

# Énumération de tresses et partitions non-croisées

Marie ALBENQUE et Philippe NADEAU

Journées de combinatoire de Bordeaux, 4 février 2009

# Plan

Présentation des tresses

Le lien avec les empilements

Partitions non-croisées

Autres exemples de monoïdes

## Diagramme de tresses positives

diagramme de tresse = une suite de croisements de brins.

$\sigma_{t,s} = \sigma_{s,t}$  ( $s < t$ ) = croisement des brins  $s$  et  $t$  avec le brin  $s$  au dessus

diagramme de tresse = mot sur l'alphabet des  $\sigma_{s,t}$

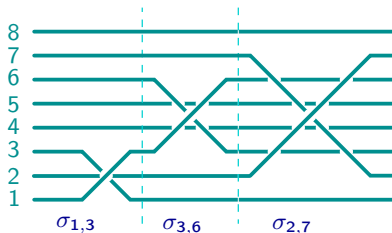
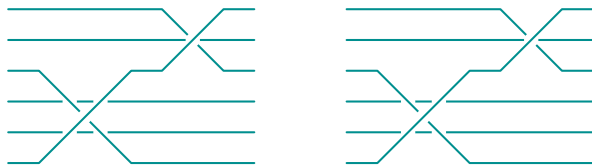


Figure: Diagramme de tresse et mot associé

## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

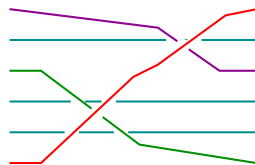
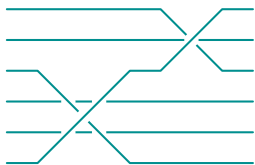
# Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

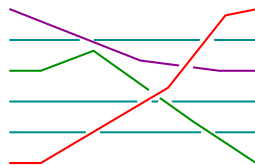
# Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

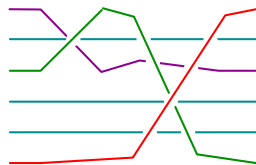
## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

# Diagrammes équivalents

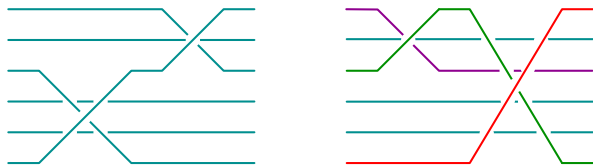


$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.



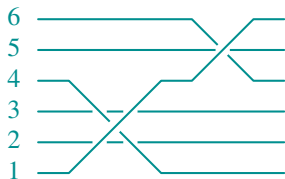
## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

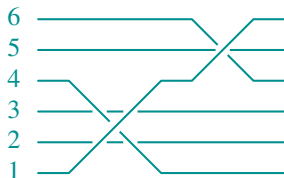
# Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = classe d'équivalence de diagrammes.

## Diagrammes équivalents



$$\sigma_{1,4} \sigma_{4,6} \equiv \sigma_{4,6} \sigma_{1,6}$$

Tresse = **classe d'équivalence** de diagrammes.

## Présentation du monoïde dual de tresses.

L'ensemble de générateurs de  $B_n^{+*}$  est :

$$\Sigma_n = \{ \sigma_{s,t} = \sigma_{t,s} \text{ pour } 1 \leq s < t \leq n, \}$$

soumis aux relations de tresses suivantes :

$$\sigma_{s,t} \sigma_{u,v} = \sigma_{u,v} \sigma_{s,t} \text{ si } s <_s t <_s u <_s v,$$

$$\sigma_{s,t} \sigma_{t,u} = \sigma_{t,u} \sigma_{u,s} \text{ si } s <_s t <_s u.$$

où  $<_s =$  ordre sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  défini par :

$$s <_s s+1 <_s s+2 <_s \dots <_s s-1.$$

Longueur d'une tresse =  $|b|_{\Sigma_n}$

## Présentation du monoïde dual de tresses.

L'ensemble de générateurs de  $B_n^{+*}$  est :

$$\Sigma_n = \{ \sigma_{s,t} = \sigma_{t,s} \text{ pour } 1 \leq s < t \leq n, \}$$

soumis aux relations de tresses suivantes :

$$\sigma_{s,t} \sigma_{u,v} = \sigma_{u,v} \sigma_{s,t} \text{ si } s <_s t <_s u <_s v,$$

$$\sigma_{s,t} \sigma_{t,u} = \sigma_{t,u} \sigma_{u,s} \text{ si } s <_s t <_s u.$$

où  $<_s$  = ordre sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  défini par :

$$s <_s s + 1 <_s s + 2 <_s \dots <_s s - 1.$$

Longueur d'une tresse =  $|b|_{\Sigma_n}$

## Présentation du monoïde dual de tresses.

L'ensemble de générateurs de  $B_n^{+*}$  est :

$$\Sigma_n = \{ \sigma_{s,t} = \sigma_{t,s} \text{ pour } 1 \leq s < t \leq n, \}$$

soumis aux relations de tresses suivantes :

$$\sigma_{s,t} \sigma_{u,v} = \sigma_{u,v} \sigma_{s,t} \text{ si } s <_s t <_s u <_s v,$$

$$\sigma_{s,t} \sigma_{t,u} = \sigma_{t,u} \sigma_{u,s} \text{ si } s <_s t <_s u.$$

où  $<_s$  = ordre sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  défini par :

$$s <_s s + 1 <_s s + 2 <_s \dots <_s s - 1.$$

**Longueur** d'une tresse =  $|b|_{\Sigma_n}$

## Série génératrice du monoïde de tresses dual

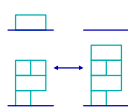
### Théorème (A., Nadeau '08)

*La série génératrice des tresses duales sur  $n$  brins comptées selon leur longueur est égale à :*

$$F_n(t) = \sum \#\{\text{tresses de longueur } n\} t^n = \sum_{b \in B_n^{+\star}} t^{|b|_{\Sigma_n}}$$

$$F_n(t) = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1+k)!(-t)^k}{(n-1-k)!k!(k+1)!} \right]^{-1}.$$

# Étapes de la preuve



Calcul de la série génératrice du monoïde de tresse

Polynôme générateur alterné des ppcm



## Empilements de pièces

$$H = \langle a, b, c \mid ac = ca \rangle.$$

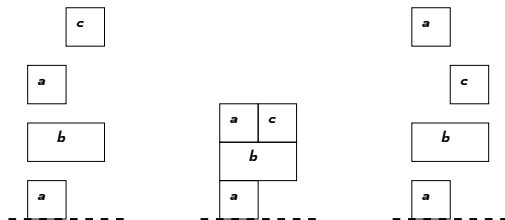
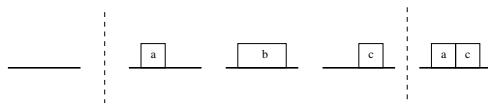


Figure: Trois représentations de  $abac = abca$  sous forme d'empilements.

# Énumération d'empilements, Viennot '86

Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des empilements de hauteur au plus un :



Viennot construit une involution  $\Psi : \mathcal{M} \times H \rightarrow \mathcal{M} \times H$

- Si  $\Psi(m, h) = (m', h')$ , alors  $mh = m'h'$  et  $|m| = |m'| \pm 1$
- $\Psi$  admet uniquement  $(1, 1)$  comme point fixe.

[Viennot, 86], [Krattenthaler, 00], [Bouillard et Mairesse, 04]

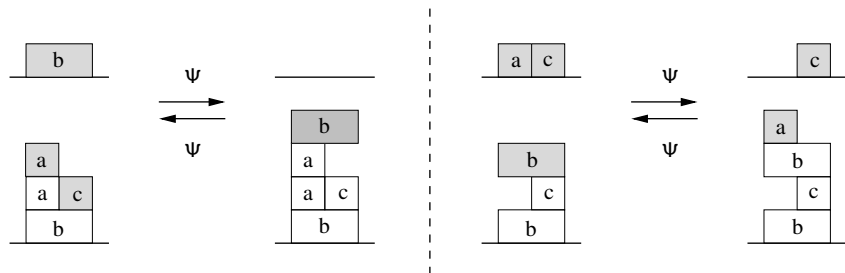


Figure: Quelques exemples de l'application  $\Psi$

## Calcul de la série génératrice

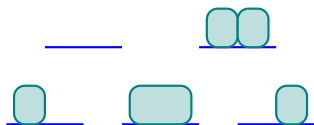
$$\begin{aligned} & \left( \sum_{m \in \mathcal{M}} (-1)^{|m|} m \right) \cdot \left( \sum_{h \in H} h \right) \\ &= \sum_{(m,h)} (-1)^{|m|} mh \\ &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{(m,h) \neq (1,1)} (-1)^{|m|} (mh - m'h') \text{ où } \Psi((m,h)) = (m',h') \\ &= 1 \end{aligned}$$

En projetant, on obtient la série génératrice :

## Calcul de la série génératrice

$$\begin{aligned}
 & \left( \sum_{m \in \mathcal{M}} (-1)^{|m|} m \right) \cdot \left( \sum_{h \in H} h \right) \\
 = & \sum_{(m,h)} (-1)^{|m|} mh \\
 = & 1 + \frac{1}{2} \sum_{(m,h) \neq (1,1)} (-1)^{|m|} (mh - m'h') \text{ où } \Psi((m,h)) = (m',h') \\
 = & 1
 \end{aligned}$$

En projetant, on obtient la série génératrice :



$$F(t)(1 - 3t + t^2) = 1$$

## Un peu de divisibilité

$\sigma \prec b$  = il existe un diagramme de  $b$  commençant par  $\sigma$  :  
 $b \equiv \sigma \dots$

$b$  est un **multiple commun** de  $J \subset \Sigma_n$  :

$$b \equiv \sigma \dots \text{ pour tout } \sigma \in J$$

$$\mathcal{J} = \{J \subset \Sigma_n \text{ tel que } M_J = \text{ppcm}J \text{ existe}\}$$

Empilements :  $\mathcal{J} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ .

Empilements  $\rightarrow$  tresses

$\Psi$  **involution** définie par :

$$\Psi : \mathcal{J} \times B_n^{+\star} \rightarrow \mathcal{J} \times B_n^{+\star}$$

$$(J, b) \mapsto (J', b') \text{ avec } M_J b = M_{J'} b' \text{ et } |J \Delta J'| = 1$$

$$s_m = \min\{s \text{ tel que } s \prec M_J b\}$$

$$\Psi(J, b) = \begin{cases} (J \cup \{s_m\}, (M_{J \cup \{s_m\}})^{-1} \cdot b) & \text{si } s \in J \\ (J \setminus \{s\}, (M_{J \setminus \{s\}})^{-1} M_J \cdot b) & \text{sinon} \end{cases}$$

Empilements  $\rightarrow$  tresses

$\Psi$  **involution** définie par :

$$\Psi : \mathcal{J} \times B_n^{+\star} \rightarrow \mathcal{J} \times B_n^{+\star}$$

$$(J, b) \mapsto (J', b') \text{ avec } M_J b = M_{J'} b' \text{ et } |J \Delta J'| = 1$$

$$s_m = \min\{s \text{ tel que } s \prec M_J b\}$$

$$\Psi(J, b) = \begin{cases} (J \cup \{s_m\}, (M_{J \cup \{s_m\}})^{-1} \cdot b) & \text{si } s \in J \\ (J \setminus \{s\}, (M_{J \setminus \{s\}})^{-1} M_J \cdot b) & \text{sinon} \end{cases}$$



## Théorème

$$\left(\sum_{J \in \mathcal{J}} (-1)^{|J|} M_J\right) \cdot \left(\sum_{b \in B_n^{++}} b\right) = 1$$

## Corollaire (Bronfman '05, Kraamer '05)

*La série génératrice du monoïde est alors :*

$$F(t) = \left[\sum_{J \in \mathcal{J}} (-1)^{|J|} t^{m_J}\right]^{-1}$$

## Une large classe de monoïdes

Cette approche est valable pour tous les monoïdes  $M$  présentés par générateurs et relations qui sont :

- atomiques,
- simplifiables à gauche :  $a, u, v \in M, au = av \Rightarrow u = v$ ,
- si un sous-ensemble de générateurs admet un multiple commun à droite, alors il admet un ppcm.

[Bronfman, 00], [Krammer, 04]

Monoïdes de traces, de [Garside](#), d'[Artin-Tits](#), ...

Pour en déduire la série génératrice, les relations doivent préserver la longueur.

## Une large classe de monoïdes

Cette approche est valable pour tous les monoïdes  $M$  présentés par générateurs et relations qui sont :

- atomiques,
- simplifiables à gauche :  $a, u, v \in M, au = av \Rightarrow u = v,$
- si un sous-ensemble de générateurs admet un multiple commun à droite, alors il admet un ppcm.

[Bronfman, 00], [Krammer, 04]

Monoïdes de traces, de Garside, d'Artin-Tits, ...

Pour en déduire la série génératrice, les relations doivent préserver la longueur.

## Une large classe de monoïdes

Cette approche est valable pour tous les monoïdes  $M$  présentés par générateurs et relations qui sont :

- atomiques,
- simplifiables à gauche :  $a, u, v \in M, au = av \Rightarrow u = v$ ,
- si un sous-ensemble de générateurs admet un multiple commun à droite, alors il admet un ppcm.

[Bronfman, 00], [Krammer, 04]

Monoïdes de traces, de Garside, d'Artin-Tits, ...

Pour en déduire la série génératrice, les relations doivent préserver la longueur.

## Une large classe de monoïdes

Cette approche est valable pour tous les monoïdes  $M$  présentés par générateurs et relations qui sont :

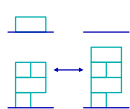
- atomiques,
- simplifiables à gauche :  $a, u, v \in M, au = av \Rightarrow u = v,$
- si un sous-ensemble de générateurs admet un multiple commun à droite, alors il admet un ppcm.

[Bronfman, 00], [Krammer, 04]

Monoïdes de traces, de Garside, d'Artin-Tits, ...

Pour en déduire la série génératrice, les relations doivent préserver la longueur.

# Étapes de la preuve



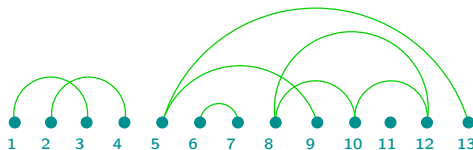
Calcul de la série génératrice du monoïde de tresse

Polynôme générateur alterné des ppcm

?

## Retour aux tresses duales

Ppcm de  $\{\sigma_{1,3}, \sigma_{2,4}, \sigma_{5,13}, \sigma_{6,9}, \sigma_{7,8}, \sigma_{9,10}, \sigma_{8,12}, \sigma_{10,12}\}$  ?

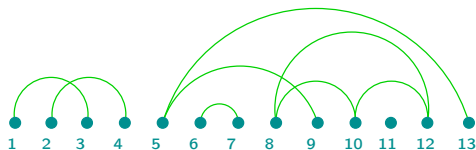


$$M_J = \sigma_{1,4} \sigma_{4,3} \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{5,13} \sigma_{13,12} \sigma_{12,10} \sigma_{10,9} \sigma_{9,8} \cdot \sigma_{7,6}$$

$$|M_J| = \text{nombre de sommets} - \text{nombre de parties} = 13 - 4 = 9.$$

## Retour aux tresses duales

Ppcm de  $\{\sigma_{1,3}, \sigma_{2,4}, \sigma_{5,13}, \sigma_{6,9}, \sigma_{7,8}, \sigma_{9,10}, \sigma_{8,12}, \sigma_{10,12}\}$  ?



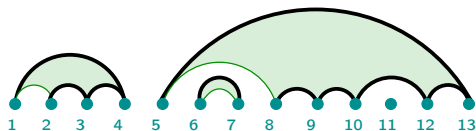
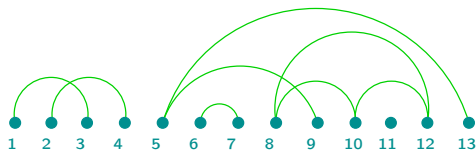
$$M_J = \sigma_{1,4} \sigma_{4,3} \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{5,13} \sigma_{13,12} \sigma_{12,10} \sigma_{10,9} \sigma_{9,8} \cdot \sigma_{7,6}$$

$$|M_J| = \text{nombre de sommets} - \text{nombre de parties} = 13 - 4 = 9.$$



## Retour aux tresses duales

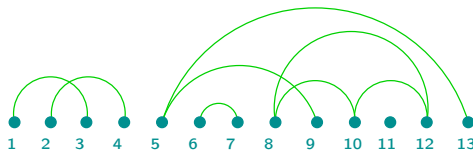
Ppcm de  $\{\sigma_{1,3}, \sigma_{2,4}, \sigma_{5,13}, \sigma_{6,9}, \sigma_{7,8}, \sigma_{9,10}, \sigma_{8,12}, \sigma_{10,12}\}$  ?



$$M_J = \sigma_{1,4} \sigma_{4,3} \sigma_{2,3} \cdot \sigma_{5,13} \sigma_{13,12} \sigma_{12,10} \sigma_{10,9} \sigma_{9,8} \cdot \sigma_{7,6}$$

$$|M_J| = \text{nombre de sommets} - \text{nombre de parties} = 13 - 4 = 9.$$

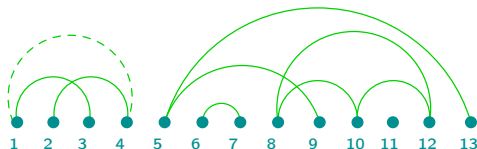
# Involution sur les configurations d'arêtes



⇒ il faut compter des **forêts alternantes non croisées**

Longueur du ppcm = nombre d'arêtes de la forêt

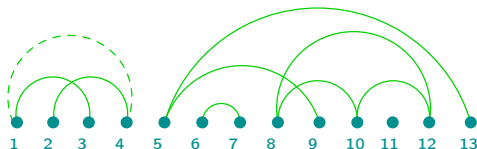
## Involution sur les configurations d'arêtes



⇒ il faut compter des **forêts alternantes non croisées**

Longueur du ppcm = nombre d'arêtes de la forêt

# Involution sur les configurations d'arêtes



$$s < t < u < v$$

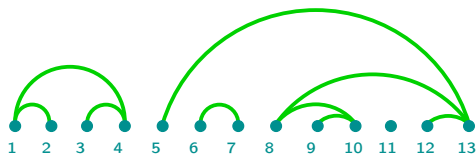


$$s < t < u < v$$

⇒ il faut compter des **forêts alternantes non croisées**

Longueur du ppcm = nombre d'arêtes de la forêt

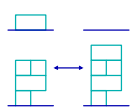
# Involution sur les configurations d'arêtes



⇒ il faut compter des **forêts alternantes non croisées**

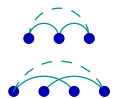
Longueur du ppcm = nombre d'arêtes de la forêt

# Étapes de la preuve



Calcul de la série génératrice du monoïde de tresse

Polynôme générateur alterné des ppcm



Forêts alternantes non-croisées

?

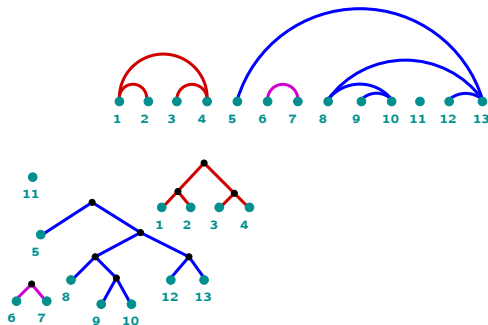
# Forêts alternantes non-croisées et arbres unaires-binaires



Bijection entre les forêts alternantes non-croisées à  $n$  sommets et  $k$  arêtes et les arbres unaires-binaires à  $n + k$  nœuds dont  $k$  nœuds binaires.

[Gelfand *et al.*, 97]

# Forêts alternantes non-croisées et arbres unaires-binaires

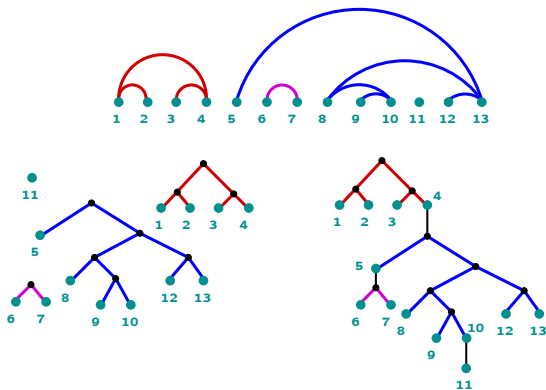


Bijection entre les forêts alternantes non-croisées à  $n$  sommets et  $k$  arêtes et les arbres unaires-binaires à  $n + k$  nœuds dont  $k$  nœuds binaires.

[Gelfand *et al.*, 97]



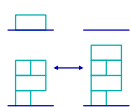
# Forêts alternantes non-croisées et arbres unaires-binaires



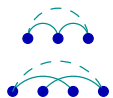
Bijection entre les forêts alternantes non-croisées à  $n$  sommets et  $k$  arêtes et les arbres unaires-binaires à  $n + k$  nœuds dont  $k$  nœuds binaires.

[Gelfand *et al.*, 97]

# Étapes de la preuve



Calcul de la série génératrice du monoïde de tresse



Polynôme générateur alterné des ppcm



Forêts alternantes non-croisées

Arbres unaires-binaires

## Série génératrice du monoïde de tresses dual

### Théorème

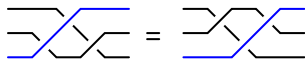
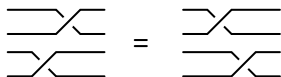
*La série génératrice des tresses duales sur  $n$  brins comptées selon leur longueur est égale à :*

$$F_n(t) = \sum \#\{\text{tresses de longueur } n\} t^n = \sum_{b \in B_n^{+*}} t^{|b|_{\Sigma_n}}$$

$$F_n(t) = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1+k)!(-t)^k}{(n-1-k)!k!(k+1)!} \right]^{-1} .$$

## Autre exemple de monoïde de tresses

$\sigma_i = \sigma_{i,i+1}$  = croisement des brins  $i$  et  $i+1$  avec le brin  $i$  au dessus



Relations de tresses classiques :

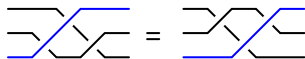
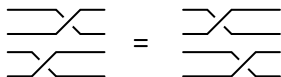
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$$

$$\text{si } |i - j| \geq 2$$

## Autre exemple de monoïde de tresses

$\sigma_i = \sigma_{i,i+1}$  = croisement des brins  $i$  et  $i+1$  avec le brin  $i$  au dessus

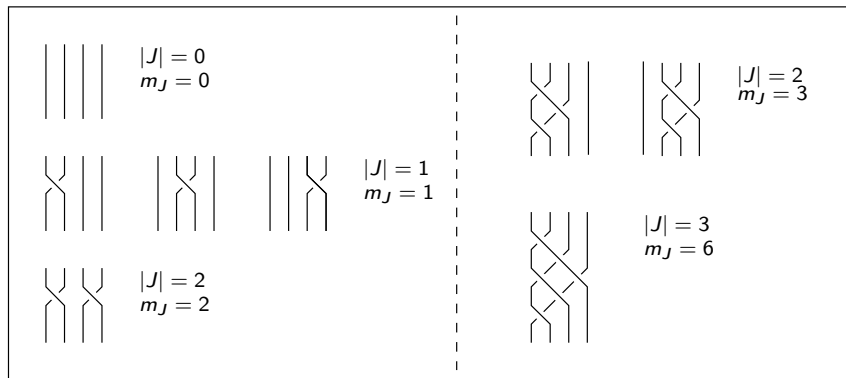


Relations de tresses classiques :

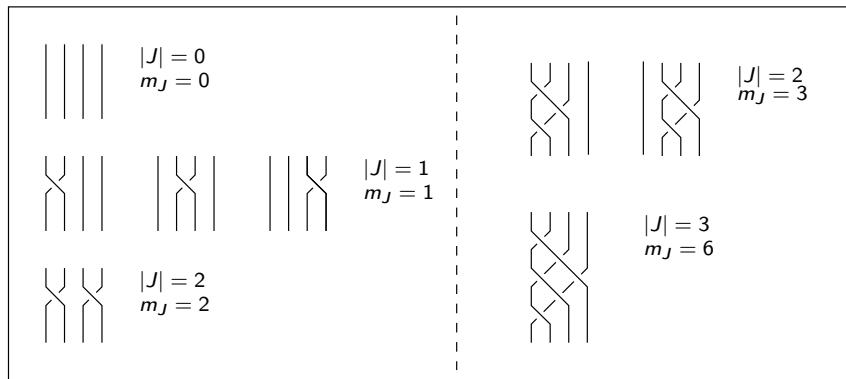
$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$$

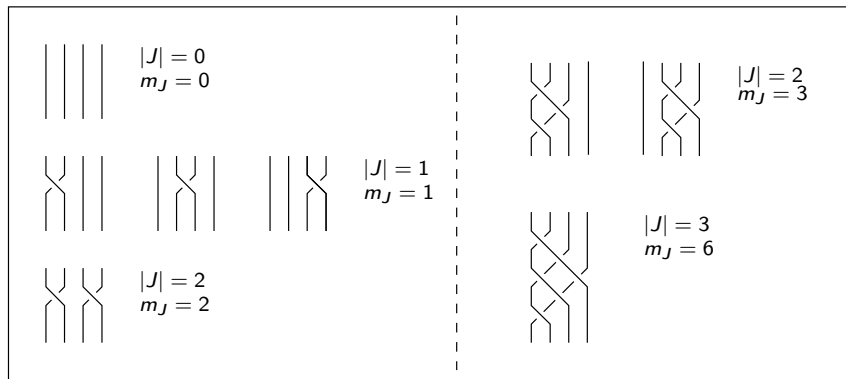
$$\text{si } |i - j| \geq 2$$



$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

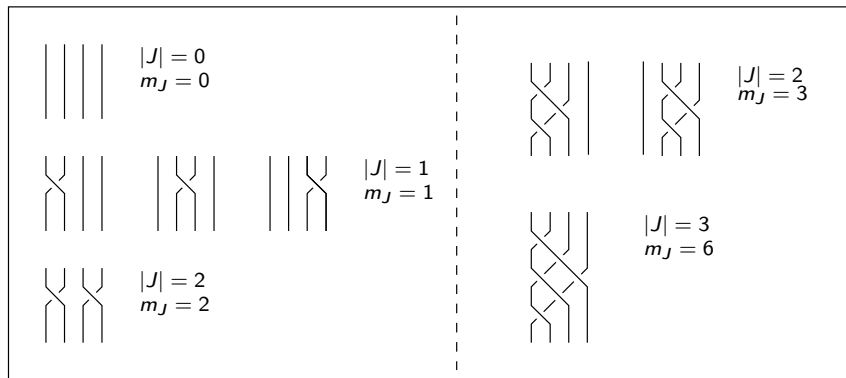


$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

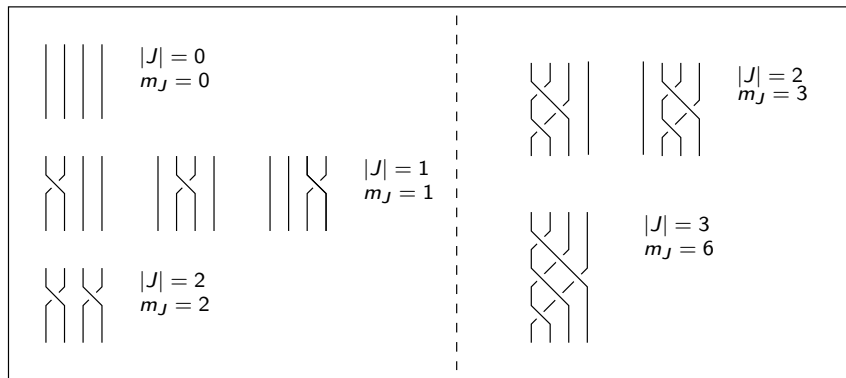


$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

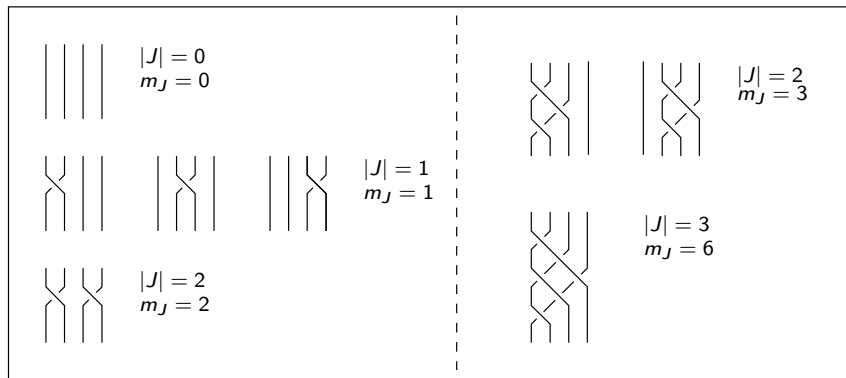




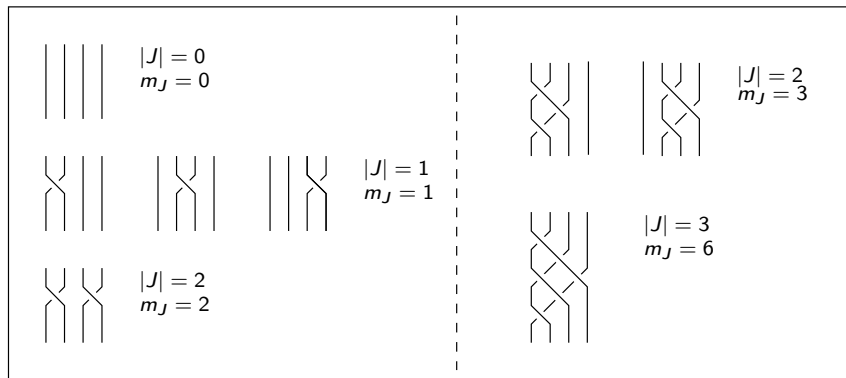
$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$



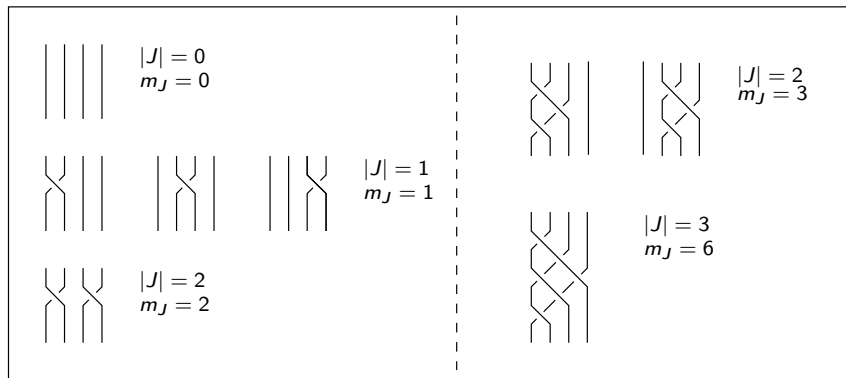
$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$



$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$



$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$



$$F_4(t) = \frac{1}{1 - 3t + t^2 + 2t^3 - t^6}$$

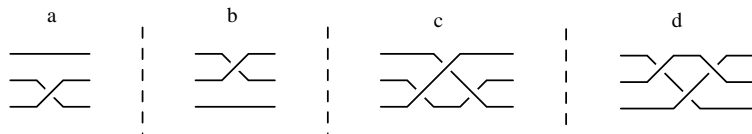
# Extensions

Travail en cours :

- Extensions aux monoïdes d'Artin-Tits sphériques classiques et duaux de type B et C.
- Interprétation combinatoire pour les monoïdes de tresses duaux : liens avec d'autres treillis de partitions non-croisées.
- Tresses sur un cylindre [Digne, 05]
- Conséquences algébriques : algèbres de Koszul ...

## Perspectives : Monoïdes sans ppcm

$\langle a, b, c, d \text{ tel que } ab = bc = ca \text{ et } ba = ad = db \rangle$ .



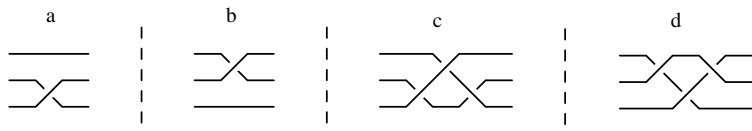
$\{a, b\}$  admet des multiples communs mais PAS de ppcm.

$$F(x) = \frac{1+x}{1-3x}$$

Interprétation combinatoire??

## Perspectives : Monoïdes sans ppcm

$\langle a, b, c, d \text{ tel que } ab = bc = ca \text{ et } ba = ad = db \rangle$ .



$\{a, b\}$  admet des multiples communs mais **PAS** de ppcm.

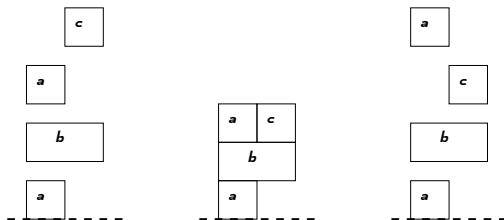
$$F(x) = \frac{1+x}{1-3x}$$

Interprétation combinatoire??



# Perspectives : Monoïdes sans homogénéité

$\langle a, b, c, d \text{ tel que } ac = d \text{ et } ca = d \rangle$ .



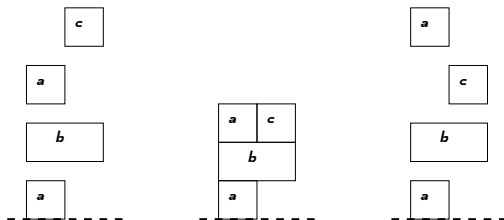
PAS d'homogénéité

$$F(x) = \frac{1+x}{1-3x}$$

Interprétation combinatoire??

# Perspectives : Monoïdes sans homogénéité

$\langle a, b, c, d \text{ tel que } ac = d \text{ et } ca = d \rangle$ .



**PAS** d'homogénéité

$$F(x) = \frac{1+x}{1-3x}$$

Interprétation combinatoire??

Merci !