphisme de surfaces compactes sans bord. En considérant la classification des surfaces compactes sans bord, on peut donc définir des sommes connexes arborescentes à partir d'arbres dont chaque nœud est étiqueté par un entier: le genre ainsi qu'un symbole parmi trois qui code les différents types relatifs à l'orientabilité: orientable, non-orientable de type pair et non-orientable de type impair. Notons que l'on peut coder ces deux paramètres à l'aide d'un seul entier dont par exemple la

classe modulo 3 donnerait le type d'orientabilité et le quotient donnerait le genre. C'est sur ces considérations que nous donnons la définition suivante qui propose un nouveau concept de régularité pour une surface non-compacte sans bord.

Définition 6 Nous dirons d'une somme connexe arborescente qu'elle est **régulière** si elle est effectuée sur un arbre régulier.

Comme les surfaces HR-équationnelles, les surfaces définies par sommes connexes arborescentes régulières peuvent être définies de façon constructive : une telle surface est par définition codée par un arbre régulier qui lui-même est codé par un multi-graphe orienté pointé fini. Notons que dans ce cas, les arcs n'ont pas besoin d'être étiquetés.

La démonstration de la proposition suivante consiste en différents découpages de triangularisations. Pour ce type de procédés, nous avons besoin des concepts de *subdivision barycentrique* (cf. [HY61]) et de *voisinage régulier* (cf. [RS72, Hem76]).

Soit σ un simplexe de sommets s_0, s_1, \dots, s_n , rappelons que les s_i sont affinement indépendants et que σ est leur enveloppe convexe. Un autre point de vue consiste à dire que σ est l'ensemble des points dont les coordonnées barycentriques par rapport aux x_i sont toutes positives ou nulles. Soient f_1, \dots, f_{2^n-1} , les faces de σ ; on les identifie avec les parties non vides de $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$. Soit \dot{f}_i le barycentre de f_i . Soit Σ le complexe simplicial dont les sommets sont les \dot{f}_i et dont les simplexes sont les enveloppes convexes des parties $\{\dot{f}_{i_0}, \dot{f}_{i_1}, \dots, \dot{f}_{i_n}\}$ avec $f_{i_0} \subsetneq f_{i_1} \subsetneq \dots \subsetneq f_{i_n}$. Σ est appelé la subdivision barycentrique de σ . La subdivision d'un complexe simplicial quelconque consiste à subdiviser tous ses simplexes.

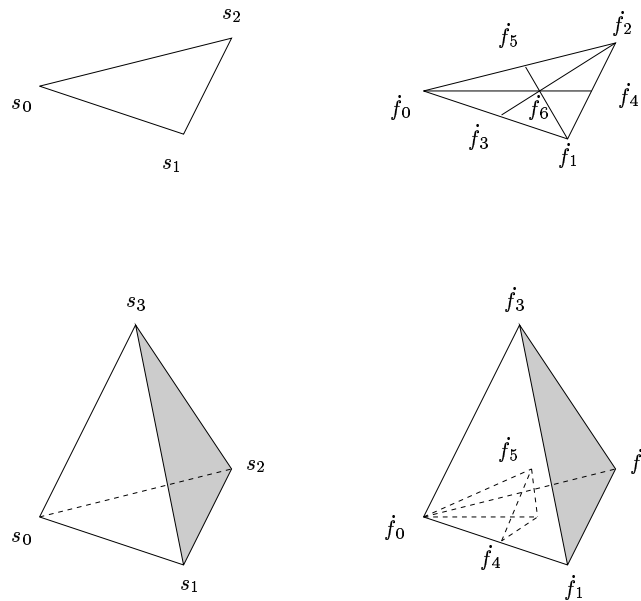


FIG. 2.4: *Subdivision barycentrique*

La notion de voisinage régulier est apparue pour la première fois dans [Whi39], on trouvera des approches modernes dans [RS72, Hem76]. Soit K un complexe simplicial, σ un simplexe de K et τ une face de σ de dimension $\dim \sigma - 1$ qui n'appartient à aucun autre simplexe de K .

Le complexe simplicial obtenu à partir de K en lui retirant σ et τ est dit être obtenu à partir de K par effondrement élémentaire. Si L est un complexe simplicial obtenu à partir de K par une séquence finie d'effondrements élémentaires, on dit que K s'effondre en L , ce qui est noté $K \searrow L$. Remarquons que $|L|$ est un *rétract par déformation* de K (cf. [Hem76, RS72]). Supposons maintenant que K soit un complexe simplicial dont le polyèdre $|K|$ est une variété de dimension n ; soit L un sous-complexe de T . On appelle *voisinage régulier* de L dans K toute sous-variété de $|K|$ de la forme $|K_1|$ où K_1 est un sous-complexe de K avec $K_1 \searrow L$. Notons que $|K_1|$ n'est pas nécessairement un voisinage de $|L|$ au sens usuel du terme.

Lemme 2.2.1

Soient K un complexe simplicial et L un sous-complexe fini de T . Soient K'' et L'' les double subdivisions barycentriques de T et L ,

$$\text{Soit } N(L'', K'') = \bigcup_{\sigma \in L''} \{\tau \mid \tau \text{ est une face d'un simplexe de } K'' \text{ interceptant } \sigma\}$$

alors $|N(L'', T'')|$ est un voisinage régulier de L'' dans K'' .

Voir [Whi39, Hem76, RS72] pour la démonstration de ce lemme.

Lemme 2.2.2 *La subdivision barycentrique d'un complexe simplicial HR-équationnel est HR-équationnelle.*

Preuve. Il suffit de subdiviser chaque hyperarc terminal.

□

Proposition 2.2.1 *Une surface sans bord est HR-équationnelle si et seulement si c'est une somme connexe arborescente régulière.*

Preuve. (\Leftarrow):

Soit S une surface définie à homéomorphisme près comme somme connexe arborescente sur un arbre régulier t . On suppose que t est lui-même défini comme le développement d'un multi-graphe orienté pointé (Γ, v_0) dont les sommets sont étiquetés par des classes d'homéomorphisme de surfaces compactes sans bord. Pour chaque $v \in V_\Gamma$, on considère un hypergraphe H_v , codant une triangulation d'une surface associée à v . Pour chaque $v \neq v_0$, on découpe un disque dans H_v dont les sommets seront les sources de H_v . Puis, pour chaque arc e de Γ , on découpe un disque dans H_v , où v est l'origine de e , et on recolle à la place un hyperarc non-terminal étiqueté par v' , où v' est l'extrémité de e . Tout les disques que l'on découpe doivent être disjoints, pour cela, on remplacera au besoin H_b par sa subdivision barycentrique. On obtient finalement une grammaire de remplacement d'hyperarc qui définit une triangulation de S .

(\Rightarrow):

Soit une surface HR-équationnelle S définie par une grammaire $\Theta = (b_0, \{H_b\}_{b \in B})$. On peut supposer que Θ satisfait les conditions du lemme 1.2.1.

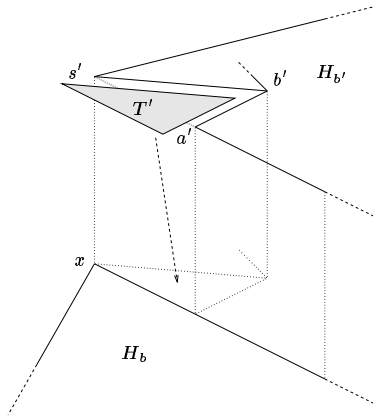
• On peut transformer Θ de telle sorte que chaque \tilde{H}_b soit la triangularisation d'une surface à bord. (Rappelons que \tilde{H}_b désigne une copie de H_b à laquelle on a retiré tous les hyperarcs non-terminaux.

On commence par remplacer la triangularisation de S par sa double subdivision barycentrique, cela facilite les découpages. On note encore Θ la grammaire associée. Il faut transformer Θ de telle sorte que chacun des sommets de chaque \tilde{H}_b possède un voisinage homéomorphe à un disque ou bien un demi-disque. Considérons donc un H_b ainsi qu'un de ses sommets x .

Si x n'appartient pas à un hyperarc non-terminal et n'est pas une source, alors tous les hyperarcs terminaux formant un voisinage de x dans S sont déjà dans H_b . Comme S est une surface, ce voisinage est homéomorphe à un disque.

Si x est une source, alors il doit être recollé sur un sommet x' appartenant à un hyperarc non-terminal dans l'un des H_b . Si x ne possède pas de voisinage homéomorphe à un disque ou bien un demi-disque, alors il en est de même pour x' . C'est le cas suivant.

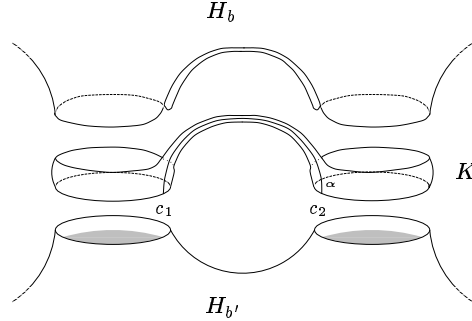
Supposons donc que x appartienne à un hyperarc non-terminal de H_b et qu'il ne possède pas de voisinage homéomorphe à un disque ou bien un demi-disque. Par le lemme 1.2.1, il n'y a qu'un seul $H_{b'}$ qui doit être recollé sur x . Soit s' la source de $H_{b'}$ qui doit être identifiée à x . Considérons les triangles, i.e. les hyperarc terminaux d'arité 3, de $H_{b'}$ contenant s' . Nous allons les retirer de $H_{b'}$ et les recoller autour de x dans H_b , ainsi que dans tout autre $H_{b'}$ contenant un hyperarc non-terminal étiqueté par b' . Ensuite, on supprimera s' . Après cette opération, x aura un voisinage homéomorphe à un disque dans \tilde{H}_b . Soit T' un de ces triangles; rappelons que nous considérons la double subdivision barycentrique de la triangularisation originale de S . Les sommets créés durant le processus de subdivision ont tous des bons voisinages, s' n'en fait donc pas partie. C'est par contre le cas des deux autres sommets a' et b' de T' (cf. figure). Après la suppression de T' , pour ajuster le recollement de $H_{b'}$, ils



deviennent des sources. Notons que l'un d'eux pouvait déjà en être une. On vérifie facilement qu'ils ont des bons voisinages dans $\tilde{H}_{b'} \setminus T'$. Le détail de cette opération étant plus complexe que difficile, il est omis ici.

• On peut transformer Θ de telle sorte que les sources d'un H_b sont les sommets d'au plus une composante du bord de $|\tilde{H}_b|$.

Considérons le sous-hypergraphe F_b de H_b formé par les sources de H_b et les hyperarcs d'arité 2 les connectant entre elles, i.e. les côtés des triangles connectant deux sources. Notons d'abord que le point précédent implique que $|F_b|$ est une union de courbes simples fermées deux à deux disjointes. Notre but ici consiste à transformer Θ de telle sorte que chaque F_b ne comporte qu'une seule courbe. Supposons donc que F_b contienne au moins deux courbes disjointes c_1 et c_2 . Grâce au lemme 1.2.1, on peut supposer que \tilde{H}_b est connexe; soit α un chemin de \tilde{H}_b connectant c_1 et c_2 (cf. figure). Soit K un voisinage régulier de $c_1 \cup \alpha \cup c_2$



dans \tilde{H}_b . K est homéomorphe à une paire de pantalons, c_1 et c_2 forment deux composantes de sa frontière, soit c la troisième (voir figure). L'idée consiste à retirer K de H_b , remplacer les sommets de c_1 et de c_2 dans la liste des sources de H_b par les sommets de c , et enfin, recoller K à la place de chaque hyperarc étiqueté par b dans Θ . A chaque recollement de K , on adjoint un nouvel hyperarc étiqueté par b qui code le recollement du nouvel H_b sur c . Nous ne développerons pas le détail de ces opérations ici (cf. [Ly99]). Finalement, nous avons fait décroître le nombre de composantes de F_b , on conclut par récurrence.

On construit maintenant un multi-graphe orienté pointé Γ codant l'arbre régulier relatif à une somme connexe arborescente définissant S . L'ensemble des sommets de Γ est B , l'ensemble des indices des H_b ; la racine de Γ est b_0 ; l'ensemble des arcs de Γ est en bijection avec l'union des ensembles d'hyperarcs non-terminaux des H_b , il est défini comme suit : pour chaque $b \in B$ et chaque hyperarc non-terminal e de H_b , on définit un arc dans Γ d'origine b et d'extrémité b' , où b' est l'étiquette de e . Il reste à associer une surface compacte sans bord à chaque sommet de Γ : pour tout $b \in B = V_\Gamma$, on considère la surface, en fait sa classe d'homéomorphisme, obtenue en recollant un disque sur chaque composante du bord de $|\tilde{H}_b|$. On vérifie que Γ définit un arbre régulier qui définit à son tour par somme connexe arborescente une surface homéomorphe à S .

□

2.2.2 Espaces de dimension zéro de types finis

Théorème de Pierce

Dans cette partie, X désigne un espace métrique compact de dimension 0. Pour toute partie A de X , on note $A' \subset A$ sa dérivée topologique, i.e. l'ensemble de ses points d'accumulation.

Définition 7 ([Pie72])

On muni l'ensemble des parties de X , noté 2^X , des opérations booléennes usuelles \cup , \cap et \cdot^c , des opération d'arité 1 d'adhérence topologique $\bar{\cdot}$ et de dérivée topologique \cdot' , et de l'opération d'arité nulle \emptyset . Sa plus petite sous-algèbre, notée $\mathfrak{U}(X)$, est appelée l'**algèbre booléenne topologique** de X . Notons qu'elle est engendrée par \emptyset . Si $\mathfrak{U}(X)$ est de cardinal fini, X est dit **de type fini**.

Soit \mathfrak{U} une sous algèbre de 2^X . On appelle *atome* de \mathfrak{U} tout élément $a \in \mathfrak{U}$ tel que pour tout $b \in \mathfrak{U}$, $b \subset a$ implique $b = a$ ou bien $b = \emptyset$.

Lemme 2.2.3 ([Pie72])

On suppose que X est de type fini. Soit \mathfrak{U} une sous-algèbre finie de 2^X . On suppose que \mathfrak{U} est engendrée par ses éléments fermés. Il existe alors une suite finie emboîtée $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = X$ d'éléments fermés de \mathfrak{U} telle que pour tout $i \in [0, n-1]$, $a_i = A_{i+1} \setminus A_i$ est un atome de \mathfrak{U} .

Pour la démonstration de ce lemme, le lecteur est renvoyé à [Pie72]. Le théorème 3 est basé sur une classification des formes que peuvent prendre les a_i . Nous n'en donnerons pas de démonstration; néanmoins, nous allons regarder de plus près cette classification qui nous sera utile par la suite.

D'abord, $a_0 = A_1$ est un atome fermé; il est donc compact et d'autre part $a'_0 = \emptyset$ ou bien $a'_0 = a_0$.

Si $a'_0 = \emptyset$, i.e. tout point de a_0 est isolé, alors, comme il est compact, a_0 est un ensemble fini.

Si $a'_0 = a_0$, i.e. a_0 est *parfait*, alors a_0 est homéomorphe à l'espace de Cantor (cf. [HY61]).

Regardons maintenant les a_i pour $i > 0$. Si a_i est un fermé, nous sommes dans le cas précédent. Supposons donc que $a_i \subsetneq \bar{a}_i$; en particulier a_i n'est pas compact.

Si $a'_i = \emptyset$, alors a_i est un ensemble discret dénombrable.

Si $a'_0 = a_0$, alors a_i peut-être décomposé en une union dénombrable d'espaces de Cantor deux à deux disjoints (cf. [Pie72]).

Théorème 3 ([Pie72])

Soient X et Y deux espaces métriques compacts de dimension 0 de types finis. Soient \mathfrak{A} et \mathfrak{B} deux sous-algèbres finies de 2^X et de 2^Y respectivement, satisfaisant les hypothèses du lemme 2.2.3. Soit $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ un isomorphisme tel que pour tout atome $p \in \mathfrak{A}$ de cardinal fini, $\text{card}(\rho(p)) = \text{card}(p)$. Alors il existe un homéomorphisme $\sigma : X \rightarrow Y$ qui induit ρ .

Espaces de types finis et arbres réguliers

Les résultats de cette partie sont tirés en substance de [Hea86] où ils sont traités dans le contexte des langages reconnaissables de mots infinis; nous les formulons ici en terme d'arbres réguliers. Soit Γ un multi-graphe orienté pointé fini comme celui que nous avons construit dans la preuve de la proposition 2.2.1; Γ code un arbre régulier t . Nous allons voir

dans cette partie que l'espace des bouts de t est de type fini au sens de la définition 7, et que de plus il y existe un moyen effectif de calculer son algèbre topologique booléenne.

Rappelons que l'espace des bouts $B(t)$ de t est canoniquement homéomorphe à l'espace $path(t)$ de ses chemins infinis partant de la racine. On considère l'homomorphisme surjectif canonique¹ $p : t \rightarrow \Gamma$; puis pour tout $v \in V_\Gamma$: $In(v) = \{\alpha \in path(t) \mid \text{card}(V_\alpha \cap p^{-1}(v)) = \aleph_0\}$, i.e. l'ensemble des chemins infinis de t dont les images par p passent infiniment souvent par v . Avant d'aller plus loin, on modifie légèrement Γ afin d'éliminer certains cas pathologiques. Pour cela, on supprime les sommets de Γ distincts de la racine dont les images par In sont vides; de tels sommets n'ont pas d'incidence sur l'ensemble des bouts de t . Lorsqu'on supprime de cette façon un sommet v , on supprime aussi les arcs auquel il appartient; et pour tout couple de tels arcs e, e' où v est à la fois l'extrémité de e et l'origine de e' , on ajoute à Γ un arc dont l'origine est l'origine de e et l'extrémité est l'extrémité de e' . Le graphe obtenu sera noté $\tilde{\Gamma}$ et tous ses sommets sont en quelques sortes significatifs pour comprendre la structure de la frontière idéale de t .

On étend trivialement In aux parties de V_Γ : pour toute partie $Y \subseteq V_\Gamma$, on pose $In(Y) = \bigcup_{v \in Y} In(v)$. On veut que cette opération préserve les opérations booléennes; on a facilement $In(\emptyset) = \emptyset$, $In(V_\Gamma) = path(t)$ et $In(Y_1 \cup Y_2) = In(Y_1) \cup In(Y_2)$; mais on a seulement $In(Y_1 \cap Y_2) \subseteq In(Y_1) \cap In(Y_2)$. On restreint donc In à un certain type de parties de V_Γ appelées parties *cohérentes*, i.e. les $Y \subseteq V_\Gamma$ telles que pour toute paire de sommets de V_Γ mutuellement accessibles $p, q \in V_\Gamma$ on a $p, q \in Y$ ou bien $p, q \notin Y$. Une partie cohérente de Γ est simplement une union de composantes fortement connexes. L'ensemble des parties cohérentes de V_Γ est noté \mathfrak{C}_Γ . Pour toute paire Y_1, Y_2 de parties cohérentes de V_Γ , on a maintenant $In(Y_1 \cap Y_2) = In(Y_1) \cap In(Y_2)$ et $In(Y_1^c) = In(Y_1)^c$. On s'intéresse maintenant aux opérations de dérivée et d'adhérence topologique : on définit deux opérateurs sur l'ensemble des parties cohérentes :

- $Y^K = \{v \in V_\Gamma \mid Y \text{ est accessible à partir de } v\}$.
- $Y^D = \{v \in Y \mid \text{il existe au moins deux circuits distincts dans } Y \text{ accessibles à partir de } v\}$.

On vérifie facilement que $In(Y^K) = \overline{In(Y)}$ et $In(Y^D) = In(Y)'$ (cf. [Hea86]). \mathfrak{C}_Γ , muni des opérations booléennes usuelles et de \cdot^K et \cdot^D , est une algèbre finie. On obtient finalement le résultat suivant :

Lemme 2.2.4 ([Hea86])

$In : (\mathfrak{C}_\Gamma, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, \cdot^K, \cdot^D) \longrightarrow (2^{path(t)}, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, \bar{\cdot}, \cdot')$ est un morphisme d'algèbre.

On montre facilement que In est injective sur l'ensemble des parties cohérentes; il s'en suit que $(\mathfrak{C}_\Gamma, \cup, \cap, \cdot^c, \emptyset, \cdot^K, \cdot^D)$ est une copie isomorphe d'une sous-algèbre de $2^{path(t)}$. De plus, elle est de cardinal fini; on a donc le résultat suivant :

Proposition 2.2.2 ([Hea86])

Si t est un arbre régulier alors $path(t)$ et donc $B(t)$ sont des espaces de type fini.

Notons que les opérations \cdot^K et \cdot^D sont calculables; ainsi, l'existence de ce morphisme va nous permettre de calculer des sous-algèbres finies de $path(t)$ et donc de $B(t)$.

1. Le revêtement

2.2.3 Régularité arborescente, algorithme

Soit S une surface sans bord HR-équationnelle. Les démonstrations du lemme 1.2.1 et de la proposition 2.2.1 sont constructives et fournissent une méthode effective pour calculer un multi-graphe Γ_S orienté pointé codant un arbre régulier t_S définissant à son tour une somme connexe arborescente définissant S . Le lemme 2.2.4 montre alors comment calculer des sous-algèbres finies de $path(t_S)$ et donc de $B(S)$. En considérant le théorème 1 de classification des surfaces et le théorème 3, on aboutit alors à un algorithme pour décider si deux surfaces sans bord HR-équationnelles sont homéomorphes ou non.

Rappelons que les sommets de Γ_S sont étiquetés par des classes d'homéomorphisme de surfaces compactes. Soit $N \subseteq V_\Gamma$ (resp. $O \subseteq V_\Gamma$) la plus petite partie cohérente de V_Γ contenant tous les sommets associés à des surfaces non orientables (resp. orientable de genre supérieur à un). Soit $b : (path(t_S), path'(t_S), path''(t_S)) \rightarrow (B(\Sigma(t_S)), B'(\Sigma(t_S)), B''(\Sigma(t_S)))$ comme introduit dans le lemme 2.1.2. On vérifie facilement que $b(In(N)) = B''(\Sigma(t_S))$ et $b(In(N \cup O)) = B'(\Sigma(t_S))$.

Théorème 4

Soit S une surface sans bord. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) S est HR-équationnelle.
- (ii) S est une somme connexe arborescente régulière.
- (iii) La sous-algèbre de $2^{B(S)}$ engendrée par $\{B'(S), B''(S)\}$ est de cardinal fini.

De plus ces équivalences sont constructives.

Preuve. (i) \Leftrightarrow (ii) est simplement la proposition 2.2.1.

(ii) \Rightarrow (iii) : on calcule la sous-algèbre de \mathfrak{C}_Γ engendrée par N et O . Par le lemme 2.2.4, elle est isomorphe à la sous-algèbre de $2^{B(S)}$ engendrée par $\{B'(S), B''(S)\}$, qui donc est de cardinal fini.

(iii) \Rightarrow (ii) : soient $X'' \subset X' \subset X$ des espaces métrique compacts de dimension 0 tels que la sous-algèbre \mathfrak{U} de 2^X engendrée par $\{X', X''\}$ est de cardinal fini. On considère la décomposition de \mathfrak{U} en éléments fermés donnée par le lemme 2.2.3 : $\emptyset = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_{n-1} \subset A_n = B(S)$ où pour tout $i \in [0, n-1]$, $a_i = A_{i+1} \setminus A_i$ est un atome de \mathfrak{U} . On montre par récurrence sur n que l'on peut alors calculer un multi-graphe orienté pointé Γ dont les sommets sont étiquetés par des sphères, des tores et des plans projectifs tel que $(path(t_\Gamma), In(N \cup O), In(N))$ soit homéomorphe à (X, X', X'') .

Au rang 1 : supposons que $\mathfrak{U} = \{\emptyset, X\}$. Si X est parfait, i.e. sa dérivée topologique est égale à lui-même, alors, comme il est compact, c'est un espace de Cantor. Γ est alors construit avec un sommet seulement et deux boucles (voir figure). Si au contraire tous les points de $B(S)$ sont isolés, alors c'est un ensemble fini; la construction de Γ pour ce cas est détaillée dans la figure.

Au rang n : la sous-algèbre de $2^{A_{n-1}}$ engendrée par $\{A_{n-1} \cap X', A_{n-1} \cap X''\}$ possède une décomposition de taille $n-1$. Par récurrence, on sait construire un multi-graphe Γ_{n-1} associé



FIG. 2.5: Construction de Γ au rang 1 de la récurrence. La partie gauche représente Γ dans le cas où X est parfait. La partie droite représente Γ dans le cas où X est un ensemble fini; dans ce cas, on accède à partir de la racine à autant de sommets que X a d'éléments; chacun d'eux n'est muni que d'une seule boucle; ainsi, il ne donne naissance qu'à un seul chemin infini.

au triplet $(A_{n-1}, A_{n-1} \cap X', A_{n-1} \cap X'')$. Si $\bar{a}_{n-1} = a_{n-1}$, pour obtenir Γ , on connecte la racine de Γ_{n-1} à une nouvelle composante fortement connexe construite comme pour HR_0 (voir figure); on distingue comme précédemment les cas où a_{n-1} est parfait ou bien fini. Supposons maintenant que $\bar{a}_{n-1} \cap A_{n-1} \neq \emptyset$. Soit la partie cohérente $C = In^{-1}(\bar{a}_{n-1} \cap A_{n-1}) \subseteq V_{\Gamma_{n-1}}$. Soient C_1, \dots, C_s les composantes fortement connexes de C ; on peut vérifier par récurrence que chacune de ces composante n'est en fait formée que d'un seul sommet. Soit v un nouveau sommet que l'on ajoute à Γ_{n-1} . Comme précédemment, on adjoint à ce sommet une ou deux boucles selon respectivement les cas où $a'_{n-1} = \emptyset$ ou bien $a'_{n-1} = a_{n-1}$. On ajoute ensuite s nouveaux arcs connectant les C_i à v (voir figure). Ainsi, lorsque l'on parcourt un chemin infini dans l'une des C_i , on peut bifurquer dans v à tout moment; ainsi, les chemins infinis de $In(C_i)$ sont limites de chemins de $In(\{v\})$. Comme \mathcal{U} est engendrée par $\{X', X''\}$, a_{n-1} est totalement dans X' ou bien dans X'' ou bien en est totalement disjoint. Selon le cas, on associera à a_{n-1} un tore, un plan projectif ou bien une sphère. Cette récurrence étant achevée, on conclut de la même façon que dans la démonstration du théorème 2.



□

2.3 Exemples de surfaces non HR-équationnelles

Nous savons d'après la proposition 1.1.1 que les surfaces compactes sont HR-équationnelles. En fait, d'après le théorème 4, les surfaces pointées, i.e. les surfaces obtenues en retirant un nombre fini de points à une surface compacte, sont aussi HR-équationnelles. Ainsi, la classe des surfaces HR-équationnelles s'insère raisonnablement dans la théorie topologique

des surfaces. Nous allons voir dans cette partie que beaucoup de surfaces non-compactes lui échappent néanmoins.

Le théorème 4 fournit un critère qui va servir ici pour construire des exemples de surfaces non-HR-équationnelles. Pour ce faire, compte tenu de la proposition 2.1.3, il nous suffit de trouver des espaces métriques de dimension 0 qui ne sont pas de type fini au sens de 7. Les résultats développés dans cette partie montrent en fait que l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces non-compactes planaires sans bord possède la cardinalité du continu (théorème 5); et en particulier, il n'est pas dénombrable. Ce qui implique trivialement l'existence de surfaces non-HR-équationnelles; cela implique de façon plus profonde qu'établir un algorithme général n'a pas de sens puisque l'ensemble des calculs d'une machine de Turing est toujours dénombrable.

On considère, dans l'intervalle $I = [0, 1]$ de \mathbb{R} , l'ensemble de Cantor défini par :

$$C = \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{3^n} : (x_n)_{n \geq 1} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Soit $K \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des milieux des intervalles formant le complémentaire de C :

$$K = \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{x_n}{3^n} + \frac{1}{2 \times 3^N} : x_0 = 0 \text{ and } x_1 \dots x_N \in \{0, 2\} \right\}.$$

Nous allons construire par récurrence une suite $(K_n)_n$ de sous-espaces 0-dimensionnels de I . On pose $K_0 = C$ et $K_1 = C \cup K$; supposons construits K_0, K_1, \dots, K_{n-1} . Pour chaque point isolé x de K_{n-1} , choisissons deux points $a < b$ de I tels que $[a, b] \cap K_{n-1} = \{x\}$ et $x = \frac{a+b}{2}$. On considère alors la suite $(y_{k,x})_k$ définie par $y_{k,x} = x + (-1)^k \frac{b-a}{2^k}$. Soit alors $K_n = K_{n-1} \cup \{y_{k,x} \mid x \text{ est isolé dans } K_{n-1} \text{ et } k \geq 1\}$. On peut facilement vérifier que pour tout $n \geq 1$, on a $K'_n = K_{n-1}$. Soit maintenant D_n , l'image de K_n par la bijection affine croissante $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)}]$.

Soit Φ l'application définie sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ à valeur dans l'ensemble des espaces métriques compacts 0-dimensionnels donnée par : pour $b = (b_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, soit

$$\Phi(b) = \{0\} \cup \bigcup \{D_{n+1} : n \geq 0 \text{ and } b_n = 1\}$$

Notons que l'on peut d'ores et déjà construire des exemples de surfaces non HR-équationnelles. En effet, si \mathbb{I} désigne la suite identiquement égale à 1, i.e. $\forall n \geq 0 : \mathbb{I}_n = 1$, on a $\Phi(\mathbb{I})'' \subsetneq \Phi(\mathbb{I})'$. D'autre part $\Phi(\mathbb{I})''$ est homéomorphe à $\Phi(\mathbb{I})'$. Ainsi, la suite des dérivée topologique successives de $\Phi(\mathbb{I})$ est infinie en ce sens qu'elle est strictement décroissante au sens des inclusion d'ensembles. Il s'en suit que $\Phi(\mathbb{I})$ n'est pas de type fini. Une surface ayant une frontière idéale homéomorphe à cet ensemble ne peut donc être HR-équationnelle. Nous allons néanmoins continuer cette construction, elle va nous permettre d'accéder à un résultat plus fort.

Considérons l'application Λ associant une suite de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ à tout espace métrique compact de dimension 0 défini de la façon suivante : soit X un espace métrique compact de dimension

0; $\Lambda(X)$ est définie en deux temps. On considère d'abord la suite $(X_n)_n$ d'espaces définie à partir de X par le schéma de récurrence suivant :

$$\begin{cases} X_0 = X, \\ X_{n+1} = \overline{X'_n \setminus X''_n}. \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n , le n -ième terme de $\Lambda(X) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est égal à 1 par définition si et seulement si X'_n est homéomorphe à X_{n+1} ; dans le cas contraire, il vaut 0. Bien sûr, si X et Y sont deux espaces homéomorphes, alors $\Lambda(X) = \Lambda(Y)$.

Lemme 2.3.1

Pour toute suite $b = (b_n)_n$ de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ non ultimement constante égale à 0, on a $b = \Lambda(\Phi(b))$.

Preuve. Soit δ , l'opérateur de décalage à gauche défini sur les suite par : pour tout $b = (b_n)_n \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, pour tout $n \geq 0$, $\delta(b)_n = b_{n+1}$. $\overline{\Phi(b)' \setminus \Phi(b)''}$ est alors homéomorphe à $\Phi(\delta(b))$.

En effet :

$$\begin{aligned} \Phi(b)' &= \{0\} \cup \bigcup \{D'_{n+1} : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_{n+1})' : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K'_{n+1}) : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\}. \end{aligned}$$

Notons que $0 \in \Phi(b)'$ car b n'est pas ultimement constante égale à 0. Comme $K'_n = K_{n+1}$, on a ensuite :

$$\begin{aligned} \Phi(b)' &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_n) : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\} \\ \text{et } \Phi(b)'' &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_{n-1}) : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\} \\ &\text{où } K_{-1} = C \text{ l'ensemble de Cantor.} \end{aligned}$$

$$\text{Par conséquent } \Phi(b)' \setminus \Phi(b)'' = \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_n \setminus K_{n-1}) : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\}$$

$$\text{et } \overline{\Phi(b)' \setminus \Phi(b)''} = \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(\overline{K_n \setminus K_{n-1}}) : n \geq 0 \text{ et } b_n = 1\}.$$

Il est alors facile de voir que :

$$\overline{K_n \setminus K_{n-1}} = \begin{cases} K_n & \text{if } n > 0, \\ \emptyset & \text{if } n = 0; \text{ dans ce cas : } K_n = K_0 = K_{-1} = C. \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(b)' \setminus \Phi(b)''} &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_n) : n \geq 1 \text{ et } b_n = 1\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+2}(K_{n+1}) : n \geq 0 \text{ et } b_{n+1} = 1\}. \end{aligned}$$

Notons que cet espace est homéomorphe à :

$$\Phi(\delta(b)) = \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_{n+1}) : n \geq 0 \text{ et } b_{n+1} = 1\}$$

En effet, pour voir cela, on considère pour tout entier n la bijection affine suivante: $\psi_n : \varphi_{n+2}([0, 1]) \longrightarrow \varphi_{n+1}([0, 1])$ définie par $\psi_n = \varphi_{n+1}\varphi_{n+2}^{-1}$.

$$\text{Puis } \psi = \bigcup \{\psi_n : n \geq 0\} : \bigcup \{\varphi_{n+2}([0, 1]) : n \geq 0\} \longrightarrow \bigcup \{\varphi_{n+1}([0, 1]) : n \geq 0\}.$$

On a alors $\Phi(\delta(b)) = \psi(\overline{\Phi(b)' \setminus \Phi(b)''})$. Rappelons que $\Lambda(\Phi(b))$ est définie à partir de la suite d'espaces suivante :

$$\begin{cases} X_0 = \Phi(b) \\ X_{k+1} = \overline{X'_k \setminus X''_k} \end{cases}$$

On tire de la discussion précédente le fait que pour tout $k \geq 0$:

$$X_k = \psi^{-k}(\Phi(\delta^k(b))).$$

Et donc $\Lambda(\Phi(b))_k = 0$ si et seulement si $\Phi(\delta^k(b))'$ est homéomorphe à $\Phi(\delta^{k+1}(b))$.

$$\begin{aligned} \Phi(\delta^k(b))' &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_{n+1})' : n \geq 0 \text{ et } b_{n+k} = 1\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_n) : n \geq 0 \text{ et } b_{n+k} = 1\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Et

$$\begin{aligned} \Phi(\delta^{k+1}(b)) &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_{n+1}) : n \geq 0 \text{ et } b_{n+k+1} = 1\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_n(K_n) : n \geq 1 \text{ et } b_{n+k} = 1\} \end{aligned}$$

Supposons maintenant que dans la formule 2.1, $b_k = 1$; $\Phi(\delta^k(b))'$ contient alors un ensemble de Cantor: $\varphi_1(K_0)$ qui n'est pas dans l'adhérence d'un ensemble de points isolés. Ainsi il contient des points d'accumulation qui ne sont pas points d'accumulation de points isolés. Cela n'est pas vrai pour $\Phi(\delta^{k+1}(b))$; ces espaces ne peuvent donc être homéomorphe.

Par ailleurs, si $b_k = 0$, on obtient

$$\Phi(\delta^k(b))' = \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_{n+1}(K_n) : n \geq 1 \text{ et } b_{n+k} = 1\},$$

qui est homéomorphe à

$$\Phi(\delta^{k+1}(b)) = \{0\} \cup \bigcup \{\varphi_n(K_n) : n \geq 1 \text{ et } b_{n+k} = 1\}$$

Finalement on a $\Lambda(\Phi(b))_k = 0$ si et seulement si $b_k = 0$.

□

On tire comme conséquence de ce lemme qu'en particulier Φ est "injective" en ce sens que pour tout $b, b' \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\Phi(b)$ et $\Phi(b')$ sont homéomorphes si et seulement si $b = b'$. Par ailleurs, l'ensemble des suites de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ non ultimement périodiques possède la cardinalité du continu. Tenant compte du lemme 2.1.3, nous avons donc démontré que l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces non-compactes planaires sans bord possède au moins la cardinalité du continu. Rappelons que l'on ne considère que les surfaces triangularisées possédant une triangularisation dont le nombre de triangles est au plus dénombrable. En fait, on a le résultat suivant :

Théorème 5

L'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces non-compactes sans bord possède exactement la cardinalité du continu 2^{\aleph_0} .

Preuve. Nous avons vu que ce cardinal est au moins 2^{\aleph_0} ; pour voir qu'il est aussi inférieur ou égal, on montre qu'il existe une surjection de \mathbb{R} sur l'ensemble des surfaces non-compactes planaires. D'après le théorème 2, on sait que toute surface est somme connexe arborescente de sphères, de tores et de plans projectifs; on en déduit qu'il existe une surjection de l'ensemble des arbres de degré au plus 2, dont les nœuds sont étiquetés sur un alphabet de 3 symboles, sur l'ensemble des surfaces sans bord. En effet, un tel arbre définit trivialement une somme connexe arborescente et le théorème 2 nous dit que toute surface sans bord peut être obtenue de la sorte. Par ailleurs, un tel arbre est codé par un arbre binaire complet étiqueté sur un alphabet à 4 symboles; on introduit un nouveau symbole pour coder l'absence d'un nœud. Ainsi, on a une surjection de l'ensemble des arbres binaires complet sur l'ensemble des surfaces sans bord. Enfin, par un parcours en largeur, on code un arbre binaire étiqueté sur un alphabet donné par un mot infini sur le même alphabet. On a donc une surjection de l'ensemble des mots infinis sur un alphabet à 4 symboles sur l'ensemble des surfaces sans bord; d'autre part l'ensemble des mots infinis sur 4 symboles possède bien évidemment la cardinalité du continu. Ainsi, le cardinal de l'ensemble des surfaces sans bord est au plus 2^{\aleph_0} ; et bien entendu, il est supérieur au cardinal de l'ensemble des classes d'homéomorphisme de surfaces à bord.

□

2.4 Surfaces planaires à bord

Nous proposons dans cette partie une extension du théorème 1 au cas des surfaces planaires à bord. L'étude des surfaces sans bord a mis en évidence le rôle central de l'espace des bouts en tant qu'invariant. Pour le cas des surfaces planaires à bord, il ne suffit pas à caractériser les classes d'homéomorphisme; il est nécessaire d'affiner sa structure. C'est dans ce but que nous introduisons le concept de *fleur*; cela consiste à définir une partition de l'espace des bouts en sous-ensembles que nous appellerons des fleurs; chacun de ces sous-ensembles sera lui-même structuré par un ordre cyclique. Nous verrons que l'espace des bouts, muni de cette structure, caractérise une surface non-compacte planaire à bord (théorème 6). La démonstration de ce fait nécessite plusieurs étapes; nous commencerons par définir formellement le concept de fleur; ensuite, nous développerons des outils permettant de manipuler les

fleurs en termes de courbes plongées dans une surface; enfin, nous aborderons la classification proprement dite.

L'extension de ce résultat au cas des surfaces non-compactes à bord orientables et de genre fini ne semble pas poser trop de difficulté. Par contre, le cas général des surfaces non compactes à bord demeure à nos yeux très mystérieux.

2.4.1 Topologie florale

Fleurs

Tout au long de cette section, S désigne une surface triangularisée *non compacte à bord planaire*. Comme d'habitude, nous ne nous intéressons qu'à la classe d'homéomorphisme de S ; en fait, par abus de notation, il nous arrivera de confondre S avec sa classe d'homéomorphisme.

Les composantes connexes du bord de S sont des variétés de dimension 1 sans bord : des courbes simples fermées homéomorphes au cercle S^1 ou bien des courbes simples non-compactes homéomorphes à \mathbb{R} .

On considère deux surfaces S' et \bar{S} ; S' est obtenue à partir de S en recollant un disque sur chacune de ses composantes compactes de bord; \bar{S} est alors obtenue à partir de S' en recollant un demi-plan sur chacune de ses composantes de bord.

Construction de S' . Par hypothèse, S est planaire, on peut donc supposer $S \subset S^2$. Considérons $\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial S$ une paramétrisation d'une composante connexe compacte du bord de S . γ est une courbe de Jordan de S^2 , elle sépare donc S^2 en deux disques, i.e. $S^2 \setminus \gamma$ est formée de deux disques ouverts D_1 et D_2 . D'autre part, on suppose S connexe, et du fait qu'elle est une surface, elle le reste si on lui retire γ ; donc $S \setminus \gamma$ est totalement inclus dans D_1 ou dans D_2 , disons D_1 par exemple. Pour construire S' , on recolle D_2 sur γ ; puis on répète cette opération pour toute les composantes connexes compactes de S , on obtient finalement S' . Notons que l'on a $S \subset S' \subset S^2$; en particulier S' est planaire.

Construction de \bar{S} . Soit $\gamma :]0, 1[\rightarrow \partial S$ paramétrisation d'une composante connexe non compacte du bord de S' . Chaque point $\gamma(x)$ ($x \in]0, 1[$) possède un voisinage ouvert dans S homéomorphe au demi-disque $E = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x_1, x_2)\|_2 < 1 \text{ et } x_2 \geq 0\}$: il existe un plongement $j_x : E \rightarrow S \subset S^2$ tel que $j_x(0, 0) = \gamma(x)$ qui envoie le bord de E sur le bord de S . On considère un plongement $\bar{j}_x : D^2 \rightarrow S^2$ prolongeant j_x . La famille $\{\bar{j}_x(D_\epsilon) \mid D_\epsilon \text{ disque ouvert centré en } 0 \text{ de rayon } \epsilon > 0\}$ constitue une base des voisinages de x dans la topologie de S^2 . Par conséquent, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\bar{j}_x(D_\epsilon) \cap S = \bar{j}_x(D_\epsilon) \cap \bar{j}_x(E)$; rappelons que S est munie de la topologie induite par la topologie de S^2 . On pose alors $D_x = \bar{j}_x(D_{\frac{\epsilon}{2}}) \setminus \bar{j}_x(E)$ puis $P = \bigcup_{x \in]0, 1[} D_x$. P est connexe. En effet, soit C une composante connexe de P . On peut lui associer la partie: $C' = \{x \in \gamma \mid D_x \subset C\}$ de γ^2 . Il est clair que C' est ouverte. On peut aussi montrer qu'elle est fermée; en effet, soit $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite de C' convergente vers $x_0 \in \gamma$, D_{x_0} intercepte une infinité de D_{x_n} , donc par construction de C , $D_{x_0} \subset C$ et $x_0 \in C'$. D'autre part, γ est connexe et C' est non vide, donc $\gamma = C'$ et par suite $P = C$.

2. Pour simplifier les notations, $\gamma(]0, 1[)$ est notée γ .

P n'est pas encore homéomorphe à un plan, il peut subsister des "trous". Soit α un lacet de P , les composantes connexes de $S^2 \setminus \alpha$ sont toutes homéomorphes à des disques ouverts, l'une d'elles contient S . On considère alors T_α la réunion des composantes connexes de $S^2 \setminus \alpha$ qui ne contiennent pas S . On pose alors $P' = P \cup \bigcup_\alpha T_\alpha$. On peut montrer que P' est simplement connexe, et donc, homéomorphe à un plan. D'autre part, on peut voir que $\overline{P'} \cap S = \gamma$, $P' \cup \gamma$ est un demi-plan fermé. Par conséquent $S \cup P$ représente le recollement d'un demi-plan sur γ , du fait que $S \cup P \subset S^2$, la variété obtenue est planaire. L'ensemble des composantes du bord est dénombrable: $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \dots\}$. En itérant ce procédé de recollement de plans, on construit une suite croissante de surfaces $S' = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_k \subset \dots$ où S_k est obtenu en recollant un demi-plan sur γ_{k-1} dans S_{k-1} et toutes ces surfaces sont des parties de S^2 . Finalement on obtient \overline{S} comme union de tous les S_k . On a alors $S \subset S' \subset \overline{S} \subset S^2$, en particulier \overline{S} est planaire.

\overline{S} est donc une surface planaire sans bord non compacte. Cela va nous permettre de considérer un plongement agréable de S dans la sphère S^2 . $B(\overline{S})$ est un espace métrique compact de dimension zéro, on peut donc le plonger dans l'espace de Cantor et donc dans la sphère S^2 (cf. [HY61]). Choisissons un tel plongement, son image sera encore notée $B(\overline{S})$. D'après le théorème de Kerékjártó-Richards, le complémentaire de $B(\overline{S})$ dans S^2 est une surface planaire homéomorphe à \overline{S} ; soit $\varphi : \overline{S} \rightarrow S^2 \setminus B(\overline{S})$ un homéomorphisme. Rappelons que seules les classes d'homéomorphisme nous intéressent, on peut donc remplacer \overline{S} par $\varphi(\overline{S})$. Par ailleurs, S et S' sont des sous-surfaces de \overline{S} , ce qui nous autorise à considérer $\varphi(S)$ et $\varphi(S')$ au lieu d'elles, ce que nous ferons dans la suite.

Remarquons que le compactifié de \overline{S} est exactement S^2 ; on peut choisir comme représentant d'un bout $p \in B(\overline{S})$ une suite emboîtée de voisinages du point de S^2 associé à p ; on peut choisir tous ces voisinages homéomorphes à des disques fermés privés d'ensembles de dimension zéro.

Considérons la partie Φ de $B(S) \times B(\overline{S})$ définie par :

$$((P_k)_k, [(\overline{P}_n)_n]) \in \Phi \text{ si et seulement si } \forall n \exists k P_k \subset \overline{P}_n \quad (2.2)$$

On vérifie facilement que cette définition ne dépend pas des représentants des bouts.

Lemme 2.4.1

Φ est le graphe d'une application continue, surjective, encore notée Φ , de $B(S)$ sur $B(\overline{S})$.

Preuve. (i) Chaque bout $(P_k)_{k \geq 0} \in B(S)$ possède au plus une image par Φ

Soient $(\overline{P}_n)_{n \geq 0}$ et $(\overline{P}'_n)_{n \geq 0}$ deux représentants de bouts de \overline{S} satisfaisant la condition (2.2). Si nous avons affaire à deux bouts distincts, il existerait n_0 tel que \overline{P}_{n_0} et \overline{P}'_{n_0} soient disjoints. Or par (2.2), il existe k_0 tel que $P_{k_0} \subset \overline{P}_{n_0}$ et k'_0 tel que $P_{k'_0} \subset \overline{P}'_{n_0}$. On a alors $P_{\max\{k_0, k'_0\}} \subset \overline{P}_{n_0} \cap \overline{P}'_{n_0}$, contradiction.

(ii) Tout élément de $B(S)$ possède une image par Φ

Supposons au contraire qu'il existe un bout de S représenté par une suite de régions emboîtées $(P_k)_k$ qui n'a pas d'image, i.e. tel que pour tout bout de \overline{S} représenté par $(\overline{P}_n)_n$, il existe N tel qu'il existe des entiers k aussi grands que l'on veut avec $P_k \not\subset \overline{P}_N$.

On montre d'abord que cela implique que quelque soit le bout de \overline{S} représenté par une suite $(\overline{P})_n$, on a en fait $P_k \cap \overline{P}_n = \emptyset$ pour k et n suffisamment grands. Soit donc un bout de \overline{S} représenté par une suite de régions emboîtées $(\overline{P}_n)_n$. Si pour tout k et n , on a $P_k \cap \overline{P}_n = \emptyset$, c'est fini. Sinon il existe k et n tel que $P_k \cap \overline{P}_n \neq \emptyset$. Comme $(\overline{P}_n)_n$ est une suite emboîtée d'intersection vide, il existe $n' \geq N$ tel que $P_k \not\subseteq \overline{P}_{n'}$. Le choix de $n' \geq N$ implique qu'il existe des entiers k'' aussi grand que l'on veut avec $P_{k''} \not\subseteq \overline{P}_{n'}$. Or la frontière $Fr \overline{P}_{n'}$ est compacte. Par conséquent il existe $k' > k$ tel que $P_{k'} \cap Fr \overline{P}_{n'} = \emptyset$. On a alors $P_{k'} \cap \overline{P}_{n'} = \emptyset$ ou bien $P_{k'} \subset \overline{P}_{n'}$; mais $P_{k'} \subset \overline{P}_{n'}$ implique que $\forall k'' \geq k' : P_{k''} \subset \overline{P}_{n'}$, ce qui contredit l'hypothèse sur le choix de n' . On a donc $P_{k'} \cap \overline{P}_{n'} = \emptyset$.

Considérons maintenant une suite $(x_k)_{k \geq 0}$ de points de S tels que $x_k \in P_k$. Nous allons voir que cette suite ne possède pas de point d'adhérence dans $\overline{S} \cup B(\overline{S})$, ce qui constituera une contradiction, ce dernier ensemble étant compact. D'abord, S ne peut pas comporter de point d'adhérence de $(x_k)_{k \geq 0}$ car sinon ce point appartiendrait à l'intersection des adhérences des P_k , qui est vide. $(x_k)_k$ ne possède pas non plus de point d'adhérence dans \overline{S} . C'est évident si l'on remarque que chaque point de $\overline{S} \setminus S$ possède un voisinage entièrement contenu dans $\overline{S} \setminus S$; rappelons que $x_k \in S$. Supposons donc que $(x_k)_k$ a pour valeur d'adhérence un bout $p \in B(\overline{S})$ représenté par une suite $(\overline{P}_n)_n$; la famille $\{\overline{P}_n \cup \overline{P}_n^*\}_n$ constitue une base des voisinages de p dans la topologie de $\overline{S} \cup B(\overline{S})$. Nous avons vu qu'il existe k' et n' tels que $P_{k'} \cap \overline{P}_{n'} = \emptyset$; en particulier pour tout $k \geq k'$, $x_k \notin \overline{P}_{n'} \cup \overline{P}_{n'}^*$, ce qui contredit le fait que p est un point adhérent à $(x_k)_k$. Nous avons donc prouvé que Φ est bien une application.

(iii) Φ est continue

On montre que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert. Rappelons que la topologie de $B(\overline{S})$ est définie par la base d'ouverts $\{\overline{U}^* \mid \overline{U} \text{ région de } \overline{S} \text{ de frontière compacte}\}$; on montre que pour toute région \overline{U} de \overline{S} , $\Phi^{-1}(\overline{U}^*)$ est un ouvert. Pour ce faire, on vérifie que $\Phi^{-1}(\overline{U}^*) = \bigcup U^*$ où l'union est prise sur toute les régions U de S contenues dans \overline{U} . Chaque U^* étant un ouvert, nous avons écrit $\Phi^{-1}(\overline{U}^*)$ comme union d'ouvert, c'est donc un ouvert.

(iv) Φ est surjective

Supposons qu'il existe un bout de \overline{S} représenté par $(\overline{P}_n)_n$ qui ne possède pas d'antécédent par Φ . Pour tout n , \overline{P}_n intercepte S ; sinon, \overline{P}_n serait contenu dans un demi-plan P pour n assez grand, ce qui conduirait à une contradiction sachant que $Fr \overline{P}_n$ est compacte. Soit donc pour tout n , un élément x_n de $\overline{P}_n \cap S$. On montre de façon similaire à **(ii)** que la suite $(x_n)_n$ ne possède aucune valeur d'adhérence dans $S \cup B(S)$. Or ce dernier est compact : contradiction.

□

Définition 8 (Fleur)

Nous appellerons **fleur** toute partie de $B(S)$ de la forme $\Phi^{-1}(\{p\})$ avec $p \in B(\overline{S})$.

Les fleurs sont simplement les classes d'équivalence relatives à la relation \sim_Φ définie par $p \sim_\Phi p'$ ssi $\Phi(p) = \Phi(p')$. Notons que Φ induit un homéomorphisme $\overline{\Phi}$ entre l'ensemble des fleurs muni de la topologie quotient et $B(\overline{S})$ ($\overline{\Phi}$ est une bijection continue sur un compact).

On note i le plongement canonique de S dans \overline{S} ; le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 2.4.1.

Lemme 2.4.2 $i \cup \Phi : S \cup B(S) \rightarrow \overline{S} \cup B(\overline{S})$ est une application continue.

Nous construisons maintenant un homéomorphisme entre $S' \setminus \partial S'$ et \overline{S} .

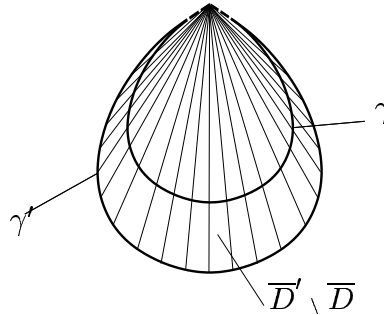
On considère une composante connexe non compacte γ du bord de S' . Nous dirons qu'un bout p de S' est *limite* de γ si et seulement si il existe une suite $(P_n)_n \in p$ tel que $\forall n : P_n \cap \gamma \neq \emptyset$; on montre que γ possède deux bouts limites $p_1, p_2 \in B(S')$, et que $\Phi(p_1) = \Phi(p_2)$, on note $\bar{p} = \Phi(p_1) = \Phi(p_2) \in B(\overline{S})$. Rappelons que $B(\overline{S})$ est identifié à un sous-espace de dimension 0 de S^2 ; ainsi, on considère que \bar{p} est un point de S^2 ; γ est une courbe simple fermée de S^2 privée d'un point qui est exactement \bar{p} . Ainsi, $\overline{\gamma} = \gamma \cup \{\bar{p}\}$ est une courbe de Jordan et partage donc S^2 en deux disques ouverts. L'un de ces disques contient S' , soit D le second. Remarquons que $D \cup \gamma$ est exactement le demi-plan recollé sur γ dans la construction de \overline{S} . On considère γ' la frontière d'un voisinage régulier de γ dans S au sens de la page 39. Un tel voisinage est homéomorphe à une bande $[0, 1] \times \mathbb{R}$ ou, de façon plus imagée, à une plage bordant γ dans S' ; en fait, γ' est une courbe non compacte sans bord longeant γ dont les extrémités convergent aussi vers \bar{p} . $\overline{\gamma'}$ est aussi une courbe de Jordan de S^2 , elle sépare S^2 en deux disques dont l'un contient D , notons le D' . Il est maintenant facile de se convaincre qu'il existe une homotopie

$$H_\gamma : (\overline{D'} \setminus \overline{D}) \times [0, 1] \rightarrow \overline{D'} \setminus \{\bar{p}\}$$

telle que

- $\forall t \in [0, 1], H_\gamma(., t) : (\overline{D'} \setminus \overline{D}) \rightarrow \overline{D'} \setminus \{\bar{p}\}$ est un plongement, et $H_\gamma(., t)|_{\gamma'}$ est l'identité;
- $H_\gamma(., 0) : (\overline{D'} \setminus \overline{D}) \rightarrow \overline{D'} \setminus \{\bar{p}\}$ est l'identité;
- $H_\gamma(., 1) : \overline{D'} \setminus \overline{D} \rightarrow \overline{D'} \setminus \{\bar{p}\}$ est un homéomorphisme.

On peut considérer D comme l'union disjointe de segments dont une extrémité est \bar{p} et l'autre appartient à γ' (voir figure page 54).



Pour deux courbes distinctes du bord γ_1 et γ_2 , notons que l'on peut choisir H_{γ_1} et H_{γ_2} avec des domaines disjoints. Ainsi, la famille des H_γ permet de définir une homotopie

$$H : S' \setminus \partial S' \times [0, 1] \rightarrow \overline{S}$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

- $\forall t \in [0, 1]$, $H(\cdot, t)$ est un plongement et $H(\cdot, t)|_{S' \setminus (\cup D')}$ est l'identité;
- $H(\cdot, 0)$ est l'identité;
- $H(\cdot, 1) : S' \setminus \partial S' \rightarrow \bar{S}$ est un homéomorphisme.

Pour simplifier les notations, on note η l'application $H(\cdot, 1)$. Relevons le résultat suivant :

Lemme 2.4.3 $\eta : S' \setminus \partial S' \rightarrow \bar{S}$ est un homéomorphisme.

Courbes et fleurs

Nous allons voir dans cette partie comment l'appartenance de deux bouts à la même fleur peut être caractérisée en terme de séparations par des courbes plongées dans la surface, i.e. des *immersions* du segment fermé $[0, 1]$, ou bien du segment ouvert $]0, 1[$, ou bien du cercle S^1 dans S (cf. [BG87]). Par *courbe* nous entendons en fait *courbes simpliciales*, i.e. des courbes n'empruntant que les arêtes de la triangulation de S dont on considère la double subdivision barycentrique; cette restriction est raisonnable du fait que toute courbe plongée dans S est isotope à une courbe simpliciale (cf. [RS72]). Une telle courbe sera dite *correctement plongée* si elle est *simple*, i.e. injective, si son intérieur est inclus dans l'intérieur de S , et si son bord, dans le cas d'un segment fermé, est inclus dans le bord de S . Une courbe correctement plongée γ sera dite *essentielle* dans les cas suivants : γ est un segment qui connecte deux composantes distinctes du bord de S , ou bien γ est non compacte et converge vers deux bouts de S , ou bien γ est fermée, non homotopiquement nulle dans S .

Lemme 2.4.4

Deux bouts de S appartiennent à la même fleur si et seulement si il n'existe pas de courbe simple fermée de S les séparant dans $S \cup B(S)$.

Preuve. (i) : (\Rightarrow)

Soient deux bouts p, p' de S représentés respectivement par $(P_n)_n$ et $(P'_n)_n$, et $\gamma : S^2 \rightarrow S$ une courbe simple fermée telle que p et p' n'appartiennent pas à la même composante connexe de $S \cup B(S) \setminus \gamma$. Soient C_1 et C_2 les composantes connexes de $S \setminus \gamma$; comme γ est compacte, on peut supposer que pour n assez grand, $P_n \subset C_1$ et $P'_n \subset C_2$; $\bar{S} \setminus \gamma$ est constituée de deux composantes connexes C'_1 et C'_2 telles que $C_i \subset C'_i$ ($i = 1, 2$). Supposons que p et p' appartiennent à la même fleur : il existe un bout $\bar{p} \in B(\bar{S})$ tel que $\Phi(p) = \Phi(p') = \bar{p}$. Soit $(\bar{P}_n)_n$ une suite de régions emboîtées de \bar{S} qui représente \bar{p} . Il existe N_0 tel que $\bar{P}_{N_0} \cap \gamma = \emptyset$, donc \bar{P}_{N_0} est inclus dans C'_1 ou bien dans C'_2 , disons C'_1 ; mais alors, pour n assez grand, $P'_n \cap \bar{P}_{N_0} = \emptyset$, c'est une contradiction.

(ii) : (\Leftarrow)

Soient deux bouts p, p' de S n'appartenant pas à la même fleur, $(P_n)_n$ et $(P'_n)_n$, des représentants respectifs de p et p' . Soient $\bar{p} = \Phi(p)$, $\bar{p}' = \Phi(p')$. Par hypothèse, \bar{p} et \bar{p}' sont deux bouts distincts de \bar{S} qui est une surface sans bord; on peut montrer qu'ils sont alors séparés par une courbe simple fermée $c : S^1 \rightarrow \bar{S}$; pour voir cela, on peut par exemple regarder \bar{S} comme une somme connexe arborescente. On considère alors la courbe $c' = \eta^{-1}(c)$;

comme elle est homotope à c , il est clair qu'elle sépare aussi \bar{p} et \bar{p}' . Mais alors, par définition de Φ , elle sépare aussi p et p' .

□

Lemme 2.4.5

Soient p_1 et p_2 deux bouts de S ; alors p_1 et p_2 appartiennent à la même fleur si et seulement si toute courbe γ ayant p_1 et p_2 pour limites partage S en deux parties.

Idée de preuve. Supposons (\Rightarrow) faux, i.e. il existe une courbe γ qui ne sépare pas S et qui a pour limites p_1 et p_2 et p_1 et p_2 appartiennent à la même fleur; soit $x \in \gamma$; un voisinage suffisamment petit de x dans S , homéomorphe à un disque, est partagé en deux par γ ; cependant, comme γ est supposée ne pas séparer S , ces deux parties sont connectées dans $S \setminus \gamma$ par une courbe simple que l'on note α ; maintenant, il est facile de prolonger α des deux côtés vers x pour finalement fabriquer une courbe simple fermée qui sépare p_1 et p_2 ; c'est une contradiction en vertu du lemme 2.4.4.

(\Leftarrow) : soit γ une courbe joignant p_1 et p_2 qui partage S en deux parties; si p_1 et p_2 ne sont pas dans la même fleur, alors on peut les séparer par une courbe simple fermée que l'on note α ; on montre par récurrence sur le nombre de points d'intersection de γ avec α que α peut être modifiée de façon à connecter les deux parties de S séparées par γ .

□

Lemme 2.4.6

Un arc essentiel sépare S en deux parties si et seulement si il connecte deux composantes du bord non compactes associées à la même fleur.

Notons qu'une composante non compacte du bord de S est canoniquement associée à une fleur, puisque les deux bouts de S vers lesquels elle converge appartiennent toujours à la même fleur.

Idée de preuve. Soient γ_1 et γ_2 les deux composantes du bord de S connectées par un arc essentiel α ; rappelons que par définition des arcs essentiels, $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Si l'une au moins de ces deux courbes est compacte, clairement, α ne peut séparer S ; on les suppose donc toutes les deux non-compactes. On considère alors un voisinage régulier V dans S de $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \alpha$. La frontière de V est constituée de deux courbes non-compactes; soit γ l'une d'entre elles. On voit facilement que γ sépare S si et seulement si α la sépare aussi; par ailleurs, les limites de γ sont deux bouts p_1 et p_2 appartenant respectivement aux deux fleurs associées à γ_1 et γ_2 . On conclut en appliquant le lemme 2.4.5.

□

Notons qu'une courbe simple partitionne au plus une fleur.

Lemme 2.4.7

Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ un ensemble fini de courbes compactes essentielles telles que :

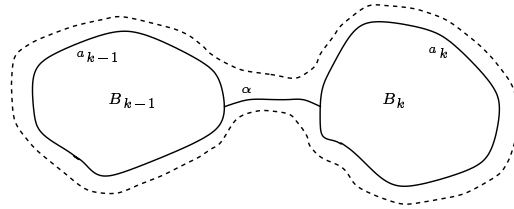
- *chaque a_i sépare S en deux parties, A_i qui contient toutes les autres courbes et B_i , qui n'en contient aucune;*

- pour tout i , la partition de $B(S)$ définie par les deux ensembles $\bigcap A_i^*$ et $\bigcup B_i^*$ est saturée pour la relation d'appartenance à la même fleur.

Il existe alors une courbe simple fermée correctement plongée dans S induisant la partition de $B(S)$ constituée des deux sous-ensembles $\bigcap A_i^*$ et $\bigcup B_i^*$.

Idée de preuve. La preuve se fait par récurrence sur k , si $k = 1$, c'est fini. Supposons donc $k \geq 2$.

cas 1 : il existe parmi les a_i deux courbes simples fermées, disons a_{k-1} et a_k on les connecte alors par un arc α et on les remplace par la composante de la frontière d'un voisinage régulier de $a_{k-1} \cup a_k \cup \alpha$ qui est incluse dans $\bigcap A_i$.



cas 2 : Au plus l'un des a_i est une courbe simple fermée

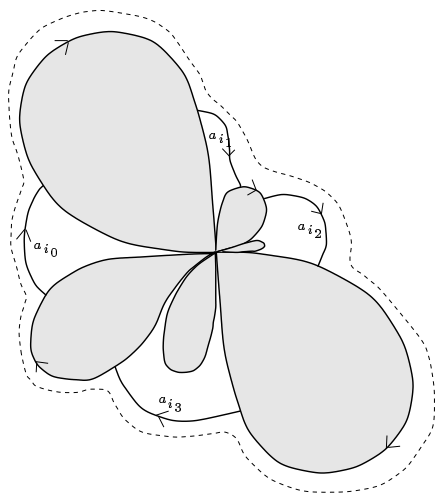
Choisissons donc un arc parmi les a_i , disons a_{i_0} . Par hypothèse, cet arc sépare S , et par le lemme 2.4.6, les limites des courbes du bord qu'il connecte appartiennent à une même fleur f totalement incluse dans $\bigcup B_i^*$; si l'on parcourt l'une de ces courbes à partir d'une des extrémité de a_{i_0} tout en restant dans A_{i_0} , on rencontre un arc a_{i_1} , car à l'infini, on rencontre un bout qui par hypothèse appartient à $\bigcup B_i^*$; en continuant ce processus, on construit par induction une liste d'arcs $a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ qui doit forcément retomber sur a_{i_0} puisque la collection initiale de courbes est finie. En empruntant alternativement ces arcs et les courbes du bord, on a décrit une courbe simple fermée; on remplace alors tous ces arcs par la composante intérieure de la frontière d'un voisinage régulier de cette courbe (voir figure page 58).

Nous avons augmenté le nombre de courbes simples fermées sans augmenter k , le cas 1 permet donc de conclure.

□

Lemme 2.4.8 Soit S une surface plane à bord. Il existe une suite $(B_n)_n$ de régions de S satisfaisant les conditions suivantes :

- pour tout n , $B_n \subset S$ est un compact connexe d'intérieur non vide avec $B_n \subset \overset{\circ}{B}_{n+1}$ et $\bigcup_n B_n = S$;
- pour tout n , B_n est homéomorphe à une surface plane à bord;
- B_n est homéomorphe à un disque, ou bien $\text{Fr } B_n = B_n \cap \overline{B_n^c}$ est une union de courbes compactes correctement plongées dans S deux à deux disjointes, non homotopiquement nulle dans le cas d'une courbe fermée;



- soit U , l'adhérence d'une composante connexe de $S \setminus B_n$, alors U est non compacte et $Fr(U) = U \cap \overline{B}_n$ est connexe, elle est composée d'une seule courbe. De plus, si U contient une composante compacte de ∂S , alors elle en contient une infinité.

Preuve. L'existence d'une suite de régions $(B_n)_n$ satisfaisant le premier point est classique (cf. [AS60]); on se donne une triangularisation de S , que l'on suppose comme toujours dénombrable. On commence par choisir un triangle pour B_0 , puis on ajoute tous les triangles voisins pour B_1 , etc.

B_n est ainsi un polyèdre connexe de dimension 2, qui est planaire. Il se peut que son bord ne soit pas une variété de dimension 1 et présente des singularités, i.e. des points qui ne possèdent aucun voisinage homéomorphe à un disque ou un demi-disque dans B_n . On palie à ce problème de la façon suivante : soit s une singularité du bord de B_n ; s est aussi un sommet de la triangularisation de S ; soit V , l'étoile de s dans S (voir page 28) dont on considère la double subdivision barycentrique. On ajoute alors à B_n tous les triangles de cette subdivision qui contiennent s ; s devient un point intérieur à B_n ; par ailleurs, aucune singularité n'a été créée. En procédant de la sorte pour toutes les singularités de B_n , on transforme ce dernier en surface à bord.

Le bord de B_n , que l'on note comme d'habitude ∂B_n ne doit pas être confondu avec sa frontière $Fr B_n$ dans S . On a seulement $Fr B_n \subset \partial B_n$. Considérons donc une composante connexe α de $Fr B_n$.

Si α est une courbe simple fermée, alors c'est une composante connexe de ∂B_n . Il est facile de voir que l'on peut déformer légèrement α de telle sorte qu'elle ne touche pas ∂S ; ainsi, on peut considérer qu'elle est correctement plongée dans S ; par ailleurs, si elle est homotopiquement nulle, alors c'est la frontière d'un disque D plongé dans S ; si $D \neq B_n$, on ajoute alors D à B_n . On peut donc supposer α essentielle.

Supposons que α soit un arc. Un analyse simple des différents cas de figure montre que ses extrémités appartiennent toutes les deux à ∂S ; de fait, si un tel point appartenait à l'intérieur de S , alors il aurait dans S un voisinage homéomorphe à un disque ouvert; mais alors, on montre qu'il serait un point intérieur de $Fr B_n$ en tant que sous-espace de ∂B_n , ce qui n'est pas le cas. Par ailleurs, si l'intérieur de α coupe ∂S , ce ne peut être qu'en un point isolé, sans

quoi il n'appartiendrait pas à $Fr B_n$; ce cas peut donc être éliminé en déformant légèrement α vers l'intérieur de S . Ainsi, on peut supposer que α est correctement plongé dans S .

Soit maintenant U , l'adhérence d'une composante connexe de $S \setminus B_n$. Premièrement, si U est compacte, on l'ajoute purement et simplement à B_n . Ensuite, si U contient une composante compacte c de ∂S , mais n'en contient pas une infinité, on procède comme suit : on considère un chemin β connectant $Fr U$ à c ; puis on ajoute un voisinage régulier de $\beta \cup c$ à B_n ; ce faisant, on retire c de U et on l'ajoute à B_n ; notons que le nombre de composantes de $Fr U$ n'a pas augmenté.

Supposons justement que $Fr U$ possède plusieurs composantes connexes; on peut supposer que l'on a choisi U de telle sorte que le nombre de composantes connexes de sa frontière soit maximal. Soient α_1 et α_2 deux d'entre elles. Notons que, comme U est connexe, $Fr U$ est totalement incluse dans une seule composante du bord de B_n ; ainsi, α_1 et α_2 sont des arcs et non des courbes fermées. Soit β un chemin correctement plongé dans U connectant les milieux de α_1 et α_2 . On adjoint alors à B_n un voisinage régulier N de β . Notons que β partitionne U en deux parties; en effet, les extrémités de β coupent la composante connexe de ∂B_n en deux parties; et l'union de l'une de ces parties avec β est une courbe simple fermée, une courbe de Jordan de S^2 , qui découpe S^2 en deux disques disjoints ayant tout deux une intersection non nulle avec U . Ainsi, les deux composantes de la frontière de N dans U sont séparées par β . Finalement, après l'ajout de N à B_n , U donne naissance à deux nouvelles composantes U_1 et U_2 de $S \setminus B_n$ qui sont telles que la somme des composantes connexes de $Fr U_1 \cup Fr U_2$ est égale au nombre de composantes connexes de $Fr U$; par ailleurs, $Fr U_1$ et $Fr U_2$ ne sont pas vides et contiennent donc chacune au moins une composante. Par voie de conséquence, $Fr U_1$ et $Fr U_2$ comportent toutes les deux strictement moins de composantes que $Fr U$; nous avons donc fait décroître le nombre maximal de composantes connexes de la frontière d'une composante de $S \setminus B_n$. Si U_1 ou bien U_2 est compacte, alors on l'adjoint à B_n .

□

$Fr(B_n)$ est donc composée d'un nombre fini k_n de courbes; ces courbes délimitent $k_n + 1$ régions $U_{n,0}, U_{n,1}, \dots, U_{n,k_n-1}$ et B_n . Pour tout couple n, k d'entiers tel que $0 \leq k \leq k_n - 1$, on note $\beta_{n,k} = U_{n,k}^*$. On obtient alors le résultat suivant :

Lemme 2.4.9

$\beta_{n,k}$ est un ouvert fermé, en particulier, c'est un compact. $\{\beta_{n,k} \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq k_n - 1\}$ constitue une base pour la topologie de $B(S)$.

Lemme 2.4.10

Soit $A_1, A_2 \subset B(S)$ deux sous-espaces de $B(S)$ avec A_1 compact, qui réalisent une partition de $B(S)$ saturée pour la relation d'appartenance à la même fleur, i.e. si p_1 et p_2 sont deux bouts de S appartenant à la même fleur, alors $p_1, p_2 \in A_1$ ou bien $p_1, p_2 \in A_2$; $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $A_1 \cup A_2 = B(S)$; il existe alors une courbe simple fermée c correctement plongée dans S qui induit cette partition, en ce sens que $S \setminus c$ possède deux composantes connexes U_1 et U_2 avec $U_1^ = A_1$ et $U_2^* = A_2$.*

Réciproquement, toute courbe simple fermée correctement plongée dans S partitionne $B(S)$ en deux compacts saturés pour la relation d'appartenance à la même fleur.

Preuve. On conserve les notations du lemme 2.4.9. Considérons $N = \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 \mid \beta_{n,k} \in A_1\}$; la famille $\{\beta_{n,k} \mid (n, k) \in N\}$ est un recouvrement d'ouverts de A_1 . Comme A_1 est

supposé compact, il existe une partie finie $\tilde{N} \subset N$ telle que $\{\beta_{n,k} \mid (n,k) \in \tilde{N}\}$ recouvre déjà A_1 . Dans \tilde{N} , certain éléments sont inutiles: si $(n_1, k_1) \in \tilde{N}$ est tel qu'il existe $(n_2, k_2) \in \tilde{N}$ tel que $U_{n_1, k_1} \subset U_{n_2, k_2}$, alors on élimine (n_1, k_1) . Par ailleurs, notons que deux parties U_{n_1, k_1} et U_{n_2, k_2} de S sont soit disjointes, soit incluses l'une dans l'autre; il s'en suit que la famille de courbes $\{Fr U_{n,k} \mid (n,k) \in \tilde{N}\}$ satisfait les conditions du lemme 2.4.7; ce qui nous permet de conclure.

La réciproque est une conséquence directe du lemme 2.4.4.

□

Lemme 2.4.11

Soit p un bout appartenant à une fleur de cardinal strictement supérieur à 1. Alors il existe une suite de régions emboîtées $(P_n)_n$ représentant p telle que :

- *Pour tout n , $Fr P_n$ est formé d'un unique arc correctement plongé dans S .*
- *$\forall n, n' : Fr P_n$ et $Fr P_{n'}$ ne peuvent pas être séparées par une courbe simple fermée.*

Preuve. Soit $(B_n)_n$ une suite de partie de S satisfaisant les conditions du lemme 2.4.8.

On choisit comme représentant de p une suite de régions emboîtées $(P_n)_n$, où pour tout n , $P_n = U_{n,k}$ où k est l'unique entier tel que $p \in \beta_{n,k}$. On sait par le lemme 2.4.8, que $Fr P_n$ n'est formée que d'une seule courbe correctement plongée.

Il existe alors un entier n_0 tel que $\forall n, n' \geq n_0 : Fr P_n$ et $Fr P_{n'}$ ne peuvent pas être séparées par une courbe simple fermée. Sinon, en appliquant le lemme 2.4.4 on montre que $|\Phi^{-1}(\Phi(p))| = 1$; effet, on pourrait alors construire une suite de régions emboîtées de S dont les frontières seraient des courbes simples fermées; et dans ce cas, p serait séparé de tout autre bout par une courbe simple fermée, ce qui impliquerait que la fleur de p serait réduite à lui-même. On élimine tous les P_n pour $n < n_0$.

Nous avons le second point. Et pour tout n , $Fr P_n$ est maintenant formée d'un unique arc correctement plongé dans S .

□

Proposition 2.4.1

Soit f une fleur de cardinal strictement supérieur à 1. L'ensemble des bouts de f , limites de composantes du bord, est au plus dénombrable et dense dans f .

Preuve. D'abord, comme on ne considère que des triangularisations dénombrables, le nombre de composantes connexes du bord est nécessairement dénombrable.

Soit p un bout appartenant à une fleur infinie, $(P_n)_n$ un représentant de p donné par le lemme 2.4.11.

Soit γ' et γ'' les composantes du bord de S contenant les extrémités de $Fr P_n$ qui est réduite à un arc correctement plongé. Si $\gamma' \neq \gamma''$, une analyse simple des différents cas de figure montre qu'aucune des deux ne peut être compacte, sans quoi $Fr P_n$ ne séparerait pas S . Par ailleurs, si $\gamma' = \gamma''$ est une courbe fermée compacte, on montre que la partition de $B(S)$ qui est induite par $Fr P_n$ peut être aussi induite par une courbe simple fermée correctement plongée dans S ; ce qui est contradictoire avec les conditions du lemme 2.4.11. On peut donc supposer que γ' et γ'' sont des courbes non compactes.

L'un des deux côtés de γ' (resp. γ'') appartient à P_n . On considère p' (resp. p'') le bout limite de γ' (resp. γ'') dans P_n , il appartient à la fleur de p . Sinon, il existe une courbe simple fermée c correctement plongé dans S qui sépare p de p' et p'' qui eux, appartiennent à la même fleur par le lemme 2.4.6. Choisissons n' tel que $P_{n'} \cap c = \emptyset$. c sépare alors $Fr P_n$ et $Fr P_{n'}$, ce qui contredit le choix de $(P_n)_n$. p' et p'' appartiennent donc à f , on choisit un tel p' pour chaque P_n , on le note p'_n . Comme P_n^* est une base de voisinage de p , la suite $(p'_n)_n$ converge vers p .

□

Un ordre cyclique dans les fleurs

S est planaire et donc *orientable* (cf. [Mas67, HY61]); on la suppose donc orientée. Cette orientation permet de définir rigoureusement l'idée de gauche et de droite pour un observateur se déplaçant sur une courbe. Soit γ une courbe simple orientée partageant S en deux parties S_1 et S_2 ; ces deux surfaces héritent chacune d'une orientation de S , mais seule l'une des deux est compatible avec celle de γ , disons S_1 . Nous dirons alors qu'une partie connexe par arc $A \subset S \setminus \gamma$ est à *gauche* de γ si et seulement si $A \subset S_1$; dans le cas contraire, nous dirons que A est à *droite* de γ .

Lemme 2.4.12 *Soient p_1, p_2, p_3 trois bouts appartenant à la même fleur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

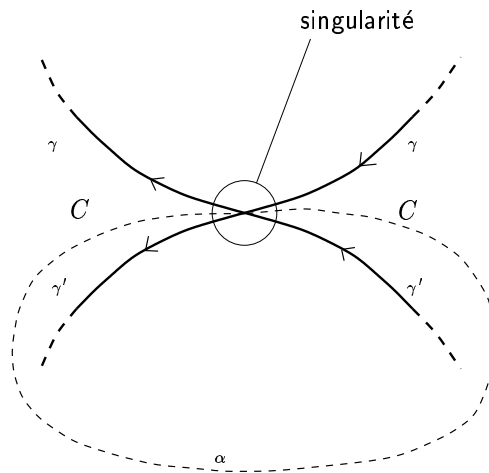
- *il existe une courbe γ ayant pour limites p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 , qui laisse p_3 sur sa gauche, i.e. $\forall (P_n^3)_n \in p_3, \exists n_0 \geq 0$ tel que $P_{n_0}^3$ est à gauche de γ ;*
- *toute courbe γ ayant pour limites p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 , laisse p_3 sur sa gauche.*

Preuve. Il faut montrer que la première condition implique la seconde. Supposons donc qu'il existe une courbe γ ayant pour limites p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 , qui laisse p_3 sur sa gauche et soit γ' une autre courbe ayant pour limites p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 . Comme précédemment, on considère les parties S_1, S_2, S'_1, S'_2 de S où S_1 et S'_1 (resp. S_2 et S'_2) sont respectivement les parties gauches (resp. droites) de γ et de γ' . Nous allons voir que, ni $S_1 \cap S'_2$, ni $S'_1 \cap S_2$ ne peuvent contenir p_3 .

Quitte à déformer légèrement γ ou γ' on peut supposer que leur intersection est formée de point isolés. Supposons donc qu'il existe une composante connexe C de l'intérieur de $S_1 \cap S'_2$ qui contienne p_3 . La frontière de C est contenue dans $\gamma \cup \gamma'$; c'est en fait une 1-variété. En effet, les seules singularités possibles sont des points de croisements de γ et γ' ; et lorsque l'on énumère tous les cas de figures, seul l'un d'entre eux semble problématique, il est représenté dans la figure 2.4.1. On montre cependant que ce cas est absurde; en effet, les deux parties qui se font face sont connectées par un arc α de C (voir figure); la planarité implique alors que cet arc sépare γ et γ' qui pourtant se rejoignent en p_1 et p_2 ; ces derniers appartiendraient alors à α , ce qui est absurde.

$Fr C$ est donc composée de courbes simples, les cas envisageables sont alors les suivants :

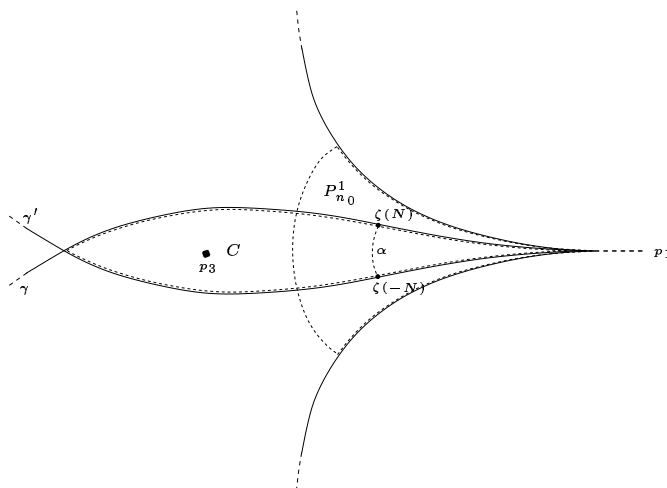
- Supposons que $Fr C$ contienne une courbe simple fermée, la connexité de γ et de γ' ainsi que la planarité de S implique que $Fr C$ ne peut contenir d'autre composante; il s'en suit que p_3



est séparé de p_1 et de p_2 par une courbe simple fermée; par le lemme 2.4.4, c'est contradictoire avec le fait qu'ils appartiennent tous les trois à la même fleur.

- $Fr C$ est donc composée de courbes simples non compactes; soit ζ l'une d'elle. Comme $\zeta \subset \gamma \cup \gamma'$, on peut montrer que ses limites existent et sont dans $\{p_1, p_2\}$. Par ailleurs, de chaque côté, au bout d'un certain temps, ζ est confondue avec γ , ou bien γ' . Il s'en suit que le nombre de composantes de $Fr C$ n'exède pas 2.

Supposons que les deux limites de ζ soient égales au même bout, par exemple p_1 . Plongée dans S^2 , $\bar{\zeta}$ est alors une courbe simple fermée; elle divise S^2 en deux disques D_1 et D_2 , l'un d'eux contenant p_2 , disons D_2 ; C est alors contenue dans D_1 . Mais revenons à S , soit $(P_n^1)_n$ un représentant de p_1 ; il existe $n_0 \geq 0$ tel que $P_{n_0}^1$ n'intercepte pas p_3 ; ensuite, il existe $L > 0$ tel que $\zeta([-\infty, -L] \cup [L, \infty[) \subset P_{n_0}^1$, et ce dernier est connexe; il existe donc un arc α connectant $\zeta(-L)$ et $\zeta(L)$ dans $P_{n_0}^1$. Nous avons fabriqué une courbe simple fermée : $\zeta([-L, L]) \cup \alpha$ qui sépare p_1 et p_2 de p_3 (cf figure), c'est une contradiction.



Ainsi ζ à pour limite p_1 et p_2 . Mais alors, ζ est confondue avec γ ou bien γ' ; pour voir cela, on se sert de l'orientation de C par rapport à celle de γ et γ' . Trois cas se présentent alors: (i) $FrC = \gamma \cup \gamma'$ avec $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$, (ii) $FrC = \gamma$ ou bien (iii) $FrC = \gamma'$; les deux derniers cas étant symétriques. Pour (i), on applique la méthode précédente des deux côtés; (ii) veut dire que γ est à droite de γ' et par voie de conséquence, que γ' est à droite de γ , car C et S_1 ont la même frontière dans S . Il existe alors un chemin α dans $S_2 \cap S'_2$ connectant γ et γ' ; ce chemin arrive sur γ et sur γ' par la droite. D'autre part, γ et γ' sont disjointes mais ont les mêmes limites: dans S^2 , $\overline{\gamma \cup \gamma'}$ est une courbe simple fermée, les orientations de γ et de γ' montrent que α connecte les deux disques séparés par $\overline{\gamma \cup \gamma'}$; c'est une contradiction.

Le lemme est démontré.

□

Le lemme précédent démontre la validité de la définition suivante:

Définition 9

Soient f une fleur de $B(S)$. On définit une relation G d'arité 3 sur f par $\forall p_1, p_2, p_3 \in f$, $G(p_1, p_2, p_3)$ si et seulement si il existe une courbe γ ayant pour limite p_1 et p_2 , orientée de p_1 à p_2 , qui laisse p_3 sur sa gauche.

Lorsqu'une courbe simple joint deux bouts p_1 et p_2 de la même fleur f , elle partage S en deux parties S_1 et S_2 (cf. lemme 2.4.5), ce qui induit une partition de f en deux ensembles qui correspondent aux bouts p tels que $G(p_1, p_2, p)$ est vraie d'une part et d'autre part ceux pour lesquels $G(p_1, p_2, p)$ est fausse. Notons que $G(p_1, p_2, p_3) \Leftrightarrow \neg G(p_1, p_3, p_2)$.

Lemme 2.4.13

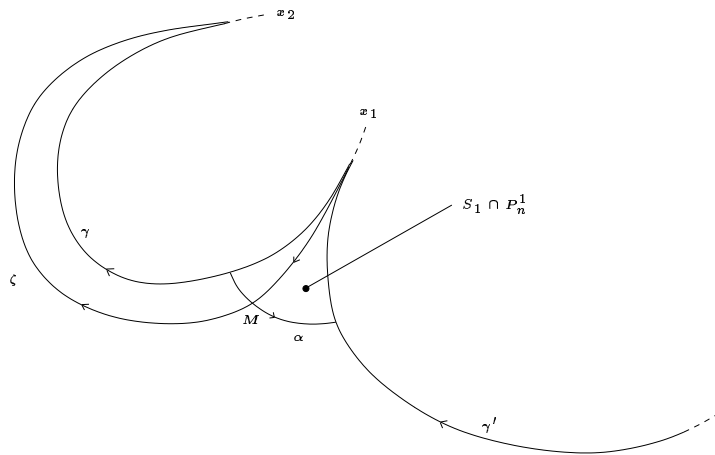
Soient $x_1, x_2 \in B(S)$, alors x_1 et x_2 sont les limites d'une même composante non compacte γ du bord de S si et seulement si ils appartiennent à la même fleur f et on a: soit $G(x_1, x_2, x)$ pour tout $x \in f$, soit $\neg G(x_1, x_2, x)$ pour tout $x \in f$.

Preuve. (\Rightarrow) est facile. On démontre (\Leftarrow).

Soient donc x_1 et x_2 , deux bouts de S appartenant à la même fleur f , tels que pour tout autre bout x de f , $G(x_1, x_2, x)$ soit vraie.

Soit α un segment correctement plongé dans S séparant x_1 de x_2 ; pour construire α , on considère une suite de parties emboîtées $(P_n^1)_n$ représentant p_1 donnée par le lemme 2.4.11; pour n suffisamment grand, P_n^1 ne contient pas p_2 ; on définit alors α comme étant la frontière de P_n^1 . Comme précédemment, on montre que les deux courbes γ et γ' du bord de S qui sont connectée par α sont toutes les deux non compactes; et l'une d'elle, γ par exemple, est orientée en direction opposée de P_n^1 ; γ' est alors orienté en direction de P_n^1 (on peut voir cela en regardant l'orientation de $\gamma \cup \alpha \cup \gamma'$ induite par l'orientation de P_n^1 ; d'ailleurs, nous supposons dans la suite que α est orienté de la sorte, i.e. de γ à γ' . Nous allons voir que γ est notre candidat. Par le lemme 2.4.6, on peut d'ores et déjà dire que les limites de γ sont des bouts de la même fleur, qui est en fait f .

Soit ζ une courbe allant de x_1 à x_2 , ne coupant α qu'en un seul point M . γ est alors située à droite de ζ ; en effet, soit S_1 la partie gauche de ζ ; par définition, c'est elle qui lui induit son orientation; cette orientation est déjà induite par $S_1 \cap P_n^1$, or $\zeta \cap P_n^1 \cup \alpha \cap S_1$



appartient à la frontière de $S_1 \cap P_n^1$; d'autre part, les orientations de $\zeta \cap P_n^1$ et de $\alpha \cap S_1$ sont compatibles avec celle de $S_1 \cap P_n^1$. Mais $\zeta \cap P_n^1$ est orientée en direction de M , donc $\alpha \cap S_1$ est orientée dans la direction opposée à M ; ce qui prouve que l'extrémité de α appartient à S_1 , et par voie de conséquence, que son origine est à droite de ζ ; par ailleurs, cette dernière appartient à γ : γ est donc située à droite de ζ . Donc les limites de γ sont à droite de ζ . Ainsi, les bouts limites de γ , qui appartiennent à f , ne sont pas à gauche de ζ ; et par hypothèse, les seuls bouts de f qui ne sont pas à gauche de ζ sont x_1 et x_2 . Les limites de γ sont donc x_1 et x_2 .

□

2.4.2 Classification des surfaces à bord planaires

Le lemme suivant fait partie du folklore de la théorie des surfaces (cf. [Mas67]). En un certain sens, le théorème 6 en constitue l'extension au cas des surfaces non-compactes.

Lemme 2.4.14

Soient S_1 et S_2 deux surfaces à bord compactes planaires orientées, $f : \partial S_1 \rightarrow \partial S_2$ un homéomorphisme conservant l'orientation. Alors f est prolongeable en un homéomorphisme entre S_1 et S_2 .

Idée de preuve. On se ramène au cas du disque en découpant le long d'arcs essentiels.

□

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette partie. Nous dirons qu'un bout d'une surface S est *limite de composantes compactes du bord* si pour toute suite de régions $(P_n)_n$ le représentant, chaque P_n contient au moins une composante compacte de ∂S .

Théorème 6

Soient S et S' deux surfaces orientées ayant même nombre, éventuellement infini, de composantes compactes de bord; $\sigma : B(S) \rightarrow B(S')$ un homéomorphisme échangeant les fleurs, conservant l'ordre cyclique interne à chaque fleur et échangeant les bouts limites de composantes compactes de bord. Alors S et S' sont homéomorphes; de façon plus précise, σ se prolonge en un homéomorphisme entre les compactifications $(S, S \cup B(S))$ et $(S', S' \cup B(S'))$.

Preuve. Soient $(B_n)_n$ (resp. $(B'_n)_n$) une suite de régions de S (resp. S') satisfaisant les conditions du lemme 2.4.8. On suppose que $B_0 = B'_0 = \emptyset$. Nous allons construire par récurrence une suite d'homéomorphismes f_n entre des compacts d'intérieurs non vides $A_n \subset S$ et $A'_n \subset S'$ telle que :

- (i) $(A_n)_n$ et $(A'_n)_n$ remplissent les conditions du lemme 2.4.8;
- (ii) pour tout entier k , $B_{2k} \subset A_{2k}$ et $B'_{2k+1} \subset A'_{2k+1}$;
- (iii) pour tout n , f_{n+1} prolonge f_n ;
- (iv) si U est l'adhérence d'une composante connexe de $S \setminus A_n$, alors $Fr U$ est connexe et $f_n(Fr U)$ est la frontière d'une composante connexe U' de $S' \setminus A'_n$ avec $\sigma(U^*) = U'^*$;
- (v) U contient une composante compacte du bord de S si et seulement si U' en contient une de S' ; et dans ce cas, elles en contiennent une infinité.

Si S et S' ne contiennent qu'un nombre fini de composantes compactes de bord, on choisit pour A_0 et A'_0 des disques troués englobant toutes les composantes compactes du bord de S et de S' ; dans le cas contraire, on pose $A_0 = A'_0 = \emptyset$.

On construit les f_n alternativement; pour les rangs pairs, on définit d'abord A_n comme partie de S contenant A_{n-1} remplissant les bonnes propriétés, i.e. (i) et (ii); on construit alors f_n et A'_n de telle sorte que A'_n remplisse les propriétés voulues et soit homéomorphe à A_n . Pour les rangs impairs, on se donne d'abord A_n et on procède symétriquement; nous ne décrirons la construction que pour le cas des rangs impairs.

Supposons construits les f_n jusqu'au rang $N - 1$ pour N impair. On pose $A'_N = B'_m$ où $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq N \text{ et } A'_{N-1} \subset \overset{\circ}{B}'_n\}$. Nous allons construire f_N et A_N petit à petit en considérant chaque composante connexe de $A'_N \setminus A'_{N-1}$ l'une après l'autre.

Considérons C' , l'adhérence d'une telle composante; c'est une surface compacte planaire à bord. Le but est de lui associer dans S une sous-surface C contigüe à A_{N-1} ainsi qu'un homéomorphisme $f : (C, Fr C) \rightarrow (C', Fr C')$ tel que $f^{-1}(C' \cap A'_{N-1}) = C \cap A_{N-1}$ et que $f|_{C \cap A_{N-1}} = f_{N-1}|_{C \cap A_{N-1}}$. La méthode que nous allons adopter pour ce faire, consiste à assigner une courbe de S à chaque composante de la frontière de C' , ainsi qu'un homéomorphisme entre cette courbe et la composante en question, de telle sorte que l'ensemble de ces courbes délimitera exactement C ; on étendra ensuite ces homéomorphismes en un homéomorphisme entre C et C' au vu du lemme 2.4.14.

Il nous faut auparavant fixer quelques notations; soient c'_0, c'_1, \dots, c'_k les courbes simples fermées du bord de C' ; on suppose que c'_0 intercepte A'_{N-1} ; c'est d'ailleurs la seule car A'_{N-1} et C' sont planaires et connexes et ne se rencontrent que sur leurs bords. L'orientation de S' induit une orientation pour C' , qui à son tour oriente les c'_i ; on les considère orientées de la sorte. Il se peut que certaines des c'_i aient des parties communes avec le bord de S' ; notons $I = \{i \in [0, k] \mid c'_i \cap \partial S' \neq \emptyset\}$, l'ensemble d'indices correspondant. Pour $i \in I$, c'_i est formée alternativement de morceaux du bord de S' et d'arcs correctement plongés, composantes connexes de $Fr C'$; choisissons l'un d'eux: α'_{i0} , pour $i = 0$, on choisit $C' \cap A'_{N-1}$; puis numérotons les autres dans leur ordre d'apparition en suivant l'orientation de c'_i : $\alpha'_{i1}, \alpha'_{i2}, \dots, \alpha'_{ik_i}$; pour tout $i \notin I$, on pose $\alpha'_{i0} = c'_i$ et $k_i = 0$. On regroupe la suite des c'_i

pour $i \notin I$ et les suites des α'_{ij} en une notation uniforme : d'_0, d'_1, \dots, d'_m dans l'ordre évoqué précédemment. Enfin, pour tout $h \in [1, m]$, on considère Y'_h , adhérence de l'intersection des parties gauches des d'_i pour $i \in [1, h]$. Notons que $C' = Y'_m$.

La méthode de preuve consiste alors à construire par induction une suite de courbes orientées d_0, d_1, \dots, d_m dans S , puis considérer les parties Y_h , pour $h \in [1, m]$, obtenues de façon similaire aux Y'_h mais à partir des d_h , et une liste d'homéomorphismes $g_h : d_0 \cup d_1 \cup \dots \cup d_h \rightarrow d'_0 \cup d'_1 \cup \dots \cup d'_h$ de telle sorte que :

- (1) g_h prolonge g_{h-1} .
- (2) g_h conserve l'orientation des courbes.
- (3) Y_h , l'adhérence de l'intersection des parties gauches des d_i pour $i \in [1, h]$, est telle que $Y_h^* = \sigma^{-1}(Y_h'^*)$.
- (4) $d_0 = f_{N-1}^{-1}(d'_0)$ laisse A_{N-1} sur sa droite.

Le premier pas de cette induction est donné par $f_{N-1} : d_0 = f_{N-1}^{-1}(d'_0)$ et $g_0 \equiv f_{N-1}|_{d_0}$; on choisit l'orientation de d_0 pour que le point (4) soit satisfait; le point (3), pour $h = 0$, est satisfait quant à lui grâce à la condition (iv) de l'hypothèse de récurrence sur f_{N-1} .

Supposons donc construits d_0, \dots, d_{h-1} ; plusieurs cas se présentent alors :

Cas 1 : d'_h est une courbe simple fermée

$Y_{h-1}'^* \setminus Y_h'^*$ est un ouvert fermé de $B(S')$, et en particulier, un compact. Par ailleurs, la partition entre $Y_{h-1}'^* \setminus Y_h'^*$ et son complémentaire dans $Y_{h-1}'^*$ est réalisée par d'_h qui est une courbe simple fermée correctement plongée dans Y_h' ; cette partition est donc saturée pour la relation d'appartenance à la même fleur. Il en est donc de même dans Y_{h-1} pour $\sigma^{-1}(Y_{h-1}'^* \setminus Y_h'^*) = Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)$. Par le lemme 2.4.10, il existe donc une courbe simple fermée correctement plongée dans Y_{h-1} qui réalise cette partition; c'est par définition d_h . On oriente cette courbe de telle sorte qu'elle laisse $Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)$ sur sa droite. On a ainsi $Y_h^* = Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^* \setminus Y_h'^*) = \sigma^{-1}(Y_h'^*)$. On construit alors g_h prolongeant g_{h-1} par un homéomorphisme entre d'_h et d_h .

Cas 2 : d'_h est un arc correctement plongé.

Soient γ'_0 et γ'_1 les composantes du bord de S' connectées par d'_h ; on suppose que d'_h est orienté par Y_h' de γ'_0 à γ'_1 , notons $m'_i = \gamma'_i \cap d'_h$ ($i = 0, 1$). Notons que γ'_0 et γ'_1 ne peuvent être compactes du fait que d'_h est une courbe séparant S' . On considère le bout p'_i de $B(S')$ limite de celle des deux parties de γ'_i séparées par m'_i n'interceptant pas Y_h' ; notons que comme d'_h est séparante, par le lemme 2.4.6, p'_1 et p'_2 appartiennent à la même fleur. Remarquons que γ'_0 est orientée vers p'_0 alors que γ'_1 est orientée dans la direction opposée à celle de p'_1 .

Soient maintenant $p_i = \sigma^{-1}(p'_i)$; en considérant l'autre limite de γ'_i , le lemme 2.4.13 montre p_i est limite d'une composante du bord de S , notons la γ_i ; notons que p_0 et p_1 appartiennent à la même fleur $f = \sigma^{-1}(f')$ où f' est la fleur de p'_0 et p'_1 . L'orientation des γ_i relativement à p_i est la même que celle de γ'_i relativement à p'_i . d_h devra joindre γ_0 à γ_1 .

Soit $m_i \in \gamma_i \cap Y_{h-1}$ ($i = 0, 1$); $\gamma_i \cap Y_{h-1}$ est non vide car $p_0, p_1 \in Y_{h-1}^* = \sigma^{-1}(Y_{h-1}'^*)$. Le but est de les connecter par un arc d_h correctement plongé dans Y_{h-1} , orienté de m_0 à m_1 , qui réalise la partition de Y_{h-1} en $Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)$ et son complémentaire. Notons que $Y_{h-1}^* \setminus \sigma^{-1}(Y_h'^*)$ sera alors nécessairement à droite de d_h . Soit d'abord un arc α connectant

m_0 et m_1 dans Y_{h-1} , orienté vers m_1 , ne coupant aucun des d_i déjà construit ($i = 1 \dots h-1$). Comme p_0 et p_1 appartiennent à la même fleur, par le lemme 2.4.6, α sépare S en deux parties. Notons que cet arc ne sépare pas p_0 de p_1 . Soit ζ la courbe non compacte partant de p_0 , empruntant γ_0 en sens inverse jusqu'à m_0 , suivant ensuite α et revenant enfin vers p_1 en empruntant γ_1 . ζ est orientée de p_0 vers p_1 et les bouts de f qui sont sur sa droite sont ceux qui sont dans la partie droite de α ; or, comme σ conserve l'ordre circulaire, ces bouts sont bien les images réciproque par σ des bouts de f' qui sont à droite de d'_h . Soit U la partie droite de α , on a $U^* \cap f = \sigma^{-1}((Y'_{h-1} \setminus Y'_h) \cap f')$.

Il reste à arranger α pour ajouter ce qui manque à U^* c'est-à-dire $\sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h) \setminus U^*$ et retirer ce qu'il y a en trop : $U^* \setminus \sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h)$. Pour cela remarquons que $\sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h) \setminus U^*$ est un ouvert fermé, saturé pour la relation d'appartenance à la même fleur; en effet, la seule fleur susceptible d'être coupée en deux est f . Par un procédé similaire au cas 1, on peut construire une courbe simple fermée ε qui isole $U^* \setminus \sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h)$. On connecte maintenant α à ε par un arc puis on prend la frontière d'un voisinage régulier du tout. On utilise la même méthode pour retirer $U^* \setminus \sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h)$ de U^* . Nous avons finalement construit un arc qui laisse A_{N-1} sur sa gauche et qui réalise la partition en $\sigma^{-1}(Y'_{h-1} \setminus Y'_h)$ et son complémentaire. On le note d_h , et on établit un homéomorphisme $f_h : d_h \rightarrow d'_h$ respectant l'orientation.

Finalement, on définit C comme étant l'intersection des parties gauches des d_h , i.e. Y_m . Il faut encore s'occuper des composantes compactes du bord de S et de S' . On suppose que si C' contient une telle composante, alors l'un des Y'_h en contient une infinité et donc l'un des bouts de Y'_h est limite de composante compacte du bord. Par hypothèse sur σ , Y_h en contient donc un aussi. Il reste à modifier d_h pour qu'il aille chercher une composante compacte de ∂S dans Y_{h-1} . Ce qui se fait en considérant le voisinage régulier de l'union de d_h , d'un chemin conduisant à une telle composante et de la composante elle-même. Finalement, C est une surface planaire compacte car $Y_m = \sigma^{-1}(Y'_m) = \emptyset$.

Pour finir, par le lemme 2.4.14, on étend g_m en un homéomorphisme entre C et C' ; cet homéomorphisme prolonge bien f_{N-1} . On opère de même pour chaque composante de $A'_N \setminus A'_{N-1}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que la construction de f_N satisfait les hypothèses de récurrence. Le cas N pair est totalement symétrique, il ne sera pas traité ici. \square

2.4.3 Considérations algorithmiques

Nous avons vu dans la section 2.4 que l'ensemble des bouts d'une surface planaire à bord est structuré en fleurs de façon canonique, chacune d'entre elles étant munie d'un ordre cyclique. En matière d'algorithme, nous n'avons pas atteint de résultat concernant cette classification; néanmoins nous donnons dans cette partie les points nous paraissant essentiels pour la mise au point d'un algorithme de décision pour le problème de l'homéomorphisme des surfaces planaires HR-équationnelles.

Soit S une surface planaire à bord HR-équationnelle. On suppose que toutes les surfaces considérées ici ne possèdent dans leurs bords aucune composante compacte.

Conjecture : *S ne possède qu'un nombre fini de fleurs à isomorphisme près³.*

En ce sens, on peut associer à chaque fleur de S son type d'isomorphisme. L'espace des fleurs de S que l'on note $\mathcal{F}(S)$, i.e. le quotient de sa frontière idéale par la relation d'appartenance à la même fleur, est ainsi partitionné en plusieurs types d'isomorphisme de fleur : $\mathcal{F}(S) = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$.

Conjecture : *La sous-algèbre topologique de $2^{\mathcal{F}(S)}$, engendrée par les \mathcal{F}_i , est de cardinal fini. En particulier $\mathcal{F}(S)$ est de type fini au sens de la définition 7.*

Une preuve constructive de cette dernière conjecture donnerait un algorithme pour résoudre notre problème. Néanmoins, nous n'avons pas réussi à mettre en évidence un invariant qui nous permettrait de caractériser la classe d'isomorphisme d'une fleur.

Le premier cas à explorer est celui des surfaces planaires HR-équationnelles à une seule fleur, i.e. les surfaces planaires simplement connexes⁴.

On peut coder une telle surface à l'aide d'un graphe pointé de degré sortant au plus 2 dont les arcs sortants d'un même sommet sont ordonnés. Soit G un tel graphe. On obtient la surface S_G codée par G de la façon suivante : on considère le développement T_G de G , i.e. l'arbre des chemins orientés dans G partant de la racine. On plonge cet arbre dans le plan de telle sorte que, lorsque l'on tourne autour d'un sommet donné à partir de son arc entrant en suivant l'orientation du plan, le premier fils vient en premier. S_G est alors définie comme étant le voisinage régulier de T_G .

On montre qu'un tel graphe est calculable pour une surface HR-équationnelle donnée; néanmoins, il ne constitue pas, et loin s'en faut, un invariant. Cependant, en suivant des idées similaires à celles développées dans la section 2.1, il permet de calculer l'algèbre de Pierce de la fleur; cette dernière est un invariant, mais pas suffisant.

Question : *Quel sont les invariants de S situés “entre” G et l'algèbre de Pierce de sa frontière idéale⁵.*

A cet égard, un objet probablement important à considérer est le graphe des composantes fortement connexes de G .

3. De façon naturelle on considère que deux fleurs sont isomorphes si elle sont liée par un homéomorphisme conservant l'ordre cyclique.

4. Rappelons que l'on ne considère que des surfaces qui ne possèdent pas de composante de bord compacte.

5. le terme “entre” fait référence à l'existence de deux morphismes surjectifs, l'un de G sur le graphe de ses composantes fortement connexes, l'autre du graphe des composantes connexes sur le graphe des atomes de l'algèbre de Pierce.

Chapitre 3

Arborescence et régularité en dimension 3

“Et c’est ainsi que dans l’étroitesse d’un vase, dans son obscurité, ils vivent, chantent, pondent et fixent leurs œufs, meurent. Puisqu’ils perpétuent l’espèce, oui, c’est préférable à les élever en cage et qu’ils ne vivent que l’espace d’un été, mais il reste que c’est une vie au fond d’un vase : pour eux, le vase est l’univers.”

Yasunari Kawabata, “*Kyoto*”, 1971.

Ce chapitre est consacré à l’étude des variétés non compactes de dimension 3. Explorant dans ce contexte l’idée de régularité arborescente, nous fournirons une caractérisation des 3-variétés HR-équationnelles en termes de recollement de 3-variétés à bord compactes. Cela étant, le cas hyperbolique nous conduira à un résultat de rigidité dont la démonstration s’appuie sur les théorèmes de Thurston et de Sullivan, fondamentaux en géométrie hyperbolique.

Forts de ce résultat, nous étudierons la structure des groupes fondamentaux des variétés HR-équationnelles, et particulièrement comment il est possible d’en avoir une vue constructive, et de donner une solution algorithmique au problème du mot.

Par ailleurs, nous verrons que les revêtements réguliers qui possèdent une triangularisation HR-équationnelle se caractérisent fort bien en terme de groupes : ce sont ceux dont le graphe de Schreier est le graphe de Cayley d’un groupe virtuellement libre.

3.1 Variétés HR-équationnelles de dimension 3

3.1.1 Arborescence

Le concept de *variété arborescente de dimension 3* est par essence très proche de celui de somme connexe arborescente qui fût introduit dans le chapitre 2, définition 5. Néanmoins, certains arguments nous ont conduit à ne pas unifier ces deux notions. Le concept de somme connexe existe aussi en dimension 3; il consiste à recoller deux 3-variétés *fermées*, i.e. compactes sans bord, en leurs retirant une boule à chacune et en identifiant les bords sphériques

restant. La notion de somme connexe arborescente prend dès lors un sens évident en dimension 3. Mais il n'y a aucun espoir de retrouver des résultats comparables à ceux que nous avons obtenus en dimension 2 dans le cadre des surfaces. Le concept de 3-variété arborescente est plus général que celui de somme connexe arborescente en ceci qu'il autorise le recollement des morceaux sur des bords qui ne sont pas nécessairement des sphères. Mais cette plus grande liberté implique aussi une plus grande complexité des données à considérer pour établir des méthodes de description constructives de ces objets.

Nous introduisons le vocabulaire de base de la topologie des variétés de dimension 3. Soit M une 3-variété triangularisée; nous appellerons surface *correctement plongée* dans M tout sous-complexe simplicial de M qui est la triangularisation d'une surface connexe S telle que $S \cap \partial M = \partial S$. Une telle surface est dite à *deux bords* si la frontière de chacun de ses voisinages réguliers comporte deux composantes connexes; elle est dite *séparante* si $M \setminus S$ possède exactement deux composantes connexes. Nous dirons que M est *première* si on ne peut pas la décomposer en somme connexe sur des sphères de deux variétés non-triviales; nous dirons qu'elle est *irréductible* si toute sphère correctement plongée dans M est la frontière d'une boule. Une surface S non sphérique, correctement plongée dans M est dite *incompressible* si pour toute application continue $f : D^2 \rightarrow M$ du disque D^2 dans M telle que $f(\partial D^2) \subset S$, il existe une application $f_s : D^2 \rightarrow S$ telle que $f|_{\partial D^2} = f_s|_{\partial D^2}$ (cf. [Hem76, FM97]). M est dite *de Haken* si elle possède au moins une surface incompressible. M est dite *acylindrique* si ∂M est composée de surfaces incompressibles et si tout cylindre $S^1 \times [0, 1]$ correctement plongé dans M , dont les composantes de bord $S^1 \times \{0\}$ et $S^1 \times \{1\}$ ne sont pas homotopiquement nulles dans ∂M , est homotope à une partie du bord de M , i.e. on peut le déformer continuellement de telle sorte qu'il soit totalement inclus dans ∂M (cf. [Thu86]).

Définition 10

Soit M une variété de dimension 3 sans bord triangularisée, éventuellement non-compacte. Nous dirons que M est **arborescente** s'il existe une famille $\{S_u\}_u$ de surfaces séparantes et deux à deux disjointes et qui découpent M en morceaux simples en ce sens qu'il existe un nombre fini de variétés de dimension 3 à bord compactes triangularisées M_1, \dots, M_n telles que pour chaque composante connexe C de $M \setminus \bigcup_u S_u$, il existe un homéomorphisme simplicial, i.e un isomorphisme de triangularisation, $\varphi_C : \overline{C} \rightarrow M_{\iota(C)}$ où $\iota(C) \in [1, n]$. La décomposition de M , i.e. la famille $\{S_u\}_u$, est dite **incompressible** si chaque S_u est incompressible. M est dite **acylindriquement arborescente** si tous les M_i sont acylindriques.

La construction qui suit montre dans quelle mesure ce concept se rattache à l'idée d'arborescence développée tout au long des chapitres précédents.

Soit M une variété de dimension 3 arborescente. On conserve les notations de la définition 10; pour chaque $i \in [1, n]$, soit $\{B_{ij}\}_{1 \leq j \leq b_i}$ les composantes du bord de M_i . Pour toute composante connexe C de $M \setminus \bigcup_u S_u$ et pour tout u tel que $S_u \subset \overline{C}$, $\varphi_C|_{S_u}$ définit un isomorphisme entre les triangularisations de S_u et de l'une des composantes du bord de $M_{\iota(C)}$. Il n'y a qu'un nombre fini de B_{ij} ; par conséquent, le nombre de S_u est fini à homéomorphisme simplicial près. Soit $\{T_k\}_{1 \leq k \leq m}$ une famille de représentants des S_u , donnée avec, pour tout u , un homéomorphisme simplicial $\psi_u : S_u \rightarrow T_{\mu(u)}$, où $\mu(u) \in [1, m]$. Soient i, j, u et C tels que $\varphi_C(S_u) = B_{ij}$; $\psi_u \circ \varphi_C^{-1}|_{B_{ij}} : B_{ij} \rightarrow T_{\mu(u)}$ est un homéomorphisme simplicial. Or, le

nombre d'homéomorphismes simpliciaux entre deux surfaces triangularisées est fini à isotopie près. Ainsi, quitte à ajouter de nouveaux représentants pour les composantes connexes de $M \setminus \bigcup_u S_u$, i.e. de nouveaux M_i , on peut supposer que $\psi_u \circ \varphi_C^{-1}|_{B_{ij}}$ ne dépend ni de u , ni de C ; on le note g_{ij} .

M est alors codé par un arbre τ construit de la façon suivante : A chaque composante connexe de $M \setminus \bigcup_u S_u$ est associé un nœud de τ , et à chaque S_u correspond un arc connectant les nœuds associés aux deux composantes de $M \setminus \bigcup_u S_u$ dont les adhérences se coupent en S_u . L'orientation des arcs est en un sens arbitraire, elle est choisie de telle sorte que τ soit un arbre orienté après avoir choisi la racine de façon arbitraire. On étiquette maintenant les nœuds et les arcs de τ . Pour toute composante C , le nœud de τ qui lui est associé est étiqueté par $\iota(C)$, l'indice de son représentant. Chaque arc e est étiqueté par un couple d'entiers défini comme suit : soient C et C' les composantes associées respectivement à l'origine et à l'extrémité de e ; soit S_u la surface séparante correspondant à e ; S_u correspond, via φ_C (resp. $\varphi_{C'}$), à un B_{ij} (resp. $B_{i'j'}$) dans $M_{\iota(C)}$ (resp. $M_{\iota(C')}$); l'étiquette de e est alors définie comme étant le couple (j, j') .

La donnée de τ , des M_i et des g_{ij} suffit alors à reconstruire la triangularisation de M . En effet, pour ce faire, on associe à chaque nœud x de τ une variété de dimension 3 à bord qui est une copie de M_i où i est l'étiquette de x ; ces variétés sont alors recollées deux à deux le long des arcs de τ : soit e un arc étiqueté par un couple (j, j') , soit i et i' les étiquettes de l'origine et l'extrémité de e ; on recolle alors les deux variétés liées par e relativement à l'homéomorphisme défini par $g_{i'j'}^{-1} \circ g_{ij}$.

Cette méthode de reconstruction d'une variété de dimension 3 arborescente à partir de τ , des M_i et des g_{ij} démontre en particulier le résultat suivant :

Proposition 3.1.1

La triangularisation d'une 3-variété arborescente est codée par un hypergraphe arborescent, i.e. de largeur arborescente finie.

La réciproque est vraie en dimension 2 (théorème 2), qu'en est-il ici ?

3.1.2 Régularité

Il apparaît maintenant naturel d'introduire le concept de régularité suivant.

Définition 11

*On conserve les notations introduites page 71. Une 3-variété arborescente M sera dite **régulière** si elle possède une décomposition, i.e. une famille $\{S_u\}_u$ de surfaces séparantes, telle que τ soit un arbre régulier.*

Les notions d'arborescence et de régularité arborescente ont donc trouvé des formalisations dans le cadre de la dimension 3. La proposition 3.1.1, ainsi que la suivante qui est similaire à la proposition 2.2.1, les placent dans le contexte de ce mémoire.

Proposition 3.1.2

Soit M une variété de dimension 3 sans bord triangularisée. Alors M possède une triangularisation HR-équationnelle si et seulement si M est arborescente régulière.

Preuve. (\Leftarrow):

Soit M une 3-variété arborescente régulière définie par la donnée de τ , des M_i et des g_{ij} (on conserve les notations introduites page 70). On suppose que τ est défini comme développement d'un multi-graphe orienté pointé (Γ, v_0) dont les sommets sont étiquetés par des indices correspondant aux M_i et les arcs par des couples d'indices correspondants aux B_{ij} . Quitte à ajouter de nouveaux M_i pour lesquels on modifie la numérotation des composantes de bord, on peut considérer que les couples d'entiers associés aux arcs de Γ sont tous de la forme $(j, 0)$. Cela revient à dire que l'on "entre" dans un M_i toujours par la même composante de bord. Pour chaque $v \in V_\Gamma$, on considère alors un hypergraphe H_v , codant la triangularisation du M_i qui associé à v , i.e. $M_{lab(v)}$. Les sources de H_v sont les sommets de la triangularisation de B_{i0} , l'"entrée" de M_i . Les arcs d'origine v codent les "sorties" de M_i ; pour chacun d'entre eux, on ajoute un hyperarc non-terminal sur la composante de bord correspondante: à un arc étiqueté par $(j, 0)$ dont l'extrémité est étiqueté par i' , on associe un hyperarc non-terminal étiqueté par i' dont les sommets sont ceux de la copie de B_{ij} dans H_v . On obtient finalement une grammaire de remplacement d'hyperarc qui décrit la construction de la triangularisation de M .

(\Rightarrow):

Soit M une 3-variété HR-équationnelle sans bord définie par une grammaire $\Theta = (b_0, \{H_b\}_{b \in B})$. On peut supposer que Θ satisfait les conditions du lemme 1.2.1.

• On peut transformer Θ de telle sorte que chaque \tilde{H}_b soit la triangularisation d'une 3-variété à bord. Rappelons que \tilde{H}_b est l'hypergraphe obtenu à partir de H_b en supprimant tous les hyperarcs non-terminaux.

On commence par remplacer la triangularisation de M par sa double subdivision barycentrique, cela facilite les découpages. On note encore Θ la grammaire associée. Il faut transformer Θ de telle sorte que chacun des sommets de chaque \tilde{H}_b possède un voisinage homéomorphe à une boule $B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x_1, x_2, x_3)\|_2 \leq 1\}$ ou bien une demi-boule $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x_1, x_2, x_3)\|_2 \leq 1 \text{ et } x_3 \geq 0\}$.

Considérons donc un H_b ainsi qu'un de ses sommets x .

Si x n'appartient pas à un hyperarc non-terminal et n'est pas une source, alors tous les hyperarcs terminaux contenant x qui lui forment un voisinage dans M sont déjà dans H_b . Comme M est une 3-variété sans bord, ce voisinage est homéomorphe à une boule.

Si x est une source, alors il doit être recollé sur un sommet x' appartenant à un hyperarc non-terminal dans un autre H_b . Si x ne possède pas de voisinage homéomorphe à une boule ou bien une demi-boule, alors il en est de même pour x' . C'est le cas suivant.

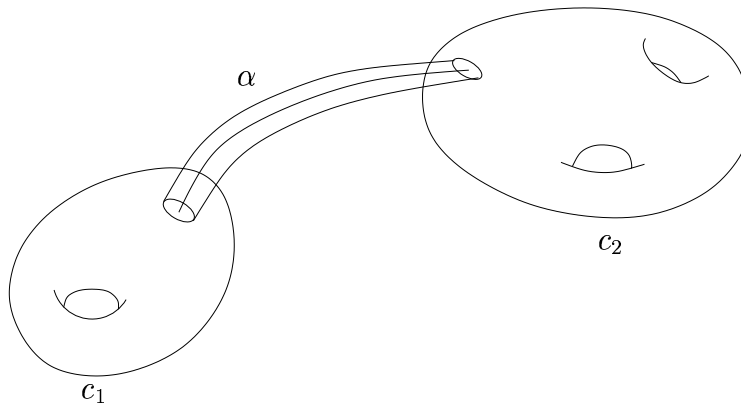
Supposons donc que x appartient à un hyperarc non-terminal de H_b et qu'il ne possède pas de voisinage homéomorphe à une boule ou bien une demi-boule. Par le lemme 1.2.1, il n'y a qu'un seul $H_{b'}$ qui doit être recollé sur x . Soit s' la source de $H_{b'}$ qui doit être identifiée à x . Considérons les tétraèdres, i.e. les hyperarc terminaux d'arité 4, de $H_{b'}$ contenant s' . Nous allons les retirer de $H_{b'}$ et les recoller autour de x dans H_b , ainsi que dans tout autre $H_{b''}$ contenant un hyperarc non-terminal étiqueté par b' . Ensuite, on supprimera s' . Après cette opération, x aura un voisinage homéomorphe à une boule dans \tilde{H}_b . Soit T' un de ces tétraèdres; rappelons que nous considérons la double subdivision barycentrique de la triangularisation originale de M . Les sommets créés durant le processus de subdivision ont

tous des bons voisinages, s' n'en fait donc pas partie. C'est par contre le cas des trois autres sommets a' , b' et c' de T' . Après la suppression de T' , pour ajuster le recollement de $H_{b'}$, ils deviennent des sources de H_b . Notons que deux d'entre eux pouvait déjà en être. On vérifie qu'ils ont des bons voisinages dans $\tilde{H}_b \setminus T'$, i.e. homéomorphes à une demi-boule. Le détail de cette opération étant plus complexe que difficile, il est omis ici.

Notons que l'aspect effectif de cette démonstration repose en partie sur la reconnaissance algorithmique de la boule B^3 , qui, en toute généralité, est un problème difficile [FM97, Mat]; néanmoins, dans notre cas, nous n'avons à considérer que des voisinages de sommets, i.e. de forme $St(v)$ et donc, il suffit d'en regarder les liens, i.e. les $Lk(v)$. Or décider de la forme de l'étoile d'un sommet en dimension 3 se réduit à un problème de classification de surfaces compactes.

• On peut transformer Θ de telle sorte que les sources d'un H_b sont les sommets d'au plus une composante du bord de \tilde{H}_b .

Considérons le sous-hypergraphe F_b de H_b formé par les sources de H_b et les hyperarcs d'arité 3 les connectant entre elles, i.e. les triangles dont tous les sommets sont des sources. Notons d'abord que le point précédent implique que $|F_b|$ est une union de surfaces compactes sans bord deux à deux disjointes. Notre but ici consiste à transformer Θ de telle sorte que chaque F_b ne comporte qu'une seule surface. Supposons donc que F_b contient au moins deux surfaces disjointes c_1 et c_2 . Grâce au lemme 1.2.1, on peut supposer que chaque \tilde{H}_b est connexe; soit α un chemin de \tilde{H}_b connectant c_1 et c_2 (cf. figure). Soit K un voisinage régulier de $c_1 \cup \alpha \cup c_2$



dans \tilde{H}_b . K est une 3-variété à bord avec trois composantes de bord; c_1 et c_2 en sont deux, la troisième, qui est plongée dans H_b , est homéomorphe à leur somme connexe, notons-la c . L'idée consiste à retirer K de H_b , remplacer les sommets de c_1 et c_2 par les sommets de c dans la liste des sources de H_b , et enfin, recoller K sur c_1 et c_2 à la place de chaque hyperarc étiqueté par b dans Θ . A chaque recollement de K , on adjoint un nouvel hyperarc étiqueté par b qui code le recollement du nouvel H_b sur c . Nous ne développerons pas le détail de ces opérations ici. Finalement, nous avons fait décroître le nombre de composantes de F_b , on conclut par récurrence.

On construit maintenant un multi-graphe orienté pointé Γ codant l'arbre régulier définissant M comme 3-variété arborescente régulière. Pour chaque $b \in B$, on ordonne linéairement les hyperarcs non-terminaux de H_b . L'ensemble des sommets de Γ est B , l'ensemble des indices

des H_b . La racine de Γ est b_0 . L'ensemble des arcs de Γ est en bijection avec l'union des ensembles d'hyperarcs non-terminaux des H_b , il est défini comme suit : pour chaque $b \in B$ et chaque hyperarc non-terminal e de H_b , disons que e est le j -ième hyperarc non terminal de H_b , on définit un arc dans Γ , étiqueté par le couple $(j, 0)$, d'origine b et d'extrémité b' , où b' est l'étiquette de e . A chaque sommet v de Γ est associé la 3-variété à bord dont \tilde{H}_b est une triangularisation, où b est l'étiquette de v . On vérifie que Γ définit un arbre régulier qui définit à son tour M comme 3-variété arborescente régulière.

□

En reprenant les méthodes développées dans le chapitre 2, on montre que l'ensemble des bouts d'une 3-variété arborescente M est homéomorphe à celui de τ (on conserve les notations définies page 71). On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 3.1.3

L'espace des bouts d'une variété de dimension 3 arborescente régulière est un espace de type fini au sens de la définition 7.

La réciproque semble fautive, comme le laisse présager l'exemple qui suit.

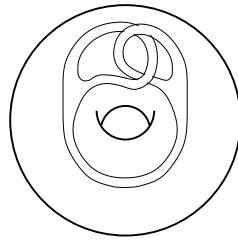


FIG. 3.1: N_1 est une 3-variété à bord; son bord comporte 2 composantes, l'une de genre 1, l'autre de genre 2. Elle est obtenue en découpant une surface de genre 2 à l'intérieur d'un tore plein.

On considère la suite $(N_k)_{k \geq 1}$ de 3-variétés à bord dont les premiers éléments sont représentés dans les figures 3.1, 3.2 et 3.3; N_k est obtenue à partir d'un corps à poignées de genre 2^{k-1} (en anglais: "handlebody", cf. [Hem76, Jac77, Joh95], il s'agit d'une surface orientable de genre k "remplie" de matière) en creusant dans son intérieur une surface de genre 2^k ; la surface de genre 2^k , notée S'_k , est nouée comme l'indiquent les figures; on note S_k la composante de bord de genre 2^{k-1} de N_k .

On fabrique alors une variété non compacte N en considérant l'union de tous les N_k , et en recollant S'_k sur S_{k+1} pour tout k . On montre aisément que N n'a qu'un seul bout; ainsi, son espace de bouts, réduit à un seul point est de type fini. Cependant, nous conjecturons que N n'est pas arborescente.

Nous avons vu dans le chapitre 2 que les surfaces pointées sont HR-équationnelles; en dimension 3, nous pensons que ce fait se généralise de la façon suivante :

Conjecture 1 *Les 3-variétés possédant un cœur compact au sens de [Sco73] sont HR-équationnelles, de même que celles qui possèdent une structure hyperbolique de volume fini (voir plus loin).*

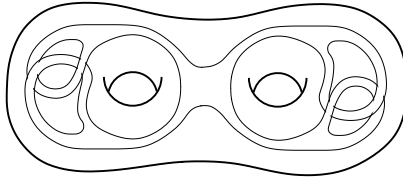


FIG. 3.2: N_2 est obtenue à partir d'un corps à poignées de genre 2 en creusant à l'intérieur une surface de genre 4. Elle possède donc deux composantes de bord, l'une de genre 2, la surface extérieure, et l'autre de genre 4, la surface intérieure.

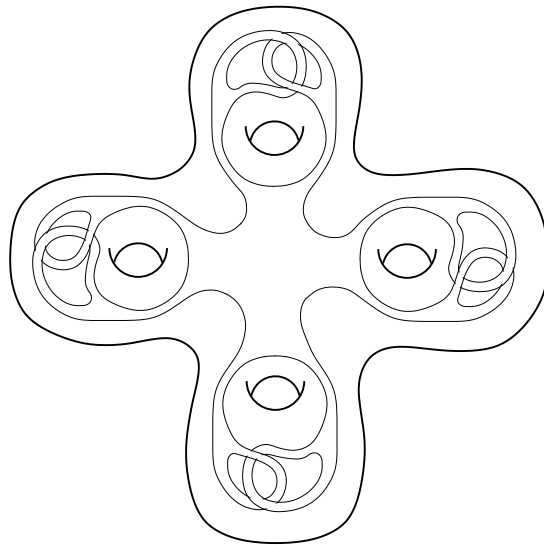


FIG. 3.3: N_3 est obtenue à partir d'un corps à poignées de genre 4 en creusant à l'intérieur une surface de genre 8. Elle possède donc deux composantes de bord, l'une de genre 4 et l'autre de genre 8.

3.2 Rigidité des 3-variétés arborescentes

3.2.1 Groupe fondamental, revêtements

Pour une introduction à la théorie du groupe fondamental ainsi qu'à la théorie des revêtements, cf. [Mas67, Rot88]; pour un traitement approfondi, cf. [Spa66]. Pour ce qui concerne la théorie combinatoire des groupes, le lecteur est renvoyé à [MKS66, LS77].

Soit K un polyèdre connexe et x_0 un point de K . Un *lacet* de point de base x_0 est une application continue $\alpha : [0, 1] \rightarrow K$ telle que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. On définit le *produit* $\alpha.\alpha'$ de deux lacets α et α' par $\alpha.\alpha'(t) = \alpha(2t)$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\alpha.\alpha'(t) = \alpha'(2t - 1)$ pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Notons que cette opération n'est pas même associative. On considère sur l'ensemble des lacets la relation d'équivalence définie comme suit. Deux lacets α et α' sont dit équivalents s'ils sont homotopes, i.e. s'il existe une application continue $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow K$ telle que pour tout $s \in [0, 1]$, $H(s, 0) = H(s, 1) = x_0$; $H(0, \cdot) \equiv \alpha$ et $H(1, \cdot) \equiv \alpha'$. On interprète souvent l'équivalence de deux lacets comme la possibilité de déformer l'un pour obtenir l'autre et *vice versa*. On montre alors que si $\alpha_1 \sim \alpha_2$ et $\alpha'_1 \sim \alpha'_2$ alors $\alpha_1.\alpha'_1 \sim \alpha_2.\alpha'_2$; ainsi, la loi de composition sur les lacets est aussi définie sur les classes d'équivalence de lacets. Sur ce dernier ensemble, elle devient associative; en fait, l'ensemble des classes d'équivalence de lacet muni de cette loi forme un groupe appelé le *groupe fondamental* de K de point de base x_0 , on le note $\pi_1(K, x_0)$. On montre que la classe d'isomorphisme de $\pi_1(K, x_0)$ ne dépend pas du choix de x_0 : si x_1 est un autre point de K , alors $\pi_1(K, x_0)$ et $\pi_1(K, x_1)$ sont isomorphes.

Le groupe fondamental d'un polyèdre est un *invariant* de sa structure topologique: on montre que si deux polyèdres sont homéomorphes alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes. Cette correspondance entre les structures de groupe et d'espace topologique est en fait plus profonde: une application continue $\varphi : K \rightarrow K'$ induit canoniquement un homomorphisme $\varphi_* : \pi_1(K, x_0) \rightarrow \pi_1(K', \varphi(x_0))$. Formellement, cela définit un foncteur de la catégorie des espaces topologiques pointés dans celle des groupes (cf. [Spa66]).

Le concept de groupe fondamental est usuellement défini dans le cadre des espaces de Hausdorff connexes. On ne possède alors en général aucun moyen constructif de le définir. Dans le cas des polyèdres, la situation est plus favorable; on peut construire une présentation de $\pi_1(K)$ de façon effective à partir d'une triangularisation de K . La méthode est la suivante: on commence par considérer le 1-squelette K^1 d'une triangularisation de K , i.e. le sous-complexe simplicial formé des simplexes de dimension inférieure ou égale à 1. Il définit lui-même un polyèdre, en fait un graphe, dont le groupe fondamental s'applique de façon surjective sur celui de K ; cela provient du fait que tout lacet de K est homotope à un lacet simplicial (cf. e.g. [Mas67]). Par ailleurs le groupe fondamental de K^1 , et d'un graphe en général, est facile à appréhender, c'est un groupe libre. On calcule un ensemble de générateurs à partir d'un arbre couvrant de K^1 dont la racine est x_0 , son point de base; chaque arête n'en faisant pas partie définit un élément de la partie génératrice de $\pi(K^1, x_0)$ associée à l'arbre couvrant en question; cet élément est la classe d'équivalence du lacet défini comme suit: à partir du point de base x_0 , on joint l'une des extrémités de l'arête en question en empruntant l'unique plus court chemin de l'arbre couvrant, on parcourt l'arête en question, puis on retourne au point de base x_0 en suivant l'unique plus court chemin dans l'arbre couvrant; notons que ce procédé permet en fait d'associer à toute arête de K^1 un élément

de $\pi_1(K^1, x_0)$, celles de l'arbre couvrant de K^1 étant toutes associées à l'élément neutre. On obtient finalement un ensemble de générateur de $\pi_1(K^1, x_0)$ qui définit de façon canonique un ensemble de générateurs de $\pi_1(K, x_0)$. Pour définir une présentation de $\pi_1(K, x_0)$, il nous reste à déterminer les relateurs. Ceux-ci sont définis par les simplexes de dimension 2, i.e. les triangles; le bord de chacun d'eux est formé de 3 arêtes, en le parcourant dans un sens (ou dans l'autre, peu importe), il définit un mot sur l'ensemble de générateurs construit précédemment; l'ensemble des mots construits de cette façon est l'ensemble des relateurs de notre présentation. Pour la validité de cette construction, le lecteur est renvoyé à [Mas67].

Soit K un polyèdre connexe; un *revêtement* de K consiste en une paire (\tilde{K}, p) où \tilde{K} est un polyèdre connexe et $p : \tilde{K} \rightarrow K$ est une application continue surjective telle que tout point x de K possède un voisinage U tel que chaque composante connexe V de $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à U et $p|_V : V \rightarrow U$ est un homéomorphisme; un tel voisinage est appelé un *voisinage élémentaire* de x et p est appelée la *projection* relative à (\tilde{K}, p) . (\tilde{K}, p) est appelé le revêtement universel de K si le groupe fondamental de \tilde{K} est trivial.

On énumère ici quelques propriétés fondamentales des revêtements; le lecteur est renvoyé pour les preuves à [Mas67, Rot88, Spa66]. Soit $x_0 \in K$ et $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $p^{-1}(x_0)$ est appelée la *fibres* de x_0 , on montre que $p_* : \pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(K, x_0)$ est un homomorphisme injectif. Pour tout autre élément \tilde{x}'_0 de la fibre de x_0 , on montre que $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}'_0))$ est un sous-groupe de $\pi_1(K, x_0)$ conjugué à $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$; en particulier, il lui est isomorphe; si ce dernier est un sous-groupe normal de $\pi_1(K, x_0)$, on dit que (\tilde{K}, p) est un revêtement *régulier* de K .

Soit $f : Y \rightarrow K$ et $y_0 \in f^{-1}(x_0)$; alors il existe un *relèvement* $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{K}$, i.e. une application telle que $f = p\tilde{f}$ avec $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$, si et seulement si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$.

Soient (\tilde{K}_1, p_1) et (\tilde{K}_2, p_2) deux revêtements de K ; on appelle *homomorphisme de revêtement* entre (\tilde{K}_1, p_1) et (\tilde{K}_2, p_2) toute application continue $\varphi : \tilde{K}_1 \rightarrow \tilde{K}_2$ telle que $p_1 = p_2\varphi$. Soient $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$ et $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$; il existe alors un homomorphisme $\varphi : \tilde{K}_1 \rightarrow \tilde{K}_2$ qui échange \tilde{x}_1 et \tilde{x}_2 si et seulement si $p_{1*}(\pi_1(\tilde{K}_1, \tilde{x}_1)) \subseteq p_{2*}(\pi_1(\tilde{K}_2, \tilde{x}_2))$; et cet homomorphisme est un isomorphisme si $p_{1*}(\pi_1(\tilde{K}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2*}(\pi_1(\tilde{K}_2, \tilde{x}_2))$.

3.2.2 Variétés hyperboliques de dimension 3 arborescentes

Variétés hyperboliques

L'introduction à la géométrie hyperbolique qui est donnée ici est somme toute un peu minimaliste; nous avons jugé qu'un développement pédagogique de ce sujet serait, de par la taille qu'il nécessiterait, hors de propos ici. Ainsi, nous nous sommes limités ici aux définitions de base. Les concepts et les résultats que nous utilisons par la suite seront donnés dans le texte au fur et à mesure, avec bien entendu les références appropriées. Pour des approches plus complètes mais rapides du sujet, cf. [Mil82, Can84, Sco83], pour un traitement approfondi, cf. [Bea83, MT98, Mas87, Rat94, Thu97]; [Mil82, Can84, Bea83, Mas87, Rat94] concernent la géométrie hyperbolique en général, tandis que [Sco83, MT98, Thu97] sont plus particulièrement dédiés aux problèmes de la dimension 3 et aux travaux de Thurston sur le sujet.

Pour l'espace hyperbolique, nous considérons ici le modèle de la boule unité de Poincaré : on définit \mathbb{H}^3 comme étant la boule unité $B^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 < 1\}$ de \mathbb{R}^3 munie de la métrique riemannienne hyperbolique ds^2 donnée en fonction de la métrique euclidienne dx^2 par

$$ds^2 = \frac{4dx^2}{(1-r^2)^2}$$

en un point de B^n situé à distance $r \in [0, 1[$ de l'origine, ds^2 vaut $\frac{4}{(1-r^2)^2}$ fois dx^2 . La longueur d'un chemin γ rectifiable de B^3 est alors donnée par

$$\ell(\gamma) = \int_{\gamma} ds$$

et la distance séparant deux points de \mathbb{H}^3 est définie comme étant le minimum des longueurs des chemins allant de l'un à l'autre.

On montre que les géodésiques de \mathbb{H}^3 sont les arcs de cercles coupant S^n perpendiculairement. On note $Isom \mathbb{H}^3$ le groupe des isométries de \mathbb{H}^3 ; et $Isom^+ \mathbb{H}^3$ le sous-groupe de $Isom \mathbb{H}^3$ constitué des isométries qui préservent l'orientation.

Définition 12

Une **variété hyperbolique orientable de dimension 3** est une 3-variété M , orientable, munie d'un **atlas** $\{U_j, \varphi_j\}_{j \in J}$ où

- U_j est un ouvert de M et $M = \bigcup_j U_j$;
- $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{H}^3$ est un homéomorphisme de U_j sur $\varphi_j(U_j)$ que l'on appelle usuellement une **carte**;
- Si $U_{j_1} \cap U_{j_2} \neq \emptyset$, alors $U_{j_1} \cap U_{j_2}$ est connexe et $f_{j_1}|_{U_{j_1} \cap U_{j_2}} \circ f_{j_2}^{-1}|_{f_{j_2}(U_{j_1} \cap U_{j_2})}$ est un homéomorphisme de $f_{j_2}(U_{j_1} \cap U_{j_2})$ sur $f_{j_1}(U_{j_1} \cap U_{j_2})$ qui préserve la métrique hyperbolique; on montre que c'est la restriction d'un élément de $Isom^+ \mathbb{H}^3$.

Arborescence et hyperbolicité

Une sous-variété d'une variété hyperbolique est dite *totale-ment géodésique* si elle contient toutes les géodésiques qui lui sont tangentes. L'idée de largeur arborescente finie nous conduit à proposer la définition suivante.

Définition 13

Nous dirons qu'une variété de dimension 3 hyperbolique complète M est **arborescente** si elle possède une triangularisation géodésique¹, i.e. chacun de ses simplexes est totale-ment géodésiques, dont les arcs ont des longueurs uniformément bornées inférieurement et supérieurement, relativement à laquelle M est arborescente et possède une décomposition incompressible au sens de la définition 10.

1. notons qu'une triangularisation rectifiable pourrait être une hypothèse suffisante

Notons qu'une 3-variété hyperbolique compacte est arborescente; mais les 3-variétés hyperboliques complètes arborescentes sont en général de volume infini.

Le résultat suivant permet la construction d'exemples de 3-variétés hyperboliques arborescentes. Les principales idées de la preuve sont apparues lors d'une conversation avec D. Epstein et I. Rivin.

Une 3-variété compacte N est dite *atoroïdale* si tout sous-groupe de $\pi_1(N)$ isomorphe à \mathbb{Z}^2 est conjugué à un sous-groupe de $\pi_1(\partial N)$ (cf. [Thu82]).

On définit les *variétés hyperboliques à bords totalement géodésiques* en remplaçant dans la définition 12 l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 par le *demi-espace* hyperbolique $\mathbb{H}_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{B}^3 \mid x_3 \geq 0\}$ et $Isom^+ \mathbb{H}^3$ par le sous-groupe des isométries de $Isom^+ \mathbb{H}^3$ qui conservent \mathbb{H}_+^3 .

Lemme 3.2.1

Soit N une variété compacte de dimension 3 première, acylindrique et atoroïdale dont les composantes du bord sont des surfaces incompressibles de genres supérieurs ou égaux à 2. Alors on peut munir N d'une structure hyperbolique complète à bord totalement géodésique.

Preuve. Soit \bar{N} la 3-variété fermée obtenue en recollant deux copies disjointes de N par identification de leurs bords. Les bords identifiés de ces deux copies forment dans \bar{N} une surface incompressible; \bar{N} est une variété de Haken. Par ailleurs, elle est atoroïdale; par le théorème d'uniformisation de Thurston [Thu79], elle peut être munie d'une structure hyperbolique complète. On montre que cette structure se transmet à son revêtement universel, qui devient alors isométrique à \mathbb{H}^3 ; ainsi on peut supposer que le revêtement universel de \bar{N} est \mathbb{H}^3 ; soit $p : \mathbb{H}^3 \rightarrow \bar{N}$ une projection; on montre que (\mathbb{H}^3, p) permet la définition d'une *représentation fidèle* de $\pi_1(\bar{N})$ dans $Isom^+ \mathbb{H}^3$, i.e. un homomorphisme $\rho : \pi_1(\bar{N}) \rightarrow \Gamma \subset Isom^+ \mathbb{H}^3$ injectif dont l'image est un sous-groupe discret, de telle sorte que l'on a $\bar{N} \simeq \mathbb{H}^3 / \Gamma$; notons que ces propriétés valent pour toute variété hyperbolique complète (cf. [Thu97, MT98]).

Soit $\tau : \bar{N} \rightarrow \bar{N}$ l'homéomorphisme échangeant les deux copies de N . Soit $B \subset \bar{N}$ une composante connexe du bord des copies de N dans \bar{N} ; notons que B est fixé point par point par τ . B se relève par p en un plan P plongé dans \mathbb{H}^3 . Notons que, de même que B , P n'est *a priori* pas totalement géodésique. Soit $\tilde{\tau} : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3$ le relèvement de τ qui fixe P point par point. Par le théorème 11.6.1 de [Rat94], $\tilde{\tau}$ est une pseudo-isométrie. Notons que $\tilde{\tau}^2 = \text{Id}_{\mathbb{H}^3}$.

Par le théorème de Mostow [Mos68], $\tilde{\tau}$ induit une transformation de Möbius de la sphère à l'infini que l'on note $\tilde{\tau}^\infty : S_\infty^2 \rightarrow S_\infty^2$. Comme $\tilde{\tau}$ est d'ordre deux, il en est de même de $\tilde{\tau}^\infty$ qui est donc une symétrie. Comme $\tilde{\tau}$ fixe P point par point, $\tilde{\tau}^\infty$ fixe la courbe limite de P qui est donc un cercle de S_∞^2 . Ce cercle à l'infini définit un plan hyperbolique P' dans \mathbb{H}^3 . Nous allons construire une déformation Γ -équivariante de P en P' qui induira, via p , une déformation de B en une surface totalement géodésique.

En premier lieu, $p(P')$ est une surface compacte. Pour voir cela, on considère $H \subset \Gamma$, le stabilisateur de P et on montre d'abord que l'action de H sur P' est cocompacte. Pour ce faire, on montre qu'il existe $K_1 > 0$ tel que pour tout $x \in P$, $d_{\mathbb{H}^3}(x, P') \leq K_1$ et pour tout $x' \in P'$, $d_{\mathbb{H}^3}(x', P) \leq K_1$. Notons que H stabilise aussi P' . Soit $x_0 \in P$; choisissons $x'_0 \in P'$ tel que $d_{\mathbb{H}^3}(x_0, x'_0)$ soit minimal. Comme B est compacte et $B = P/H$, il existe $R > 0$ tel

que pour tout $x \in P$, il existe $h \in H$ tel que $d_{\mathbb{H}^3}(x_0, h(x)) \leq R$. On a alors :

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^3}(x, h^{-1}(x'_0)) &= d_{\mathbb{H}^3}(h(x), x'_0) \\ &\leq d_{\mathbb{H}^3}(h(x), x_0) + d_{\mathbb{H}^3}(x_0, x'_0) \\ &\leq R + d_{\mathbb{H}^3}(x_0, x'_0). \end{aligned}$$

On pose $K_1 = R + d_{\mathbb{H}^3}(x_0, x'_0)$. Soit $x' \in P'$. Soit γ une géodésique de \mathbb{H}^3 coupant P' perpendiculairement en x' . Notons que $\gamma \cap P \neq \emptyset$; soit $x \in \gamma \cap P$. On a alors

$$d_{\mathbb{H}^3}(x', P) \leq d_{\mathbb{H}^3}(x', x) = d_{\mathbb{H}^3}(P', x) \leq K_1.$$

On en déduit que l'action de H sur P' est cocompacte. On montre en effet qu'il existe $K_2 > 0$ tel que pour tout $x'_1, x'_2 \in P'$, il existe $h \in H$ tel que $d_{\mathbb{H}^3}(h(x'_1), x'_2) < K_2$. Soient $x'_1, x'_2 \in P'$; Soient $x_1, x_2 \in P$ tels que $d_{\mathbb{H}^3}(x_i, x'_i)$ est minimal. Soit $h \in H$ tel que $d_{\mathbb{H}^3}(h(x_1), x_2) \leq R$. On a alors :

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^3}(h(x'_1), x'_2) &\leq d_{\mathbb{H}^3}(h(x'_1), h(x_1)) + d_{\mathbb{H}^3}(h(x_1), x_2) + d_{\mathbb{H}^3}(x_2, x'_2) \\ &\leq d_{\mathbb{H}^3}(x'_1, x_1) + R + K_1 \\ &\leq 2K_1 + R. \end{aligned}$$

On choisit $K_2 = 2K_1 + R$. Ainsi, $p(P')$ est compacte.

Il reste à prouver que $p(P')$ est bien une surface, i.e. chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à un disque; rappelons que $p(P')$ hérite sa topologie de \overline{N} . Soit $x' \in \overline{N} \cap p(P')$ et $\tilde{x}' \in p^{-1}(x') \cap P'$. Soit D un disque ouvert de P' contenant \tilde{x}' . Supposons que pour tout voisinage élémentaire V de x' , il existe un point $z_V \in p(P') \cap V$ qui n'est pas dans $p(D)$. Considérons \tilde{V} la composante de $p^{-1}(V)$ contenant \tilde{x}' ; et $\tilde{z}_V \in p^{-1}(z_V) \cap \tilde{V}$. Pour V suffisamment petit, $\tilde{V} \cap P' = \tilde{V} \cap D$; et donc $\tilde{z}_V \notin P'$. Ainsi donc, il existe $\gamma_V \in \Gamma \setminus H$ tel que $\tilde{z}_V \in \gamma_V(P')$. Considérons la famille \mathcal{P} de tous les plans hyperboliques obtenus comme images de P' par un γ_V .

Si \mathcal{P} est de cardinal fini, alors il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(P') = \gamma_V(P')$ pour tout voisinage V d'une base de voisinages élémentaires de x' . Dans ce cas, $\gamma(P')$ intercepte P' . Mais alors, en regardant l'action de γ sur la sphère à l'infini, on en déduit que $\gamma(P)$ intercepte P ; ce qui est impossible car B est une surface.

Supposons donc que \mathcal{P} est infinie. L'argument précédent montre que les images de P' par deux isométries de Γ sont soit disjointes, soit confondues. Ainsi donc, il existe une infinité de plans hyperboliques deux à deux disjoints de la forme $\gamma_V(P')$. Comme l'action de H sur P est cocompacte, pour V suffisamment petit, il existe $\gamma'_V \in \Gamma$ tel que $\gamma'_V(\tilde{x}') \in \gamma_V(P')$ et $d_{\mathbb{H}^3}(\gamma'_V(\tilde{x}'), \tilde{z}_V) \leq K_2$. Ainsi, en choisissant V suffisamment petit, $\gamma'_V(\tilde{x}')$ reste dans un voisinage borné de \tilde{x}' . Par compacité, on peut donc extraire une base dénombrable $(V_k)_k$ de voisinages élémentaires tel que pour toute paire k_1, k_2 , $\gamma_{V_{k_1}}(\tilde{x}')$ et $\gamma_{V_{k_2}}(\tilde{x}')$ soient distincts et la suite $(\gamma'_{V_k}(\tilde{x}'))_k$ converge; ce qui contredit le fait que l'action de Γ sur \mathbb{H}^3 est discrète.

$p(P')$ est donc une surface totalement géodésique plongée dans \overline{N} .

Par ailleurs, quitte à déformer légèrement B , il existe une triangularisation géodésique de \overline{N} pour laquelle B et $p(P')$ sont simpliciales. Cette triangularisation se relève en une triangularisation Γ -équivariante de \mathbb{H}^3 dans laquelle P et P' sont simpliciaux. Cela permet de définir, tétraèdre par tétraèdre, une isotopie de \overline{N} déformant B en $p(P')$.

On déforme ainsi chaque composante du bord des deux copies de N qui forment \overline{N} . Finalement, en découpant le long des surfaces géodésiques obtenues de la sorte, on obtient deux morceaux homéomorphes à N ayant la structure hyperbolique requise.

□

Notons que l'hypothèse d'acylindricité est essentielle dans ce lemme. On obtient un contre-exemple en considérant une variété de la forme $S \times I$ où S est une surface. $S \times I$ n'est pas acylindrique. Par ailleurs elle ne peut pas être équipée d'une structure hyperbolique complète à bord totalement géodésique. Si c'était le cas, en considérant deux copies de cette variété que l'on recollerait sur leurs bords, on obtiendrait une variété compacte sans bord, hyperbolique complète dont le groupe fondamental comporterait un sous-groupe isomorphe à \mathbb{Z}^2 . C'est impossible.

On peut maintenant construire une variété de dimension 3 hyperbolique arborescente de la façon suivante. On se donne une 3-variété à bord atoroidale N dont les bords sont des surfaces de genre supérieur à 2. Soit n le nombre de composantes connexes du bord de N ; on les suppose numérotées de 1 à n . Par le lemme 3.2.1, on peut équiper N d'une structure hyperbolique complète rendant ses bords totalement géodésiques. On considère maintenant l'arbre non-orienté infini t , régulier, de degré uniformément égal à n , dont les arêtes sont étiquetées par des entiers entre 1 et n tels que chaque nœud appartient à une arête étiquetée par i et une seule, pour tout $i \in [1, n]$. A chaque nœud de t , on associe une copie de N . On recolle alors toutes ces copies de N selon les arêtes de t ; une arête étiquetée par un entier i indique que l'on recolle les deux copies de N qu'elle relie en identifiant leurs i -ièmes composantes de bords. On vérifie aisément que l'on obtient une 3-variété hyperbolique complète arborescente. Notons que cette 3-variété est un revêtement régulier de la 3-variété fermée obtenue à partir de deux copies de N en identifiant leurs bords; parallèlement, t est un revêtement du graphe comprenant un seul sommet et n boucles étiquetées de 1 à n ; nous développerons cette idée dans la section 3.3.2.

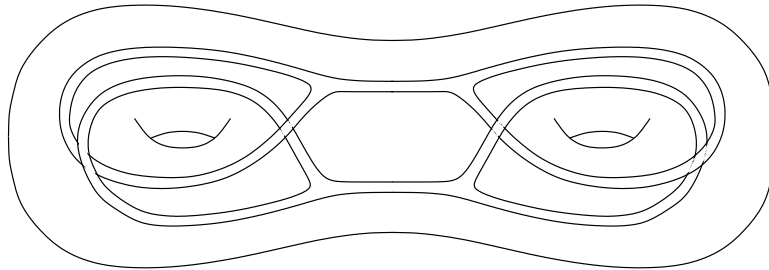


FIG. 3.4: Exemple de 3-variété à bord acylindrique et atoroidale dont les composantes connexes de bord, au nombre de 3, sont des surfaces de genre 2.

3.2.3 Rigidité

Le résultat suivant est fondamental pour ce qui nous intéresse : il réduit le problème de l'homéomorphisme à un problème d'isomorphisme de groupes.

Théorème 7

Deux variétés de dimension 3 hyperboliques complètes acylindriquement arborescentes sont isométriques si et seulement si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.

La démonstration de ce résultat se compose de plusieurs parties. Avant tout, il nous faut fixer quelques notations. Soient donc M et M' deux 3-variétés hyperboliques complètes, acylindriquement arborescentes. Soient $x_0 \in M$, $x'_0 \in M'$ et $\Phi : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(M', x'_0)$ un isomorphisme.

On conserve pour M les notations introduites page 71. Pour chaque $k \in [1, m]$, on distingue un sommet x_k de la triangulation de T_k ; pour chaque paire i, j , soit $k \in [1, m]$ tel que B_{ij} est envoyé sur T_k par g_{ij} ; soit alors $x_{ij} = g_{ij}^{-1}(x_k)$. Soit t_i un arbre simplicial dans M_i de racine x_{i0} connectant x_{i0} aux autres x_{ij} ; quitte à subdiviser la triangulation de M_i , on construit t_i en forme d'étoile centrée en x_{i0} de telle sorte que les seuls points de contact de t avec le bord de M_i soient les x_{ij} . Fixons maintenant pour tout k un arbre couvrant du 1-squelette de T_k ; il définit, via g_{ij}^{-1} , un arbre couvrant de B_{ij} ; Soit s_i un arbre couvrant de M_i contenant cet arbre pour tout j , ainsi que t_i . En utilisant φ_C^{-1} pour chaque composante C de $M \setminus \bigcup_u S_u$, la famille $\{s_i\}_i$ définit un arbre couvrant s du 1-squelette de M ; pour chaque C , notons $x_C = \varphi_C^{-1}(x_{i(c)0})$; quitte à ajouter de nouveaux représentants pour les composantes de $M \setminus \bigcup_u S_u$, on peut supposer que quelque soit $C_1 \neq C_2$, on a $x_{C_1} \neq x_{C_2}$. Quitte à subdiviser la triangulation de M ainsi qu'à déformer une surface S_u de sa décomposition arborescente, on peut supposer que x_0 est égal à x_{C_0} pour une composante C_0 de $M \setminus \bigcup_u S_u$ que l'on appellera *composante racine* de M . L'arbre t formé de l'union des $\{\varphi_C^{-1}(t_i)\}_C$ est appelée la *colonne vertébrale* de M . Notons que la construction de t n'est pas canonique pour M et loin s'en faut; néanmoins, deux colonnes vertébrales de M ont des espaces de bouts homéomorphes.

Comme t est un arbre contenant x_{C_0} , $\pi_1(M, t)$ est canoniquement isomorphe à $\pi_1(M, x_{C_0})$ (cf. [Spa66]). D'autre part, pour chaque composante C , φ_C^{-1} induit un homomorphisme de $\pi_1(M_{i(c)}, x_{i(c)0})$ dans $\pi_1(M, t)$; notons pour tout i , $\Gamma_i = \pi_1(M_i, x_{i0})$. On considère alors l'homomorphisme résultant $j_C : \Gamma_{i(c)} \rightarrow \pi_1(M, x_{C_0})$. Comme les surfaces séparantes S_u sont supposées incompressibles, on obtient le résultat suivant :

Lemme 3.2.2 *j_C est injectif.*

Construction d'une équivalence d'homotopie k -lipschitzienne entre M et M' .

On conserve les notations précédentes à propos de M . Soit A_i le sous-ensemble fini de générateurs de Γ_i défini, à partir de s_i comme arbre couvrant du 1-squelette de M_i , par les arêtes de M_i qui n'appartiennent pas à s_i .

Considérons la fonction m_i qui associe à toute représentation fidèle ρ de Γ_i dans $Isom^+ \mathbb{H}^3$, le point $m_i(\rho) \in \mathbb{H}^3$ qui minimise la fonction suivante :

$$d_\rho(x) = \sum_{\alpha \in A_i} d_{\mathbb{H}^3}(x, \rho(\alpha)(x))$$

Lemme 3.2.3

m_i est bien définie et est continue relativement à la topologie dite algébrique de l'espace des représentations fidèles de Γ_i .

Pour la définition de la topologie algébrique sur l'espace des représentations fidèles d'un groupe, le lecteur est renvoyé à [Thu86, MT98].

Preuve. Remarquons en guise de préliminaire que les éléments d'une représentation fidèle de Γ_i dans $Isom \mathbb{H}^3$ ne peuvent être que loxodromiques (cf. [Mas87]), et non paraboliques ou elliptiques; ceci est dû au fait que M_i est une 3-variété hyperbolique.

Pour l'existence d'un minimum, on remarque que $d_\rho(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini. En effet, un point de $\partial\mathbb{H}^3$ au voisinage duquel d_ρ resterait bornée serait nécessairement un point fixe de tous les éléments de $\rho(\Gamma_i)$; cela impliquerait que $\rho(\Gamma_i)$ soit un groupe de similarités euclidiennes. D'autre part, remarquons que l'on peut supposer que $\partial M_i \neq \emptyset$, car sinon, M serait en fait égale à M_i , une variété hyperbolique compacte; dans ce cas, le théorème 7 se ramène au théorème de Mostow. Maintenant, comme les composante du bord de M_i sont des surfaces de genres supérieur à deux, leurs groupes fondamentaux ne peuvent pas être représentés par des similarités euclidiennes, c'est une contradiction. L'unicité provient du fait que d_ρ est strictement convexe. $m_i(\rho)$ est donc bien définie.

On démontre maintenant la continuité. Fixons une représentation fidèle ρ_0 de Γ_i . Dans l'espace des représentations fidèles de Γ_i , muni de la topologie algébrique, il existe un voisinage V de ρ_0 dans lequel $m_i(V)$ est totalement inclus dans un compact de \mathbb{H}^3 . Pour voir cela, remarquons que pour un élément $\alpha \in A_i$ fixé, l'axe de $\rho(\alpha)$ est fonction continue de ρ relativement à la topologie de Hausdorff sur les parties de $\mathbb{H}^3 \cup S_\infty^2$; de même, la longueur de translation de $\rho(\alpha)$ le long de son axe est aussi une fonction continue de ρ . Ainsi, en choisissant V suffisamment petit, pour tout couple $\alpha \neq \alpha'$ d'éléments distincts de A_i , les points fixes de $\rho(\alpha)$ et $\rho(\alpha')$ restent éloignés les uns des autres dans S_∞^2 , i.e. leurs distances respectives sont uniformément bornées inférieurement; et les distances de translations le long des axes restent assez grandes. Ainsi, pour tout $D > 0$, un point x de \mathbb{H}^3 , suffisamment éloigné de $m_i(\rho_0)$, se trouve à une distance supérieure à D de l'axe de $\rho(\alpha)$ pour tout $\rho \in V$ et au moins l'un des α ; tenant compte du fait que les longueurs de translation des $\rho(\alpha)$ sont uniformément bornées inférieurement pour $\rho \in V$ et $\alpha \in A_i$, en choisissant D suffisamment grand, on peut ainsi rendre $d_\rho(x) = \sum_{\alpha \in A_i} d_{\mathbb{H}^3}(x, \rho(\alpha)(x))$ aussi grand que l'on veut. Ainsi,

$m_i(\rho)$ pour $\rho \in V$ reste à une distance bornée de $m_i(\rho_0)$; soit W l'adhérence de V ; c'est un fermé que l'on peut en fait choisir compact dans l'espace des représentations fidèles de Γ_i . Observons maintenant que la variation relativement à ρ de $d_\rho|_W$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme; il s'en suit aisément que la variation du point réalisant le minimum de d_ρ est aussi continue relativement à ρ , i.e. m_i est continue; cela termine la preuve.

□

M et M' sont munies de structures hyperboliques complètes; cela nous autorise à considérer leurs revêtements universels $p : \mathbb{H}^3 \rightarrow M$ et $p' : \mathbb{H}^3 \rightarrow M'$. Choisissons un élément $\tilde{x}_{c_0} \in p^{-1}(x_{c_0})$ (respectivement \tilde{x}'_{c_0}) dans la fibre de x_{c_0} (respectivement x'_{c_0}); avec le revêtement évoqué plus haut, le choix de \tilde{x}_{c_0} fixe une représentation fidèle $\Gamma \subset Isom \mathbb{H}^3$ de $\pi_1(M, x_{c_0})$ dans $Isom \mathbb{H}^3$, ainsi qu'un isomorphisme appelé *application d'holonomie* $H :$

$\pi_1(M, x_{C_0}) \rightarrow \Gamma$ (cf. [Thu97]). On construit de même une représentation fidèle $\Gamma' \subset \text{Isom } \mathbb{H}^3$ de $\pi_1(M')$. On montre que $M \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma$ et $M' \simeq \mathbb{H}^3/\Gamma'$ (cf. [Thu97, MT98]). L'isomorphisme $\Phi : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(M', x'_0)$ induit alors un isomorphisme encore noté Φ entre Γ et Γ' .

Pour toute composante connexe C de $M \setminus \bigcup_u S_u$, on note $\rho_C = \Phi \circ H \circ j_C$; c'est une représentation fidèle de $\Gamma_{\iota(C)}$ dans $\text{Isom } \mathbb{H}^3$; pour toute composante C de $M \setminus \bigcup_u S_u$ distincte de C_0 , on pose $\tilde{x}'_C = m_{\iota(C)}(\rho_C)$ (\tilde{x}'_{C_0} a déjà été défini plus haut).

Lemme 3.2.4

Il existe $k_1 > 0$ tel que pour toute paire de composantes voisines C_1 et C_2 de $M \setminus \bigcup_u S_u$, i.e. $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset$, on a

$$d_{\mathbb{H}^3}(\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}) < k_1.$$

Preuve. Considérons donc deux telles composantes C_1 et C_2 avec $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset$. On suppose C_1 et C_2 distinctes de C_0 ; dans ce cas, la constante recherchée existe trivialement étant donné que le nombre de composantes voisines de C_0 est fini. Soit donc $K = \pi_1(\overline{C_1} \cup \overline{C_2}, x_{C_1})$; $\overline{C_1} \cup \overline{C_2} \subset M$ et $x_{C_1} \in t$; par conséquent, K se plonge dans $\pi_1(M, x_{C_0})$ par un homomorphisme injectif canonique $j_K : K \rightarrow \pi_1(M, x_{C_0})$. Par ailleurs, pour $i = 1, 2$, $\varphi_{C_i}^{-1}$ induit une injection de $j'_{C_i} : \Gamma_{\iota(C_i)} \rightarrow K$; notons que l'on a $j_{C_i} = j_K \circ j'_{C_i}$.

D'autre part, la fonction à valeurs réelles positives définie sur l'espace des représentations fidèles de K par

$$\rho \mapsto d_{\mathbb{H}^3}(m_{\iota(C_1)}(\rho \circ j'_{C_1}), m_{\iota(C_2)}(\rho \circ j'_{C_2}))$$

est continue par le lemme 3.2.3. On montre qu'elle est invariante par conjugaison; elle définit donc une application continue

$$\bar{d}_{K, j'_{C_1}, j'_{C_2}} : \text{AH}(K) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

où l'on note $\text{AH}(K)$ l'espace de Teichmüller de K muni de la topologie algébrique, i.e. le quotient de l'espace des représentations fidèles de K par la relation de conjugaison. Notons que $\overline{C_1} \cup \overline{C_2}$ est une variété à bord acylindrique; d'après le théorème de Thurston (cf. [Thu86]), $\text{AH}(K)$ est donc compact. Et par conséquent, $\bar{d}_{K, j'_{C_1}, j'_{C_2}}$ est bornée comme fonction continue sur un compact.

A isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de triplets de la forme (K, j'_{C_1}, j'_{C_2}) ; ainsi, il existe une borne k_1 telle que quelque soit le choix de C_1 et C_2 , $\bar{d}_{K, j'_{C_1}, j'_{C_2}}$ est bornée par k_1 .

Etant donnée une paire de composante C_1 et C_2 , $\Phi \circ H$ donne naissance à une représentation fidèle $\rho_K = \Phi \circ H \circ j_K$ de K ; on a d'autre part

$$\bar{d}_{K, j'_{C_1}, j'_{C_2}}([\rho_K]) = d_{\mathbb{H}^3}(m_{\iota(C_1)}(\rho_K \circ j'_{C_1}), m_{\iota(C_2)}(\rho_K \circ j'_{C_2}));$$

or pour $i = 1, 2$, $m_{\iota(C_i)}(\rho_K \circ j'_{C_i}) = m_{\iota(C_i)}(\Phi \circ H \circ j_K \circ j'_{C_i}) = m_{\iota(C_i)}(\rho_{C_i}) = x'_{C_i}$; ainsi, on a

$$\bar{d}_{K, j'_{C_1}, j'_{C_2}}([\rho_K]) = d_{\mathbb{H}^3}(\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}).$$

Finalement $d_{\mathbb{H}^3}(\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}) < k_1$.

□

Lemme 3.2.5

Il existe $k_2 > 0$ tel que pour toute composante C de $M \setminus \bigcup_u S_u$ et pour tout $\alpha \in A_{\iota(C)}$:

$$d_{\mathbb{H}^3}(\tilde{x}'_C, \rho_C(\alpha)(\tilde{x}'_C)) < k_2.$$

Preuve. L'idée directrice est similaire à celle de la preuve du lemme 3.2.4. Pour tout $i \in [1, n]$, on considère la fonction

$$\rho \mapsto d_{\mathbb{H}^3}(m_i(\rho), \rho(\alpha)(m_i(\rho)))$$

de l'espace des représentations fidèles de Γ_i dans \mathbb{R}_+ ; par le lemme 3.2.3, elle est continue; elle est aussi invariante par conjugaison. On applique alors le théorème de Thurston suivant la même démarche que précédemment.

□

On construit maintenant une équivalence d'homotopie k -lipschitzienne $f : M \rightarrow M'$. On commence par définir f sur le 1-squelette $M^{(1)}$ de M .

Image des nœuds de la colonne vertébrale de M . Soit $p' : \mathbb{H}^3 \rightarrow M'$ le revêtement associé à la structure hyperbolique de M' ; il s'agit en fait de la surjection canonique de $\mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{H}^3/\Gamma'$. Pour toute composante C de $M \setminus \bigcup_u S_u$, on pose $f(x_C) = p'(\tilde{x}'_C)$.

Image de la colonne vertébrale t de M . Soit e un chemin simplicial simple de t connectant deux nœuds x_{C_1} et x_{C_2} avec $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset$. e correspond à un chemin simplicial dans l'un des M_i qui joint deux composantes de son bord. On peut donc borner inférieurement, indépendamment de C_1 et de C_2 , le nombre d'arêtes qui le constitue. Par hypothèse sur la structure hyperbolique de M , la longueur des arêtes de la triangularisation de M est bornée inférieurement; ainsi, la longueur de e est aussi bornée inférieurement et ce, indépendamment de C_1 et de C_2 . Par ailleurs, le lemme 3.2.4 nous dit que la distance entre \tilde{x}'_{C_1} et \tilde{x}'_{C_2} est bornée. On choisit $p'([\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}])$ pour l'image de e , où $[\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}]$ désigne le segment géodésique de \mathbb{H}^3 joignant \tilde{x}'_{C_1} et \tilde{x}'_{C_2} . Le contrôle que nous avons établi précédemment sur les longueurs de e et de $[\tilde{x}'_{C_1}, \tilde{x}'_{C_2}]$ garantit que l'on peut choisir $f|_e$ lipschitzienne avec une constante ne dépendant pas de e .

Image de s . Soit x un point de s . Comme t est un sous-arbre de s , il existe un chemin sans boucle unique connectant x à t . Soit $y \in t$ l'autre extrémité de ce chemin; l'image de y a été définie dans le point précédent; on pose $f(x) = f(y)$: on rétracte s sur t . Trivialement, f reste lipschitzienne.

Image de $M^{(1)}$. Considérons maintenant une arête e de $M^{(1)}$ n'appartenant pas à s . Soit z_1 et z_2 ses extrémités; soit C la composante de $M \setminus \bigcup_u S_u$ telle $e \in \overline{C}$. Par définition, $A_{\iota(C)}$ est l'ensemble des générateurs de $\Gamma_{\iota(C)}$ définis par les arêtes de la triangularisation de $M_{\iota(C)}$

n'appartenant pas à $s_{\iota(C)}$; $\varphi_C(e)$ est donc associée à l'un d'eux, notons-le α . Notons \tilde{e}' le segment géodésique $[\tilde{x}'_C, \rho_C(\alpha)(\tilde{x}'_C)]$. L'image de e est définie comme étant la concaténation des segments géodésiques $[f(z_1), f(x_C)]$, $p'(\tilde{e}')$ et $[f(x_C), f(z_2)]$. Le lemme 3.2.5 garantit que $f|_e$ peut être construite lipschitzienne.

Image de $M^{(2)}$. Considérons un 2-simplexe s de la triangularisation de M ; les hypothèses sur la structure hyperbolique de M implique que la longueur du bord ∂s de s est bornée tant supérieurement qu'inférieurement. Cela implique que son image $f(\partial s)$ dans M' est une courbe fermée géodésique par morceaux de longueur bornée. Cette courbe est homotopiquement nulle, elle se relève donc dans \mathbb{H}^3 par p' en une courbe fermée géodésique par morceaux \tilde{c} de même longueur. Soit \tilde{D} un disque immergé dans \mathbb{H}^3 de frontière \tilde{c} ; on peut construire \tilde{D} en choisissant un point O de \mathbb{H}^3 n'appartenant pas à \tilde{c} et en considérant les triangles géodésiques de \mathbb{H}^3 dont O est un sommet et dont le côté opposé à O est une partie géodésique maximale de \tilde{c} . Notons que la longueur de \tilde{c} est bornée indépendamment de s ; on peut donc choisir \tilde{D} de taille bornée indépendamment de s . On définit $f(s)$ comme étant l'image $p'(\tilde{D})$ de \tilde{D} par p' . Comme la taille de s est bornée inférieurement, on peut construire $f|_s$ de façon à ce qu'elle soit lipschitzienne.

L'extension de f à $M^{(3)} = M$ suit les mêmes idées, nous ne la détaillerons pas ici.

On vérifie que f est une équivalence d'homotopie en contrôlant la validité du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{\Phi} & \Gamma' \\
 \uparrow H & & \uparrow H' \\
 \pi_1(M, x_{C_0}) & & \pi_1(M', x_{C_0}) \\
 \uparrow (i_{M^{(1)}})_* & \nearrow (f|_{M^{(1)}})_* & \\
 \pi_1(M^{(1)}, x_{C_0}) & &
 \end{array}$$

Pour ce faire, on remarque d'abord que $\pi_1(M, x_{C_0})$ est engendré par la famille

$$\{j_C(A_{\iota(C)}) \mid C \text{ composante connexe de } M \setminus \bigcup_u S_u\}.$$

A cette famille est canoniquement associée une famille de générateurs de $\pi_1(M^{(1)}, x_{C_0})$. On pourra vérifier que les images par $(f|_{M^{(1)}})_*$ de ces générateurs correspondent aux images par f des arêtes de $M^{(1)}$ qui n'appartiennent pas à s . On s'aperçoit alors que le point numéro 4 de la construction de f est fait pour que le diagramme de la page 86 commute.

Ensuite, on sait que $\text{Ker}(i|_{M^{(1)}})_*$ est le sous-groupe normal engendré par les éléments de $\pi_1(M^{(1)}, x_{C_0})$ associé aux simplexes de dimension 2 de la triangularisation de M (cf. e.g. [Mas67]). La construction de f montre donc que f_* factorise le diagramme de la page 86 en le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma & \xrightarrow{\Phi} & \Gamma' \\
 \uparrow H & & \uparrow H' \\
 \pi_1(M, x_{C_0}) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(M', x_{C_0}) \\
 \uparrow (i_{M^{(1)}})_* & \nearrow (f|_{M^{(1)}})_* & \\
 \pi_1(M^{(1)}, x_{C_0}) & &
 \end{array}$$

f_* est l'isomorphisme associé à Φ .

Nous avons construit f de telle sorte que sa restriction sur chacun des simplexes de la triangularisation de M soit k -lipschitzienne. Il nous reste à vérifier que f est globalement k -lipschitzienne. Soient $x, y \in M$; soit γ un segment géodésique de M d'extrémités x et y . Soient $z_0 = x, z_1, \dots, z_\ell = y$ une décomposition de γ telle que chaque segment $[z_i, z_{i+1}]$ appartienne à un simplexe de M ; on a $d_M(x, y) = \sum d_M(z_i, z_{i+1})$. Comme f est k -lipschitzienne sur chaque simplexe, on obtient

$$d_M(x, y) > \sum \frac{1}{k} d_{M'}(f(z_i), f(z_{i+1}))$$

et donc, par l'inégalité triangulaire :

$$d_M(x, y) > \frac{1}{k} d_{M'}(f(x), f(y))$$

f est k -lipschitzienne.

Nous avons finalement démontré le résultat suivant :

Lemme 3.2.6

*Soient (M, x_0) et (M', x'_0) deux 3-variétés pointées hyperboliques complètes sans bord. Si M est acylindriquement arborescente, alors tout isomorphisme entre $\pi_1(M, x_0)$ et $\pi_1(M', x'_0)$ est induit par une équivalence d'homotopie $f : M \rightarrow M'$ **k -lipschitzienne**.*

Contrôle

Lemme 3.2.7

Soient M et M' deux 3-variétés hyperboliques complètes sans bord; on suppose que M est acylindriquement arborescente. Soient $f : M \rightarrow M'$ et $g : M' \rightarrow M$ des équivalences d'homotopie k -lipschitziennes pour $k > 0$ telles que $g \circ f$ induise l'identité sur le groupe fondamental de M . Alors il existe $\ell > 0$ tel que pour tout point x de M : $d_M(x, g \circ f(x)) < \ell$.

Preuve. Soit $x \in M$; soit γ un lacet non homotopiquement nul passant par x . Notons que, du fait que M est arborescente, il existe $\ell_1 > 0$, indépendant de x , tel que l'on peut toujours choisir γ de longueur inférieure à ℓ_1 .

$g \circ f(x)$ appartient à $g \circ f(\gamma)$. Par hypothèse, $g \circ f(\gamma)$ est librement homotope à γ ; soit $H : [0, 1]^2 \rightarrow M$ une homotopie libre entre $g \circ f(\gamma)$ et γ .

Supposons que $g \circ f(\gamma)$ et γ soient séparés par plusieurs surfaces de la décomposition de M . Sur chacune d'entre elles, H définit un lacet librement homotope à γ . Or chaque M_i est acylindrique et γ n'est pas homotopiquement nulle; par conséquent, $g \circ f(\gamma)$ et γ ne peuvent en fait être séparés que par au plus une surface de la décomposition de M .

Ainsi, il existe deux composantes C_1 et C_2 de $M \setminus \bigcup S_u$ avec $\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset$ telle que $\gamma \cap (\overline{C_1} \cup \overline{C_2}) \neq \emptyset$ et $g \circ f(\gamma) \cap (\overline{C_1} \cup \overline{C_2}) \neq \emptyset$. Mais, les hypothèses sur la structure hyperbolique de M impliquent que le diamètre des composantes de $M \setminus \bigcup S_u$ est borné. Il existe donc un nombre $\ell_2 > 0$, indépendant de x , tel que $d_M(\gamma, g \circ f(\gamma)) < \ell_2$. Par ailleurs, rappelons que γ a été choisi de longueur inférieure à ℓ_1 ; $g \circ f(\gamma)$ est donc de longueur inférieure à $k^2\ell_1$. Finalement on obtient :

$$d_M(x, g \circ f(x)) < \frac{\ell_1}{2} + \frac{k^2\ell_1}{2} + \ell_2$$

On choisit donc $\ell = \frac{\ell_1}{2} + \frac{k^2\ell_1}{2} + \ell_2$.

□

Construction de la pseudo-isométrie

Soit X un espace métrique. Une application $f : X \rightarrow X$ est appelée une *pseudo-isométrie* s'il existe deux nombres k et ℓ tels que pour tout $x, y \in X$, $k^{-1}d_X(x, y) - \ell \leq d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$.

Lemme 3.2.8

Soient $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ et $M' = \mathbb{H}^3/\Gamma'$ deux variétés de dimension 3 hyperboliques complètes sans bord acylindriquement arborescentes. Supposons qu'il existe un isomorphisme $\Phi : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(M')$. Il existe alors une équivalence d'homotopie f entre M et M' qui induit Φ et qui se relève en une **pseudo-isométrie** de \mathbb{H}^3 .

La preuve est inspirée de [Rat94].

Preuve. Soient $f : M \rightarrow M'$ et $g : M' \rightarrow M$ deux équivalences d'homotopie k -lipschitziennes comme construites dans le lemme 3.2.6 telles que $g \circ f$ induise l'identité sur le groupe fondamental de M . Soit $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$ une homotopie déformant $g \circ f$ en Id_M , i.e. F est

continue, $F(.0) = g \circ f$ et $F(., 1) = \text{Id}_M$. Soient \tilde{f} et \tilde{g} des relèvements de f et de g . Par le théorème du relèvement des homotopies F se relève en une application $\tilde{F} : \mathbb{H}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^3$ telle que $\tilde{F}_0 = \tilde{g}\tilde{f}$; si $p : \mathbb{H}^3 \rightarrow M$ désigne le revêtement universel de M , on a $p\tilde{F}_1 = F_1p = p$. On en déduit que $\tilde{F}_1 \in \Gamma$. Quitte à remplacer \tilde{g} par $\tilde{F}_1^{-1}\tilde{g}$ et \tilde{F} par $\tilde{F}_1^{-1}\tilde{F}$, on peut supposer que $\tilde{F}_1 = \text{id}_{\mathbb{H}^3}$. D'autre part, \tilde{F} est Γ -équivariante : en effet, soit $\sigma \in \Gamma$;

$$\begin{aligned} p\tilde{F}(\sigma \times \text{id}) &= F(p \times \text{id})(\sigma \times \text{id}) \\ &= F(p\sigma \times \text{id}) \\ &= F(p \times \text{id}) \\ &= p\tilde{F} \end{aligned}$$

Il existe donc $\sigma' \in \Gamma$ tel que $\tilde{F}(\sigma \times \text{id}) = \sigma'\tilde{F}$. Comme $\tilde{F}_1 = \text{id}_{\mathbb{H}^3}$, on a $\sigma = \sigma'$.

Par l'inégalité triangulaire, on a pour tout $x, y \in \mathbb{H}^3$:

$$d(x, y) \leq d(x, \tilde{g}\tilde{f}(x)) + d(\tilde{g}\tilde{f}(x), \tilde{g}\tilde{f}(y)) + d(\tilde{g}\tilde{f}(y), y)$$

Comme f et g sont k -lipschitzienne, \tilde{f} et \tilde{g} le sont aussi. Par le lemme 3.2.7, il existe un majorant $\ell > 0$ de $d(x, \tilde{g}\tilde{f}(x))$ et de $d(y, \tilde{g}\tilde{f}(y))$ indépendant de x et de y . Ainsi, on a :

$$d(x, y) \leq \ell + kd(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) + \ell$$

Et donc :

$$k^{-1}d(x, y) - \frac{2\ell}{k} \leq d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) \leq kd(x, y)$$

□

Conclusion

On sait d'après le théorème de Sullivan [Sul79, Sul81] que si l'action d'un sous-groupe discret Γ de $\text{Isom } \mathbb{H}^3$ sur la sphère à l'infini S_∞^2 est conservative (cf. [MT98, Sul79, Sul81]), alors toute pseudo-isométrie Γ -équivariante de \mathbb{H}^3 est homotope à une isométrie Γ -équivariante et ce, par une homotopie elle-même Γ -équivariante. Par ailleurs, par le théorème 5.11 de [MT98] (cf. [McM96]), l'action de Γ sur S_∞^2 est conservative si et seulement si le rayon injectif de \mathbb{H}^3/Γ est uniformément borné, i.e. il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{H}^3/\Gamma$, la boule de \mathbb{H}^3/Γ centrée en x de rayon r est isométrique à une boule de rayon r de \mathbb{H}^3 ; on montre que cette dernière condition est satisfaite par les variétés de dimension 3 hyperboliques complète acylindriquement arborescentes. Le théorème 7 est démontré.

□

Remarquons que le fait de considérer le théorème 7 comme un théorème de *rigidité* est en réalité un abus étant donné que nous n'avons pas su définir de topologie raisonnable sur l'espace de Teichmüller d'une variété de dimension 3 arborescente, i.e. l'espace des représentations de son groupe fondamental dans $\text{Isom } \mathbb{H}^3$, à conjugaison près. Les difficultés que nous avons rencontrées sont principalement liées au fait que ce dernier n'est pas finiment engendré en général (cf. section 3.3).

Question: [Rigidité des variétés arborescentes]

Le théorème 7 reste-t-il vrai si l'on suppose que seulement l'une des deux variétés hyperboliques est acylindriquement arborescente ?

Dans la définition 10, si l'on suppose les M_i non pas compacts mais de volume (hyperbolique) fini, le théorème 7 reste-t-il valide ?

Existe-t-il une topologie raisonnable sur l'espace de Teichmüller d'une variété de dimension 3 arborescente ?

Le théorème de Mostow (cf. [Mos68]) et le théorème de Sullivan (cf. [Sul79, Sul81]) sont valides en dimensions supérieures ou égales à 3; qu'en est-il du théorème 7 ?

3.3 Arborescence, régularité et groupes fondamentaux

3.3.1 Groupes fondamentaux de 3-variétés arborescentes

Nous avons vu dans la section précédente qu'une variété de dimension 3 hyperbolique complète et acylindriquement arborescente est caractérisée par son groupe fondamental. La question de savoir si deux telles variétés sont homéomorphes se ramène donc à la comparaison de leurs groupes fondamentaux. L'étude de ces groupes s'impose donc naturellement, c'est l'objet de cette partie.

Premièrement, nous allons voir que la donnée d'une décomposition arborescente pour une variété de dimension 3 permet de construire une présentation de son groupe fondamental en termes de générateurs et de relations; pour ce faire, nous verrons que ce dernier peut être défini au moyen du concept de graphe de groupe (cf. [DD89]); nous verrons ensuite que cette présentation, qui est *a priori* infinie tant du point de vue du nombre de générateurs que du nombre de relations, prendra un caractère constructif dès lors que la décomposition arborescente sera supposée régulière. Enfin, nous considérerons le cas particulièrement agréable des 3-variétés arborescentes régulières qui sont des revêtements réguliers de 3-variétés compactes fermées.

Présentation

Une variété arborescente est construite de façon arborescente, nous allons voir qu'il en est en quelques sortes de même de son groupe fondamental. Lorsque l'on recolle deux 3-variétés l'une sur l'autre le long de deux composantes incompressibles de leurs bords, le groupe fondamental de la variété que l'on obtient est le produit amalgamé de leurs groupes fondamentaux sur le groupe fondamental de la surface commune (cf. [Hem76, Jac77, Joh95, LS77], voir aussi [Hem76, Feu73] pour une étude de la réciproque). Le cas des 3-variétés arborescentes généralise ce phénomène; la description de leurs groupes fondamentaux nécessite le concept de graphe de groupes, qui généralise les produits amalgamés et les HNN-extensions; la référence principale à ce propos est [DD89].

Un *graphe de groupes* est un graphe $Y = (V, E, A, \text{vert}, \text{lab}, \text{src})$ de type 0 dont chaque sommet $v \in V$ est étiqueté par un groupe que l'on note $\text{lab}(v)$, on suppose les $\text{lab}(v)$ deux à deux disjoints, chaque arc e est étiqueté par un couple $(G(e), t_e)$ où $G(e)$ est un sous-groupe

du groupe $lab(v_1)$ associé à l'origine v_1 de e , et $t_e : G(e) \rightarrow lab(v_2)$ est un homomorphisme injectif, v_2 désigne l'extrémité de e .

Considérons un graphe de groupes Y ainsi qu'un arbre couvrant Y_0 de Y . La donnée du couple (Y, Y_0) permet de définir un groupe appelé le *groupe fondamental* de Y relatif à Y_0 et noté $\pi_1(Y, Y_0)$ qui est construit de la façon suivante : l'ensemble des générateurs de $\pi_1(Y, Y_0)$ est par définition $\{t_e \mid e \in E\} \cup \bigcup_{v \in V} lab(v)$; en plus des relations définissant les $lab(v)$, on considère deux types de relations :

- $t_e^{-1}gt_e = t_e(g)$ pour tout $e \in E, g \in G(e)$;
- $t_e = 1$ pour tout $e \in E_{Y_0}$.

Soit donc M une variété de dimension 3 arborescente donnée avec une décomposition arborescente; on conserve les notations de la partie précédente. Nous allons décrire le groupe fondamental de M comme groupe fondamental d'un graphe infini de groupes. Le graphe support de ce graphe de groupe est l'arbre infini τ défini page 71. Par construction, à chaque nœud μ de τ correspond une composante connexe C de $M \setminus \bigcup S_u$; on associe alors à μ le groupe $\Gamma_C = \pi_1(\overline{C}, x_C)$. Notons que φ_C induit un isomorphisme $\varphi_{C^*} : \Gamma_C \rightarrow \Gamma_{\iota(C)}$; rappelons que $\Gamma_i = \pi_1(M_i, x_{i0})$. Par ailleurs, chaque Γ_C s'injecte dans $\pi_1(M, x_{C_0})$ par l'application j_C définie page 82; ainsi donc, même si τ est infini, les groupes attachés à ses nœuds sont en nombre fini à isomorphisme près. Par construction, à chaque arc e de τ est associé une surface S_u de la décomposition; soient C_1 et C_2 les composantes de $M \setminus \bigcup S_u$ qui sont contiguës à S_u , i.e. $\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2 = S_u$; on considère le groupe $\Gamma_u = \pi_1(S_u, \psi_u^{-1}(x_{\mu(u)}))$; rappelons que ψ_u est une carte de S_u sur $T_{\mu(u)}$ et que $x_{\mu(u)}$ est un sommet distingué choisi une fois pour toute dans la triangularisation de $T_{\mu(u)}$. En considérant l'arbre simplicial $\varphi_{C_i}^{-1}(t_{\iota(C_i)})$ ($i = 1, 2$), on obtient un homomorphisme de Γ_u dans Γ_{C_i} ; en effet, $\varphi_{C_i}^{-1}(t_{\iota(C_i)})$ comporte un chemin unique entre x_{C_i} et $\psi_u^{-1}(x_{\mu(u)})$, dont on se sert pour transformer un lacet de S_u basé en $\psi_u^{-1}(x_{\mu(u)})$ en un lacet de \overline{C}_i basé en x_{C_i} ; de fait, cet homomorphisme est injectif car S_u est supposée incompressible. On note $\Gamma_{C_i u}$ l'image de Γ_u dans Γ_{C_i} . Comme $S_u = \overline{C}_1 \cap \overline{C}_2$, on obtient un isomorphisme $t_e : \Gamma_{C_1 u} \rightarrow \Gamma_{C_2 u}$ que l'on associe à e . Remarquons que cet isomorphisme ne dépend en fait que de $\iota(C_1)$, de $\iota(C_2)$ et de j_1 et j_2 , les indices tels que $\varphi_{\overline{C}_i}|_{S_u}$ a pour image $B_{\iota(C_i)j_i}$ pour $i = 1, 2$; de même que précédemment, $\pi_1(B_{ij}, x_{ij})$ se plonge dans $\pi_1(M_i, x_{i0})$ en utilisant l'arbre étoilé t_i . Par un léger abus de notation, on a alors $\Gamma_{C_i u} = \varphi_{C_i}^{-1}(\pi_1(B_{ij}, x_{ij}))$; et on vérifie que

$$t_e = \varphi_{C_2^*}|_{\Gamma_{C_2 u}}^{-1} \circ g_{\iota(C_2)j_2}^{-1} \circ g_{\iota(C_1)j_1} \circ \varphi_{C_1^*}|_{\Gamma_{C_1 u}}.$$

Finalement, la donnée de τ et des groupes associés à ses nœuds et à ses arêtes définit un graphe de groupe dont on montre que le groupe fondamental est isomorphe à $\pi_1(M, x_{C_0})$. Nous avons décrit $\pi_1(M, x_{C_0})$ comme groupe fondamental d'un graphe de groupe; néanmoins, du fait que τ est un arbre, cela revient à dire que $\pi_1(M, x_{C_0})$ est obtenu en faisant le produit amalgamé simultané de tous les couples de Γ_C voisins relativement aux Γ_u , le long des arêtes de τ .

Nous donnons maintenant une présentation de $\pi_1(M, x_{C_0})$ qui est associée à la construction précédente. Rappelons que A_i désigne un ensemble fini de générateurs de Γ_i ; Par

construction de s_i , pour tout j , A_i contient un sous-ensemble A_{ij} qui engendre l'image de $\pi_1(B_{ij}, x_{ij})$ dans Γ_i . Pour toute composante C de $M \setminus \bigcup S_u$ et tout élément α de $A_{i(C)}$, on note $\alpha^C = j_C(\alpha)$; $j_C(A_{i(C)})$ est alors une famille génératrice du sous-groupe $j_C(\Gamma_{i(C)})$. On montre alors que la famille

$$\mathfrak{A} = \{\alpha^C\}_{\alpha, C}$$

est une famille génératrice d'éléments de $\pi_1(M, x_{C_0})$. Notons qu'elle est de cardinal infini.

Si $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l \in A_{i(C)}^*$ est un mot sur les générateurs de $\Gamma_{i(C)}$, on note $w^C = \alpha_1^C \alpha_2^C \dots \alpha_l^C$; comme M_i est une variété compacte triangularisée, elle est finiment présentée (cf. e.g. [Hem76]); il existe donc un sous-ensemble fini de mots $R_i \subset \{A_i \cup A_i^{-1}\}^*$ tel que $\langle A_i \mid R_i \rangle$ soit une présentation de Γ_i ; on considère alors le langage

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = & \{r^C \mid C \text{ est une composante de } M \setminus \bigcup S_u \text{ et } r \in R_{i(C)}\} \\ & \cup \{\alpha_1^{C_1} \alpha_2^{C_2^{-1}} \mid \overline{C_1} \cap \overline{C_2} \neq \emptyset \text{ et il existe } e \text{ tel que } \alpha_2^{C_2} = t_e(\alpha_1^{C_1})\} \end{aligned}$$

Proposition 3.3.1

$\langle \mathfrak{A} \mid \mathfrak{R} \rangle$ est une présentation de $\pi_1(M, x_{C_0})$.

Idée de preuve. Soit γ un lacet de M de point de base x_{C_0} . Comme il est compact, γ ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes C_1, \dots, C_m de $M \setminus \bigcup_u S_u$. L'union de leurs adhérences est une variété compacte K ; elle est construite en recollant en elles, une à une, les $\overline{C_i}$ sur leurs bords. On montre alors par des techniques classiques [Hem76, LS77], que le groupe fondamental de K est obtenu en effectuant $m - 1$ produits amalgamés successifs sur les groupes des surfaces S_u séparant les C_i : on commence par faire le produit de $j_{C_1}(\Gamma_{C_1})$ par $j_{C_2}(\Gamma_{C_2})$ sur le groupe de la surface qui sépare C_1 et C_2 ; puis on fait le produit du groupe obtenu avec $j_{C_3}(\Gamma_{C_3})$ sur le groupe de la surface séparant C_1 et C_2 de C_3 , et ainsi de suite. De fait, on obtient une présentation finie de $\pi_1(K, x_{C_0})$ dont l'ensemble des générateurs est

$$\mathfrak{A}_K = \{\alpha^{C_i} \mid i = 1, \dots, k \text{ et } \alpha \in A_{i(C_i)}\}$$

et l'ensemble des relations est

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_K = & \{r^{C_i} \mid i = 1, \dots, k \text{ et } r \in R_{i(C_i)}\} \\ & \cup \{\alpha_1^{C_i} \alpha_2^{C_{i'}^{-1}} \mid \overline{C_i} \cap \overline{C_{i'}} \neq \emptyset \text{ et il existe } e \text{ tel que } \alpha_2^{C_{i'}} = t_e(\alpha_1^{C_i})\} \end{aligned}$$

Ainsi, la classe d'homotopie de γ se décompose sur les éléments de \mathfrak{A}_K qui elle-même est un sous-ensemble de \mathfrak{A} , cela prouve que cette dernière est une famille génératrice de $\pi_1(M, x_{C_0})$. Par ailleurs, si γ est homotopiquement nul, alors, sa classe d'homotopie, décrite comme produit d'éléments de \mathfrak{A}_K et vue dans le groupe libre engendré par \mathfrak{A}_K se décompose en un produit de conjugués d'éléments de \mathfrak{R}_K qui elle-même est un sous-ensemble de \mathfrak{R} .

□

Régularité

Cette présentation est en général infinie. Néanmoins, elle présente certains caractères constructifs. D'abord, elle est définie à partir d'un nombre fini de présentations finies : celles des $\Gamma_i : \langle A_i \mid R_i \rangle$ pour $i = 1 \dots n$; d'autre part, les produits amalgamés locaux ne dépendent que de l'application $\iota(\cdot)$, assignant l'un des M_i à chaque composante C de $M \setminus \bigcup S_u$ et de l'application $\mu(\cdot)$ assignant l'un des T_k à chaque S_u . En fait, la donnée qui n'est définitivement pas finie est celle des étiquettes de τ . Pour remédier à cela, nous proposons de considérer les décompositions arborescentes régulières, i.e. celles pour lesquelles τ est un arbre régulier.

Supposons donc que τ est un arbre régulier. Dans ce cas, ses nœuds peuvent être codés par les mots d'un langage rationnel L ; L peut être défini comme le langage reconnu par un automate construit à partir du graphe pointé fini codant τ ; de même, les applications $\iota(\cdot) : \text{dom}(\tau) \rightarrow [1, n]$ et $\mu(\cdot) : \text{dom}(\tau) \setminus \{\varepsilon\} \rightarrow [1, m]$ peuvent être codées par exemple par deux partitions de L par des familles de langages rationnels $\{L_1^\iota, \dots, L_n^\iota\}$ et $\{L_1^\mu, \dots, L_m^\mu\}$ codant les images réciproques. On peut maintenant coder les éléments de \mathfrak{A} par des couples (α, w) où $w \in L$ et $\alpha \in A_i$ où i est l'entier de $[1, n]$ tel que $w \in L_i^\iota$, i.e. $i = \iota(C)$ où C est la composante de $M \setminus \bigcup S_u$ codée par w . Le codage des relations de \mathfrak{R} suit les mêmes idées: on peut vérifier que le langage des relateurs est aussi un langage rationnel.

Ainsi, le groupe fondamental d'une 3-variété arborescente régulière est un objet constructif; plusieurs questions algorithmiques prennent alors du sens. L'une d'entre elles consiste à déterminer dans quel cas on peut envisager de le calculer de façon effective. Nous avons vu avec la proposition 3.1.2 que, pour une 3-variété HR-équationnelle, on peut calculer une décomposition arborescente régulière. On peut donc aussi calculer une présentation de son groupe fondamental; ce qui donne un sens au résultat suivant :

Proposition 3.3.2 *Le groupe fondamental d'une variété HR-équationnelle est calculable.*

Remarque à propos des formes normales

Nous avons vu précédemment que le groupe fondamental d'une variété arborescente s'exprime comme un produit amalgamé infini le long d'un arbre. Ceci donne à penser qu'il est certainement possible de définir un concept de *forme normale* [LS77, MKS66]. A cet égard, nous proposons la conjecture suivante :

Conjecture :

Tout élément u de $\pi_1(M, x_{c_0})$ peut s'écrire sous la forme

$$u = h_1 \dots h_n$$

de telle sorte qu'il existe une suite (H_1, \dots, H_n) de sous-groupes de $\pi_1(M, x_{c_0})$ telle que

- *pour tout i de $[1, n]$, $h_i \in H_i$ et $H_i = j_u(\Gamma_u)$ pour un u donné ou bien $H_i = j_C(\Gamma_C)$ pour une composante C de $M \setminus \bigcup S_u$;*
- *pour tout i de $[1, n]$, h_i n'appartient ni à H_{i+1} , ni à H_{i-1} .*

*La suite (H_1, \dots, H_n) est uniquement déterminée par u ; la suite (h_1, \dots, h_n) est appelée **forme normale** de u .*

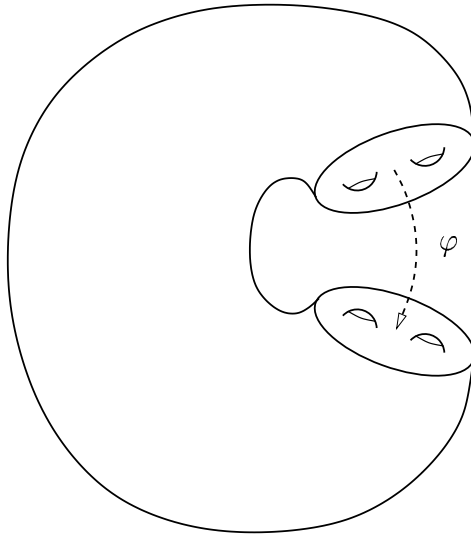
Si les H_i sont certainement uniques, il n'en est pas de même des h_i et loin s'en faut. Néanmoins, comme dans le cas du produit amalgamé de deux groupes, nous pensons qu'il est possible de définir une forme normale dont les facteurs seraient uniques; pour ce faire il faut se donner un système de représentants des classes à droite pour chaque sous-groupes de forme $j_c(\Gamma_c)$ ou bien $j_u(\Gamma_u)$ modulo chacun de ses sous-groupes obtenu par intersection avec d'autres $j_c(\Gamma_c)$ ou $j_u(\Gamma_u)$, i.e. pour tout couple de sous-groupes H, H' de la famille $\{j_u(\Gamma_u)\}_u \cup \{j_c(\Gamma_c)\}_c$ il faut se donner un système $R_{H,H'} \subset H$ de représentants des classes à droite de H modulo $H \cap H'$.

L'un des objectifs du concept de forme normale est de donner une solution effective au *problème du mot*, i.e. décider si deux mots sur les générateurs et leurs inverses représentent le même élément d'un groupe (cf. [MKS66, LS77]). La définition rigoureuse d'un concept de forme normale pour les éléments de $\pi_1(M, x_{c_0})$ constituerait une avancée importante dans ce sens. Cela réduirait le problème à la question de l'équivalence de deux éléments de H modulo $H \cap H'$, où H et H' sont tels que précédemment.

3.3.2 Logique monadique du second ordre, régularité et revêtements

Etude d'un cas favorable

Considérons une variété de dimension 3 triangularisée N , compacte, à bords incompressibles, munie d'un homéomorphisme involutif $\varphi : \partial N \rightarrow \partial N$ qui échange les composantes de bord de N , i.e. pour chaque composante B de ∂N , $\varphi(B)$ est une autre composante de ∂N , distincte de B , et $\varphi^2 = \text{Id}_{\partial N}$. Intuitivement, φ définit un recollement du bord de N sur lui-même. On considère alors la 3-variété compacte sans bord \overline{N} , qui est obtenue à partir de N en recollant ∂N sur elle-même selon φ , i.e. φ définit une relation d'équivalence sur N qui est triviale sur son intérieur et qui définit chaque élément du bord comme équivalent à son image par φ .



Cette construction de \overline{N} à partir de N est naturellement associée à une construction de $\pi_1(\overline{N})$ à partir de $\pi_1(N)$ en termes de graphe de groupe. On choisit un point x_0 dans N et

un point x_B dans chaque composante B de ∂N ; on peut choisir les x_B de telle sorte que $\varphi(\{x_B\}_B) = \{x_B\}_B$; on choisit aussi pour chaque x_B un chemin α_B le connectant à x_0 dans N ; le choix de ces α_B détermine pour tout B un plongement $j_B : \pi_1(B, x_B) \rightarrow \pi_1(N, x_0)$. On note $\Gamma_N = \pi_1(N, x_0)$ et pour toute composante $B : \Gamma_B = j_B(\pi_1(B, x_B)) \subset \Gamma_N$. On note les composantes de ∂N de la façon suivante: $B_1, \dots, B_k, B'_1, \dots, B'_k$, de telle sorte que $\partial N = \bigcup_j B_j \cup B'_j$ et pour tout $j = 1 \dots k$, $B'_j = \varphi(B_j)$. Pour tout $j = 1, \dots, k$, φ induit un isomorphisme $t_j : \Gamma_{B_j} \rightarrow \Gamma_{B'_j} : t_j = j_{B'_j}^{-1} (\varphi|_{B_j})_* j_{B_j}$. Le groupe fondamental de \overline{N} de point de base x_0 est alors le groupe fondamental du graphe de groupe G_N qui ne contient qu'un sommet associé au groupe Γ_N et k arcs, qui sont en fait des boucles étiquetées par les couples (Γ_B, t_j) pour $j = 1, \dots, k$; on peut aussi dire de façon équivalente que $\pi_1(\overline{N}, x_0)$ est obtenu par k HNN-extensions de Γ_N successives selon les t_j pour $j = 1, \dots, k$ (cf. [LS77, DD89]).

Cette construction nous permet de donner une présentation de $\pi_1(\overline{N}, x_0)$. Pour ce faire, on considère d'abord une présentation finie $\langle A \mid R \rangle$ de Γ_N telle que pour toute composante B de ∂N , il existe un sous-ensemble A_B de A telle que A_B soit une partie génératrice de Γ_B et que pour tout $j = 1, \dots, k$, $t_j(A_{B_j}) = A_{B'_j}$; on obtient alors une présentation de $\pi_1(\overline{N}, x_0)$:

$$(A \cup \{t_j \mid j = 1, \dots, k\} \mid R \cup \{t_j a t_j^{-1} t_j(a)^{-1} \mid j = 1, \dots, k \text{ et } a \in A_{B_j}\})$$

cf. [LS77, DD89].

Avec tout cela, nous allons construire une variété de dimension 3, \tilde{N} , arborescente régulière, et donc HR-équationnelle, comme revêtement régulier de \overline{N} . On considère d'abord T_N , le revêtement universel de G_N au sens des graphes; T_N est l'arbre infini régulier dont chaque sommet est de degré $2k$ et appartient pour tout $j = 1, \dots, k$, à un arc entrant étiqueté par j et un seul et un arc sortant étiqueté par j et un seul; notons que T_N n'est pas un arbre au sens orienté du terme, c'est un graphe orienté connexe sans boucle. On associe à chaque nœud de T_N une copie de N ; chaque arc de T_N est associé à un couple de composantes du bord de N , ce qui définit des recollements locaux des bords des copies de N le long des arcs de T_N ; on ne détaille pas ces recollements qui s'imposent de façon naturelle. Finalement, on obtient une 3-variété \tilde{N} qui est un revêtement de \overline{N} ; on laisse au lecteur le soin de définir la surjection p de \tilde{N} sur \overline{N} , qui s'impose aussi de façon très naturelle. On démontre alors le résultat suivant :

Proposition 3.3.3 *\tilde{N} est une variété arborescente régulière. De plus, si \overline{N} est hyperbolique complète, comme c'est le cas si N est hyperbolique à bords totalement géodésiques, alors \tilde{N} est une variété hyperbolique complète arborescente au sens de la définition 13.*

Idée de preuve. Pour construire une décomposition arborescente de \tilde{N} , on considère le revêtement $p : \tilde{N} \rightarrow \overline{N}$; puis on regarde l'image réciproque par p du bord de N qui est une surface incompressible de \overline{N} . $p^{-1}(\partial N)$ est une collection de surfaces incompressibles de \tilde{N} qui découpe \tilde{N} en morceaux tous homéomorphes à N . Par ailleurs, chaque composante de $p^{-1}(\partial N)$ est associée à un arc de T_N ; la construction de \tilde{N} sur le modèle de T_N montre qu'une telle composante est une surfaces séparante de \tilde{N} .

Pour ce qui concerne l'hyperbolicité; si \overline{N} possède une structure hyperbolique, alors p^{-1} la transmet à \tilde{N} .

□

Par *revêtement de graphe de groupes*, on entend le concept suivant : soient G un graphe de groupes; un *revêtement* de G est un triplet $(\tilde{G}, p, \{\psi_v\}_{v \in V_{\tilde{G}}})$ où \tilde{G} est un graphe de groupes, $p : \tilde{G} \rightarrow G$ est un revêtement au sens des graphes et pour tout sommet $v \in V_{\tilde{G}}$, ψ_v est un isomorphisme entre le groupe associé à v dans \tilde{G} et celui qui est associé à $p(v)$ dans G tel que si v et v' sont liés dans \tilde{G} par un arc e , alors l'isomorphisme partiel \tilde{t}_e associé à e dans \tilde{G} est égal à $\psi_{v'}^{-1} t_{p(e)} \psi_v$ restreint au domaine de \tilde{t}_e , lui-même égal à $\psi_v^{-1}(\text{dom}(t_{p(e)}))$, $t_{p(e)}$ désigne l'isomorphisme partiel associé à $p(e)$ dans G .

En ces termes, le groupe fondamental de \tilde{N} se définit de façon satisfaisante :

Proposition 3.3.4 *Le groupe fondamental de \tilde{N} est isomorphe au groupe fondamental du graphe de groupe défini comme le revêtement universel du graphe de groupe G_N .*

Idée de preuve. Sachant que le graphe support du revêtement universel de G_N est exactement T_N , ce résultat est une instance de la construction développée page 91.

□

La proposition 3.3.1 permet alors de définir $\pi_1(\tilde{N})$ de manière constructive.

Un grand intérêt de fabriquer des 3-variétés arborescentes comme revêtement de variétés compactes réside dans le fait que l'on obtient alors un plongement de leurs groupes fondamentaux dans des groupes *finiment présentés*; en l'occurrence, dans notre cas, le groupe fondamental de \tilde{N} se plonge par p_* dans $\pi_1(\overline{N}, x_0)$; et son image est engendrée par la famille $\{tat^{-1} \mid a \in A \text{ et } t \in \langle t_1, \dots, t_k \rangle\}$ où $\langle t_1, \dots, t_k \rangle$ désigne le sous-groupe de $\pi_1(\overline{N}, x_0)$ engendré par la famille $\{t_1, \dots, t_k\}$, notons que c'est un groupe libre dont T_N est le graphe de Cayley. Pour voir cela, on considère la construction développée page 91; les générateurs de $\pi_1(\overline{N}, x_0)$ sont donnés par la famille $\mathfrak{A} = \{\alpha^C\}_{\alpha, C}$, où C varie dans l'ensemble des composantes connexes de $\tilde{N} \setminus \bigcup S_u$, $\{S_u\}_u$ est la décomposition arborescente de \tilde{N} , et α varie dans une famille génératrice de $\pi_1(M_i, x_{i0})$; où M_i est le représentant de la classe d'homéomorphisme de C ($i = \iota(C)$). Dans le cas présent, les composantes de $\tilde{N} \setminus \bigcup_u S_u$ sont indicées par les nœuds de T_N , que nous considérerons dorénavant comme le graphe de Cayley de $\langle t_1, \dots, t_k \rangle$; et chaque composante connexe de $\tilde{N} \setminus \bigcup_u S_u$ est homéomorphe à N , ainsi, on peut choisir A comme partie génératrice de $\pi_1(M_i, x_{i0})$ au sens des notations précédentes. La famille génératrice de $\pi_1(\overline{N}, x_0)$ peut être alors notée $\{a^t \mid a \in A \text{ et } t \in \langle t_1, \dots, t_k \rangle\}$. On vérifie alors que l'image par p_* dans $\pi_1(\tilde{N}, x_0)$ d'un élément a^t est exactement $t^{-1}at$. On obtient le résultat suivant :

Proposition 3.3.5 $\pi_1(\tilde{N})$ est isomorphe à la clôture normale $\langle\langle A \rangle\rangle$ de A .

Ceci nous offre un autre moyen de définir constructivement le groupe fondamental d'une variété arborescente.

Outre cela, on obtient un résultat concret :

Proposition 3.3.6 *Si le problème du mot relatif à $\pi_1(N, x_0)$ est décidable, alors il en est de même pour $\pi_1(\tilde{N})$.*

Idée de preuve. Deux mots \tilde{w}_1 et \tilde{w}_2 sur les a^t définissent *via* p_* deux éléments de $\pi_1(N, x_0)$ qui sont égaux si et seulement si \tilde{w}_1 et \tilde{w}_2 définissent le même élément de $\pi_1(\tilde{N}, x_0)$.

□

3.3. RÉGULARITÉ, RÉGULARITÉ ET GROUPES FONDAMENTAUX 37

C'est le cas notamment si $\pi_1(\overline{N}, x_0)$ est automatique et donc en particulier si \overline{N} peut être équipée d'une structure hyperbolique complète (cf. [ECH⁺92]). Ce dernier cas est intéressant, car si \overline{N} est une variété hyperbolique complète et si N est acylindrique, alors \tilde{N} est aussi hyperbolique complète et elle est acylindriquement arborescente; par le théorème 7, elle est donc caractérisée à isométrie près par son groupe fondamental $\pi_1(\tilde{N})$.

Logique monadique du second ordre et revêtements réguliers

Nous introduisons ici le langage MS_1 de la logique monadique du second ordre pour les graphes [Tho, Cou90a, Cou97] (pour une introduction à la logique en informatique théorique, voir [LdR96], pour la logique monadique du second ordre voir [Gur85]). Soit A un ensemble de symboles d'étiquettes; on suppose qu'à chaque symbole $a \in A$ est associé un entier $\tau(a)$. On considère un ensemble dénombrable de *variables* divisé en variables dites *individuelles* de sommets que l'on notera par convention par des lettres minuscules (a, b, x, y, v, w, \dots) et en variables dite *d'ensemble* de sommets que l'on notera par des lettres majuscules (A, B, X, Y, \dots). On considère alors les formules *atomiques*, elles ont pour formes $x = y$, $edg_a(x_1, \dots, x_{\tau(a)})$, $lab_a(x)$ ou bien $x \in X$ où $x, y, x_1, \dots, x_{\tau(a)}$ sont des variables individuelles, X est une variable d'ensemble et $a \in A$. Les formules de la logique monadique du second ordre sont alors construites à partir des formules atomiques en utilisant les connecteurs logiques habituels: $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$ et \Leftrightarrow , ainsi que les quantificateurs existentiels et universels $\exists \alpha$ et $\forall \alpha$, où α est une variable individuelle ou bien une variable d'ensemble. La sémantique de ces formules est claire. Plutôt que d'en donner une définition formelle, nous proposons un exemple; il s'agit d'une formule exprimant la connexité:

$$\begin{aligned} \varphi = \forall x \forall y \forall Z \\ &(((x \in Z) \wedge \\ &(\forall z_1 \forall z_2 (z_1 \in Z \wedge \bigvee_{a \in A} (edg_a(z_1, z_2) \vee edg_a(z_2, z_1))) \Rightarrow z_2 \in Z)) \\ &\Rightarrow y \in Z) \end{aligned}$$

L'entier $\tau(a)$ associé à chaque symbole d'étiquette $a \in A$ impose une arité fixée: tout hyperarc étiqueté par a doit être d'arité $\tau(a)$.

On vérifie qu'un graphe G est connexe si et seulement si il satisfait φ , on note dans ce cas $G \models \varphi$; en effet, φ vérifie que pour tout couple de sommet x et y , y se trouve dans la classe de x relativement à la relation d'équivalence engendrée par clôture symétrique et transitive de la relation d'adjacence.

Soit K un polyèdre compact muni d'une triangularisation codée par un hypergraphe fini H . On considère un revêtement simplicial $p: \tilde{K} \rightarrow K$; on code un tel objet au moyen d'un hypergraphe \tilde{H} étiqueté sur $V_H \cup E_H$ dont chaque sommet est étiqueté par un sommet de \tilde{H} , et chaque hyperarc, par un hyperarc de H de même arité; \tilde{H} code la triangularisation de \tilde{K} et l'étiquetage code l'application p : chaque sommet de \tilde{H} est étiqueté par son image par p , de même que chaque hyperarc. Ainsi, la donnée de \tilde{H} code totalement le revêtement (\tilde{K}, p) .

Lemme 3.3.1 *On conserve les notations précédentes. L'ensemble des hypergraphes étiquetés sur $V_H \cup E_H$ qui codent des revêtements de K est définissable en logique monadique du second ordre; en d'autres termes, il existe une formule ψ_H de la logique monadique du second ordre*

tel que pour tout hypergraphe \tilde{H} étiquetés sur $V_H \cup E_H$, \tilde{H} code un revêtement de K si et seulement si il satisfait ψ_H .

Idée de preuve. Soit \tilde{H} un graphe étiqueté sur $V_H \cup E_H$; il s'agit de vérifier que tout point de $|H|$ possède un voisinage *élémentaire*, i.e. un voisinage ouvert V tel que $p^{-1}(V)$ est l'union d'une famille d'ouverts deux à deux disjoints de $|\tilde{H}|$ tels que p induit sur chacun d'entre eux un homéomorphisme entre lui-même et V . Sachant que p est définie ici de façon simpliciale, il suffit de vérifier que l'étoile de tout simplexe de H est un voisinage élémentaire. Cette vérification se fait au moyen d'une formule monadique du second ordre qui contrôle que pour tout sommet et pour tout simplexe de H , i.e. pour tout élément s de $V_H \cup E_H$, tout élément \tilde{s} de $V_{\tilde{H}} \cup E_{\tilde{H}}$ étiqueté par s est de même nature que s , i.e. un sommet si s est un sommet, et un hyperarc de même arité que s si s est un hyperarc, et $Lk(\tilde{s})$ est isomorphe à $Lk(s)$; $Lk(\tilde{s})$ doit par ailleurs être envoyé sur $Lk(s)$, ce qui se vérifie en contrôlant les étiquettes des simplexes de $Lk(\tilde{s})$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette vérification est possible au moyen du langage de la logique monadique du second ordre. Notons qu'en réalité, une formule du premier ordre suffit.

□

Sachant que toute formule monadique du second ordre satisfiable qui possède un modèle infini arborescent en possède un qui est HR-équationnel (cf. [Cou90b]), on en déduit un résultat intéressant :

Proposition 3.3.7 *Soit K un polyèdre compact. Si K possède un revêtement non-compact arborescent, alors il en possède un qui est HR-équationnel.*

Soit x_0 un sommet de K et \tilde{x}_0 un élément de la fibre de x_0 , i.e. $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. On suppose dorénavant que (\tilde{K}, p) est un revêtement *régulier*, i.e. $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(K, x_0)$.

On s'intéresse à l'action à droite de $\pi_1(K, x_0)$ sur $p^{-1}(x_0)$, la fibre de x_0 (cf. [Mas67]). Cette action est définie de la façon suivante : soit $g \in \pi_1(K, x_0)$ et $x \in p^{-1}(x_0)$; on choisit un lacet γ de K représentant g ; on considère alors un relèvement $\tilde{\gamma}$ de γ dans \tilde{K} d'origine \tilde{x}_0 ; l'extrémité de $\tilde{\gamma}$ est un élément de $p^{-1}(x_0)$ qui par définition est $x.g$. On montre que $x.g$ ne dépend pas du choix de γ (cf. [Mas67]).

Cette action est transitive; on vérifie aussi que le stabilisateur de tout élément $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, i.e. le sous-groupe de $\pi_1(K, x_0)$, noté $\text{stab}(\tilde{x})$, constitué des éléments qui laissent \tilde{x} invariant, est égal à $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}))$; par ailleurs pour toute paire \tilde{x}, \tilde{x}' d'éléments de $p^{-1}(x_0)$, $\text{stab}(\tilde{x})$ et $\text{stab}(\tilde{x}')$ sont des sous-groupes conjugués de $\pi_1(K, x_0)$; or, on suppose que (\tilde{K}, p) est un revêtement régulier, i.e. $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(K, x_0)$; $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ est donc le stabilisateur de tous les éléments de la fibre de x_0 .

Ainsi l'action passe au quotient, et $\pi_1(K, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ agit *transitivement et librement* sur $p^{-1}(x_0)$, i.e. pour tout couple d'éléments \tilde{x}, \tilde{x}' de $p^{-1}(x_0)$, il existe un unique élément $g \in \pi_1(K, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ tel que $g.\tilde{x} = \tilde{x}'$. Cela définit, avec le choix de \tilde{x}_0 , une bijection naturelle entre $\pi_1(K, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ et $p^{-1}(x_0)$.

En fait, on a beaucoup plus qu'une bijection : L'action de $\pi_1(K, x_0)$ sur la fibre de x_0 définit un homomorphisme de $\pi_1(K, x_0)$ dans le groupe des *automorphismes* du revêtement (\tilde{K}, p) dont le noyau est $p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$. Soit $A \subset \pi_1(K, x_0)$ une partie finie génératrice de

$\pi_1(K, x_0)$. Les classes des éléments de A forment une partie génératrice \bar{A} de $\pi_1(K, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$; on considère le graphe $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$ dont les sommets sont les éléments de $p^{-1}(x_0)$ et dont les arcs, étiquetés sur \bar{A} , sont définis comme suit : deux éléments \tilde{x} et \tilde{x}' de $p^{-1}(x_0)$ sont connectés par un arc de \tilde{x} à \tilde{x}' , étiqueté par $\tilde{a} \in \bar{A}$, si et seulement si $\tilde{a}.\tilde{x} = \tilde{x}'$. $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$ est isomorphe au graphe de Cayley de $\pi_1(K, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{K}, \tilde{x}_0))$ relativement à \bar{A} .

On montre, et c'est là un point essentiel pour nous, que si \tilde{K}' code un autre revêtement régulier de K , tel que $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}'}$ est isomorphe à $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$, alors \tilde{K}' est isomorphe à \tilde{K} au sens des revêtements (cf. [Mas67, Rot88]), et en particulier, \tilde{K} et \tilde{K}' sont isomorphes au sens des polyèdres.

On définit maintenant le concept de transduction d'hypergraphes MS_1 -définissables [Cou90a, Cou97]. On appelle *shémas de définition* relatif à un ensemble A de symboles d'étiquettes tout tuple $(\varphi, \psi(v), \{\text{EDG}_a(v_1, \dots, v_{\tau(a)})\}_{a \in A}, \{\text{LAB}_a(v)\}_{a \in A})$ de formules MS_1 . Un tel objet permet d'associer à tout hypergraphe \tilde{H} satisfaisant φ un hypergraphe abstrait H de type 0 défini comme suit : les sommets de H sont les sommets \tilde{v} de \tilde{H} tels que $(\tilde{H}, \tilde{v}) \models \psi(v)$, i.e. \tilde{H} satisfait $\psi(v)$ en prenant \tilde{v} comme valeur pour v ; pour tout $a \in A$ et pour tout tuple de sommets $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{\tau(a)}$, il existe dans H un hyperarc étiqueté par a qui connecte $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{\tau(a)}$, et dans ce cas, il n'en existe qu'un seul, si et seulement si $(\tilde{H}, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{\tau(a)}) \models \text{EDG}_a(v_1, \dots, v_{\tau(a)})$; enfin, un sommet \tilde{v} est étiqueté par a si et seulement si $(\tilde{H}, \tilde{v}) \models \text{LAB}_a(v)$. L'application qui à \tilde{H} associe H s'appelle une *transduction d'hypergraphe* MS_1 -définissable.

Lemme 3.3.2 *Soit \tilde{H} un hypergraphe étiqueté sur $V_H \cup E_H$ codant un revêtement de K ; alors $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$ est obtenu à partir de \tilde{H} par une transduction MS_1 -définissable qui ne dépend que de H .*

Idée de preuve. On conserve les notations précédentes; pour tout élément a de A , on choisit un lacet simplicial γ_a dans K de point de base x_0 qui représente a . On définit alors $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$ en \tilde{H} de la façon suivante : les sommets de $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$ sont les sommets de \tilde{H} qui sont étiquetés par x_0 , i.e. la fibre de x_0 . Cette condition est exprimable en logique monadique du second ordre, en fait, sans aucune quantification : les sommets de $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$ sont les éléments du domaine qui sont étiquetés par x_0 .

Deux tels sommets \tilde{x} et \tilde{x}' sont alors connectés dans $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$ par un arc étiqueté par a s'il existe dans \tilde{H} un relèvement $\tilde{\gamma}_a$ de γ_a qui les connecte. Cette propriété est exprimable en logique monadique du second ordre; la formule associée à l'adjacente relative à un élément $a \in A$ doit mémoriser γ_a tout entier et contrôler l'existence d'un chemin entre \tilde{x} et \tilde{x}' qui est exactement étiqueté par les éléments de γ_a .

Nous avons codé la structure MS_1 (cf. [Cou90b]) de $\Gamma_{\bar{A}, \tilde{K}}$ en \tilde{H} . Notons que nous construisons ici une famille de formules qui dépend du choix de x_0 et des γ_a .

□

Pour la suite, nous avons besoin du concept de *groupe hyperbolique au sens de Gromov* (cf. [Gro87, CDP90, GdlH90]). Pour ce faire, on se place dans le contexte des espaces *géodésiques*, i.e. espaces métriques dans lesquels tout couple de points est connecté par au moins une géodésique, un graphe connexe par exemple. Dans un tel espace, un triangle géodésique, i.e.

un triangle dont les côtés sont des géodésiques, sera dit δ -fin pour une constante $\delta \geq 0$ si chacun de ses côtés est dans le δ -voisinage de l'union des deux autres. En ces termes, un espace géodésique sera dit *hyperbolique au sens de Gromov* s'il existe une constante $\delta \geq 0$ telle que tout triangle géodésique est δ -fin; les exemples les plus classiques sont les arbres qui sont des espaces 0-hyperboliques. Un groupe finiment présenté sera dit *hyperbolique au sens de Gromov* si son graphe de Cayley l'est; on montre que cette propriété ne dépend pas de l'ensemble de générateurs choisi (cf. [GdlH90, CDP90, Gro87]).

Ce concept s'insère naturellement dans notre travail en ceci qu'il généralise celui de graphe arborescent. De façon rigoureuse, les graphes arborescents ne sont en fait pas tous hyperboliques; il faut considérer la sous-classe des graphes *fortement arborescents* introduite page 20; il s'agit des graphes possédant une décomposition arborescente (U, f) de largeur finie (voir page 20) telle que pour tout $i \in V_U$, le sous-graphe engendré par les sommets de $f(i)$ est connexe.² On montre qu'un graphe est fortement arborescent si et seulement si il est quasi-isométrique à un arbre. Par ailleurs, l'hyperbolicité au sens de Gromov est une propriété stable par quasi-isométrie, et les arbres sont des espaces hyperboliques au sens de Gromov. Il en résulte le résultat suivant :

Proposition 3.3.8 *Les graphes fortement arborescents sont hyperboliques au sens de Gromov.*

Notons que dans le contexte des groupes, les forts éléments de symétrie impliquent que l'hyperbolicité au sens de Gromov se situe "entre" l'arborescence au sens fort et l'automatisme; les groupes hyperboliques étant fortement automatiques (cf. [ECH⁺92, GdlH90]).

Lemme 3.3.3 *Un groupe finiment présenté est virtuellement libre si et seulement si il possède un graphe de Cayley fortement arborescent.*

Preuve. (\Rightarrow) est facile. Démontrons (\Leftarrow) . On remarque que si le graphe de Cayley d'un groupe G est fortement arborescent, alors par la proposition 3.3.8, G est hyperbolique au sens de Gromov; il est donc fortement automatique (cf. [ECH⁺92, GdlH90]). D'autre part, d'après [Sén92], un graphe déterministe automatique de largeur arborescente finie est context-free au sens de [MS85]; G est donc virtuellement libre.

□

Théorème 8 *Soit K une variété de dimension 3 fermée triangularisée, i.e. compacte sans bord, et $p : \tilde{K} \rightarrow K$ un revêtement régulier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \tilde{K} est HR-équationnel.
- (ii) \tilde{K} est arborescente régulière.
- (iii) \tilde{K} est arborescente.
- (iv) $\pi_1(K)/p_*(\pi_1(\tilde{K}))$ est virtuellement libre.

2. Il serait intéressant de connaître les conditions qui font qu'un graphe arborescent est fortement arborescent

Idée de preuve. (i) \Leftrightarrow (ii) est simplement la proposition 3.1.2. (ii) \Rightarrow (iii) est trivial. Pour démontrer (iii) \Rightarrow (iv), on montre que si \tilde{K} est arborescent au sens de la définition 10 alors le graphe de Cayley $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$ est fortement arborescent; ce qui par le lemme 3.3.3 implique (iv).

Enfin, la démonstration de (iv) \Rightarrow (i) consiste à montrer que si $\pi_1(K)/p_*(\pi_1(\tilde{K}))$ est virtuellement libre, alors, d'une part l'hypergraphe \tilde{H} codant \tilde{K} est définissable à isomorphisme près par une formule logique monadique du second ordre, et d'autre part, c'est un hypergraphe arborescent; ces deux propriétés impliquent alors que \tilde{K} est HR-équationnel (cf. [Cou90b]).

Supposons donc $\pi_1(K)/p_*(\pi_1(\tilde{K}))$ virtuellement libre; on rappelle que le graphe de Cayley de $\pi_1(K)/p_*(\pi_1(\tilde{K}))$ est isomorphe à $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$; ainsi, ce dernier est en particulier un graphe context-free au sens de [MS85]; cela implique qu'il est définissable à isomorphisme près par une formule monadique du second ordre $\xi_{\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}}$. Nous savons d'autre part par le lemme 3.3.2 que $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$ est relativement définissable en \tilde{H} et que $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$ caractérise \tilde{K} à isomorphisme près en tant que revêtement de K . Cela implique que \tilde{H} est définissable à isomorphisme près par une formule logique $\xi_{\tilde{K}}$; $\xi_{\tilde{K}}$ est obtenue à partir de $\xi_{\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}}$ en remplaçant les formules atomiques par les formules du schéma de définition de $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$. C'est le premier point. Le second consiste à établir que \tilde{H} est un hypergraphe arborescent. $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$ est isomorphe au graphe de Cayley de $\pi_1(K)/p_*(\pi_1(\tilde{K}))$ qui est virtuellement libre; cela implique en particulier que c'est un graphe connexe context-free au sens de [MS85]. On montre qu'un tel graphe est fortement arborescent. Considérons donc une décomposition fortement arborescente (U, f) de $\Gamma_{\tilde{A}, \tilde{K}}$; elle va nous permettre de construire une décomposition fortement arborescente (\tilde{U}, \tilde{f}) de \tilde{H} . D'abord, on pose $\tilde{U} = U$. Ensuite, on considère pour chaque $x \in p^{-1}(x_0)$ le sous-ensemble $V(x) \subset V_{\tilde{H}}$ constitué des sommets de \tilde{H} qui sont à distance de x inférieure à deux fois le diamètre du 1-squelette de K ; on montre que $V_{\tilde{H}} = \bigcup_{x \in p^{-1}(x_0)} V(x)$; puis pour tout nœud μ de \tilde{U} , on pose $\tilde{f}(\mu) = \bigcup_{x \in f(\mu)} V(x)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que nous avons défini une décomposition fortement arborescente.

□

Question :

Le théorème 8 donne une caractérisation en termes de groupes des revêtements réguliers HR-équationnels; ce résultat a pu voir le jour grâce notamment à la bonne compréhension dans le cas des revêtements réguliers de l'action du groupe fondamental sur la fibre. Ceci étant, quelle est la situation dans le cas général, i.e. dans le cas des revêtements non nécessairement réguliers ?

Une autre question induite par théorème 8 est la suivante : Nous avons caractérisé en terme de grammaire de graphe la régularité au sens des revêtements dans le cas arborescent; peut-on traduire cette propriété de régularité dans toute sa généralité dans le contexte de la génération de graphes ?

Chapitre 4

Graphes automatiques

Ce chapitre traite des graphes automatiques. Il s'agit d'une classe de graphes infinis constructifs qui généralise strictement celle des graphes HR-équationnels. Gardant à l'esprit l'idée de faire émerger des propriétés topologiques calculables; nous avons essayé d'appréhender la frontière idéale d'un graphe automatique de façon constructive. Il s'est avéré que le problème consistant à compter le nombre de bouts d'un tel graphe est indécidable. Pour démontrer cela, nous introduisons les graphes de configuration de machine de Turing, nous verrons que ces graphes sont automatiques. Nous nous servirons aussi du concept de machines auto-stabilisantes; il s'agit de machines contrôlant elles-même la validité de leurs calculs. La démonstration de l'indécidabilité du problème des bouts repose alors sur une analyse des propriétés géométriques globales du graphe des configurations d'une certaine machine auto-stabilisante.

Dans une seconde partie, nous établirons un lien entre les graphes automatiques et les *DOL*-systèmes de graphes: la suite de graphes finis produite en itérant un *DOL*-système est exactement la suite des sphères d'un graphe automatique; la réciproque est vraie pour une large classe de graphes automatiques. Cela nous conduira à démontrer que la connexité simultanée de tous les graphes d'une *DOL*-suite est une question indécidable. Ce résultat contribue à la compréhension de la limite de décidabilité de cette question, notamment du fait que les *DOL*-systèmes émulent les grammaires VR de graphes, i.e. les grammaires de remplacement de sommets (voir [ER97, CER93, CE95]), pour lesquelles la question précédente est décidable.

4.1 Graphes automatiques

Le concept de *graphe automatique* [BG00, CS, KN95, Mor99, Pel97, Sén92] vise à définir des graphes infinis de façon constructive. A cet égard, il généralise celui de graphe HR-équationnel. Le concept de graphe automatique que nous considérons ici provient de celui de *structures relationnelles automatiques introduites dans [KN95]* qui généralise la notion de groupe automatique. Une structure relationnelle automatique est une structure relationnelle dont le domaine est donné sous la forme d'un langage rationnel et dont les relations sont décrites par des automates. De fait, de multiples variations peuvent être envisagées, comme par exemple, les structures automatiques basées sur des langages d'arbres (voir [BG00]). La

définition des relations laisse une grande liberté; on peut considérer de façon très générale des relations rationnelles, des transducteurs équilibrés (cf. [Sén92]), ou encore des automates lettres à lettres comme dans le cas des groupes automatiques.

Dans notre cas, nous considérerons une classe particulière de structures relationnelles automatiques, en fait de graphes automatiques, que nous appellerons graphes automatiques régulièrement accessible : Les sommets d'un tel graphe sont les classes d'équivalence des mots d'un langage rationnel stable par préfixe, relativement à une relation d'équivalence elle-même reconnue par un automate à deux entrées. Il y a deux types d'arcs; premièrement, les arcs *radiaux*: si un mot est obtenu à partir d'un autre en ajoutant simplement une lettre à la fin, alors les sommets représentés par ces deux mots sont liés par un arc dit radial, étiqueté par la lettre en question. Les arcs du second type, que l'on appellera arcs *transversaux*, sont décrits par des automates à deux entrées : si un couple de mots est reconnu par l'un des automates, alors les sommets représentés par ces mots sont liés par un arc; plusieurs automates sont utilisés pour définir les arcs transversaux afin de distinguer plusieurs étiquettes, chacun d'eux étant associé à une étiquette.

Suivant [ECH⁺92], par *automate à deux entrées* sur un alphabet A , nous entendons un automate à nombre fini d'états sur l'alphabet $(A \cup \{\$\}) \times (A \cup \{\$\})$, où $\$$ est un symbole de fin de chaîne non inclus dans A , dont le langage consiste en un ensemble de couples de mots (u, v) de $A^*.\$^* \times A^*.\* de même longueur avec $u \in A^*$ ou bien $v \in A^*$. Par extension, nous dirons que qu'un automate à deux entrées reconnaît un couple de mots $(u, v) \in A^* \times A^*$ s'il reconnaît en réalité le couple $(u.\$^{\max\{0,|v|-|u|\}}, v.\$^{\max\{0,|u|-|v|\}})$.

Nous proposons la définition formelle suivante :

Définition 14 (Graphes automatiques régulièrement accessible)

Une **structure automatique** est un triplet $(W, M_0, \{M_\ell\}_{\ell \in L})$ où :

- W est un automate (à nombre fini d'états) sur un alphabet fini A dont le langage $\mathcal{L}(W) \subset A^*$ est stable par préfixe;
- M_0 est un automate à deux entrées dont le langage $\mathcal{L}(M_0) \subset A^* \times A^*$ est le graphe d'une relation d'équivalence sur A^* ;
- L est un ensemble fini et pour tout $\ell \in L$, M_ℓ est un automate à deux entrées sur A .

Une structure automatique définit un **graphe automatique régulièrement accessible** de la façon suivante :

- l'ensemble des sommets est $\mathcal{L}(W)/\mathcal{L}(M_0)$. Comme $\mathcal{L}(W)$ est stable par préfixe, il contient le mot vide; dans la suite, on notera ε sa classe d'équivalence relativement à $\mathcal{L}(M_0)$. Les sommets ne sont pas étiquetés;
- les arcs sont des couples de mots de $\mathcal{L}(W)$; ils sont divisés en deux types. Les premiers sont les arcs **radiaux**, ce sont les couples de la forme $(w, w.a) \in \mathcal{L}(W) \times \mathcal{L}(W)$ avec $a \in A$; $(w, w.a)$ est étiqueté par a , son origine est le sommet représenté par w et son extrémité, le sommet représenté par $w.a$. Les arcs du second type sont les arcs **transversaux**, ce sont les couples (w_1, w_2) reconnus par l'un des M_ℓ ; un tel arc est étiqueté par ℓ et connecte le sommet représenté par w_1 à celui représenté par w_2 .

Pour alléger le texte, les graphes automatiques régulièrement seront simplement appelés “graphes automatiques”. Notons que les termes d’arc “radial” et d’arc “transversal” reçoivent une justification géométrique lorsque par exemple les automates à deux entrées définissant la relation d’équivalence pour les sommets et les arcs transversaux ne reconnaissent que des couples de mots de mêmes longueurs.

La définition d’un graphe infini par une structure automatique est constructive. En premier lieu, on peut construire un langage rationnel qui est un système de représentants uniques pour les sommets: considérons un ordre linéaire sur A , l’alphabet de W (on conserve les notations de la définition 14); on considère ensuite l’ordre *militaire* (ou ordre “*shortlex*” dans la littérature anglo-saxonne) sur $\mathcal{L}(W)$, i.e. un mot w_1 est plus petit qu’un mot w_2 s’il comporte strictement moins de lettres que w_2 , ou bien s’il en comporte autant mais il est alors plus petit que w_2 pour l’ordre lexicographique; c’est un *bon* ordre, et chaque classe d’équivalence de $\mathcal{L}(W)$ relativement à $\mathcal{L}(M_0)$ comporte un unique plus petit élément, c’est son représentant minimal pour l’ordre militaire. On montre que le langage des représentants minimaux des classes d’équivalence de $\mathcal{L}(W)$ est un langage rationnel (cf. [ECH⁺92]). En second lieu, les arcs transversaux peuvent être reconnus de façon effective, ce qui n’est pas tout-à-fait clair au vu de la définition 14. On montre pour cela que chaque M_ℓ peut être transformé de telle sorte que le langage qu’il définit soit clôt relativement à $\mathcal{L}(M_0)$, i.e. si $w_1, w_2, w'_1, w'_2 \in \mathcal{L}(W)$ sont tels que pour $i = 1, 2$, w_i et w'_i soient $\mathcal{L}(M_0)$ -équivalents, i.e. $(w_i, w'_i) \in \mathcal{L}(M_0)$, alors $(w_1, w_2) \in \mathcal{L}(M_\ell)$ si et seulement si $(w'_1, w'_2) \in \mathcal{L}(M_\ell)$ (cf. [ECH⁺92]).

Les graphes de Cayley de groupes automatiques fournissent naturellement beaucoup d’exemples de graphes automatiques (cf. [Eps88, ECH⁺92]). Notons parmi eux les groupes libres (voir figure 4.1), qui donnent des exemples d’arbres ou encore les groupes abéliens libres qui donnent des exemples de grilles multi-dimensionnelles; les groupes hyperboliques au sens de Gromov sont fortement automatiques, et donnent également naissance à une famille très esthétique de graphes infinis automatiques. Mais le concept de graphe automatique

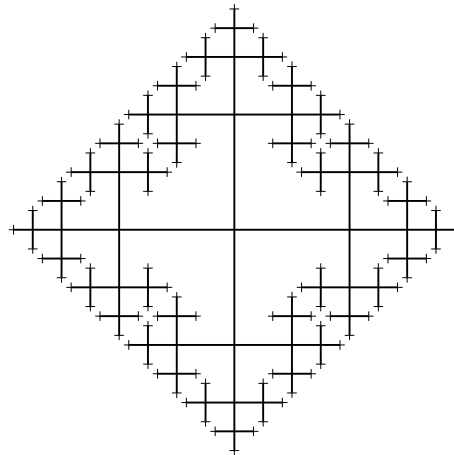


FIG. 4.1: *Graphe de Cayley du groupe libre à deux générateurs*

est bien plus général que celui de graphe de Cayley de groupe automatique; il n’impose pas les conditions de symétrie très fortes dues à l’hypothèse de structure de groupe, les graphes

automatiques ne sont pas, comme les graphes de Cayley, *sommet-transitif*, i.e. le groupe des automorphismes n'agit pas nécessairement transitivement sur l'ensemble des sommets (cf. [CS]). A cet égard, il est facile de voir que les arbres réguliers sont des graphes automatiques; c'est également le cas des graphes context-free au sens de [MS85] (cf. [Sén92]).

4.2 Graphe des configurations d'une machine de Turing

Machines de Turing

On considère des machines de Turing à une bande munies de plusieurs têtes de lecture/écriture; une particularité des machines que nous allons définir est qu'elles sont capables de détecter le fait qu'une tête soit en bout de bande ou non. On vérifie facilement que notre modèle est équivalent au concept classique de machine de Turing qui est présenté e.g. dans [HU79, Rog67]. Formellement, une *machine de Turing* à n têtes de lecture/écriture sera pour nous un 6-uplet $T = (Q, \Gamma, \delta, q_{\text{init}}, F, \square)$ où Q est l'ensemble fini des états de T ; Γ est l'alphabet de bande; δ est une fonction partielle de $Q \times \Gamma^n \times \{0, 1\}^n$ dans $Q \times \{1, \dots, n\} \times (\Gamma \setminus \{\square\}) \times \{\text{gauche}, \text{stop}, \text{droite}\}$; $q_{\text{init}} \in Q$ est l'état initial de T ; $F \subset Q$ est l'ensemble des états finaux de T ; enfin $\square \in \Gamma$ est le symbole de blanc. T est équipée d'une bande de mémoire infinie à droite. Au démarrage, la mémoire ne contient que des blancs, T est dans l'état q_{init} et toutes ses têtes sont positionnées sur la première cellule de la bande. Les calculs de T sont définis par δ : considérons une transition $\delta(q, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = (q', i', a', D')$; cela veut dire que si T se trouve dans l'état q et que pour $i = 1, \dots, n$, la cellule sur laquelle pointe la i -ième tête contient le symbole a_i et est la première cellule de la bande si et seulement si $b_i = 1$, alors T passe dans l'état q' et sa i -ième tête se déplace à gauche (respectivement se déplace à droite ou garde sa position) si $D' = \text{gauche}$ (respectivement si $D' = \text{droite}$ ou $D' = \text{stop}$), après avoir écrit le symbole a' sur la bande. Notons que T ne peut pas écrire le symbole de blanc sur la bande.

Une *description instantanée* de T est un mot sur l'alphabet $(Q \times \{1, \dots, n\}) \cup (\Gamma \setminus \{\square\})$ de la forme $w_0 q^{i_1} w_1 q^{i_2} \dots w_{n-1} q^{i_n} w_n$ où w_j est un mot sur l'alphabet $\Gamma \setminus \{\square\}$; pour simplifier les notations, (q, i_j) est noté q^{i_j} et $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$. Un tel objet a pour but de décrire T à un instant donné: T est dans l'état q , la bande de mémoire contient le mot $w_0 w_1 \dots w_n \square^\omega$ et pour $j = 1 \dots n$, la i_j -ième tête est positionnée sur la cellule contenant le premier symbole de w_j . Soient $i' > i$, si la i -ième et la i' -ième tête de T sont positionnées sur la même cellule, la description instantanée de T sera de la forme $w q^i q^{i'} w'$ et non de la forme $w q^{i'} q^i w'$; ainsi, la description instantanée de T à un instant donné est unique. Soient ld_1 et ld_2 deux descriptions instantanées de T ; on écrit $\text{ld}_1 \xrightarrow{T} \text{ld}_2$ (respectivement $\text{ld}_1 \xrightarrow{*} \text{ld}_2$, $\text{ld}_1 \xrightarrow{+} \text{ld}_2$) si ld_2 est le résultat d'un pas de calcul (respectivement d'un calcul fini, d'un calcul fini non vide) effectué par T à partir de ld_1 .

Graphe des configurations

L'un des outils essentiels pour la preuve du théorème 9 énoncé page 113 est une légère variation du concept de *graphe des configurations* d'une machine de Turing (cf. [Pap94]). Soit $T = (Q, \Gamma, \delta, q_{\text{init}}, F, \square)$ une machine de Turing munie de n têtes. Soit $A = (Q \times \{1, \dots, n\}) \cup (\Gamma \setminus \{\square\})$. On considère le langage $\mathcal{L} \subset A^*$ des descriptions instantanées de T ; notons que \mathcal{L} regroupe *toutes* les descriptions instantanées de T , pas seulement celles qui sont issues de la configuration initiale. On considère alors le langage $\mathcal{L}.\square^*$ des mots de la forme $\text{ld}.\square.\square\dots\square$ avec $\text{ld} \in \mathcal{L}$; notons qu'un mot de $\mathcal{L}.\square^*$ code sans ambiguïté une description instantanée de T . Soit maintenant le langage $\overline{\mathcal{L}.\square^*}$ de tous les préfixes des mots de $\mathcal{L}.\square^*$. On considère alors le graphe G_T dont les sommets sont les mots de $\overline{\mathcal{L}.\square^*}$, sans étiquette, et dont les arcs sont définis comme suit; soient w_1 et w_2 deux mots de $\overline{\mathcal{L}.\square^*}$,

- s'il existe un symbole $a \in A$ tel que $w_2 = w_1.a$, alors il y a un arc étiqueté par a de w_1 à w_2 ;
- si w_1 et w_2 représentent respectivement deux descriptions instantanées ld_1 et ld_2 telles que $\text{ld}_1 \xrightarrow{T} \text{ld}_2$, alors il y a un arc de w_1 à w_2 ; cet arc n'est pas étiqueté. Notons que w_1 et w_2 ne représentent pas nécessairement des descriptions instantanées complètes de T , ils n'en représentent *a priori* que des préfixes.

Lemme 4.2.1 *G_T est un graphe automatique dont on peut calculer une structure automatique de façon effective.*

Idée de preuve. D'abord, $\overline{\mathcal{L}.\square^*}$ est rationnel. W est un automate qui le reconnaît et M_0 définit la relation d'équivalence triviale, i.e. diagonale. L'automate transversal doit reconnaître les couples de forme $(v_1, v_2) \in (\overline{\mathcal{L}.\square^*})^2$ qui codent les calculs élémentaires de T ; pour ce faire, il doit d'abord deviner la transition qui s'applique à v_1 , puis vérifier que l'on obtient bien v_2 en l'appliquant à v_1 ; ce qui est assurément possible avec une mémoire finie.

□

Soit v un sommet de G_T ; la distance qui le sépare de ε , i.e. la longueur minimale d'un chemin le conduisant à ε , est exactement la longueur v en tant qu'élément de $\overline{\mathcal{L}.\square^*}$; on la note $|v|$.

4.3 Machines de Turing auto-stabilisantes

Soit $T = (Q, \Gamma, \delta, q_{\text{init}}, F, \square)$ une machine de Turing à une tête sans état final telle que pour tout $q \in Q$, $a \in A$ et $b \in \{0, 1\}$, $\delta(q, a, b)$ soit définie. Nous allons décrire une machine \tilde{T} munie de deux têtes qui simule le calcul de T . Le but de cette construction est de satisfaire la propriété énoncée dans le lemme 4.3.2; \tilde{T} devra être capable de contrôler elle-même son propre calcul, en ceci qu'elle doit se rendre compte elle-même si ce qu'elle est en train de calculer fait partie de son calcul normal, i.e. celui provenant de sa description instantanée initiale, ou non. Notons bien qu'étant donnée une machine de Turing quelconque, on n'est généralement pas en mesure d'anticiper son comportement sur n'importe quelle description instantanée. La simulation se fait en calculant les descriptions instantanées successives de T ;

ces dernières sont stockées sur la bande de \tilde{T} au fur et à mesure, sans répétition. A chaque tour, \tilde{T} vérifie que la liste des descriptions instantanées stockées sur sa bande est bien celle escomptée; si cela n'est pas le cas, \tilde{T} en conclut qu'elle est en train de faire un mauvais calcul, elle passe alors dans un état spécial : l'état **BUG**.

Nous décrivons ici de façon informelle le détail du fonctionnement de \tilde{T} . Le lecteur trouvera une construction plus rigoureuse en annexe de ce chapitre.

Étape 1. \tilde{T} commence par écrire la description instantanée initiale de T sur la bande. Plus précisément, la première tête écrit la chaîne $\#q_{\text{init}}$ au début de la bande. Le symbole $\#$ sert de séparateur entre les descriptions instantanées de T stockée sur la bande. Notons que le mot q_{init} constitue la description instantanée initiale de T .

Étape 2. \tilde{T} vérifie que la bande contient les descriptions instantanées successives qui apparaissent lors du calcul de T à partir de q_{init} ; elle vérifie aussi qu'aucune d'entre elles n'est répétée deux fois. Rigoureusement, elle contrôle que le contenu de la bande est de la forme

$$\#ld_0\#ld_1\#\dots\#ld_k \quad (4.1)$$

où $ld_0 = q_{\text{init}}$; pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $ld_i \xrightarrow{T} ld_{i+1}$ et pour tout $j \neq i$, $ld_j \neq ld_i$. \tilde{T} vérifie que $ld_i \xrightarrow{T} ld_{i+1}$ en se servant de la première tête de lecture pour parcourir ld_i et de la seconde pour contrôler la forme de ld_{i+1} . Cette opération est possible : il suffit de vérifier la correspondance des symboles de ld_i et de ld_{i+1} trois par trois. Si ces conditions ne sont pas remplies, cela veut dire que \tilde{T} n'est pas sur le bon calcul, elle passe donc dans l'état **BUG**; Une fois dans cet état, \tilde{T} boucle indéfiniment sans modifier le contenu de la bande, ni les positions des têtes.

Étape 3. \tilde{T} calcule la description instantanée suivante dans le calcul de T qui est stocké sur la bande. Si elle n'apparaît pas déjà dans la liste, elle est écrite à la suite. Pour ce faire, la première tête se positionne au début de ld_k (on conserve les notations de (4.1) dans la description de l'étape 2) et la seconde se positionne au tout début de la bande. Soit ld_{k+1} la description instantanée de T obtenue après un pas de calcul à partir de ld_k . La première tête parcourt alors ld_k tandis que la seconde contrôle que ld_0 est bien distincte de ld_{k+1} ; après cela la première tête retourne au début de ld_k et la seconde se positionne au début de ld_1 ; par la même méthode, \tilde{T} vérifie alors que ld_1 est distincte de ld_{k+1} ; et ainsi de suite; cette opération est faite pour tous les ld_i . Finalement, si elles sont toutes différentes de ld_{k+1} , cette dernière est écrite à la suite de ld_k .

\tilde{T} retourne alors à l'étape 2.

Notons que \tilde{T} ne simule pas T au sens strict du terme. En effet, une description instantanée de T ne peut apparaître plusieurs fois sur la bande; ainsi, si la suite des descriptions instantanées décrivant le calcul de T est ultimement périodique, \tilde{T} inscrit les premières descriptions instantanées sur sa bande jusqu'à la première répétition, après quoi, le contenu de la bande de \tilde{T} n'est plus modifié. Notons que dans ce cas, la suite des descriptions instantanées

décrivant le calcul de \tilde{T} est elle-même ultimement périodique.

Lemme 4.3.1 (Comportement normal de \tilde{T})

Soit $\tilde{\text{ld}}$ une description instantanée décrivant \tilde{T} au début de la deuxième étape, avec un contenu de bande de la forme :

$$\# \text{ld}_0 \# \text{ld}_1 \# \dots \# \text{ld}_k$$

où les ld_i sont les descriptions instantanées de T avec $\text{ld}_0 = q_{\text{init}}$, pour tout $i = 0, \dots, k-1$, $\text{ld}_i \xrightarrow{T} \text{ld}_{i+1}$, et pour tout $i \neq j$, $\text{ld}_i \neq \text{ld}_j$.

Soit ld_{k+1} la description instantanée de T suivant directement ld_k . Si ld_{k+1} apparaît déjà dans $\tilde{\text{ld}}$, i.e. s'il existe $i \in \{0, \dots, k\}$ tel que $\text{ld}_{k+1} = \text{ld}_i$, alors il existe une description instantanée $\tilde{\text{ld}}'$ avec le même contenu de bande que celui de $\tilde{\text{ld}}$ telle que $\tilde{\text{ld}} \xrightarrow{\tilde{T}} \tilde{\text{ld}}' \# \text{ld}_{k+1}$. Sinon, $\tilde{\text{ld}} \xrightarrow{\tilde{T}} \tilde{\text{ld}}' \# \text{ld}_{k+1}$.

Ce lemme est l'un des buts de la construction de \tilde{T} ; la preuve se fait par récurrence à partir de la description complète de \tilde{T} qui est donnée en appendice de ce chapitre; elle est laissée au lecteur.

Le lemme suivant donne la principale propriété de \tilde{T} : à partir de n'importe quelle description instantanée, soit \tilde{T} rejoint son calcul normal, i.e. celui provenant de sa description instantanée initiale au bout d'un temps fini, soit elle passe dans l'état BUG et y boucle indéfiniment.

Lemme 4.3.2 (Propriété principale des machines auto-stabilisantes)

Soit $\tilde{\text{ld}}$ une description instantanée de \tilde{T} . Alors

- soit il existe une description instantanée $\tilde{\text{ld}}'$ de \tilde{T} telle que $\tilde{\text{ld}} \xrightarrow{\tilde{T}} \tilde{\text{ld}}'$ et $\tilde{q}_{\text{init}}^1 \tilde{q}_{\text{init}}^2 \xrightarrow{\tilde{T}} \tilde{\text{ld}}'$ où \tilde{q}_{init} est l'état initial de \tilde{T} ,
- ou bien $\tilde{\text{ld}}$ conduit \tilde{T} dans l'état BUG après un calcul fini.

Ce lemme est une conséquence directe du lemme 4.5.3; la preuve est omise. Notons que les descriptions instantanées qui sont matières au premier cas ne sont pas seulement celles provenant du calcul normal de \tilde{T} ; par exemple, juste avant le début de l'étape de 2, on peut modifier la position des têtes de telle sorte que l'on obtient une description instantanée de \tilde{T} qui n'apparaît pas dans son calcul normal; de toute façon, au commencement de l'étape 2, les deux têtes sont positionnées en bout de bande (voir appendice), et donc le comportement de \tilde{T} n'en est pas affecté.

4.4 Indécidabilité du problème des bouts

Nous reprenons, dans le cadre des graphes, le concept de bout donné dans la définition 4. Le lemme suivant est facile, la démonstration est omise.

Lemme 4.4.1 Soit G un graphe infini connexe et v_0 , l'un de ses sommets; alors G a un et un seul bout si et seulement si le complémentaire de chaque boule centrée en v_0 ne contient qu'une seule composante connexe infinie. En particulier, si le complémentaire de chaque boule centrée en v_0 est connexe, alors G n'a qu'un seul bout.

Notons que lorsque l'on s'occupe de la topologie des graphes, on ne se préoccupe pas de l'orientation des arcs; ainsi, nous parlons de connexité et non de forte connexité.

Preuve du théorème 9

La démonstration du théorème 9 est une réduction au problème de l'arrêt des machines de Turing, comme à l'ordinaire pour démontrer l'indécidabilité d'un problème donné. On se donne une machine de Turing à une tête que l'on va modifier légèrement. On considère ensuite la machine auto-stabilisante qui lui est associée, puis le graphe des configurations de cette dernière dont on modifiera quelque peu la géométrie. Nous démontrerons ensuite la proposition 4.4.1 qui affirme que ce graphe possède un bout et un seul si et seulement si la machine initiale ne s'arrête pas; ce qui implique trivialement le théorème 9.

Soit donc $T = (Q, \Gamma, \delta, q_{\text{init}}, F, \square)$ une machine de Turing à une tête. On commence par modifier T comme suit. Tout d'abord, les états de T appartenant à F ne sont plus considérés comme des états finaux, i.e. on pose $F = \emptyset$, sans pour autant éliminer les états en question; au lieu de cela, on ajoute de nouvelles transitions de telle sorte qu'une fois que T atteint un tel état, elle y reste indéfiniment sans modifier le contenu de la bande et sans déplacer sa tête de lecture/écriture. D'autre part, on ne veut pas que T puisse rester bloquée dans une configuration pour cause de transition manquante, i.e. on veut que δ soit définie sur tout triplet de $Q \times \Gamma \times \{0, 1\}$; pour atteindre cette propriété, on ajoute à T un nouvel état dit état "puits" dans lequel T passe toutes les fois qu'il manque une transition; une fois dans cet état, T boucle indéfiniment sans modifier ni le contenu de la bande, ni la position de sa tête de lecture/écriture. La troisième étape de la modification de T consiste à faire en sorte que tant qu'elle n'a pas atteint d'état originalement considéré comme final, elle occupe de plus en plus d'espace sur la bande; pour ce faire, il suffit par exemple d'imposer à T , entre chaque pas de calcul, d'aller écrire un nouveau symbole en fin de bande. Les détails de cette transformation sont omis. On obtient finalement une machine de Turing, que l'on note encore T , qui ne s'arrête jamais et dont le calcul occupe un espace borné sur la bande si et seulement si la machine initiale s'arrête après un calcul fini.

Considérons maintenant \tilde{T} la machine auto-stabilisante associée à T (voir section 4.3); puis $G_{\tilde{T}}$, le graphe automatique des configurations de \tilde{T} défini dans la section 4.2. On modifie légèrement la géométrie de $G_{\tilde{T}}$: d'abord, on ajoute une branche infinie constituée d'arcs radiaux étiquetés par un nouveau symbole noté BUG; cette branche démarre à la racine ε (voir figure 4.2). Ce nouveau symbole d'étiquette ne doit pas être confondu avec les symboles BUG^1 et BUG^2 qui font référence aux couples $(\text{BUG}, 1)$ et $(\text{BUG}, 2)$ utilisé pour coder les descriptions instantanées de \tilde{T} . On ajoute ensuite à la structure automatique de $G_{\tilde{T}}$ un nouvel automate M_{BUG} définissant une famille d'arcs transversaux connectant tous les sommets de $G_{\tilde{T}}$ qui définissent des descriptions instantanées dont l'état est l'état BUG. Plus précisément, M_{BUG} reconnaît les couples de mots de la forme (v_1, v_2) avec $v_1 = w.q^i.w'.q^j.w''.\square\square\dots\square$ de longueur $\ell > 0$ où $q = \text{BUG}$ et $v_2 = \underbrace{\text{BUG.BUG}\dots\text{BUG}}_i$. On obtient un graphe automatique que l'on note encore $G_{\tilde{T}}$.

Lemme 4.4.2

Soient v et v' deux sommets de $G_{\tilde{T}}$. Supposons qu'il existe deux descriptions instantanées

\tilde{ld} et \tilde{ld}' dont v et v' représentent respectivement des préfixes telles que $\tilde{ld} \xrightarrow[\tilde{T}]^* \tilde{ld}'$. Il existe alors un chemin dans $G_{\tilde{T}}$ qui connecte v et v' et qui reste à une distance supérieure ou égale à $\min\{|v|, |v'|\}$ de ε .

Preuve. Soit $\tilde{ld} = \tilde{ld}_0 \rightarrow \tilde{ld}_1 \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{ld}_k = \tilde{ld}'$ la suite de descriptions instantanées codant le calcul de \tilde{T} de \tilde{ld} à \tilde{ld}' . Soit $\ell_{\max} = \max_{0 \leq i \leq k} \{|\tilde{ld}_i|\} = |\tilde{ld}'|$; notons que $\ell_{\max} \geq \min\{|v|, |v'|\}$.

Pour tout $i \in \{0, k\}$, soit $v_i = \tilde{ld}_i \square^{\ell_{\max} - |\tilde{ld}_i|}$. Alors, par définition de $G_{\tilde{T}}$, pour chaque $i = 0, \dots, k-1$, il existe un arc transversal connectant v_i à v_{i+1} et le chemin $v_0 v_1 \dots v_k$ reste à distance supérieure ou égale à $\min\{|v|, |v'|\}$. Par ailleurs, v (respectivement v') est connecté à v_0 (respectivement v_k) par un chemin d'arcs radiaux.

□

Proposition 4.4.1

$G_{\tilde{T}}$ possède un et un seul bout si et seulement si la machine initiale T ne s'arrête jamais; dans le cas contraire, $G_{\tilde{T}}$ possède exactement deux bouts.

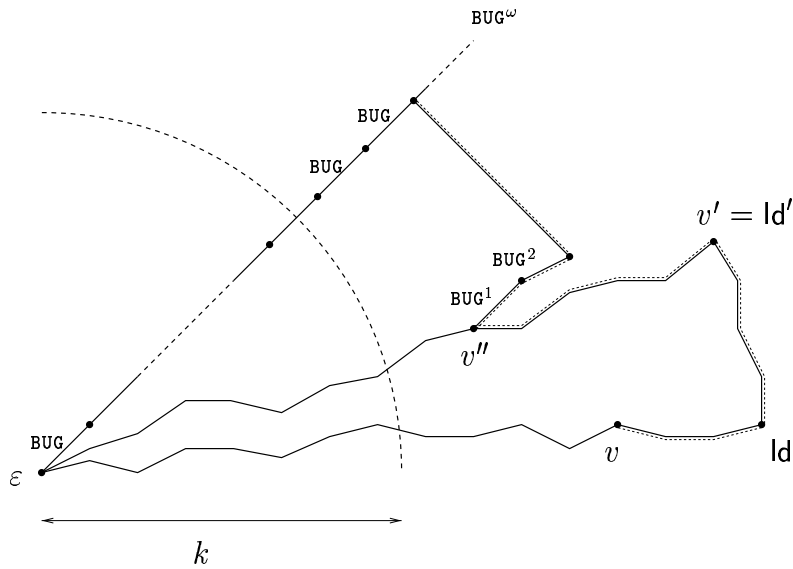
Preuve. **Supposons que T n'atteint jamais d'état final.** Notre but est de prouver que $G_{\tilde{T}}$ ne possède qu'un seul bout. Soit $k > 0$ et soit v un sommet de $G_{\tilde{T}}$ situé à distance supérieure à k de ε . On montre que v est connecté à la branche infinie BUG^ω par un chemin restant à distance supérieure à k de ε . Soit \tilde{ld} une description instantanée de \tilde{T} dont v représente un préfixe. Conformément au lemme 4.3.2, il y a deux cas à envisager :

1. soit il existe une description instantanée \tilde{ld}' telle que $\tilde{ld} \xrightarrow[\tilde{T}]^* \tilde{ld}'$ et $\tilde{q}_{\text{init}}^1 \tilde{q}_{\text{init}}^2 \xrightarrow[\tilde{T}]^* \tilde{ld}'$ où \tilde{q}_{init} est l'état initial de \tilde{T} ,
2. ou bien \tilde{ld} conduit \tilde{T} dans l'état BUG après un calcul fini.

Cas 1: Rappelons que T a été modifiée de telle sorte qu'elle occupe de plus en plus d'espace au fur et à mesure de son calcul. Cela implique que la suite des descriptions instantanées qui code ce calcul ne peut pas être ultimement périodique. Ainsi, la suite de descriptions instantanées de T qui est stockée par \tilde{T} s'accroît strictement, on peut donc choisir \tilde{ld}' de longueur supérieure à k . En se penchant sur l'étape 2 de l'algorithme des machines auto-stabilisantes, on montre sans difficulté que l'on peut choisir \tilde{ld}' de telle sorte que les deux têtes se trouvent toutes les deux à droite de la k -ième cellule.

Soit v' le sommet de $G_{\tilde{T}}$ qui est associé à \tilde{ld}' . Par le lemme 4.4.2, il existe un chemin de v à v' restant à distance supérieure à k de ε .

Soient w_1, w_2, w_3 les mots sur l'alphabet de bande de \tilde{T} , q l'état de \tilde{T} et $i, i' \in \{1, 2\}$, $i \neq i'$ tels que $\tilde{ld}' = w_1 q^i w_2 q^{i'} w_3$. Comme les deux têtes de lecture/écriture se trouvent à droite de la k -ième cellule, $|w_1| > k$. Soit v'' le sommet associé à w_1 . Trivialement, v' est connecté à v'' en parcourant en sens inverse un chemin d'arcs radiaux qui reste à distance supérieure à k de ε . Soit $\tilde{ld}'' = w_1 \text{BUG}^1 \text{BUG}^2$. En parcourant successivement deux arcs radiaux respectivement étiquetés par BUG^1 et BUG^2 en direction opposée à ε , on connecte v'' au sommet représentant \tilde{ld}'' qui, lui-même, est connecté à la branche infinie $\text{BUG}^{|\tilde{ld}''|}$ par un arc transversal reconnu

FIG. 4.2: *Cas 1*

par M_{BUG} . On a finalement connecté v à la branche infinie BUG^ω , tout en restant à distance supérieure à k de ε (voir figure 4.2).

Case 2: Soit $\tilde{\text{ld}}_{\text{BUG}}$ la première description instantanée de \tilde{T} dont l'état est l'état BUG qui est accessible à partir de $\tilde{\text{ld}}$. Par le lemme 4.4.2, v est alors connecté au sommet associé à $\tilde{\text{ld}}_{\text{BUG}}$ par un chemin restant à distance supérieure à k de ε . Et par construction, il existe un arc transversal entre $\tilde{\text{ld}}_{\text{BUG}}$ et $\text{BUG}^{|\tilde{\text{ld}}_{\text{BUG}}|}$.

Le complémentaire de la boule centrée en ε de rayon k est donc connecté; ce qui prouve avec le lemme 4.4.2 que $G_{\tilde{T}}$ ne possède qu'un seul bout.

Supposons que T atteint un état final par un calcul fini. Soient $k > 0$ et v un sommet de $G_{\tilde{T}}$ situé à distance supérieure à k de ε . Soit $\tilde{\text{ld}}$ une description instantanée dont v représente un préfixe.

Comme précédemment, considérons les deux cas prévus par le lemme 4.3.2. Si $\tilde{\text{ld}}$ conduit \tilde{T} à l'état BUG , alors v est connecté à BUG^ω par un chemin restant à distance supérieure à k de ε .

Supposons donc que \tilde{T} ne passera jamais dans l'état BUG en calculant à partir de $\tilde{\text{ld}}$. Par hypothèse, T atteint un état final et par construction, elle y reste indéfiniment, laissant le contenu de la bande et les positions des têtes inchangées: la suite des descriptions instantanées de T entre dans une boucle. Soit ld la première description instantanée qui est répétée dans le calcul de T .

Un fois que \tilde{T} a écrit ld sur la bande, elle n'écrit plus aucune autre description instantanée de T (voir lemme 4.3.1). L'espace occupé par \tilde{T} cesse alors de grandir, il est borné; cela implique que la suite des descriptions instantanées de \tilde{T} est ultimement périodique. Soit $\tilde{\text{ld}}''$ la première description instantanée de \tilde{T} qui est répétée.

On montre que v est connecté à la branche infinie $\tilde{\text{ld}}'' \square^\omega$: par le lemme 4.3.2, il existe une description instantanée de $\tilde{T} \tilde{\text{ld}}'$ telle que $\tilde{\text{ld}} \xrightarrow[\tilde{T}]{*} \tilde{\text{ld}}'$ and $\tilde{q}_{\text{init}}^1 \tilde{q}_{\text{init}}^2 \xrightarrow[\tilde{T}]{*} \tilde{\text{ld}}'$. Ainsi, $\tilde{\text{ld}}' \xrightarrow[\tilde{T}]{*} \tilde{\text{ld}}''$ et donc $\tilde{\text{ld}} \xrightarrow[\tilde{T}]{*} \tilde{\text{ld}}''$. Par le lemme 4.4.2, v est connecté à $\tilde{\text{ld}}''$ par un chemin restant à distance supérieure à k de ε .

Nous avons donc prouvé que tout sommet est connecté à la branche infinie BUG^ω ou bien à $\tilde{\text{ld}}'' \square^\omega$ par un chemin restant éloigné de ε . Il reste à montrer que ces deux branches représentent deux bouts différents.

Soit $k > |\tilde{\text{ld}}''|$. Supposons qu'il existe un sommet v de la forme $\tilde{\text{ld}}'' \square^\ell$ avec $\ell > 0$ qui est connecté à la branche BUG^ω par un chemin non-orienté α restant à distance supérieure à k de ε .

Soit \mathcal{I} l'ensemble des descriptions instantanées de \tilde{T} qui conduisent à $\tilde{\text{ld}}''$. Comme \tilde{T} ne peut pas écrire le symbole de blanc, cet ensemble est de cardinal fini. Soit v' le premier sommet de α qui représente un préfixe d'une description instantanée $\tilde{\text{ld}}_{v'}$ qui n'appartient pas à \mathcal{I} . Notons que $v' \neq v$. Soit v'' le sommet de α qui précède directement v' . Par construction de v' , toute description instantanée dont v'' est un préfixe est dans \mathcal{I} . Mais \mathcal{I} est fini; et on montre facilement que si un sommet donné est préfixe de plusieurs descriptions instantanées, il en est alors préfixe d'une infinité. Cela implique que v'' est de la forme $\tilde{\text{ld}}_{v''} \square^{\ell'}$ où $\tilde{\text{ld}}_{v''}$ est une description instantanée complète et $\ell' > 0$. De plus, par définition de \mathcal{I} , $\tilde{\text{ld}}_{v''} \rightarrow \tilde{\text{ld}}''$ et donc, $|\tilde{\text{ld}}_{v''}| \leq |\tilde{\text{ld}}''| < k$. Supposons maintenant que v' et v'' soient connectés par un arc radial; comme $|v'| \geq k$, $\tilde{\text{ld}}_{v'} \square$ est alors préfixe de v' ; par conséquent $\tilde{\text{ld}}_{v'} = \tilde{\text{ld}}_{v''}$ ce qui contredit le fait que $\tilde{\text{ld}}_{v'}$ ne conduit pas à $\tilde{\text{ld}}''$. Ainsi, si v' et v'' sont connectés, c'est par un arc transversal, ce qui veut dire que $\tilde{\text{ld}}_{v'} \xrightarrow[\tilde{T}]{*} \tilde{\text{ld}}_{v''}$ ou bien $\tilde{\text{ld}}_{v''} \xrightarrow[\tilde{T}]{*} \tilde{\text{ld}}_{v'}$; comme $\tilde{\text{ld}}_{v''} \in \mathcal{I}$, les deux possibilités conduisent au fait que $\tilde{\text{ld}}_{v'} \xrightarrow[\tilde{T}]{*} \tilde{\text{ld}}''$, ce qui est une contradiction.

□

On obtient comme conséquence immédiate le résultat suivant :

Théorème 9

Le problème de savoir si un graphe automatique possède un et un seul bout est indécidable.

Question : *On sait que le nombre de bouts d'un groupe hyperbolique au sens de Gromov est calculable [Ger99]; qu'en est-il pour les graphes automatiques hyperboliques au sens de Gromov?*

4.5 D0L-systèmes de graphes et graphes automatiques

4.5.1 D0L-systèmes de graphes

Les transformations de graphes dont nous nous occupons ici, i.e. les *D0L-systèmes de graphes*, généralisent aux graphes le concept de *L-système* [RS80]; notons que ce dernier a

déjà été étendu aux structures multi-dimensionnelles sous le nom de systèmes de génération de cartes, i.e. *MOL*-systèmes (cf. [LR78, DDL82, Lin86]); les *DOL*-systèmes que nous introduisons ici généralisent le concept de *ions* (cf. [Pey81, Pey86, Nar93]).

Il s'agit de substitutions simultanées, déterministes et indépendantes du contexte des sommets et des arcs. D'abord, chaque sommet est remplacé par un graphe fini qui est fonction de son étiquette; puis chaque arc donne naissance à plusieurs arcs connectant les sommets issus de son origine avec les sommets issus de son extrémité; ces arcs sont définis relativement à l'étiquette de l'arc original. Les substitutions de tous les sommets puis de tous les arcs se font *simultanément*.

Définition 15 (*DOL*-Systèmes de graphes)

Un *DOL-système de graphe* δ est défini par un 3-uplet (L, Δ_V, δ_E) où :

- $L = L_V \cup L_E$ est un ensemble fini de symboles. L_V est l'ensemble des **étiquettes de sommets** et L_E est l'ensemble des **étiquettes d'arcs**;
- Δ_V est une application associant à chaque étiquette de sommet un graphe fini de type 0 dont les sommets (respectivement les arcs) sont étiquetés sur L_V (respectivement sur L_E). Ces graphes sont équipés d'une structure supplémentaire: un ordre linéaire sur l'ensemble de leurs sommets;
- Δ_E est une application associant à chaque étiquette d'arc un graphe fini biparti dont les deux ensembles de sommets sont linéairement ordonnés; le couple formé par les deux parties de sommets est lui-même ordonné. Les arcs sont étiquetés sur L_E ; les sommets ne sont pas étiquetés.

Nous dirons qu'un graphe de type 0 est un δ -**graphe** si ses sommets sont étiquetés sur L_V et ses arcs sur L_E . L'application de δ sur un δ -graphe G consiste à effectuer les transformations parallèles suivantes :

- chaque sommet $v \in V$ est remplacé par $\Delta_V(\text{lab}(v))$;
- chaque arc $e \in E$ est remplacé par $\Delta_E(\text{lab}(e))$. Les sommets de la première partie de ce dernier sont recollés sur les sommets du graphe issu de l'origine de e suivant les ordres linéaires; s'il y a trop de sommets à recoller, les sommets excédentaires sont supprimés de $\Delta_E(\text{lab}(e))$, ainsi que les arcs auxquels ils appartiennent. Les sommets de la seconde partie de $\Delta_E(\text{lab}(e))$ sont recollés sur les sommets du graphe issu de l'extrémité de e suivant une procédure similaire.

Une fois que les substitutions de tous les sommets et de tous les arcs sont faites, les différents ordres linéaires sur les sous-ensembles de sommets deviennent inutiles et sont oubliés. Le graphe obtenu est noté $\delta(G)$. Une suite de graphe $(\Gamma_n)_{n \geq 0}$ est appelée une *DOL-suite* s'il existe un *DOL-système de graphe* δ tel que pour tout $n \geq 0$, $\Gamma_{n+1} = \delta(\Gamma_n)$.

La figure 4.3 décrit les règles d'un *DOL-système de graphe* qui permet d'engendrer des arbres binaires. Ici, $L_V = \{i, e\}$ et $L_E = \{i\}$; notons que $L = L_V$. Les règles de substitution de sommet sont décrites dans la partie gauche de la figure; le système de substitution d'arc

est décrit dans la partie droite, il n'y a qu'une seule règle. Un sommet étiqueté par i (comme interne) n'est pas modifié : il est remplacé par un graphe sans arc dont le sommet unique est étiqueté par i . Un sommet étiqueté par e (comme externe) est substitué par un graphe à trois sommets dont le premier est étiqueté par i et les deux autres sont étiquetés par e . Pour ce qui concerne l'unique règle de substitution d'arc, elle spécifie qu'un arc étiqueté par i reste inchangé; après substitution, il connecte le premier sommet du graphe issu de son origine au premier sommet du graphe issu de son extrémité. Les premières itérations de ce système sont représentées dans la figure 4.4.



FIG. 4.3: Exemple de D0L-système de graphes

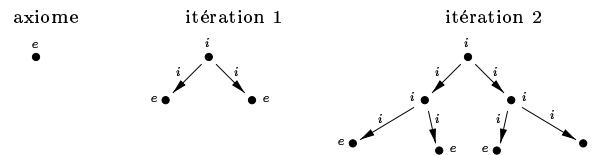


FIG. 4.4: Premières itérations du D0L-système décrit dans la figure 4.3

Les figures 4.5 et 4.6 décrivent un autre exemple de D0L-système qui engendre des grilles carrées.

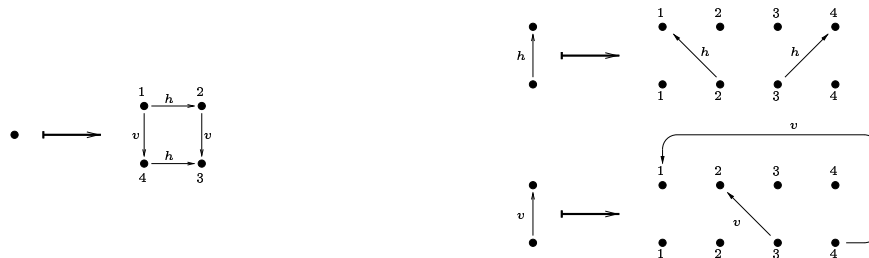


FIG. 4.5: Un D0L-système de graphe qui engendre une suite de grilles carrées. Il n'y a qu'un seul type d'étiquette pour les sommets, c'est pourquoi il n'est pas indiqué ici.

4.5.2 Connexité dans les D0L-suites de graphes et bouts de graphes automatiques

Nous allons voir dans cette partie comment les notions de D0L-systèmes de graphes et de graphes automatiques sont liées; une structure automatique apparaît de façon naturelle comme un outil pour décrire une D0L-suite de graphes finis dans sa globalité.

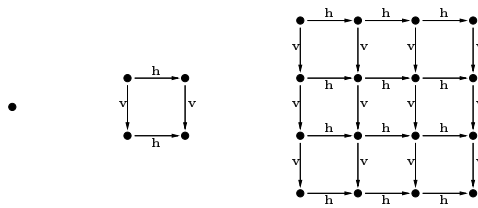


FIG. 4.6: Une $D0L$ -suite de grille engendrée par le $D0L$ -système décrit dans la figure 4.5

Nous nous intéresserons ici à une classe spéciale de graphes automatiques, ceux qui satisfont les conditions suivantes :

- la relation d'équivalence rationnelle qui participe à la définition des sommets est triviale, i.e. diagonale;
- les arcs transversaux ne connectent que des couples de sommets associés à des mots de même longueur;
- tous les états des automates définissant les arcs transversaux sont des états finaux.

Ces conditions impliquent de bonnes propriétés géométriques. Remarquons d'abord que pour les graphes possédant ces propriétés, les termes d'arc radial et d'arc transversal prennent tout leur sens; la sphère de rayon n centrée en ε est formée par les sommets associés aux mots de longueur n ainsi que des arcs transversaux les connectant. La troisième condition nous assure que dans un tel graphe, tout arc transversal laisse dans les sphères inférieures des traces qui sont matérialisées par des arcs transversaux qui sont en quelque sorte ses aïeuls.

Le résultat suivant est fondamental dans cette partie, il montre comment les $D0L$ -suites de graphes sont décrites de façon globale par des structures automatiques.

Proposition 4.5.1

Quitte à modifier les étiquettes, la suite des sphères d'un graphe automatique satisfaisant les conditions précédentes est une $D0L$ -suite de graphes. Réciproquement, toute $D0L$ -suite de graphe dont le graphe initial n'a qu'un seul sommet est la suite des sphères d'un graphe automatique.

Preuve. Soit G un graphe automatique satisfaisant les condition précédentes, défini par une structure automatique $(W, M_0, \{M_\ell\}_{\ell \in L})$. En se servant des méthodes usuelles de déterminisation, on peut considérer sans perte de généralité que les automates qui définissent la structure automatique de G sont tous déterministes. Nous allons construire un $D0L$ -système de graphe δ_G tel que pour tout $n \geq 0$, la $(n + 1)$ -ième sphère de G est le résultat de l'application de δ_G à la n -ième.

L'ensemble des étiquettes de sommets associé à δ_G est Q_W , l'ensemble des états de W ; l'ensemble des symboles d'étiquettes d'arcs est $Q_W \times (\bigcup_\ell M_\ell) \times Q_W$. Commençons par modifier les étiquettes de G : la lecture d'un sommet v donné conduit W dans un état q_v ; on définit la nouvelle étiquette de v comme étant q_v . De façon similaire, on définit de nouvelles étiquettes pour les arcs que l'on choisit dans $Q_W \times (\bigcup_\ell M_\ell) \times Q_W$: soit e un arc transversal

de G initialement étiqueté par ℓ ; cet arc connecte un couple de sommets (v_1, v_2) ; soient q_1 et q_2 les états dans lesquels v_1 et v_2 conduisent respectivement W (par abus de notation, on confond ici un sommet avec le mot qui le code, ce qui ne pose pas de problème étant donné que M_0 définit une relation d'équivalence triviale); soit q_ℓ l'état dans lequel (v_1, v_2) conduit M_ℓ . On définit alors la nouvelle étiquette de e comme étant le triplet (q_1, q_ℓ, q_2) .

Les règles de substitution de δ_G sont définies en fonction des transitions de W et des M_ℓ . Regardons d'abord les règles de substitution de sommet. On commence par choisir un ordre linéaire sur A , l'alphabet de W ; soit q un élément de Q_W ; c'est un symbole d'étiquette de sommet pour δ_G ; comme W est déterministe, l'ordre sur A induit un ordre linéaire sur l'ensemble des transitions de W d'origine q . $\Delta_V(q)$ est alors défini comme étant le graphe muni d'autant de sommets qu'il y a de transitions dans W d'origine q ; l'ordre linéaire sur ces sommets est induit par l'ordre sur les dites transitions, qui a été défini précédemment; leurs étiquettes, qui sont prises parmi les états de W , sont les cibles des transitions en question. $\Delta_V(q)$ n'est pourvu d'aucun arc.

La construction des règles de substitution d'arc suit des idées similaires. Considérons un triplet (q_1, q_ℓ, q_2) où $q_i \in Q_W$ ($i = 1, 2$) et $q_\ell \in Q_{M_\ell}$; c'est un symbole d'étiquette d'arc pour δ_G . $\Delta_E(q_1, q_\ell, q_2)$ est un graphe biparti dont la première partie de sommet (respectivement la seconde) est formée d'autant de sommets qu'il y a de transitions d'origine q_1 (respectivement q_2) dans W . Comme précédemment, les ordres linéaires définis sur chacune de ces parties sont induits par les ordres définis sur les ensembles de transitions de W correspondants. Comme il est convenu dans la définition 15, les sommets de $\Delta_E(q_1, q_\ell, q_2)$ ne sont pas étiquetés; ses arcs sont définis comme suit : soit (v_1, v_2) un couple de sommets de $\Delta_E(q_1, q_\ell, q_2)$, v_1 appartenant au premier sous-ensemble de sommet et v_2 , au second; soit $a_1 \in A$ (respectivement $a_2 \in A$) le dernier symbole du mot représentant v_1 (respectivement v_2). Si dans M_ℓ , il existe une transition d'origine q_ℓ qui est étiquetée par le couple (a_1, a_2) , on ajoute à $\Delta_E(q_1, q_\ell, q_2)$ un arc connectant v_1 à v_2 , étiqueté par le triplet (q'_1, q'_ℓ, q'_2) où $q'_1 \in Q_W$ (respectivement $q'_2 \in Q_W$) est l'état dans lequel a_1 (respectivement a_2) conduit W à partir de q_1 (respectivement à partir de q_2); et $q'_\ell \in Q_{M_\ell}$ est l'état dans lequel (a_1, a_2) conduit M_ℓ à partir de q_ℓ . On considère alors la $D0L$ -suite de graphe $(G_n)_n$ engendrée par δ_G à partir du graphe G_0 formé d'un seul sommet étiqueté par q_0 , l'état initial de W , et pour tout ℓ , une boucle étiquetée par $(q_0, q_{\ell 0}, q_0)$ où $q_{\ell 0}$ est l'état initial de M_ℓ . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que, aux étiquettes près, G_n est exactement la sphère de G centrée en ε de rayon n .

Passons à la réciproque. Soit δ un $D0L$ -système de graphe associé à une $D0L$ -suite de graphes finis $(G_n)_n$ dont le premier n'est constitué que d'un seul sommet. Nous allons construire un graphe automatique qui définit cette $D0L$ -suite de graphe au sens suivant. Considérons G_0 ; l'application de δ à G_0 donne pour résultat G_1 . Considérons le graphe réalisé par l'union disjointe de G_0 et de G_1 en connectant le sommet de G_0 à tous les sommets de G_1 ; on ajoute à ce graphe un copie de $G_2 = \delta(G_1)$, puis on connecte chaque sommet de G_1 aux sommets de G_2 auxquels il a donné naissance via δ . En continuant ce procédé, on construit par limite inductive un graphe infini G qui est automatique. Nous allons construire une structure automatique $(W, M_0, \{M_\ell\}_{\ell \in L})$ qui le définit.

L'ensemble des états de W est défini comme étant l'ensemble des symboles d'étiquettes de sommets de δ . Ses transitions sont construites en fonction des règles de substitution de

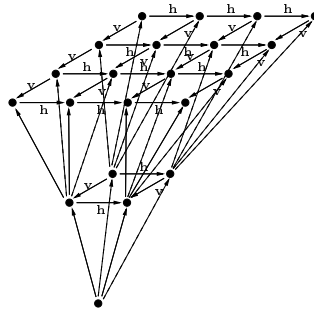


FIG. 4.7: Le graphe automatique codant la D0L-suite de grilles décrites dans la figure 4.6

sommet de δ ; on suit l'idée réciproque de celle décrite précédemment : on définit l'alphabet de W comme étant l'ensemble des entiers inférieurs au nombre maximum de sommets produits par la subdivision d'un sommet par δ . Soit ℓ_v un symbole d'étiquette de sommet de δ , c'est aussi un état de W ; on crée, dans W , autant de transitions qu'il y a de sommets dans le graphe associé à ℓ_v par δ , i.e. $\Delta_V(\ell_v)$; une telle transition est étiquetée par l'entier qui est le rang du sommet de $\Delta_V(\ell_v)$ auquel elle est associée; sa cible est le symbole d'étiquette du sommet en question. Tous les états de W sont des états finaux. M_0 quant-à-lui, est trivial, i.e. il définit la relation d'équivalence diagonale sur $\mathcal{L}(W)$.

Passons à la construction des M_ℓ . Premièrement, nous devons modifier δ de telle sorte que tous les arcs de chacun des $\Delta_E(\ell)$ soient orientés du premier sous-ensemble de sommet vers le second. On réalise cette transformation en ajoutant à l'ensemble des symboles d'étiquettes d'arcs L_E de δ , une copie disjointe de lui-même $L_E^{-1} = \{\ell^{-1} \mid \ell \in L_E\}$ dont nous nous servirons pour coder les arcs dont l'orientation doit être inversée. Dans chaque $\Delta_E(\ell)$, chaque arc qui est orienté du second sous-ensemble de sommets vers le premier est inversé ainsi que son étiquette, i.e. ℓ_e est remplacée par ℓ_e^{-1} . Δ_E associe à chaque $\ell^{-1} \in L_E^{-1}$ un graphe biparti qui est une copie de $\Delta_E(\ell)$ dans laquelle l'orientation du couple de sous-ensembles de sommets est inversée et chaque arc orienté du second sous-ensemble de sommet vers le premier est inversé, ainsi que son étiquette. On obtient finalement un nouveau D0L-système que l'on note δ' qui est tel que tous les arcs de chacun des $\Delta'_E(\ell)$ sont orientés du premier sous-ensemble de sommets vers le second. Notons que pour tout δ -graphe H , on obtient $\delta(H)$ à partir de $\delta'(H)$ en inversant l'orientation de chaque arc étiqueté par un élément de L_E^{-1} ainsi que son étiquette.

Nous allons maintenant construire la famille des automates à arcs transversaux $\{M'_\ell \mid \ell \in L_E \cup L_E^{-1}\}$ associée à δ' . Pour ce faire, considérons le graphe M construit de la façon suivante : l'ensemble des sommets de M est défini comme étant l'ensemble des symboles d'étiquettes d'arcs de δ' , i.e. $L_E \cup L_E^{-1}$. Considérons l'un de ces symboles d'étiquettes d'arcs ℓ_e ; on ajoute à M un arc étiqueté par un couple d'entier (i, j) connectant ℓ_e à ℓ'_e toute les fois qu'il existe dans $\Delta_E(\ell_e)$ un arc étiqueté par ℓ'_e connectant le i -ième sommet du premier sous-ensemble de sommet de $\Delta_E(\ell_e)$ au j -ième sommet du second sous-ensemble; M code ainsi les règles de substitution d'arc de δ' . On considère alors \widetilde{M} le graphe obtenu comme union disjointe de M et de W , dans lequel toute étiquette d'arc de la forme i est remplacé par (i, i) ; pour chaque arc e de chaque $\Delta_V(\ell_v)$, on ajoute un arc dans \widetilde{M} connectant $\ell_v \in V_W$ à $\ell_e \in V_M$,

où ℓ_e est l'étiquette de e ; cet arc est étiqueté par (i, j) , où i (respectivement j) est le rang de l'origine de e (respectivement sa cible) relativement à l'ordre linéaire sur l'ensemble des sommets de $\Delta_V(\ell_v)$. Finalement, pour chaque $\ell \in L_E \cup L_E^{-1}$, on définit M'_ℓ comme étant une copie de \widetilde{M} avec comme état initial, l'état initial de W et $\ell \in V_M$ comme unique état final. Pour chaque $\ell \in L_E$, on construit maintenant M_ℓ , l'automate à arcs transversaux associé à δ , en se servant de M'_ℓ et de $M'_{\ell^{-1}}$: c'est l'union disjointe des deux; l'étiquette de chaque transition de $M'_{\ell^{-1}}$ qui est de la forme (i, j) est remplacée par (j, i) . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la structure automatique que nous avons construite définit bien G .

□

Soit G un graphe automatique défini par une structure automatique $(W, M_0, \{M_\ell\}_{\ell \in L})$ satisfaisant les conditions de la proposition 4.5.1. On montre facilement que si toutes les sphères de G sont connexes, alors G possède un bout et un seul; pour obtenir la réciproque, i.e. la proposition 4.5.2, il faut couper les branches finies de G , i.e. les chemins d'arcs radiaux dans G qui ne sont préfixe d'aucun chemin infini. Il se peut en effet qu'un chemin d'arcs radiaux ne puisse se prolonger en un chemin infini; un tel phénomène correspond dans W à l'existence d'états à partir desquels aucun circuit n'est accessible. On règle ce problème en supprimant simplement ces états; ce qui peut se faire de façon effective sans trop de difficultés; on laisse au lecteur le soin de le vérifier. On obtient alors un graphe que l'on note G' qui est encore automatique. On a le résultat suivant :

Proposition 4.5.2 *On conserve les notations précédentes. G possède un bout et un seul si et seulement si toute les sphères de G' sont connexes.*

Preuve. Montrons d'abord que G' possède autant de bouts que G . Pour voir cela, on remarque d'abord que G' possède les mêmes branches infinies que G ; de fait, on peut considérer G' comme un sous-graphe de G . Ce qui pourrait se passer est que deux branches infinies qui sont équivalentes dans G ne le sont pas dans G' . Considérons donc deux branches infinies $\alpha_1 = v_0^1 v_1^1 \dots v_k^1 \dots$ et $\alpha_2 = v_0^2 v_1^2 \dots v_k^2 \dots$ ($v_0^1 = v_0^2 = \varepsilon$). Nous allons vérifier que si α_1 et α_2 sont équivalentes dans G , i.e. si elles sont connectées dans le complémentaire dans G de n'importe quelle boule centrée en ε , alors pour tout k , il existe un chemin de S_k , la sphère de G centrée en ε de rayon k , qui connecte x_k^1 et x_k^2 et qui n'emprunte que des sommets éléments de branches infinies. Supposons donc α_1 et α_2 équivalentes. Pour tout $k' > k$, on choisit un chemin $p'_{k'}$ qui connecte $v_{k'}^1$ à $v_{k'}^2$ et qui reste à distance supérieure à k' de ε ; on associe alors à $p'_{k'}$ un chemin $p_{k'}$ de S_k qui connecte v_k^1 à v_k^2 défini comme suit : on considère le chemin de S_k constitué de tout les ancêtres des sommets de $p'_{k'}$; on élimine de ce chemin toutes les boucles, on obtient alors $p_{k'}$. Notons que $p_{k'}$ est bien un chemin puisque tous les états de tous les M_ℓ sont des états finaux. Maintenant, comme S_k est finie, le nombre de chemins sans boucle connectant v_k^1 à v_k^2 est aussi fini. Par conséquent, l'un d'eux est égal à $p_{k'}$ pour une infinité de k' ; cela implique que tous les sommets constituant ce chemin sont chacun ancêtre d'une infinité de sommets, et donc préfixe d'une branche infinie. Ce chemin, qui *a priori* est un chemin de G est aussi un chemin de G' ; nous avons prouvé que G et G' ont le même nombre de bouts.

Il reste à voir que G' possède un et un seul bout si et seulement si toutes ses sphères sont connexes. On montre juste que si G possède un seul bout, alors toutes ses sphères sont connexes; la réciproque est facile et laissée au lecteur. Supposons donc qu'une sphère S'_k de

G' n'est pas connexe; soient z_1 et z_2 deux sommets de S'_k qui ne sont pas connectés dans S'_k . On choisit deux branches infinies α_1 et α_2 dont z_1 et z_2 sont respectivement des préfixes. Alors ces deux branches représentent deux bouts différents; en effet, un chemin quelconque les connectant dans le complémentaire d'une boule centrée en ε de rayon supérieur à k induirait un chemin les connectant dans S'_k .

□

Il est facile de montrer que le graphe automatique construit à partir d'une machine de Turing dans la preuve de la proposition 4.4.1 satisfait les deux premières conditions de la proposition 4.5.1. Pour qu'il satisfasse la troisième, on considère tous les états de tous les automates de sa structure automatique comme des états finaux. Si cela ajoute des arcs transversaux, cela ne modifie pas fondamentalement sa géométrie et en particulier, on vérifie facilement que le nombre de bouts est inchangé. Ceci étant, après élimination des branches finies, on peut appliquer la proposition 4.5.2 pour obtenir le résultat suivant :

Théorème 10

La question consistant à savoir si tous les graphes obtenus en itérant un DOL-système de graphe sont connexes est indécidable.

4.5.3 Emulation des grammaires de remplacement de sommets

Remplacement de sommets. Soit $\Gamma = (V, E, L, \text{vert}, \text{lab})$ un graphe et $v \in V$. On suppose que L est l'union disjointe de deux ensembles L_V et L_E qui sont respectivement l'ensemble des symboles d'étiquettes de sommets et l'ensemble des symboles d'étiquettes d'arcs. Suivant [ER97, Chap. 1.3], par *graphe avec plongement*, on entend un couple (D, C) où D est un graphe et $C \subset L_V \times L_E \times L_E \times V_D \times \{\text{in}, \text{out}\}$; C est appelée la *relation de connection* de (D, C) . Le *remplacement* de v par D relativement à C est alors défini comme suit : v est supprimé de Γ et remplacé par une copie de D ; Pour chaque *instruction de connection* $(\sigma, \alpha, \beta, x, \text{out}) \in C$, tout arc de Γ étiqueté par α connectant v à un sommet $w \neq v$ étiqueté par σ donne naissance à un arc étiqueté par β allant de x à w ; les arcs entrant sont traités de façon similaires par les instruction de connection comportant un "in" à la place de "out".

Grammaires VR déterministes. On appelle *grammaire edNCE* [ER97, CER93, CE95] tout tuple (L_V, L'_V, L_E, P, S) où L_V est un ensemble de symboles d'étiquettes de sommets; $L'_V \subset L_V$ est l'ensemble des *symboles terminaux*; P est l'ensemble des *productions* et $S \in L_V \setminus L'_V$ est le *symbole non-terminal initial, l'axiome*. Les productions ont pour forme $X \rightarrow (D, C)$ où $X \in L_V \setminus L'_V$ est un symbole non-terminal et (D, C) est un graphe avec plongement qui est étiqueté sur $L_V \cup L_E$. Soient Γ et Γ' deux graphes étiquetés sur $L_V \cup L_E$, $p : X \rightarrow (D, C)$ une production et $v \in V_\Gamma$ un sommet étiqueté par X ; on écrit $\Gamma \Rightarrow_{v,p} \Gamma'$ pour dire que Γ' est le graphe obtenu à partir de Γ en remplaçant v par D relativement à C . Comme il est d'usage en théorie des langages formels, on considère $\mathcal{L}(G)$, le langage de tous les graphes produits par G à partir de son symbole non-terminal initial S . Nous dirons qu'une grammaire edNCE est une grammaire de remplacement de sommets (en abrégé grammaire VR) si elle est *confluente*, i.e. si $H \Rightarrow_{v_1 p_1} H_1 \Rightarrow_{v_2 p_2} H_{12}$ et $H \Rightarrow_{v_2 p_2} H_2 \Rightarrow_{v_1 p_1} H_{21}$ sont deux dérivations avec $v_1, v_2 \in V_H$ et $v_1 \neq v_2$, alors $H_{12} = H_{21}$ (cf. [ER97, Chap. 1, Prop. 1.3.6]). Par ailleurs, nous ne considérerons que des grammaires VR *déterministes*, i.e. des grammaires comprenant au plus une production par symbole non-terminal.

VR-Suites de graphes

Soit $G = (L_V, L'_V, L_E, P, S)$ une grammaire VR déterministe. On considère la suite $(\Gamma_n)_n$ de graphes définie par récurrence selon le schéma suivant :

- Γ_0 est le graphe de remplacement de la production de G associé à son symbole initial S .
- Pour tout $n \geq 0$, Γ_{n+1} est obtenu à partir de Γ_n en remplaçant selon G chaque sommet étiqueté par un non-terminal pour lequel une production est définie. Comme G est confluente, l'ordre dans lequel les dérivations sont faites n'importe pas.

Une telle suite de graphes est appelée une *VR-suite* de graphes.

Lemme 4.5.1

Soit G une grammaire VR déterministe; soit $(\Gamma_n)_n$ la VR-suite de graphes associée. Alors tous les graphes de $\mathcal{L}(G)$ sont connexes si et seulement si Γ_n est connexe pour tout n .

Idée de preuve. Le sens direct est trivial; pour voir la réciproque, notons que tout graphe de $\mathcal{L}(G)$ peut être obtenu à partir d'un Γ_n pour n assez grand en contractant quelques sous-graphes en sommets simples et éventuellement en ajoutant des arcs et/ou en modifiant des étiquettes d'arcs. Si Γ_n est connexe, il le reste après une telle transformation.

□

Une des principales propriétés de décidabilité des VR-langages de graphes est que leurs théories logiques monadiques du second ordre, avec quantifications sur les ensembles de sommets seulement, sont décidables (cf. [ER97, Chap. 1.4.2]). Comme la connexité est exprimable dans ce langage logique, il s'en suit le résultat suivant :

Proposition 4.5.3 *Il existe un algorithme pour décider si tous les graphes d'une VR-suite sont connexes ou non.*

Emulation

Proposition 4.5.4 *Quitte à modifier les étiquettes, toute VR-suite de graphes est une DOL-suite.*

Idée de preuve. Soit $(\Gamma_n)_n$ une VR-suite de graphe associée à une grammaire VR déterministe $G = (L_V, L'_V, L_E, P, S)$. Nous allons construire un DOL-système de graphe δ qui engendre $(\Gamma_n)_n$.

Premièrement, l'ensemble des symboles d'étiquettes de sommets de δ est celui de G , i.e. L_V . Δ associe à tout symbole terminal ℓ un graphe formé d'un seul sommet étiqueté par ℓ sans arc; et à tout symbole non-terminal, elle associe le graphe de remplacement défini par la production de G qui lui est associée, avec un ordre linéaire fixé de façon arbitraire sur l'ensemble des sommets.

L'ensemble des symboles d'étiquettes d'arcs de δ est défini comme étant $L_V \times L_E \times L_V$; pour chaque arc e de chaque Γ_n , on définit un nouveau symbole d'étiquette (ℓ_1, ℓ_e, ℓ_2) où ℓ_1 est l'étiquette de la source de e , ℓ_2 est l'étiquette de sa cible et ℓ_e est l'étiquette originale

de e ; on modifie de la même manière les étiquettes de tous les arcs des graphes définis par Δ_V . Passons aux règles de substitution d'arc; soit (ℓ_1, ℓ_e, ℓ_2) une étiquette d'arc pour δ ; on considère d'abord le graphe formé de deux sommets v_1 et v_2 respectivement étiquetés par ℓ_1 et ℓ_2 et d'un arc étiqueté par ℓ_e connectant v_1 à v_2 . On considère alors le graphe obtenu en remplaçant v_1 et v_2 comme le dicte G . On supprime tous les arcs connectant des sommets issus du même sommet v_1 ou v_2 . On obtient alors un graphe biparti; chacune des deux parties de sommet hérite d'un ordre linéaire donné par $\Delta_V(\ell_1)$ et $\Delta_V(\ell_2)$. Les étiquettes d'arcs sont modifiées comme précédemment et les étiquettes de sommets sont supprimées. Le graphe que l'on obtient est par définition $\Delta_E(\ell_1, \ell_e, \ell_2)$.

On omet ici la vérification du fait que δ engendre bien $(\Gamma_n)_n$, chose plus ennuyeuse que difficile.

□

4.5.4 Annexe au chapitre 4

Nous décrivons ici le détail du fonctionnement de \tilde{T} . \tilde{T} a deux têtes de lecture/écriture que l'on note t_1 et t_2 ; l'alphabet de bande est $\Gamma_{\tilde{T}} = \Gamma_T \cup \{\#, \$\} \cup Q_T \cup \{\square\}$ où Q_T est l'ensemble des états de T , et Γ_T est son alphabet moins le symbole de blanc; rappelons que T ne peut pas écrire le symbole de blanc. Pour une simplicité toute relative de la description qui suit, nous nous servons d'un langage simple. On définit d'abord quelques instructions élémentaires :

- **read**(t_i) désigne le symbole lu par t_i . La position de t_i ne change pas.
- **write**(t_i, u) où $u \in (\Gamma_{\tilde{T}} \setminus \{\square\})^*$ signifie que t_i écrit u sur la bande et se déplace sur la cellule suivant directement le dernier symbole écrit.
- **move-left**(t_i) signifie que t_i se déplace d'une cellule sur la gauche. Si t_i est positionnée sur la première cellule, alors elle ne bouge pas.
- **move-right**(t_i) signifie que t_i se déplace d'une cellule sur la droite.
- **BEGINNING** $_i$ est un booléen qui est vrai si et seulement si t_i est positionnée sur la première cellule de la bande.

Nous utiliserons aussi quelques structures élémentaires de contrôle :

- **if** ... **else** ...
- **switch** ...
 - **case** ...
 - **case** ...
 - **default**
- **goto** ...

Les commentaires sont signalés par `//`.

L'algorithme suivi par \tilde{T} est divisé en trois parties. Sa description utilise des variables dont les domaines sont de cardinaux finis; certaines d'entre elles par exemple varient dans Q_T . Nous nous servirons également de macros; les macros doivent simplement être remplacées toutes les fois qu'elles apparaissent par le code correspondant. On pourra vérifier que la description réelle de T , i.e. en termes d'états et de transitions, peut être obtenue à partir du code suivant en traduisant chaque ligne une à une. Chaque une d'entre elles donne naissance à plusieurs états relativement aux valeurs possibles des variables. Nous ne donnerons pas de méthode rigoureuse pour une telle construction qui est certes pénible mais à coup sûr possible.

Notons à cet égard qu'un compilateur pour la construction de machine de Turing est en cours de développement. Le but de ce travail consiste à mettre en œuvre un assistant de preuve relatif au machine de Turing. Ce projet pourrait par exemple conduire à réaliser des démonstrations rigoureuses pour les lemmes 4.5.2 et 4.5.3.

Algorithme principal:

Etape 1:

`// T commence par écrire la description instantanée initiale de T`

`Initialisation();`

Etape 2:

`// T vérifie que le contenu de la bande est de la forme #ld0#ld1#...#ldk□□...`

`// ou ld0 = q0 et ldi → ldi+1. Il vérifie aussi qu'il n'y a pas de répétition`

`// de description instantanée.`

`Verify-History();`

Etape 3:

`// Ensuite, elle calcule la description instantanée qui suit directement la dernière qui est écrite sur la bande.`

`// S'il elle n'apparaît pas déjà, alors elle l'ajoute en fin de bande.`

`Next-ID();`

`goto Etape 2;`

Etape 1 - Initialisation:

T commence par écrire la description instantanée initiale de T .

`Initialisation():`

`write(t_1 , # q_{init});`

`Back-to-the-Beginning(t_1);`

`end;`

Etape 2 - Vérification de l'historique:

Cette procédure vérifie que la bande contient la séquence des descriptions instantanées de T qui sont produites par un calcul fini de T à partir de q_{init} . Elle vérifie aussi qu'aucune description instantanée n'apparaît plus d'une fois sur la bande. Notons qu'après l'exécution de cette procédure, si elle ne conduit pas T dans l'état BUG, t_1 se trouve au début de la dernière description instantanée et t_2 se trouve en début de bande.

`Verify-History():`

```

Back-to-the-Beginning( $t_1$ );
if (Deal-With( $t_1$ ,  $\#q_{init}$ , VERIFY-MODE) = FALSE) // On verifie que le debut de la bande est
    BUG; // de la forme  $\#q_{init}\#\dots$  or  $\#q_{init}\square\dots$ 
if (read( $t_1$ )  $\neq$   $\square$ ,  $\#$ )
    BUG;
Back-to-the-Beginning( $t_1$ );
Back-to-the-Beginning( $t_2$ );
move-right( $t_2$ ); move-right( $t_2$ );
(i) if (read( $t_2$ ) =  $\square$ )
    Back-to-the-Beginning( $t_2$ );
    end;
Look-Forward();
if (Simulation(VERIFY-MODE) = FALSE)
    BUG;
goto ( $i$ );

```

Cette procédure vérifie que la description instantanée lu par t_1 , qui est notée ld_1 , n'apparaît pas à droite de la position de t_2 .

```

Look-Forward():
    write( $t_2$ , $); //  $t_2$  ecrit une marque pour garder sa position en memoire.
(i) move-right( $t_1$ );
    switch
        • case (read( $t_1$ ) = read( $t_2$ ) and read( $t_1$ )  $\in$   $Q_T \cup \Gamma_T$ )
            move-right( $t_2$ );
            goto ( $i$ );
        • case (read( $t_1$ )  $\in$   $\{\#, \square, \$\}$  and read( $t_2$ )  $\in$   $\{\#, \square\}$ ) //  $t_1$  et  $t_2$  ont lu la meme
            BUG; // description instantanee
            move-left( $t_1$ ); GotoPreviousID( $t_1$ ); //  $t_1$  retourne au debut de  $ld_1$ .
            GotoNextID( $t_2$ ); //  $t_2$  se deplace sur la description instantanee suivante.
            if (read( $t_2$ ) =  $\#$ )
                move-right( $t_2$ );
                goto ( $i$ );
(ii) move-left( $t_2$ ); //  $t_2$  a atteint la fin de la bande.
        if ( $t_2 \neq$  $) // Elle retourne alors a la marque, qu'elle remplace par  $\#$ .
            goto ( $ii$ );
        write( $t_2$ ,  $\#$ );
        move-left( $t_2$ );
    end;

```

Etape 3 - Description instantanée suivante :

Le but de cette procédure est de calculer la description instantanée suivante et de l'ajouter en fin de bande si elle n'est pas déjà stockée. On suppose que la bande contient la séquence des descriptions instantanées de T séparées par des symboles séparateurs $\#$. On suppose aussi que t_1 lit un séparateur $\#$ suivi par une description instantanée ld_1 . Soit ld_2 le résultat d'un calcul de T sur ld_1 ; la procédure cherche ld_2 dans la liste des descriptions instantanées déjà stockées à droite de t_2 ; si elle ne la trouve pas, elle l'écrit alors en fin de bande.

```

Next-ID():
(i) if (read( $t_2$ ) =  $\square$ )
    Simulation(WRITE-MODE);
    end;
if (Simulation(VERIFY-MODE) = TRUE)

```

```

    end;
    move-left( $t_1$ );
    GotoPreviousID( $t_1$ );
    GotoNextID( $t_2$ );
    goto ( $i$ );

```

Macro principale: simulation du calcul de T .

Dans cette macro, T simule le calcul de T . Le paramètre `state` peut prendre comme valeur `VERIFY-MODE` ou bien `WRITE-MODE`.

On suppose que t_1 est positionnée sur un séparateur $\#$ qui est suivi d'une description instantanée de T notée ld_1 . Si ça n'est pas le cas, la macro retourne `FALSE`.

Dans le `VERIFY-MODE`, on suppose que le symbole lu par t_2 , qui doit être un séparateur, est suivi d'une description instantanée de T que l'on note ld_2 . T vérifie que ld_2 est bien le résultat d'un calcul élémentaire de T sur ld_1 . La macro retourne `TRUE` ou *Faux* suivant le cas. Si le résultat est `TRUE`, t_1 (respectivement t_2) est positionnée sur la cellule suivant ld_1 (respectivement ld_2) qui doit contenir un séparateur ou bien un blanc.

Dans le mode `WRITE-MODE`, t_2 écrit sur la bande $\#ld_2$.

```

Simulation(state):
    if (read( $t_1$ )  $\neq$  #)
        return FALSE;
    move-right( $t_1$ );
    if (Deal-With( $t_2$ , #, state) = FALSE);
        return FALSE;

     $c_1 \leftarrow$  read( $t_1$ ); move-right( $t_1$ );
    if ( $c_1 \notin Q_T \cup \Gamma_T$ )
        return FALSE;
     $c_2 \leftarrow$  read( $t_1$ ); move-right( $t_1$ );
    if ( $c_2 \notin Q_T \cup \Gamma_T \cup \{\#, \square\}$ )
        return FALSE;

    (i)  $c_3 \leftarrow$  read( $t_1$ ); move-right( $t_1$ );
    if ( $c_3 \notin Q_T \cup \Gamma_T \cup \{\#, \square\}$ )
        return FALSE;
    switch
        • case  $c_1 \in Q_T$  and  $c_2 \notin Q_T$ :
            if ( $c_2 = \#$ )
                 $c_2 \leftarrow \square$ ;
                ( $c, q, D$ )  $\leftarrow$   $\delta_T(c_1, c_2, 1)$ ;
                if ( $D = \text{left, stay}$ )
                    if (Deal-With( $t_2, qc$ , state) = FALSE)
                        return FALSE;
            else
                if (Deal-With( $t_2, cq$ , state) = FALSE)
                    return FALSE;
        switch
            • case  $c_2 = \square$ :
                move-left( $t_1$ ); move-left( $t_1$ );
                if (read( $t_2$ )  $\neq$  #,  $\square$ )
                    return FALSE;
                return TRUE;
            • case  $c_2 \in \Gamma_T$ :
                if ( $c_3 \in \{\#, \square\}$ )

```

```

        move-left( $t_1$ );
        if (read( $t_2$ )  $\neq$  #,  $\square$ )
            return FALSE;
        return TRUE;
    else
        if (Deal-With( $t_2$ ,  $c_3$ , state) = FALSE)
            return FALSE;
        goto (ii);
    • case  $c_1 \in \Gamma_T$  and  $c_2 \in Q_T$  and  $c_3 \notin Q_T$ :
        if ( $c_3 = \#$ )
             $c_3 \leftarrow \square$ ;
        ( $c, q, D$ )  $\leftarrow \delta_T(c_2, c_3, 0)$ ;
        switch
            • case  $D = \text{left}$ :
                if (Deal-With( $t_2$ ,  $qc_1c$ , state) = FALSE)
                    return FALSE;
            • case  $D = \text{stay}$ :
                if (Deal-With( $t_2$ ,  $c_1qc$ , state) = FALSE)
                    return FALSE;
            • case  $D = \text{right}$ :
                if (Deal-With( $t_2$ ,  $c_1cq$ , state) = FALSE)
                    return FALSE;
        switch
            • case  $c_3 = \square$ :
                move-left( $t_1$ );
                if (read( $t_2$ )  $\neq$  #,  $\square$ )
                    return FALSE;
                return TRUE;
            • case  $c_3 \in \Gamma_T$ :
                goto (ii);
    • case  $c_1, c_2 \in \Gamma_T$ :
        if (Deal-With( $t_2$ ,  $c_1$ , state) = FALSE)
            return FALSE;
         $c_1 \leftarrow c_2$ ;  $c_2 \leftarrow c_3$ ;
        goto (i);
    • default:
        return FALSE;
(ii) if (read( $t_1$ )  $\notin$  #,  $\square$ )
    if (read( $t_1$ )  $\notin \Gamma_T$ )
        return FALSE;
    if (Deal-With( $t_2$ , read( $t_1$ )), state) = FALSE)
        return FALSE;
    move-right( $t_1$ );
    goto (ii);
    if (read( $t_2$ )  $\neq$  #,  $\square$ )
        return FALSE;
    return TRUE

```

Macros:

La macro suivante déplace t_i au début de la bande.

```

Back-to-the-Beginning( $t_i$ ):
(i) if (not BEGINNING $_i$ )
    move-left( $t_i$ );
    goto (i);
end;

```

Cette macro déplace t_i sur le premier séparateur ou blanc qui arrive à droite de sa position. Si elle est en train de lire un tel symbole, alors elle ne bouge pas.

```
GotoNextID( $t_i$ ):
(i)   if (read( $t_i$ )  $\neq$  #,  $\square$ )
        move-right( $t_i$ );
        goto ( $i$ );
      end;
```

Cette macro déplace t_i sur le premier séparateur ou blanc qui arrive à gauche de sa position. Si elle est en train de lire un tel symbole, alors elle ne bouge pas. Si elle n'en trouve pas avant d'arriver en bout de bande, elle conduit T dans l'état BUG.

```
GotoPreviousID( $t_i$ ):
(i)   if (BEGINNING $_i$ )
        BUG;
      if (read( $t_i$ )  $\neq$  #)
        move-left( $t_i$ );
        goto ( $i$ );
      end;
```

Dans cette macro, t_i vérifie que le mot u est bien écrit sur la bande à partir de sa position ou bien écrit u à partir de sa position suivant la valeur de state qui peut être VERIFY-MODE ou bien WRITE-MODE. Après une execution normale, i.e. retournant TRUE, t_i est positionnée juste après u .

```
Deal-With( $t_i, u, \text{state}$ ): // Let  $u = u_0 \dots u_n \in \Gamma_{\tilde{T}}^*$ .
  switch
  • case (state = VERIFY-MODE)
    if (read( $t_i$ )  $\neq$   $u_0$ )
      return FALSE;
    move-right( $t_i$ );
    ...
    if (read( $t_i$ )  $\neq$   $u_n$ )
      return FALSE;
    move-right( $t_i$ );
  • case (state = WRITE-MODE)
    write( $t_i, u$ );
  return TRUE;
```

Les démonstrations des lemmes suivants sont plus techniques que difficiles; elle peuvent être faites par un examen rigoureux de T .

Lemme 4.5.2 (Comportement de Simulation)

La procédure Simulation(VERIFY-MODE) retourne TRUE si et seulement si, au début de son execution, t_1 (respectivement t_2) est positionnée sur un séparateur # suivi d'une description instantanée ld_1 (respectivement ld_2) qui se termine par un séparateur ou bien un

blanc, et telle que $ld_1 \xrightarrow{T} ld_2$. Après une exécution retournant TRUE, t_1 (respectivement t_2) est positionnée juste à droite de ld_1 (respectivement ld_2).

La procédure Simulation(WRITE-MODE) retourne TRUE si et seulement si, au début de son exécution, t_1 est positionnée sur un séparateur suivi d'une description instantanée ld_1 qui se termine par un séparateur ou bien un blanc. Dans ce cas, t_2 écrit $\#ld_2$ où ld_2 est la description instantanée produite par T après un calcul élémentaire sur ld_1 .

Lemme 4.5.3 (Comportement de Verify-History)

Soit \tilde{ld} une description instantanée de \tilde{T} . Alors

- après un calcul fini à partir de \tilde{ld} , \tilde{T} entre dans la procédure Verify-History. Soit \tilde{ld}' la description instantanée de T à cet instant.
- Si \tilde{T} parvient à exécuter Verify-History sans encombre sur \tilde{ld}' , i.e. sans aller dans l'état BUG, alors le contenu de la bande décrit par \tilde{ld}' est de la forme $\#ld_0\#ld_1\#\dots\#ld_k$ où $ld_0 = q_{\text{init}}$ est la description instantanée initiale de T ; pour tout $i \in \{0, k-1\}$: $ld_i \xrightarrow{T} ld_{i+1}$ et pour tout $i \neq j$: $ld_i \neq ld_j$.

Quelques questions

Nous proposons ici quelques questions pour baliser les développements futurs des travaux présentés dans ce mémoire. Nous reprenons les problèmes posés au fil du texte, et nous donnons des directions de recherche d'ordre plus général, notamment pour ce qui concerne les graphes infinis.

Topologie et géométrie

Surfaces

Rappelons que toute surface sans bord peut être codée par un arbre comme somme connexe arborescente (voir chapitre 2).

- Caractériser l'homéomorphisme de surface sans bord en terme de système de réécriture de termes (voir page 38). Il semble que l'on peut construire des systèmes de réécriture de termes qui codent des homéomorphismes de surfaces définis par des transformations locales; en existe-t-il un qui est noëthérien et confluent ?
- Caractériser les classes d'homéomorphismes de surfaces sans bord par des formules de la logique monadique du second ordre. Un pas significatif consisterait à montrer que les décompositions en sommes connexes arborescentes de sphères, de plans projectifs et de tores sont définissables.
- Existe-t-il un algorithme pour le problème de l'homéomorphisme des surfaces à bord planaires simplement connexes (voir chapitre 2.4.3).
- Etablir une classification générale des surfaces à bord. Dans les cas précédents, la notion de largeur arborescente a joué un rôle important : les surfaces sans bord et les surfaces à bord planaires possèdent toutes des triangularisations de largeur arborescente finies. Cela semble faux dans le cas général; néanmoins, l'étude du cas des surfaces de largeur arborescente fini pourrait constituer une restriction raisonnable.

Variétés de dimension 3

- Quelles sont les surfaces incompressibles plongées dans une 3-variété arborescente? Quelles sont les différentes décompositions arborescentes d'une telle 3-variété? En existe-t-il des pri-

150 vilégiées (canonique), en quel sens?

- La 3-variété non compacte présentée page 74 est-elle arborescente?
- Les 3-variétés possédant un cœur compact au sens de [Sco73] sont-elles HR-équationnelles? Même question pour celles qui possèdent une structure hyperbolique de volume fini?
- On peut affaiblir la condition d'arborescence hyperbolique (définition 13) en imposant aux M_i (les morceaux élémentaires de la décomposition) d'être seulement de volume fini; le théorème 7 reste-il valide dans ce cas?
- Le théorème 7 reste-t-il valide si l'on suppose que seulement l'une des deux variétés hyperboliques est acylindriquement arborescente?
- Existe-t-il une topologie raisonnable sur l'espace de Teichmüller d'une variété de dimension 3 arborescente?
- Le théorème de Mostow (cf. [Mos68]) et le théorème de Sullivan (cf. [Sul79, Sul81]) sont valides en dimensions supérieures ou égales à 3; qu'en est-il du théorème 7?

Théorie combinatoire des groupes

• Le théorème 7 a mis en exergue une nouvelle classe de groupes que nous avons décrit dans chapitre 3.3 : les groupes fondamentaux des variétés hyperboliques arborescentes. En général, ces groupes ne sont pas finiment présentés, néanmoins, ils présentent un caractère constructif (voir chapitre 3.3) qui prend tout son sens dans le cas HR-équationnel par exemple. On peut considérer la hiérarchie suivante de groupes, dont la complexité est croissante:

- (i) Produits libres infinis de groupes hyperboliques au sens de Gromov.
- (ii) Produits amalgamés infinis de groupes hyperboliques au sens de Gromov.
- (iii) Arbres infinis régulier de groupes hyperboliques au sens de Gromov.
- (iv) Graphes infinis arborescents de groupes hyperboliques au sens de Gromov.

On pose alors les questions classiques de la théorie combinatoire des groupes:

- a) Formes normales.
- b) Problème du mot, problème de la conjugaison.
- c) Structures automatiques (en quel sens?..).
- d) Systèmes d'équations infinis mais constructifs.

Pour ce qui concerne les groupes hyperboliques au sens de Gromov, qui sont les briques élémentaires qui servent à nos constructions, ces questions ont toutes reçu des réponses positives.

- Le théorème 8 donne une caractérisation en termes de groupes des revêtements réguliers HR-équationnels; ce résultat a pu voir le jour notamment grâce à la bonne compréhension dans le cas des revêtements réguliers de l'action du groupe fondamental sur la fibre. Ceci étant, quelle est la situation dans le cas général, i.e. dans le cas des revêtements non nécessairement réguliers?
- Une autre question induite par théorème 8 est la suivante: nous avons caractérisé en terme de grammaire de graphe la régularité au sens des revêtements dans le cas arborescent; peut-on traduire cette propriété de régularité dans toute sa généralité dans le contexte de la génération de graphes?
- Ces questions sont liées à la notion de reconnaissance de graphes et d'hypergraphes par homomorphismes qui consiste à définir le langage des graphes qui s'envoient homomorphiquement sur un graphe fixé (cf. [Tho00]). On peut limiter cette idée à la reconnaissance de graphes et d'hypergraphes par revêtement; cela semble très restrictif. Néanmoins, une notion de reconnaissance située "entre" les homomorphismes et les revêtements pourrait s'avérer féconde au plan algorithmique.

Théorie des graphes

On considère la hiérarchie de graphes infinis suivante: arbres réguliers, graphes context-free, graphes équationnels, graphes automatiques. Le point de vue est un peu grossier sachant que les inclusions sont vraies pour les graphes déterministes, et d'autre part, la définition de l'automaticité pour un graphe n'a pas encore atteint un état définitif.

- Comparer des différentes définitions de l'automaticité.

Du point de vue algorithmique, il nous semble intéressant d'introduire l'hypothèse d'hyperbolicité au sens de Gromov (cf [Gro87, CDP90, GdlH90]). Les graphes automatiques hyperboliques au sens de Gromov généralisent strictement les graphes déterministes context-free. Par ailleurs, les groupes hyperboliques au sens de Gromov, qui sont fortement automatiques (cf. [Can84, ECH⁺92]), jouissent de propriétés algorithmiques très importantes (cf. e.g. [GdlH90, RS95, Sel95]).

- Nous avons pu montrer que pour les graphes automatiques, le problème des bouts est indécidable; par ailleurs, l'étude présentée dans le chapitre 2 montre que le problème des bouts pour les graphes context-free est décidable; d'autre part, pour les groupes hyperboliques, le problème des bouts est aussi décidable (cf. [Ger99]). Qu'en est-il pour ce qui concerne les graphes automatiques qui sont hyperboliques au sens de Gromov?

- Pour les graphes de largeur arborescente finie, la définissabilité des classes d'isomorphisme de graphes par des formules logiques monadiques du second ordre est équivalente à l'HR-équationnalité (cf. [Cou90b]). Elle exprime donc dans ce cas un concept de régularité globale.

Les graphes automatiques déterministes sont définissables à isomorphisme près par des formules de la logique monadique faible du second-ordre (cf. [Sén92]). Il semble fort probable qu'il existe des graphes non automatiques mais néanmoins définissables par des formules de la logique monadique du second ordre. Ainsi, pour les graphes déterministes, l'automaticité exprime une idée de régularité globale plus restrictive que la définissabilité. Néanmoins, pour les graphes déterministes de largeur arborescente bornée, l'automaticité et la définissabilité coïncident, elles définissent toutes deux les graphes équationnels déterministes (cf. [Sén92]).

Qu'en est-il pour les graphes hyperboliques au sens de Gromov ?

- Existe-t-il des classes de graphes situées "entre" les graphes context-free et les graphes automatiques hyperboliques pour lesquelles la logique monadique du second ordre est décidable? Notons qu'elle est indécidable en général pour les graphes automatiques hyperboliques (cf. [Pel97]). En quoi cette question est-elle liée avec la conjecture selon laquelle les groupes hyperboliques sont les groupes automatiques qui n'ont pas \mathbb{Z}^2 comme sous-groupe?

- On déduit des résultats du chapitre 4.5 que certains graphes automatiques peuvent être construits par limites inductives de *DOL*-suites de graphes finis. Néanmoins, les *DOL*-systèmes forment une classe très large de transformations de graphes, il semble qu'en ce qui les concernent, beaucoup de problèmes soient indécidables. Pour les graphes HR-équationnels, la situation est plus favorable : les réécritures d'hyperarcs suffisent. Que peut-on dire dans le cas des graphes automatiques hyperboliques ?

Par ailleurs, Epstein propose l'étude suivante. Les graphes automatiques hyperboliques donnent naissance à un concept d'espace métrique compact constructif; un tel espace est défini comme le bord d'un graphe hyperbolique automatique (cf. e.g. [GdlH90]). On montre par exemple que les complexes simpliciaux finis ont cette propriété. Dès lors, plusieurs questions se posent :

- Donner des exemples d'espaces constructifs et aussi d'espaces non constructifs.
- Quelles opérations préservent la constructivité? (recollement d'espaces constructifs sur des sous-espaces constructifs, produits d'espaces constructifs...)
- Notion d'application continue constructive?
- Quelle sont les propriétés calculables? (connexité, dimension, distance...)

Bibliographie

- [AS60] L. W. Ahlfors and L. Sario. *Riemann Surfaces*. Princeton University Press, 1960.
- [Bar] K. Barthelmann. When can an Equational Simple Graph be generated by Hyperedge Replacement. preprint.
- [Bea83] A. F. Beardon. *The Geometry of Discrete groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [Ber73] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Bordas, 1973.
- [Ber83] C. Berge. *Graphes*. Gauthier-Villars, 3ème édition edition, 1983.
- [Ber87] C. Berge. *Hypergraphes, combinatoire des ensembles finis*. Bordas, 1987.
- [Ber90] M. Berger. *Géométrie*. Fernand Nathan, 1990.
- [BG87] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. P.U.F. Mathématiques, 1987.
- [BG96] M.R. Bridson and R.H. Gilman. Formal language theory and the geometry of 3-manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 4:525–555, 1996.
- [BG00] A. Blumensath and E. Grädel. Automatic structures. In *LICS'2000*, 2000.
- [BHP68] W. Boone, W. Haken, and V. Poenaru. On Recursively Unsolvble Problems in Topology and Their Classification. In H. Schmidt, K. Schutte, and H. J. Thiele, editors, *Contribution to Mathematical Logic*. North-Holland Pub. Co., 1968.
- [BN80] L. Boasson and M. Nivat. Adherences of Languages. *Journal of Computer and System Sciences*, 20:285–309, 1980.
- [Can84] J.W. Cannon. The combinatorial structure of cocompact discrete hyperbolic groups. *Geom. Dedicata*, 16(2):123–148, 1984.
- [Cau96] D. Caucal. On infinite transition graphs having decidable monadic theory. In *ICALP'96 - LNCS*, volume 1099, pages 194–205, 1996.
- [CB] A. Clow and S. Billington. Recognizing Two-Ended and Infinitely Ended Automatic Groups. Computer Program, Warwick University - UK (1999).

- [CDP90] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et Théorie des Groupes - Les groupes hyperboliques de Gromov*, volume 1441 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1990.
- [CE95] B. Courcelle and J. Engelfriet. A logical characterization of the sets of hypergraphs defined by hyperedge replacement grammars. *Math. Syst. Theory*, 28(6):515–552, 1995.
- [CER93] B. Courcelle, J. Engelfriet, and G. Rozenberg. Handle Rewriting Hypergraph Grammars. *JCSS*, 46:218–270, 1993.
- [CM92] R. Cori and A. Machi. Maps, hypermaps and their automorphisms: a survey. *Expositiones Math.*, 10:403–467, 1992.
- [Cor75] R. Cori. *Un code pour les graphes planaires et ses applications*, volume 27 of *Astérisque*. Société mathématique de France, 1975.
- [Cou83] B. Courcelle. Fundamental Properties of Infinite Trees. *Theoretical Computer Science*, 25:95–169, 1983.
- [Cou89] B. Courcelle. The Monadic Second-order Logic of Graphs II: Infinite Graphs of Bounded Width. *Math. Syst. Theory*, 21:187–221, 1989.
- [Cou90a] B. Courcelle. Graph Rewriting: An algebraic and Logic Approach. In *Handbook of Theoretical Computer Science vol. B*, Van Leeuwen J. editor. Elsevier Science Publishers, 1990.
- [Cou90b] B. Courcelle. The Monadic Second-order Logic of Graphs IV: Definability Properties of Equational Graphs. *Annals of Pure and Applied Logic*, 49:193–255, 1990.
- [Cou90c] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs. I: Recognizable sets of finite graphs. *Inf. Comput.*, 85(1):12–75, 1990.
- [Cou96] B. Courcelle. Basic Notions of Universal Algebra for Language Theory and Graph Grammars. *TCS*, 163:1–54, 1996.
- [Cou97] B. Courcelle. The Expression of Graph Properties and Graph Transformations in Monadic Second-Order Logic. In G. Rozenberg, editor, *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1. World Scientific, 1997.
- [CS] A. Carbone and S. Semmes. A graphic apology for symmetry and implicitness. Preprint.
- [CW98] N.J. Cornish and J.R. Weeks. Measuring the Shape of the Universe. *Notices of the AMS*, 45(11):1463–1471, 1998.

- [Da78] J. Dieudonné and al. *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700 - 1900*, volume 2. Hermann, 1978.
- [DD89] W. Dicks and M.J. Dunwoody. *Groups Acting on Graphs*, volume 17 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 1989.
- [DDL82] M. De Does and A. Lindenmayer. Algorithms for the Generation and Drawing of Maps Representing Cell Clones. In *GGACS'82*, volume 153 of *Lect. Notes in Comp. Sci.*, pages 39–57. Springer-Verlag, 82.
- [DKA97] F. Drewes, H.-J. Kreowski, and Habel A. Hyperedge Replacement Graph Grammars. In G. Rozenberg, editor, *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1. World Scientific, 1997.
- [ECH⁺92] D.B.A. Epstein, J.W. Cannon, D.F. Holt, S.V.F. Levy, M.S. Paterson, and W.P. Thurston. *Word processing in groups*. Jones and Bartlett, 1992.
- [Eps88] D.B.E. Epstein. Computer, Groups and Hyperbolic Geometry. *Astérisque Soc. Math. France*, 163-164:9–29, 1988.
- [ER97] J. Engelfriet and G. Rozenberg. Node Replacement Graph Grammars. In G. Rozenberg, editor, *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1. World Scientific, 1997.
- [Feu73] C.D. Feustel. A generalisation of Kneser's conjecture. *Pacific J. of Math.*, 46:123–130, 1973.
- [FM97] A.T. Fomenko and S.V. Matveev. *Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*. Mathematics and its Applications. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [FSS89] C. Frougny, J. Sakarovitch, and P. E. Schupp. Finiteness Conditions on Subgroups and Formal Languages Theory. *Proc. London Math. Soc. (2)*, 58:74–88, 1989.
- [GdlH90] E. Ghys and P. de la Harpe. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, volume 83 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1990.
- [Ger99] V. Gerasimov. Detecting Connectedness of the Boundary of a Hyperbolic Group. Preprint, 1999.
- [Gro87] M. Gromov. *Essays in group theory - Hyperbolic groups*, pages 75–263. Math. Sci. Res. Inst. Publ., 1987.
- [GT87] J.L. Gross and T.W. Tucker. *Topological Graph Theory*. Wiley Intersci. Series in Discrete Mathematics. John Wiley and Sons, 1987.
- [Gur85] Y. Gurevitch. Monadic Second-Order Theories. In J. Barwise and Feferman; S., editors, *Model Theoretic Logic*. Springer, 1985.
- [Hal64] R. Halin. Über Unendliche Wege in Graphen. *Math. Ann.*, 157:125–137, 1964.

- [Hea86] T. Head. The Topological Structure of Adherences of Regular Languages. *Informatique théorique et Applications*, 20(1):31–41, 1986.
- [Hei63] W. Heil. On P^2 -irreducible 3-manifolds. *Bull. AMS*, 75:772–775, 1963.
- [Hem76] J. Hempel. *3-Manifolds*, volume 86 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1976.
- [Hol] D. F. Holt. The Warwick Automatic Group Software. preprint.
- [HU79] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley Publishing Company, 1979.
- [HW41] W. Hurewicz and H. Wallman. *Dimension Theory*. Princeton University Press, 1941.
- [HY61] J. G. Hocking and G. S. Young. *Topology*. Addison-Wesley series in Mathematics. Addison-Wesley, 1961.
- [Jac77] W. Jaco. *Lectures on Three-Manifold Topology*, volume 43 of *Conference board of the mathematical sciences regional conference series in mathematics*. AMS, 1977.
- [Joh95] K. Johannson. *Topology and Combinatorics of 3-Manifolds*, volume 1599 of *Lecture notes in Mathematics*. Springer, 1995.
- [KN95] B. Khoussainov and A. Nerode. Automatic Presentations of Structures. In *Logic and Computational Complexity (Indianapolis, IN, 1994)*, volume 960 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 367–392. Springer, Berlin, 1995.
- [LdR96] R. Lassaigne and M. de Rougemont. *Logique et Complexité*. Collection Informatique. Hermes, 1996.
- [Lin86] A. Lindenmayer. An Introduction to Parallel Map Generating Systems. In *GGACS'86*, volume 291 of *Lect. Notes in Comp. Sci.*, pages 27–40. Springer-Verlag, 1986.
- [LR78] A. Lindenmayer and G. Rozenberg. Parallel generation of maps: developmental systems systems for cell layers. In *GGACS'78*, volume 73 of *Lect. Notes in Comp. Sci.*, pages 301–316. Springer-Verlag, 1978.
- [LS77] R. C. Lyndon and P. E. Schupp. *Combinatorial Group Theory*. Springer, 1977.
- [Ly99] O. Ly. On Effective Decidability of the Homeomorphism Problem for Non-Compact Surfaces. *Contemporary Mathematics - Amer. Math. Soc.*, 250:89–112, 1999.
- [Mak80] G. S. Makanin. Equations on a free semigroup. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, pages 263–268. Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980.

- [Mak82] G. S. Makanin. Equations in a free group. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 46(6):1199–1273, 1982.
- [Mal72] P. Malliavin. *Géométrie différentielle intrinsèque*. Enseignement des sciences. Hermann, 1972.
- [Mar58] A. A. Markov. In *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, pages 300–306, 1958.
- [Mar97] M. Marcus. *Cartes, hypercartes et diagramme de cordes*. PhD thesis, Bordeaux I, 1997.
- [Mas67] W. S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*, volume 56 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer, 1967.
- [Mas87] B. Maskit. *Kleinian Groups*, volume 287 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1987.
- [Mat] S. V. Matveev. The J. H. Rubinstein - A. Thompson algorithm for recognition of S^3 . Preprint.
- [McM62] D. R. Jr. McMillan. Some Contractible Open 3-Manifolds. *T.A.M.S.*, 102:373–382, 1962.
- [McM96] C. T. McMullen. *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*, *Annals of Mathematics Studies*. 142. Princeton Univ. Press, 1996.
- [Mil65] J.W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. The University Press of Virginia, 1965.
- [Mil82] J. Milnor. Hyperbolic Geometry: the first 150 years. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6(1):9–24, 1982.
- [MKS66] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar. *Combinatorial Group Theory*. NY: Wiley, 1966.
- [Mor99] C. Morvan. On rational graphs. In *FOSSACS'99*, 1999.
- [Mos68] G. D. Mostow. Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 34:53–104, 1968.
- [MS83] D.E. Muller and P.E. Schupp. Groups, the theory of ends, and context-free languages. *J. Comput. System Sci.*, 1983.
- [MS85] D. E. Muller and P. E. Schupp. The theory of ends, pushdown automata, and second-order logic. *Theoretical Computer Science*, 37:51–75, 1985.
- [MT98] K. Matsuzaki and M. Taniguchi. *Hyperbolic Manifolds and Kleinian Group*, *Oxford Mathematical Monograph*. Clarendon Press, Oxford, 1998.

- [Nar93] P. Narbel. *Limits and Boundaries of Word and Tiling Substitutions*. PhD thesis, Paris 7, 1993.
- [Nar94] P. Narbel. Geometrical *OL* Systems coming from tilings of the plane. In G. Rozenberg and A. Salomaa, editors, *Developments in Language Theory*, volume 28, pages 237–249. World Scientific, 1994.
- [Pap94] C.H. Papadimitriou. *Computational Complexity*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [Pel97] L. Pelecq. *Isomorphisme et automorphismes des graphes context-free, équationnels et automatiques*. PhD thesis, Bordeaux I, 1997.
- [Pey81] J. Peyrière. Processus de naissance avec interaction des voisins, évolution de graphes. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 31(4):181–218, 1981.
- [Pey86] J. Peyrière. Frequency of patterns in certain graphs and in Penrose tilings. *Journal de Physique*, 47:41–61, 1986.
- [Pie72] R. S. Pierce. *Compact Zero-Dimensional Metric Space of Finite Type*, volume 130 of *Memoir of the AMS*. Amer. Math. Soc., 1972.
- [Poi00] H. Poincaré. Second complément à l'Analysis Situs. *Proc. London Math. Soc.*, 32:277–308, 1900.
- [Pra73] G. Prasad. Strong Rigidity of \mathbb{Q} -rank 1 Lattices. *Invent. Math.*, 21:255–286, 1973.
- [Rab69] M. O. Rabin. Decidability of Second-Order Theories and Automata on Infinite Trees. *Trans. A.M.S.*, 141:1–35, 1969.
- [Rat94] J.G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1994.
- [Ric63] I. Richards. On The Classification of Non-Compact Surfaces. *Trans. of the AMS*, 106:259–269, 1963.
- [Rog67] H. Jr Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill, 1967.
- [Rot88] J.J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*, volume 119 of *G.T.M.* Springer-Verlag, 1988.
- [Roz97] G. Rozenberg. *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformation*, volume 1. World Scientific, 1997.
- [RS72] C.P. Rourke and B.J. Sanderson. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer-Verlag, 1972.
- [RS80] G. Rozenberg and A. Salomaa. *The Mathematical Theory of L-Systems*. Academic Press, 1980.

- [RS84] N. Robertson and P. Seymour. Some New Results on the Well-Quasi Ordering of Graphs. *Annals of Discrete Math.*, 23:343–354, 1984.
- [RS95] E. Rips and Z. Sela. Canonical representatives and equations in hyperbolic groups. *Invent. Math.*, 120:489–512, 1995.
- [Rub95] J.H. Rubinstein. An Algorithm to Recognize the 3-Sphere. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich*, 1995.
- [Sak99] M. Sakarovitch. Revêtements d’automates. Notes de cours - LANFOR’99, 1999.
- [Sch98] G. Schaeffer. *Conjugaison d’arbres et cartes combinatoires aléatoires*. PhD thesis, Bordeaux I, 1998.
- [Sco73] G. P. Scott. Compact Submanifold of 3-manifolds. *J. London Math. Soc. (2)*, 7:246–250, 1973.
- [Sco83] P. Scott. The geometries of 3-manifolds. *Bull. London Math. Soc.*, 15:401–487, 1983.
- [Sco85] P. Scott. Homotopy implies Isotopy for some Seifert fibred Spaces. *Topology*, 24:341–351, 1985.
- [Sel95] Z. Sela. The isomorphism problem for hyperbolic groups. I. *Ann. of Math. (2)*, 1995.
- [Sén92] G. Sénizergues. Definability in weak monadic second-order logic of some infinite graphs. In *Dagstuhl seminar on Automata theory: Infinite computations. Wadern, Germany*, volume 28, pages 16–16, 1992.
- [Sén93] G. Sénizergues. An effective version of Stallings’ theorem in the case of context-free groups. In *ICALP’93*, pages 478–495. Lect. Notes Comp. Sci. 700, 1993.
- [Sén96] G. Sénizergues. On the finite Subgroups of a Context-Free Group. *Dimacs series in Disc. Math. and Theo. Comp. Sci.*, 25, 1996.
- [Spa66] E. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, NY, 1966.
- [Sta68] J.R. Stallings. On torsion-free groups with infinitely many ends. *Ann. of Math.*, 88:312–334, 1968.
- [Sul79] D. Sullivan. The density at Infinity of a Discrete Group of Hyperbolic Motions. *publ. Math. I.H.E.S.*, 1979.
- [Sul81] D. Sullivan. On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions. *Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 StonyBrook Conference, Ann. of Math. Stud.*, 1981.
- [Tho] W. Thomas. Langage, Automata and Logic. In *Handbook of formal Languages vol. 3: Beyond Words*.

- [Tho90] W. Thomas. Automata on Infinite Objects. In Van Leeuwen, editor, *Handbook of Theoretical Computer Science*, volume B. Elsevier, 1990.
- [Tho00] W. Thomas. Recognizability of graphs by homomorphism. PROCOPE - Bordeaux, 2000.
- [Thu79] W.P. Thurston. The Geometry and Topology of 3-Manifolds. Note de Cours - Princeton, 1979.
- [Thu82] W.P. Thurston. Three dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 6:357–379, 1982.
- [Thu86] W. P. Thurston. Hyperbolic structures on 3-manifolds i: Deformation of acylindrical manifolds. *Ann. Math., II. Ser.*, 124:203–246, 1986.
- [Thu97] W.P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology.*, volume 1 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, 1997.
- [Wal68] F. Waldhausen. On Irreducible 3-Manifolds which are sufficiently large. *Ann. of Math. (2)*, 87:56–88, 1968.
- [Whi35] J. H. C. Whitehead. A certain Open Manifold whose Group is Unity. *Quart. J. Math. (2)*, 6:268–279, 1935.
- [Whi39] J. H. C. Whitehead. Simplicial spaces, nuclei and m-groups. *Proc. of London Math. Soc.*, 45:243–327, 1939.