

Polyominos de Klarner

Axel Bacher

LaBRI

26 janvier 2011

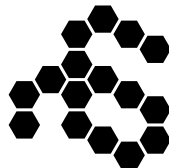
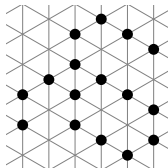
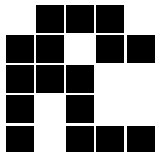
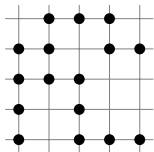
Sommaire

- 1 Introduction
 - Animaux et polyominos
- 2 Réseau hexagonal
 - Polyominos multi-dirigés
 - Polyominos verticalement convexes
 - Vers le réseau carré
- 3 Réseau carré
 - Polyominos de Klarner
 - Polyominos verticalement convexes
- 4 Énumération
 - Mise en équation
 - Polyominos verticalement convexes
 - Polyominos multi-dirigés
 - Polyominos de Klarner
 - Génération aléatoire

Sommaire

- 1 Introduction
 - Animaux et polyominos
- 2 Réseau hexagonal
 - Polyominos multi-dirigés
 - Polyominos verticalement convexes
 - Vers le réseau carré
- 3 Réseau carré
 - Polyominos de Klarner
 - Polyominos verticalement convexes
- 4 Énumération
 - Mise en équation
 - Polyominos verticalement convexes
 - Polyominos multi-dirigés
 - Polyominos de Klarner
 - Génération aléatoire

Animaux et polyominos



- Asymptotique conjecturée :
[Jensen–Guttmann 00]

$$a_n \sim \lambda \mu^n / n,$$

avec

$$3,9 < \mu_{\blacksquare} < 4,65.$$

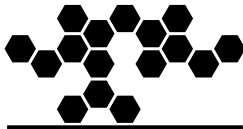
Sommaire

- 1 Introduction
 - Animaux et polyominos
- 2 Réseau hexagonal
 - Polyominos multi-dirigés
 - Polyominos verticalement convexes
 - Vers le réseau carré
- 3 Réseau carré
 - Polyominos de Klarner
 - Polyominos verticalement convexes
- 4 Énumération
 - Mise en équation
 - Polyominos verticalement convexes
 - Polyominos multi-dirigés
 - Polyominos de Klarner
 - Génération aléatoire

Polyominos et empilements connexes d'hexagones



Polyominos et empilements connexes d'hexagones



Polyominos et empilements connexes d'hexagones



- À tout polyomino, on associe un **empilement connexe d'hexagones**.

Polyominos et empilements connexes d'hexagones



- À tout polyomino, on associe un **empilement connexe d'hexagones**.



Polyominos et empilements connexes d'hexagones



- À tout polyomino, on associe un **empilement connexe d'hexagones**.



- Cette projection **n'est pas injective**.

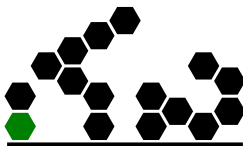
Polyominos multi-dirigés

[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



Polyominos multi-dirigés

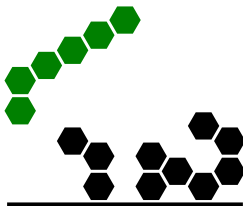
[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



- On construit un polyomino à partir d'un empilement connexe.

Polyominos multi-dirigés

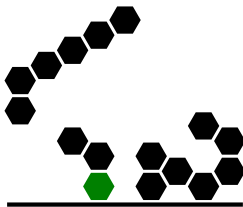
[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



- On construit un polyomino à partir d'un empilement connexe.

Polyominos multi-dirigés

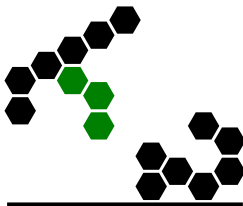
[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



- On construit un polyomino à partir d'un empilement connexe.

Polyominos multi-dirigés

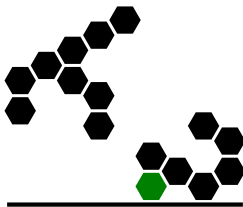
[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



- On construit un polyomino à partir d'un empilement connexe.

Polyominos multi-dirigés

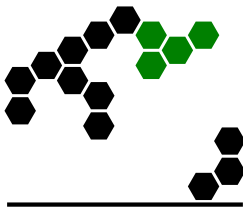
[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



- On construit un polyomino à partir d'un empilement connexe.

Polyominos multi-dirigés

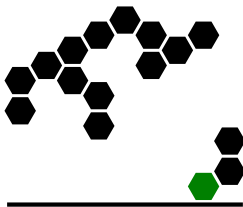
[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



- On construit un polyomino à partir d'un empilement connexe.

Polyominos multi-dirigés

[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



- On construit un polyomino à partir d'un empilement connexe.

Polyominos multi-dirigés

[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



- On construit un polyomino à partir d'un empilement connexe.

Polyominos multi-dirigés

[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



- On construit un polyomino à partir d'un empilement connexe.
- Un tel polyomino est dit **multi-dirigé**.

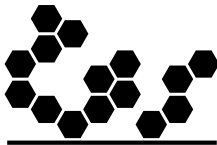
Polyominos multi-dirigés

[Klarner 69, Bousquet-Mélou–Rechnitzer 01]



- On construit un polyomino à partir d'un empilement connexe.
- Un tel polyomino est dit **multi-dirigé**.
- Il y a donc bijection entre polyominos multi-dirigés et empilements connexes.

Empilements connexes et suites de coupes



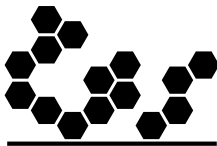
Empilements connexes et suites de coupes



Empilements connexes et suites de coupes

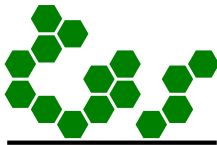


Empilements connexes et suites de coupes



- Les empilements connexes sont en bijection avec les **suites cohérentes de coupes**.

Empilements connexes et suites de coupes

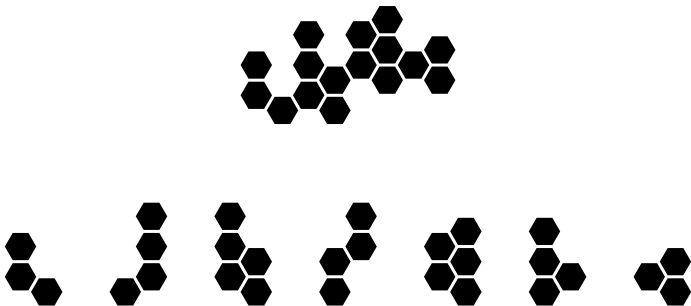


- Les empilements connexes sont en bijection avec les **suites cohérentes de coupes**.
- **On peut retrouver le nombre de pièces** de l'empilement.

Polyominos verticalement convexes

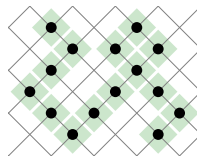
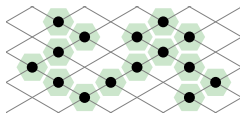



Polyominos verticalement convexes



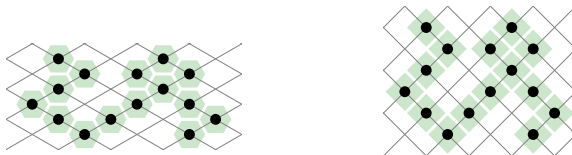
- Un polyomino est **verticalement convexe** ssi ses coupes le sont.

Vers le réseau carré

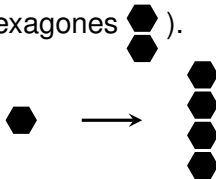


- Les **polyominos multi-dirigés** sur le réseau carré proviennent d'**empilements connexes stricts d'hexagones** (pas de paires d'hexagones ).

Vers le réseau carré



- Les **polyominos multi-dirigés** sur le réseau carré proviennent d'**empilements connexes stricts d'hexagones** (pas de paires d'hexagones ).



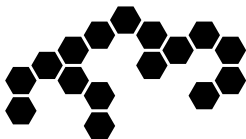
- On passe des empilements stricts aux généraux par une **substitution** $t \mapsto t/(1-t)$.

Asymptotique



[Temperley 56]

Série rationnelle, $a_n \approx 3,86^n$.



[Bousquet-Mélou-Rechnitzer 01]

Série non D-finie, $a_n \approx 4,58^n$.



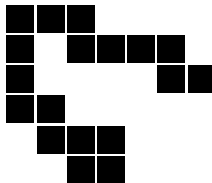
[Bousquet-Mélou-Rechnitzer 01]

Série non D-finie, $a_n \approx 3,58^n$.

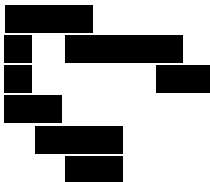
Sommaire

- 1 Introduction
 - Animaux et polyominos
- 2 Réseau hexagonal
 - Polyominos multi-dirigés
 - Polyominos verticalement convexes
 - Vers le réseau carré
- 3 Réseau carré
 - Polyominos de Klarner
 - Polyominos verticalement convexes
- 4 Énumération
 - Mise en équation
 - Polyominos verticalement convexes
 - Polyominos multi-dirigés
 - Polyominos de Klarner
 - Génération aléatoire

Polyominos et empilements connexes de segments



Polyominos et empilements connexes de segments



Polyominos et empilements connexes de segments

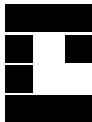
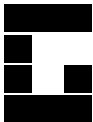


- À tout polyomino correspond un **empilement connexe de segments**.

Polyominos et empilements connexes de segments



- À tout polyomino correspond un **empilement connexe de segments**.



Polyominos et empilements connexes de segments



- À tout polyomino correspond un **empilement connexe de segments**.



- Cette projection n'est **ni injective**,

Polyominos et empilements connexes de segments



- À tout polyomino correspond un **empilement connexe de segments**.



- Cette projection n'est **ni injective, ni surjective**.

Polyominos de Klarner

[Klarner 69]



- Un **empilement de Klarner** est un empilement connexe où deux segments **ne peuvent se jouxter**.

Polyominos de Klarner

[Klarner 69]



- Un **empilement de Klarner** est un empilement connexe où deux segments **ne peuvent se jouxter**.



Polyominos de Klarner

[Klarner 69]



- Un **empilement de Klarner** est un empilement connexe où deux segments **ne peuvent se jouxter**.

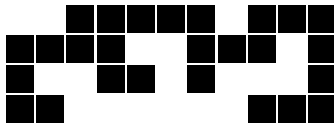


Polyominos de Klarner

[Klarner 69]



- Un **empilement de Klarner** est un empilement connexe où deux segments **ne peuvent se jouxter**.



- Les empilements de Klarner sont en bijection avec les **polyominos de Klarner**.

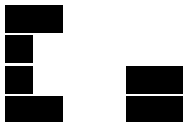
Polyominos de Klarner et suites de coupes



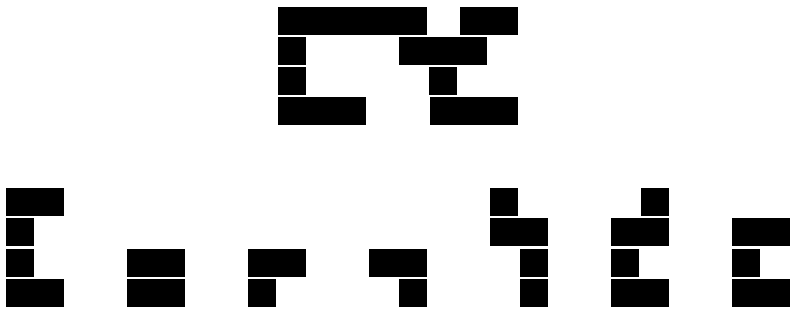
Polyominos de Klarner et suites de coupes



Polyominos de Klarner et suites de coupes



Polyominos de Klarner et suites de coupes



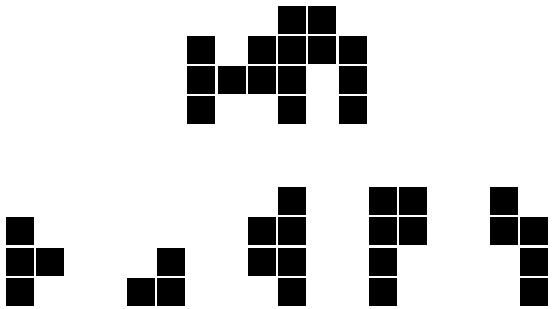
- Les empilements de Klarner sont en bijection avec les **suites cohérentes de coupes**.

Polyominos de Klarner et suites de coupes



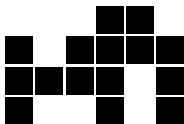
- Les empilements de Klarner sont en bijection avec les **suites cohérentes de coupes**.
- Chaque coupe est un **polyomino quelconque** sur deux colonnes.

Polyominos verticalement convexes



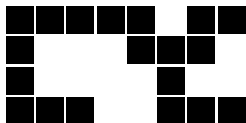
- Un polyomino est **verticalement convexe** ssi ses coupes le sont.

Asymptotique



[Temperley 56]

Série rationnelle, $a_n \approx 3,20^n$.



[Klarner 69]

Série **non connue**,

on s'attend à $a_n \approx 3,72^n$.

Sommaire

- 1 Introduction
 - Animaux et polyominos
- 2 Réseau hexagonal
 - Polyominos multi-dirigés
 - Polyominos verticalement convexes
 - Vers le réseau carré
- 3 Réseau carré
 - Polyominos de Klarner
 - Polyominos verticalement convexes
- 4 **Énumération**
 - Mise en équation
 - Polyominos verticalement convexes
 - Polyominos multi-dirigés
 - Polyominos de Klarner
 - Génération aléatoire

Mise en équation



- On note :
 - $A_{n,j}$ le nombre de polyominos d'aire n avec j cellules dans la dernière colonne.
 - $C_{i,j}$ le nombre de coupes avec i et j cellules.
- On a :

$$A_{n,j} = \begin{cases} 1, & n = j; \\ \sum_{i=1}^{n-j} A_{n-j,i} C_{i,j}, & n > j. \end{cases}$$

Séries génératrices

$$A_{n,j} = \begin{cases} 1, & n = j; \\ \sum_{i=1}^{n-j} A_{n-j,i} C_{i,j}, & n > j. \end{cases}$$

- On note :

- $A(t, u) = \sum_j A_j(t) u^j = \sum_{n,j} A_{n,j} t^n u^j;$
- $C_i(u) = \sum_j C_{i,j} u^j.$

- Alors on a :

$$A(t, u) = \frac{tu}{1 - tu} + \sum_{i \geq 1} A_i(t) C_i(tu).$$

Nombre de coupes dans les différents modèles



$$C_{i,j} = i + j.$$



$$C_{i,j} = i + j - 1.$$



$$C_{i,j} = \binom{i+j}{i}.$$



$$\sum_{i,j} C_{i,j} v^i u^j = \frac{1 - uv}{1 - u - v + u^2 v^2}.$$

Polyominos verticalement convexes

$$A(u) \equiv A(t, u) = \frac{tu}{1 - tu} + \sum_{i \geq 1} A_i(t) C_i(tu);$$

Polyominos verticalement convexes

$$A(u) \equiv A(t, u) = \frac{tu}{1 - tu} + \sum_{i \geq 1} A_i(t) C_i(tu);$$

- On a :

$$C_i(u) = \sum_{j \geq 1} (i + j) u^j = \frac{i u}{1 - u} + \frac{u}{(1 - u)^2}.$$

Polyominos verticalement convexes

$$A(u) \equiv A(t, u) = \frac{tu}{1-tu} + \sum_{i \geq 1} A_i(t) C_i(tu);$$

- On a :

$$C_i(u) = \sum_{j \geq 1} (i+j)u^j = \frac{i}{1-u} + \frac{u}{(1-u)^2}.$$

- On en tire :

$$A(u) = \frac{tu}{1-tu} + \frac{tu}{1-tu} A'(1) + \frac{tu}{(1-tu)^2} A(1).$$

Polyominos verticalement convexes (suite)

$$A(u) = \frac{tu}{1-tu} + \frac{tu}{1-tu} A'(1) + \frac{tu}{(1-tu)^2} A(1).$$

Polyominos verticalement convexes (suite)

$$A(u) = \frac{tu}{1-tu} + \frac{tu}{1-tu}A'(1) + \frac{tu}{(1-tu)^2}A(1).$$

- On calcule :

$$A(1) = \frac{t}{1-t} + \frac{t}{1-t}A'(1) + \frac{t}{(1-t)^2}A(1);$$

$$A'(1) = \frac{t}{(1-t)^2} + \frac{t}{(1-t)^2}A'(1) + \frac{t+t^2}{(1-t)^3}A(1).$$

Polyominos verticalement convexes (fin)

Proposition [Temperley 56]

Les séries génératrices des polyominos verticalement convexes sur les deux réseaux sont :

$$V_{\bullet}(t) = \frac{t(1-t)^3}{1-6t+10t^2-7t^3+t^4};$$

$$V_{\blacksquare}(t) = \frac{t(1-t)^3}{1-5t+7t^2-4t^3}.$$

Polyominos multi-dirigés

$$A(u) \equiv A(t, u) = \frac{tu}{1 - tu} + \sum_{i \geq 1} A_i(t) C_i(tu);$$

Polyominos multi-dirigés

$$A(u) \equiv A(t, u) = \frac{tu}{1 - tu} + \sum_{i \geq 1} A_i(t) C_i(tu);$$

- On a :

$$C_i(u) = \sum_{j \geq 1} \binom{i+j}{i} u^j = \frac{1}{(1-u)^{i+1}} - 1.$$

Polyominos multi-dirigés

$$A(u) \equiv A(t, u) = \frac{tu}{1 - tu} + \sum_{i \geq 1} A_i(t) C_i(tu);$$

- On a :

$$C_i(u) = \sum_{j \geq 1} \binom{i+j}{i} u^j = \frac{1}{(1-u)^{i+1}} - 1.$$

- On en tire :

$$A(u) = \frac{tu}{1 - tu} + \frac{1}{1 - tu} A\left(\frac{1}{1 - tu}\right) - A(1).$$

Polyominos multi-dirigés (suite)

$$A(u) = \frac{tu}{1-tu} + \frac{1}{1-tu} A\left(\frac{1}{1-tu}\right) - A(1).$$

Polyominos multi-dirigés (suite)

$$A(u) = \frac{tu}{1-tu} + \frac{1}{1-tu} A\left(\frac{1}{1-tu}\right) - A(1).$$

Théorème [Bousquet-Mélou Rechnitzer 01]

La série des polyominos multi-dirigés sur le réseau hexagonal vaut :

$$M_{\bullet}(t) = \frac{q}{(1-q) \left(1 - \sum_{n \geq 1} \frac{q^{n+1}(1+q)^{n+1}}{1-q^n}\right)},$$

avec

$$q = \frac{1 - 2t - \sqrt{1 - 4t}}{2t}.$$

Polyominos de Klarner

$$A(u) \equiv A(t, u) = \frac{tu}{1 - tu} + \sum_{i \geq 1} A_i(t) C_i(tu);$$

Polyominos de Klarner

$$A(u) \equiv A(t, u) = \frac{tu}{1 - tu} + \sum_{i \geq 1} A_i(t) C_i(tu);$$

- La série $C_i(u)$ est de la forme :

$$C_i(u) = \lambda(u)\alpha(u)^i + \mu(u)\beta(u)^i - 1,$$

avec :

$$\frac{1 - uv}{1 - u - v + u^2v^2} = \frac{\lambda(u)}{1 - \alpha(u)v} + \frac{\mu(u)}{1 - \beta(u)v}.$$

Polyominos de Klarner

$$A(u) \equiv A(t, u) = \frac{tu}{1-tu} + \sum_{i \geq 1} A_i(t) C_i(tu);$$

- La série $C_i(u)$ est de la forme :

$$C_i(u) = \lambda(u)\alpha(u)^i + \mu(u)\beta(u)^i - 1,$$

avec :

$$\frac{1-uv}{1-u-v+u^2v^2} = \frac{\lambda(u)}{1-\alpha(u)v} + \frac{\mu(u)}{1-\beta(u)v}.$$

- On a donc :

$$A(u) = \frac{tu}{1-tu} + \lambda(tu)A(\alpha(tu)) + \mu(tu)A(\beta(tu)) - A(1).$$

Polyominos de Klarner (suite)

$$A(u) = \frac{tu}{1-tu} + \lambda(tu)A(\alpha(tu)) + \mu(tu)A(\beta(tu)) - A(1).$$

Polyominos de Klarner (suite)

$$A(u) = \frac{tu}{1-tu} + \lambda(tu)A(\alpha(tu)) + \mu(tu)A(\beta(tu)) - A(1).$$

- Pas de solution pour l'instant (travail en cours).

Polyominos de Klarner (suite)

$$A(u) = \frac{tu}{1-tu} + \lambda(tu)A(\alpha(tu)) + \mu(tu)A(\beta(tu)) - A(1).$$

- Pas de solution pour l'instant (travail en cours).
- **Calcul de coefficients** pour $n \leq 1000$. On observe :

$$a_n \approx 2,72^n.$$

Polyominos de Klarner (suite)

$$A(u) = \frac{tu}{1-tu} + \lambda(tu)A(\alpha(tu)) + \mu(tu)A(\beta(tu)) - A(1).$$

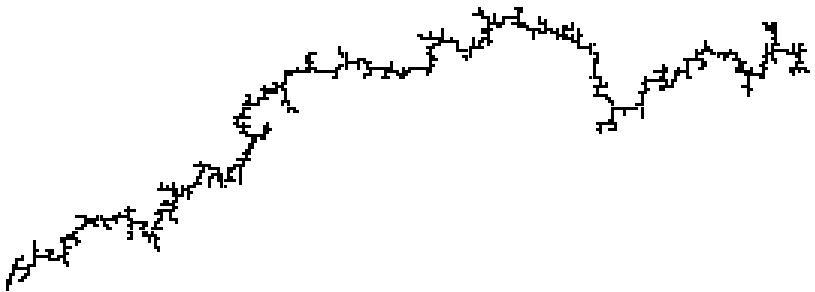
- Pas de solution pour l'instant (travail en cours).
- **Calcul de coefficients** pour $n \leq 1000$. On observe :

$$a_n \approx 2,72^n.$$

- Rayon de convergence en t de $A(u)$. On prouve l'existence de deux comportements :
 - pour $u < u_c$, $\rho(u) = \rho_0$ (**palier**) ;
 - pour $u > u_c$, $\rho(u) = u^2\beta(1/u)$.

Génération aléatoire

- Polyomino de Klarner d'aire 1000 uniforme, obtenu par une méthode récursive :



- Polyomino verticalement convexe d'aire 500 uniforme :

