

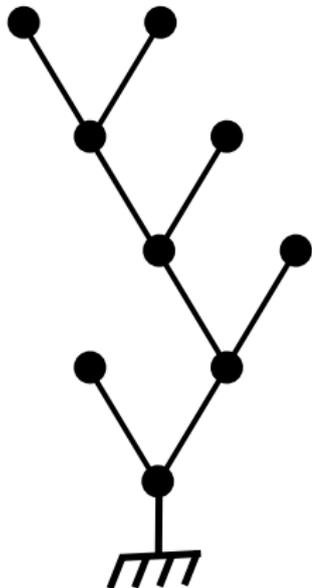
# *Croissance de cartes planaires par une approche bijective*

Jérémie BETTINELLI



14 février 2012

## Arbres plans binaires



$\mathcal{A}_n$  : ensemble des arbres plans binaires enracinés à

- ◆  $n$  nœuds,
- ◆  $n + 1$  feuilles,
- ◆  $2n + 1$  arêtes (en comptant la racine).

$$|\mathcal{A}_n| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

## Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

$$2 (2n + 1) |\mathcal{A}_n| = (n + 2) |\mathcal{A}_{n+1}|$$

# Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

$$2 \underbrace{(2n+1)}_{\text{arête}} |\mathcal{A}_n| = (n+2) |\mathcal{A}_{n+1}|$$

## Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

$$2 \underbrace{(2n+1)}_{\text{arête}} |\mathcal{A}_n| = \underbrace{(n+2)}_{\text{feuille}} |\mathcal{A}_{n+1}|$$

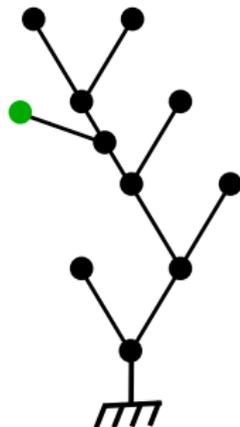
## Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

$$\underbrace{2}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+1)}_{\text{arête}} |\mathcal{A}_n| = \underbrace{(n+2)}_{\text{feuille}} |\mathcal{A}_{n+1}|$$



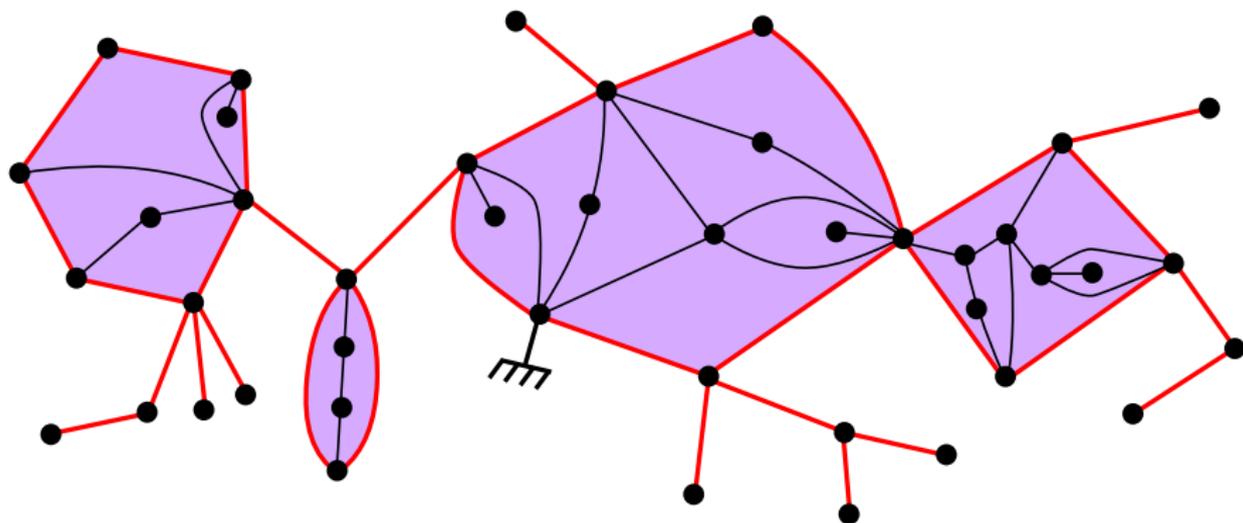
## Ajout d'une arête : algorithme de Rémy

$$\underbrace{2}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+1)}_{\text{arête}} |\mathcal{A}_n| = \underbrace{(n+2)}_{\text{feuille}} |\mathcal{A}_{n+1}|$$



- ◆ On part d'un arbre binaire avec une arête marquée et une marque gauche ou droite
- ◆ On ajoute à gauche ou à droite de l'arête une nouvelle arête et on marque la feuille à l'extrémité

## Quadrangulations à bord



**Quadrangulation à bord** : carte planaire dont toutes les faces sauf la face contenant la racine sont de degré 4.

# Caractéristiques

Soit  $Q_{n,p}$  l'ensemble des quadrangulations à bord ayant

- ◆  $n$  faces internes,
- ◆  $2p$  demi-arêtes sur le bord,

et donc, par la relation d'Euler,

- ◆  $n + p + 1$  sommets,
- ◆  $2n + p$  arêtes.

## Identités combinatoires

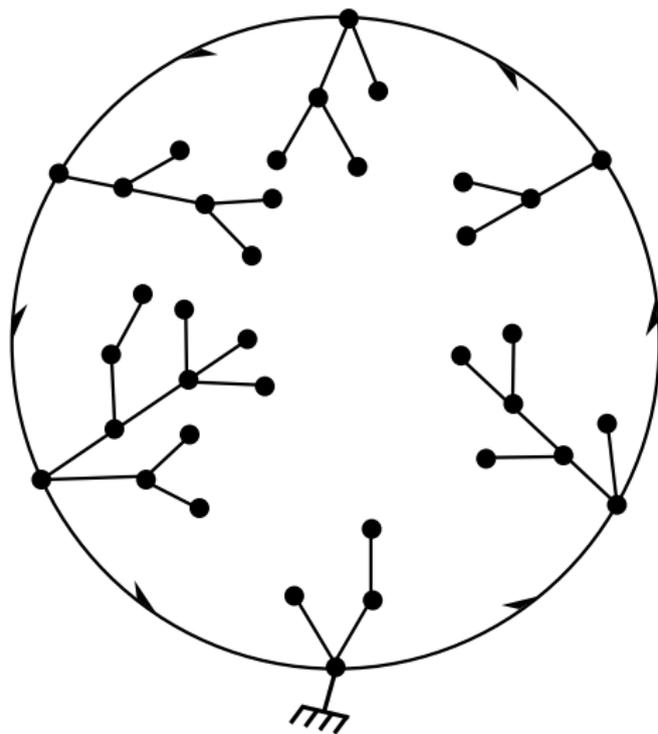
On peut montrer de diverses façons que

$$|Q_{n,p}| = \frac{3^n (2p)! (2n+p-1)!}{p! (p-1)! (n+p+1)!}$$

On en déduit les identités suivantes :

- ◆  $(2p+1)(2p+2)(2n+p) |Q_{n,p}| = p(p+1)(n+p+2) |Q_{n,p+1}|$
- ◆  $3(2n+p)(2n+p+1) |Q_{n,p}| = (n+1)(n+p+2) |Q_{n+1,p}|$

# Échauffement : forêts



$\mathcal{F}_{n,p}$  : ensemble des forêts à

- ◆  $n$  arêtes,
- ◆  $p$  arbres,
- ◆  $n + p$  sommets,
- ◆  $2n + p$  coins.

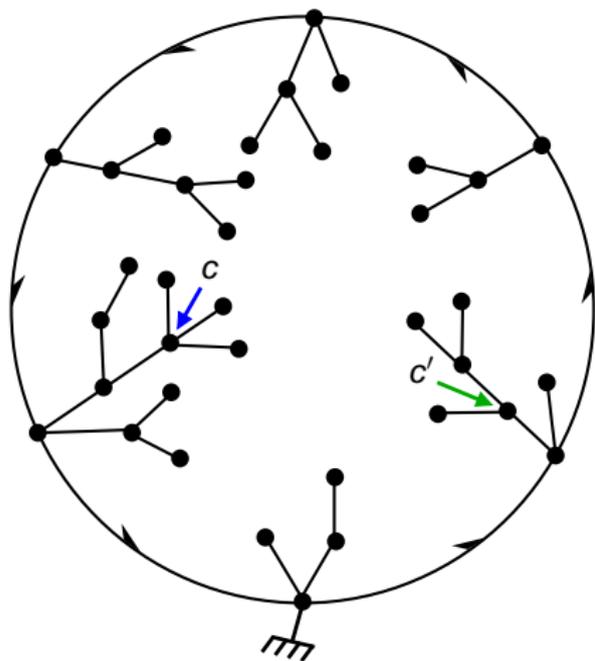
$$|\mathcal{F}_{n,p}| = \frac{p}{2n+p} \binom{2n+p}{n}$$

## Ajout d'une arête

$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}} |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}} \underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}} |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$

## Ajout d'une arête

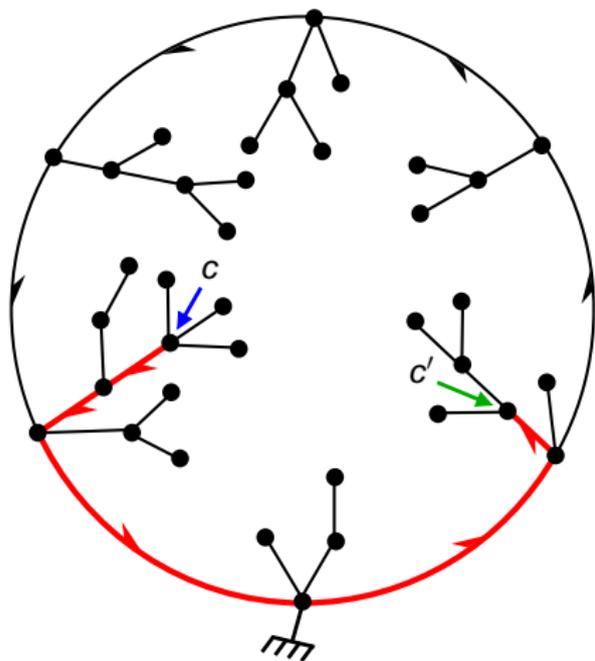
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}} |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}} \underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}} |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- ✧ On part d'une forêt avec deux coins marqués  $c$  et  $c'$

## Ajout d'une arête

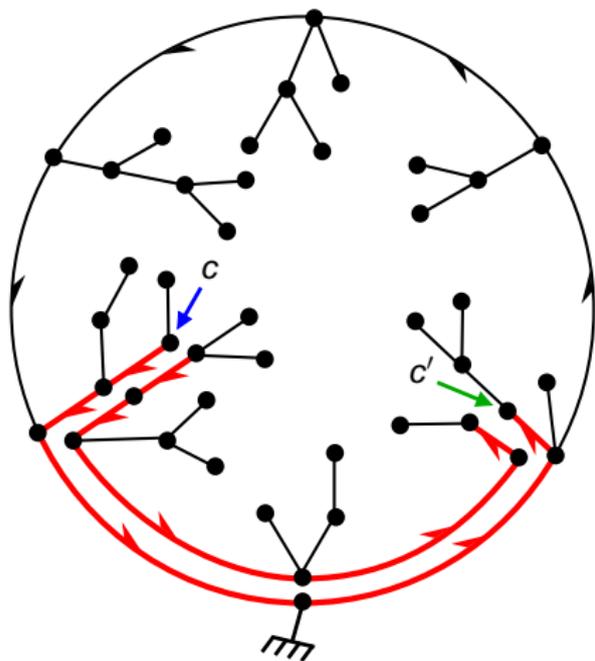
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}} |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}} \underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}} |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- ◆ On part d'une forêt avec deux coins marqués  $c$  et  $c'$
- ◆ On considère l'unique chemin auto-évitant de  $c$  à  $c'$

## Ajout d'une arête

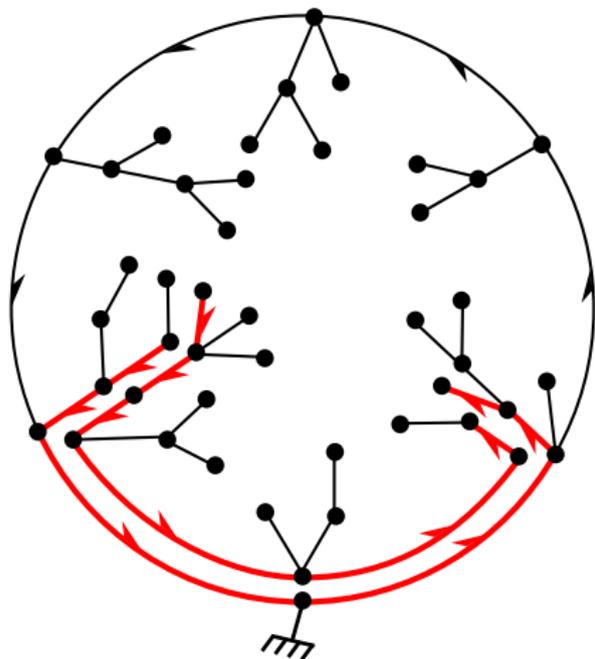
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}} |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}} \underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}} |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- ◇ On part d'une forêt avec deux coins marqués  $c$  et  $c'$
- ◇ On considère l'unique chemin auto-évitant de  $c$  à  $c'$
- ◇ On « coupe » le long de ce chemin entre les coins  $c$  et  $c'$

## Ajout d'une arête

$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}} |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}} \underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}} |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- ✧ On ajoute une demi-arête « à gauche » à la place de  $c$  et une demi-arête « à droite » à la place de  $c'$

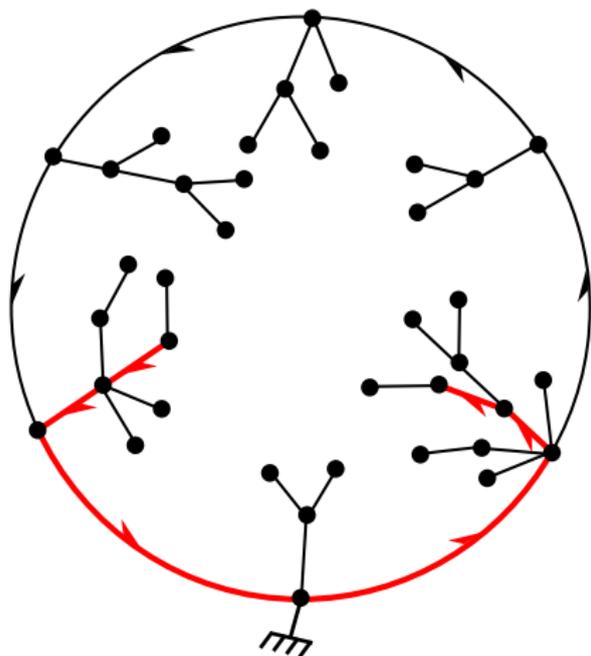
## Ajout d'une arête

$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}} |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}} \underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}} |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$

- ✧ On ajoute une demi-arête « à gauche » à la place de  $c$  et une demi-arête « à droite » à la place de  $c'$
- ✧ On décale

## Ajout d'une arête

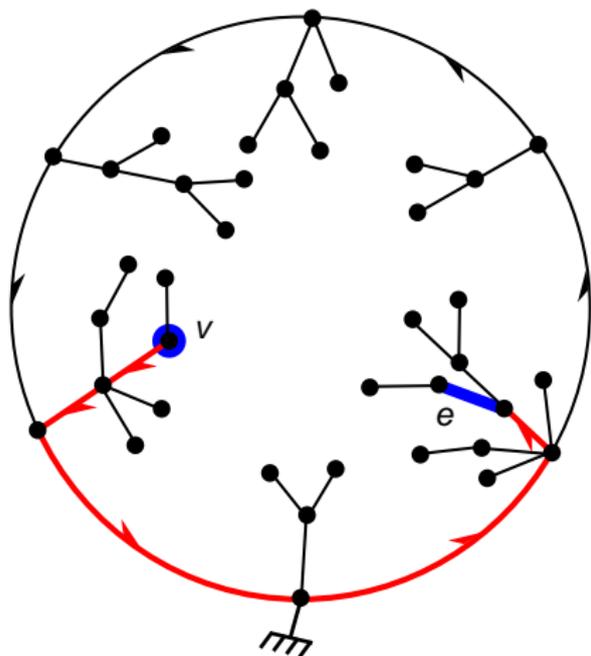
$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}} |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}} \underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}} |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



- ✧ On ajoute une demi-arête « à gauche » à la place de  $c$  et une demi-arête « à droite » à la place de  $c'$
- ✧ On décale
- ✧ On recolle

## Ajout d'une arête

$$\underbrace{(2n+p)}_{\text{coin}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre coin}} |\mathcal{F}_{n,p}| = \underbrace{(n+1)}_{\text{arête}} \underbrace{(n+p+1)}_{\text{sommet}} |\mathcal{F}_{n+1,p}|$$



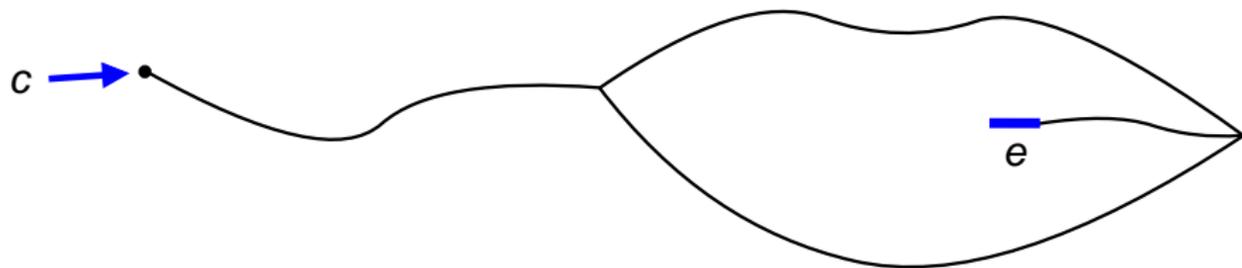
- ✧ On ajoute une demi-arête « à gauche » à la place de  $c$  et une demi-arête « à droite » à la place de  $c'$
- ✧ On décale
- ✧ On recolle
- ✧ On distingue un sommet  $v$  et une arête  $e$

## Géodésique la plus à gauche/droite

En général, il y a plusieurs chemins entre deux éléments ; on utilise les géodésiques les plus à gauche ou les plus à droite.

## Géodésique la plus à gauche/droite

En général, il y a plusieurs chemins entre deux éléments ; on utilise les géodésiques les plus à gauche ou les plus à droite.



*La géodésique la plus à gauche de  $c$  à  $e$  n'est pas toujours l'inverse de la géodésique la plus à droite de  $e$  à  $c$ .*

## Géodésique la plus à gauche/droite

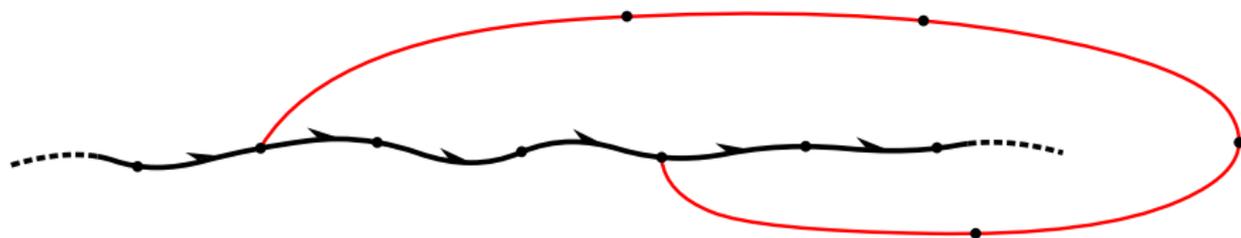
En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.

géodésique la plus à gauche



## Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.



## Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.

## Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.

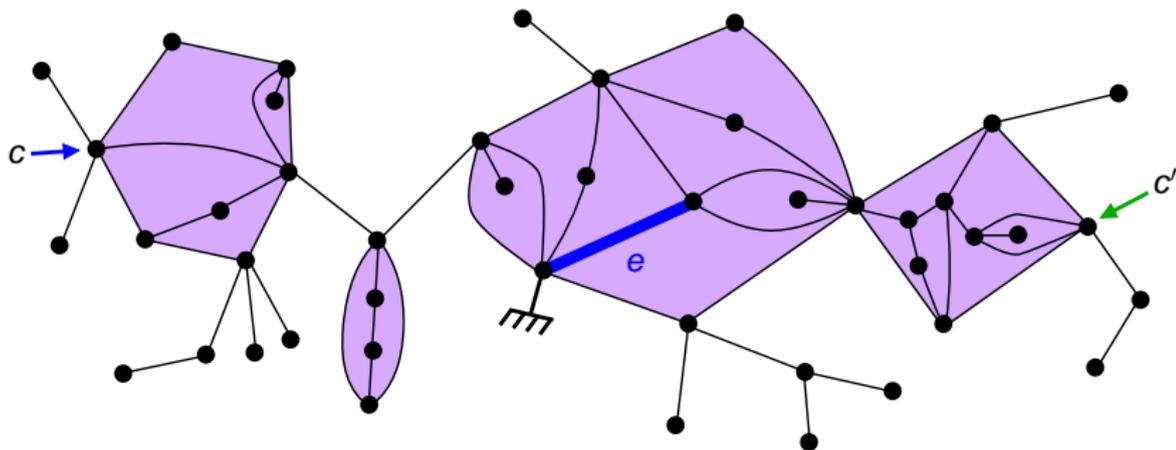
## Géodésique la plus à gauche/droite

En revanche, après une « opération de glissement », une géodésique la plus à gauche devient généralement l'inverse d'une géodésique la plus à droite, et vice versa.

## Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}} \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} |Q_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\star} \underbrace{p}_{\text{autre } \star} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n,p+1}|$$

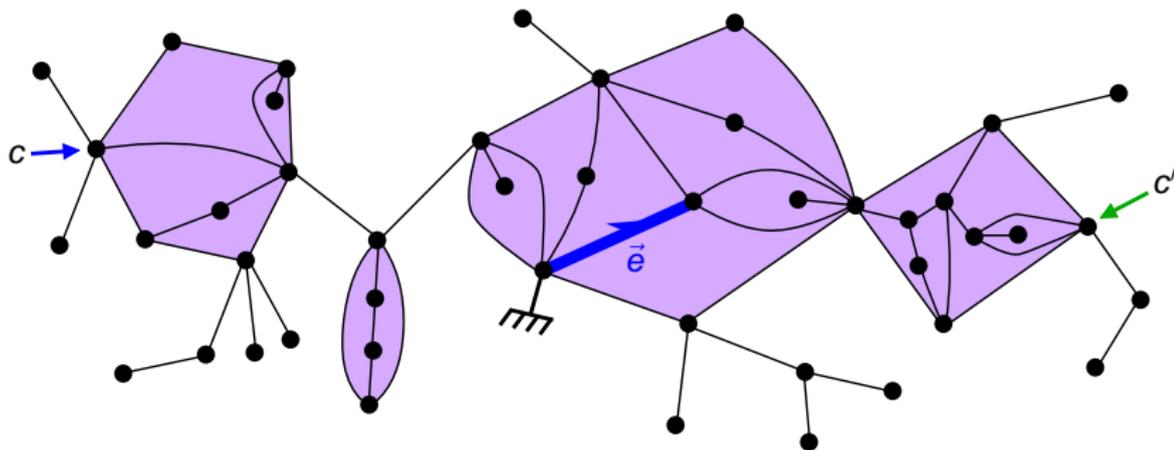
[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]



## Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}} \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} |Q_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\star} \underbrace{p}_{\text{autre } \star} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]

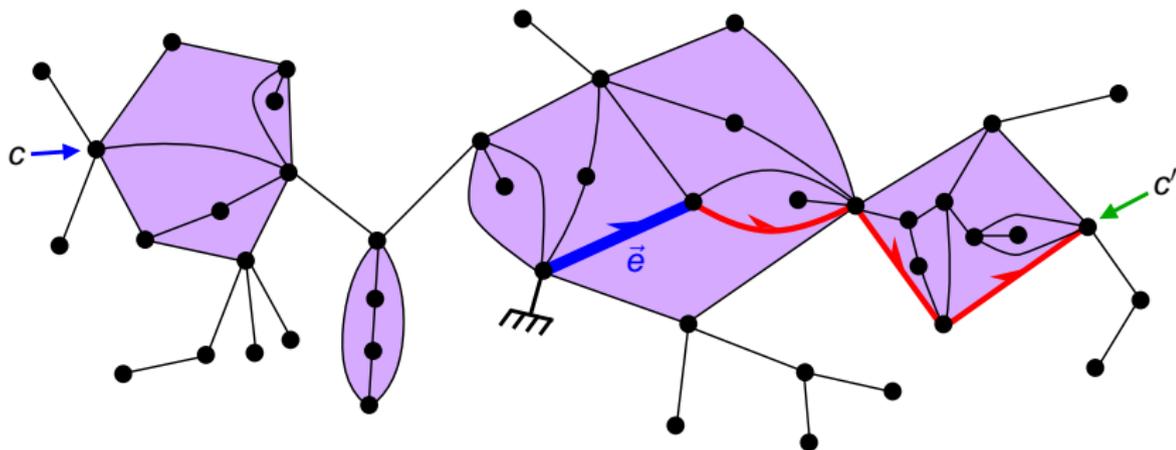


◆ On oriente  $e$  vers  $c'$

## Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}} \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} |Q_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\star} \underbrace{p}_{\text{autre } \star} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]

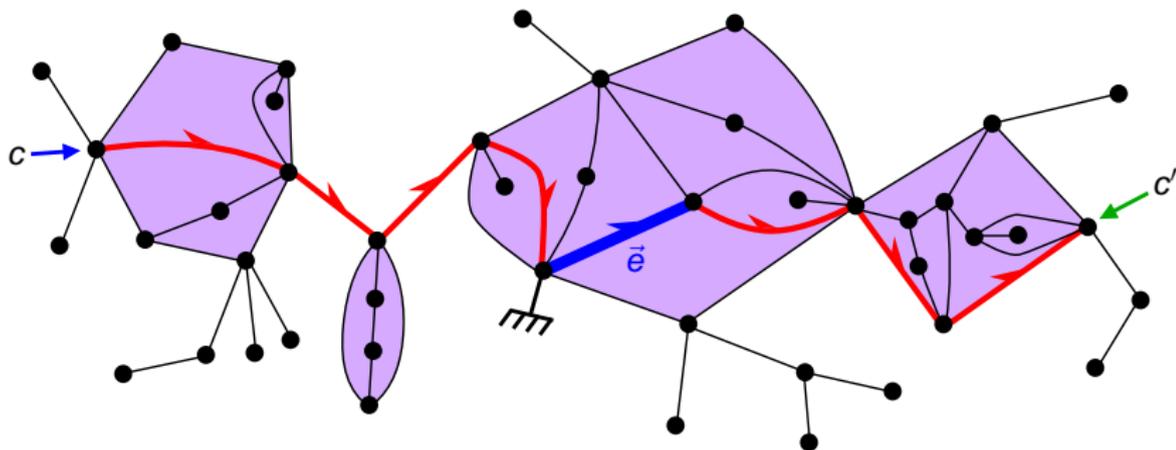


✧ On considère la géodésique la plus à droite de  $\vec{e}$  vers  $c'$

## Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}} \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} |Q_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\star} \underbrace{p}_{\text{autre } \star} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]



✧ On fait « de même » avec  $c$  au lieu de  $c'$

## Ajout de deux demi-arêtes

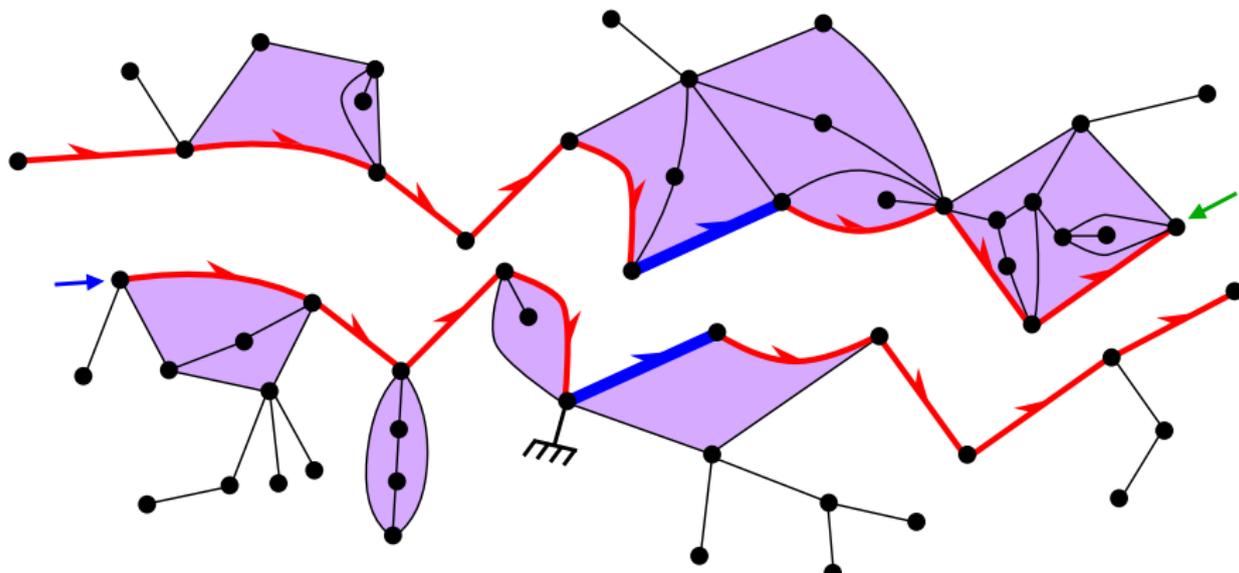
$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}} \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} |Q_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\star} \underbrace{p}_{\text{autre } \star} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]

## Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}} \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} |Q_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\star} \underbrace{p}_{\text{autre } \star} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]



## Ajout de deux demi-arêtes

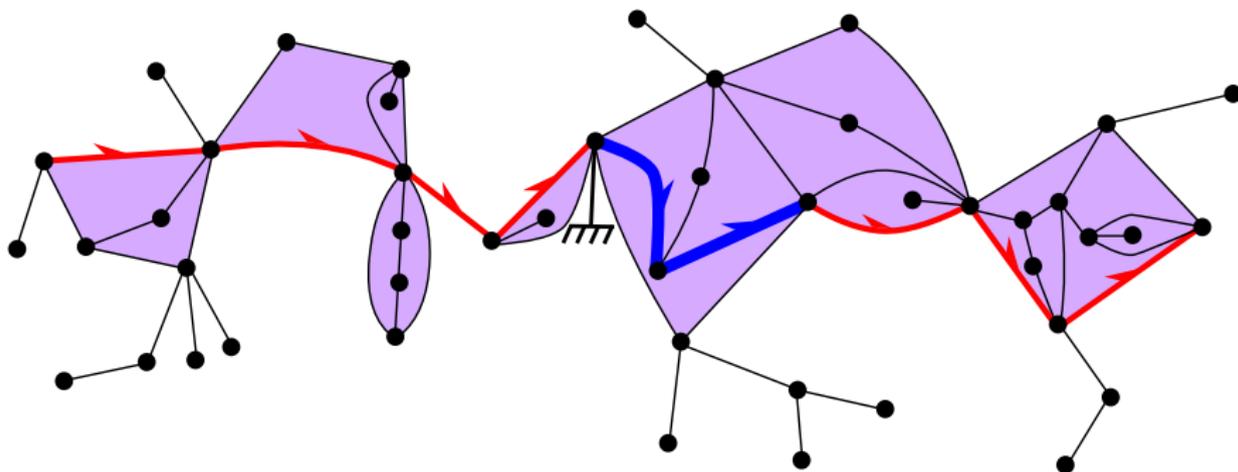
$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}} \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} |Q_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\star} \underbrace{p}_{\text{autre } \star} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]

## Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}} \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} |Q_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\star} \underbrace{p}_{\text{autre } \star} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n,p+1}|$$

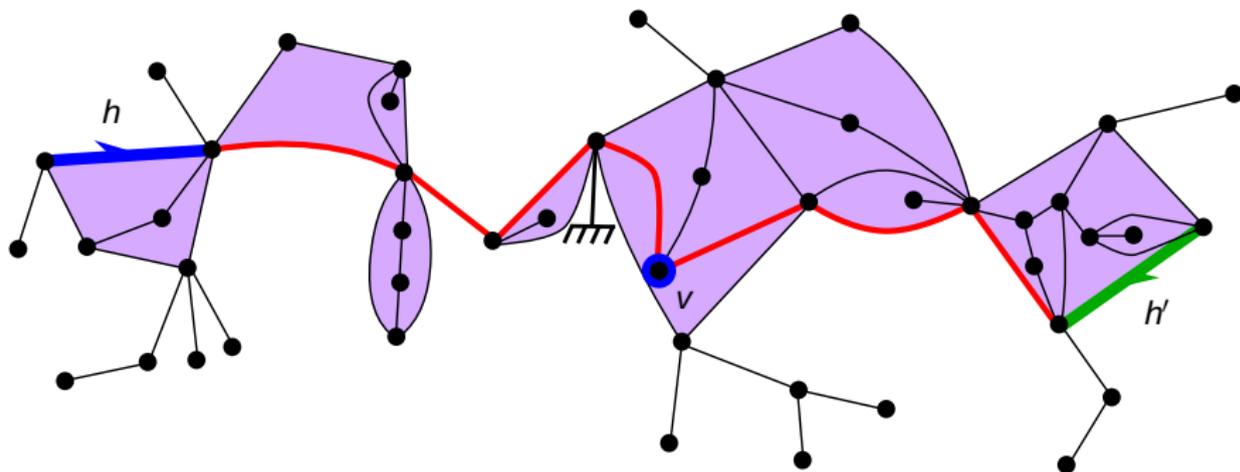
[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]



# Ajout de deux demi-arêtes

$$\underbrace{(2p+1)}_{\text{coin ext.}} \underbrace{(2p+2)}_{\text{autre coin ext.}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} |Q_{n,p}| = \underbrace{(p+1)}_{\star} \underbrace{p}_{\text{autre } \star} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n,p+1}|$$

[★ : demi-arête du bord dirigée vers le sommet]

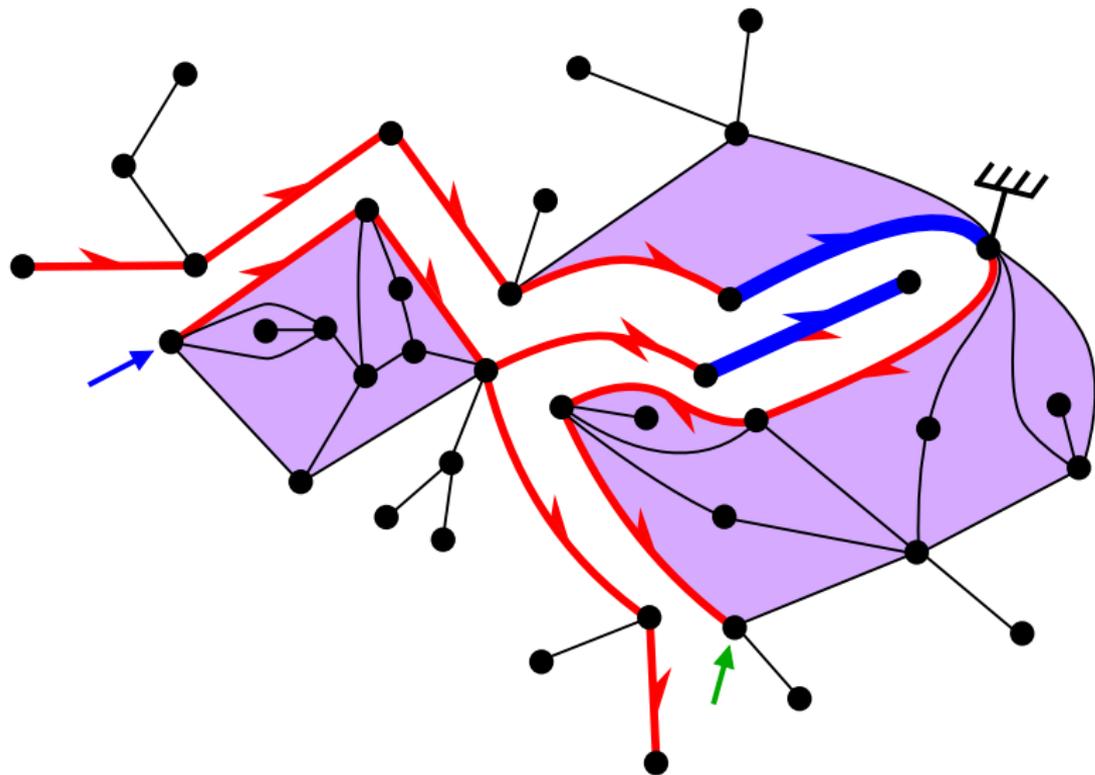


✧ On marque un sommet  $v$  et deux demi-arêtes  $h$  et  $h'$



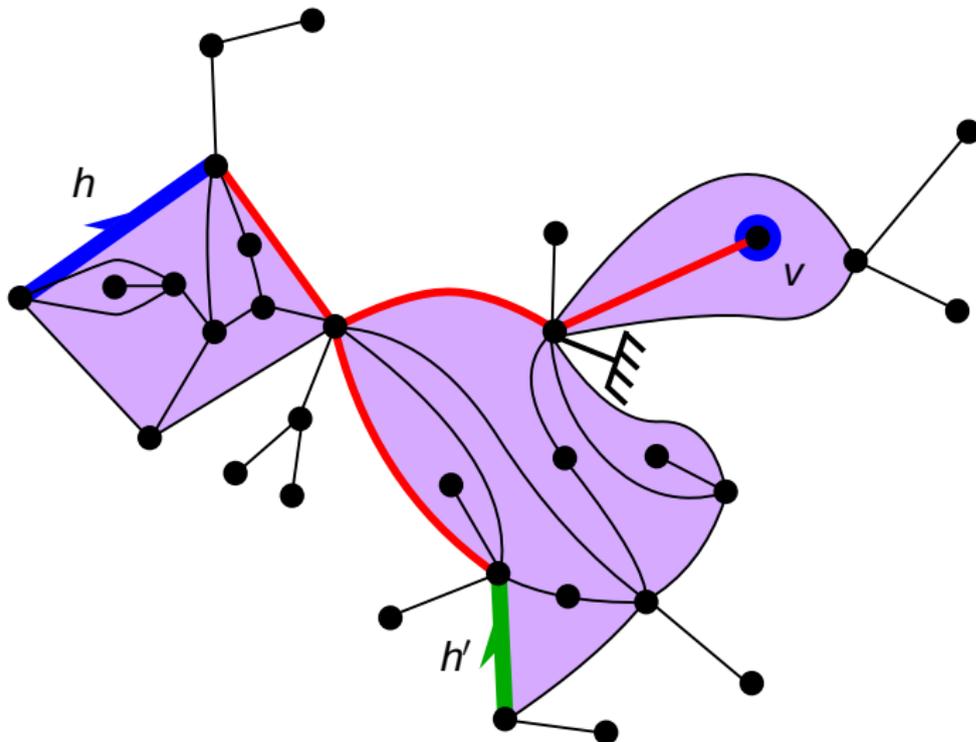
# Ajout de deux demi-arêtes : cas « pincé »

## Ajout de deux demi-arêtes : cas « pincé »



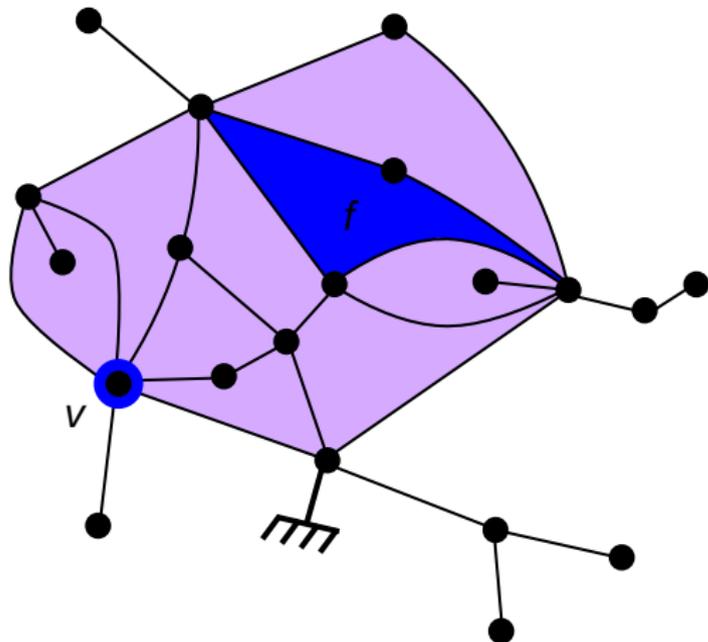
# Ajout de deux demi-arêtes : cas « pincé »

# Ajout de deux demi-arêtes : cas « pincé »



## Suppression d'une face : cas confluent

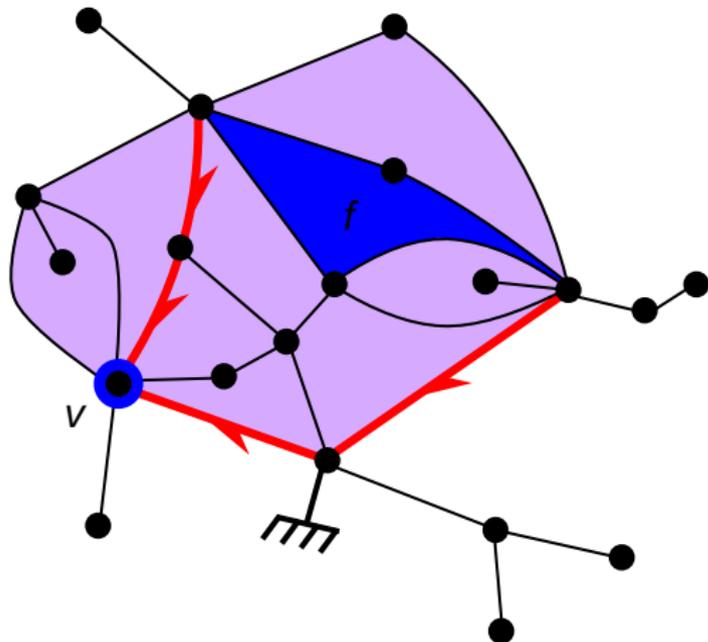
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- ✧ On part d'une quadrangulation avec un sommet  $v$  et une face  $f$  confluent

## Suppression d'une face : cas confluent

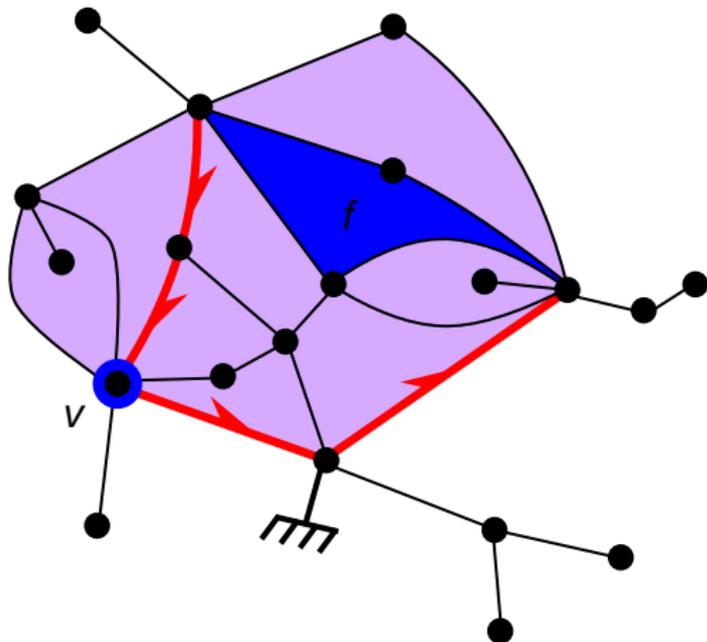
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |Q_{n,p}|$$



- ✦ On part d'une quadrangulation avec un sommet  $v$  et une face  $f$  confluent
- ✦ On considère les géodésiques les plus à gauche de  $f$  à  $v$

## Suppression d'une face : cas confluent

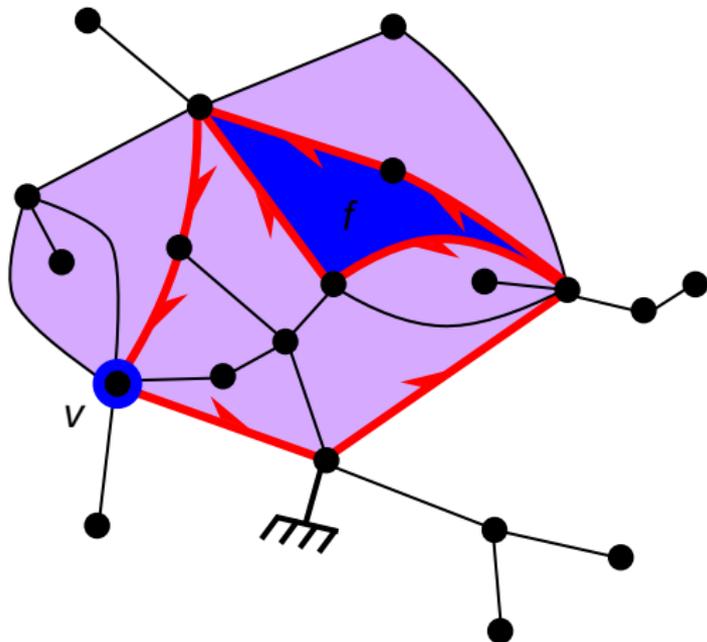
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |Q_{n,p}|$$



- ✦ On part d'une quadrangulation avec un sommet  $v$  et une face  $f$  confluent
- ✦ On considère les géodésiques les plus à gauche de  $f$  à  $v$
- ✦ On en inverse une

## Suppression d'une face : cas confluent

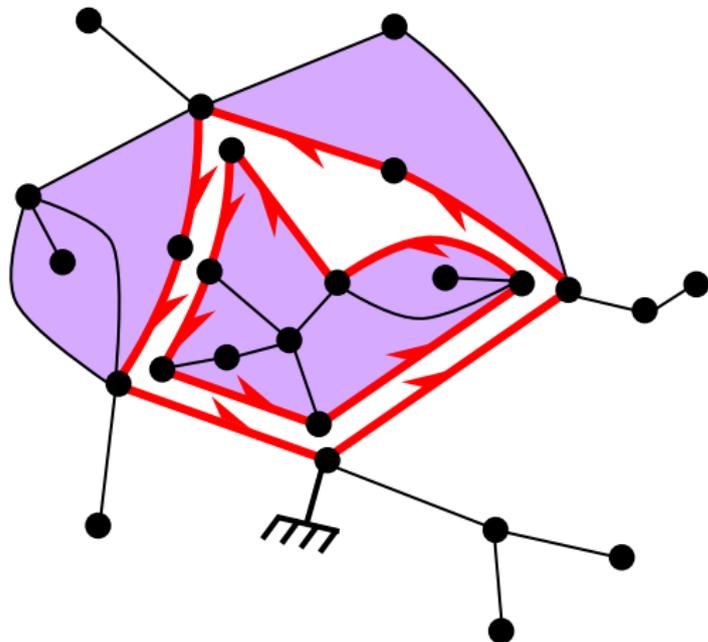
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |Q_{n,p}|$$



- ◆ On part d'une quadrangulation avec un sommet  $v$  et une face  $f$  confluent
- ◆ On considère les géodésiques les plus à gauche de  $f$  à  $v$
- ◆ On en inverse une
- ◆ On crée ainsi deux boucles

# Suppression d'une face : cas confluent

$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |\mathcal{Q}_{n,p}|$$



◆ On coupe

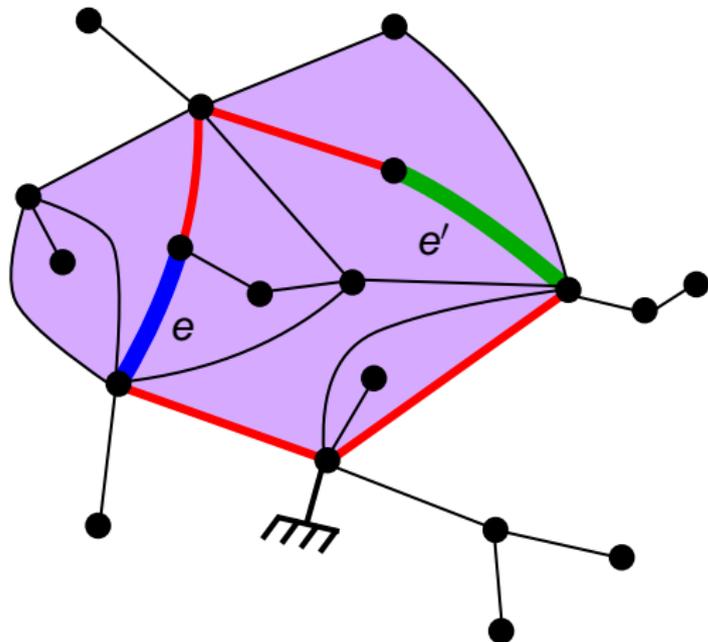
## Suppression d'une face : cas confluent

$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |Q_{n,p}|$$

- ✧ On coupe
- ✧ On décale d'un cran et on recolle

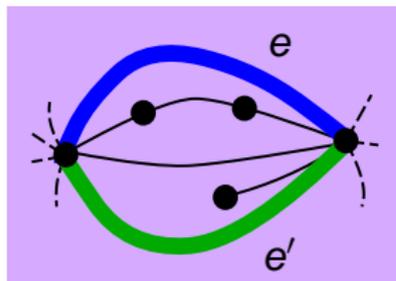
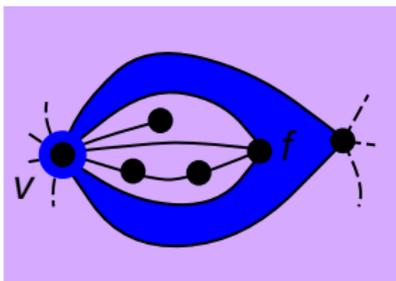
## Suppression d'une face : cas confluent

$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |Q_{n,p}|$$

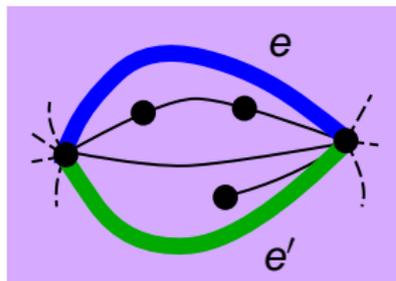
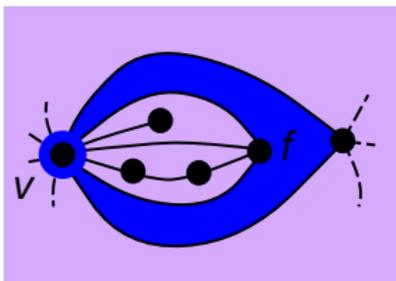


- ✦ On coupe
- ✦ On décale d'un cran et on recolle
- ✦ On distingue deux arêtes  $e$  et  $e'$  et on donne à la marque la valeur  $c$

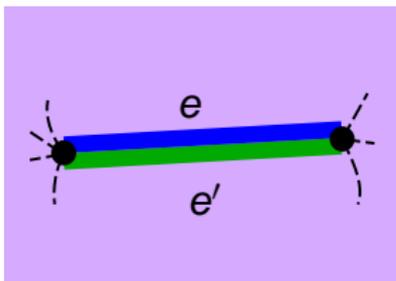
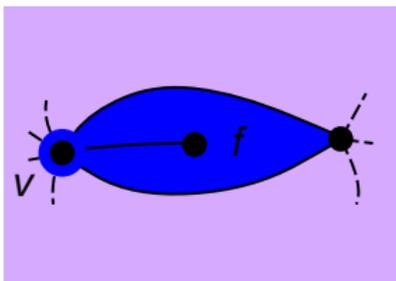
# Cas où la frontière de $f$ n'est pas simple



## Cas où la frontière de $f$ n'est pas simple

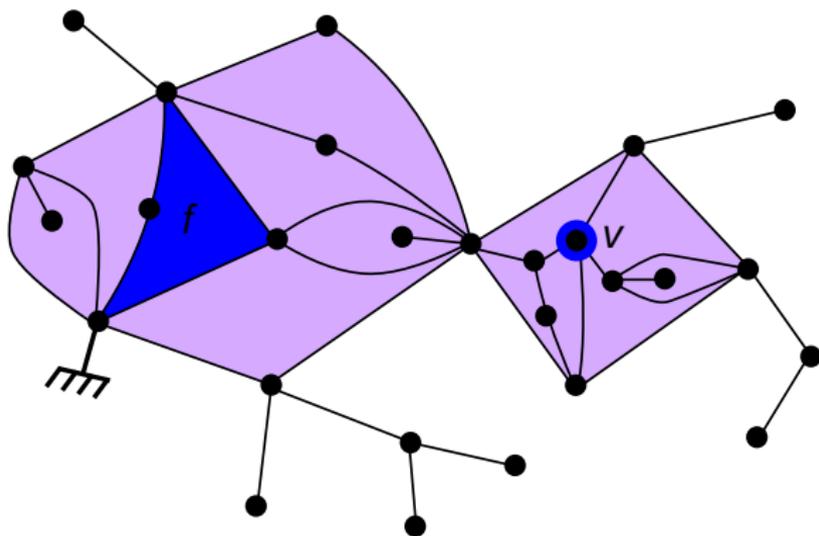


Dans le cas où  $f$  est « plate »,  $e$  et  $e'$  désignent la même arête :



# Suppression d'une face : cas simple

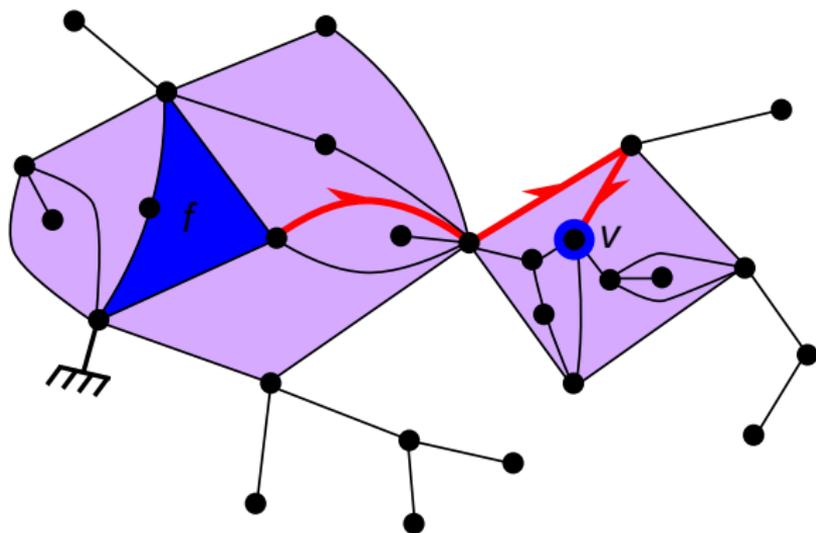
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |Q_{n,p}|$$



- ✧ On part d'une quadrangulation avec un sommet  $v$  et une face  $f$  simple

# Suppression d'une face : cas simple

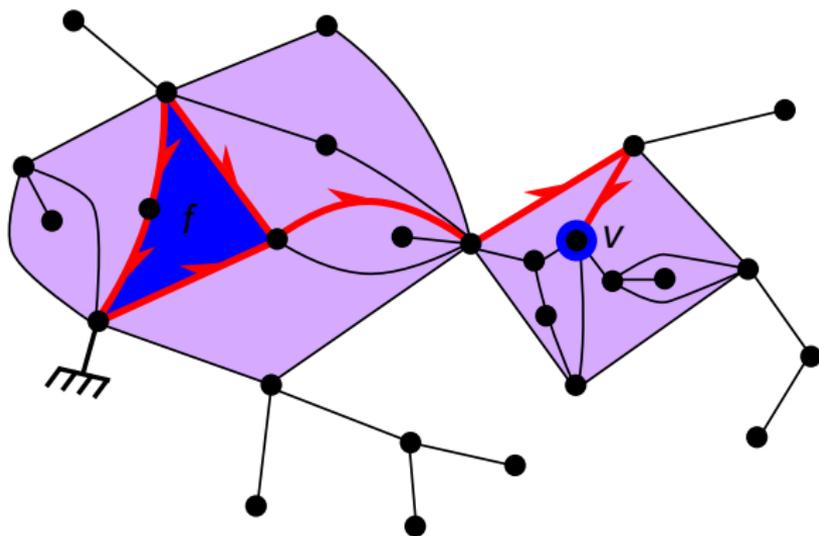
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |Q_{n,p}|$$



- ✧ On part d'une quadrangulation avec un sommet  $v$  et une face  $f$  simple
- ✧ On considère la géodésique la plus à gauche de  $f$  à  $v$

# Suppression d'une face : cas simple

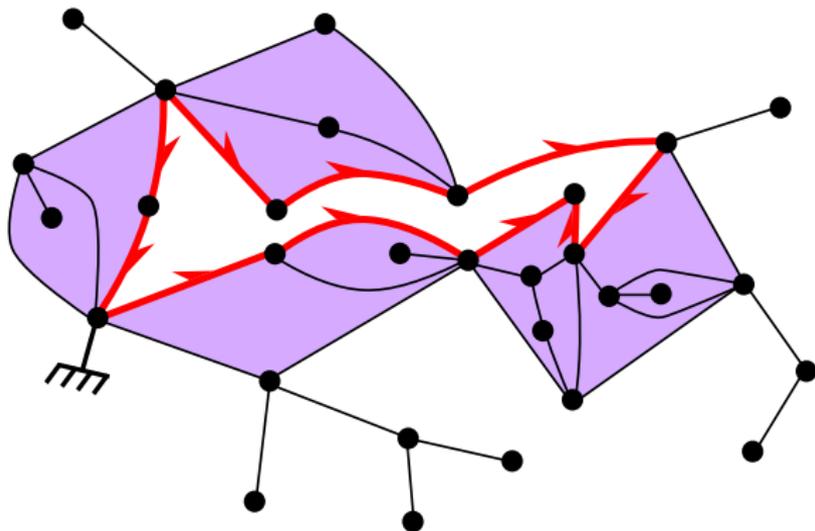
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |\mathcal{Q}_{n,p}|$$



- ✧ On part d'une quadrangulation avec un sommet  $v$  et une face  $f$  simple
- ✧ On considère la géodésique la plus à gauche de  $f$  à  $v$
- ✧ On ajoute la frontière de  $f$

# Suppression d'une face : cas simple

$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |Q_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |Q_{n,p}|$$



✧ On coupe

## Suppression d'une face : cas simple

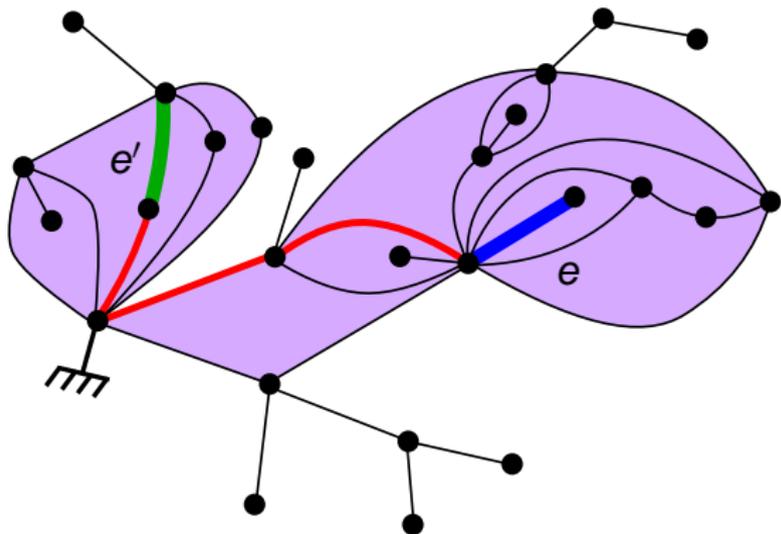
$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |\mathcal{Q}_{n,p}|$$

✧ On coupe

✧ On recolle

# Suppression d'une face : cas simple

$$\underbrace{(n+1)}_{\text{face}} \underbrace{(n+p+2)}_{\text{sommet}} |\mathcal{Q}_{n+1,p}| = \underbrace{3}_{\text{marque}} \underbrace{(2n+p)}_{\text{arête}} \underbrace{(2n+p+1)}_{\text{autre arête}} |\mathcal{Q}_{n,p}|$$



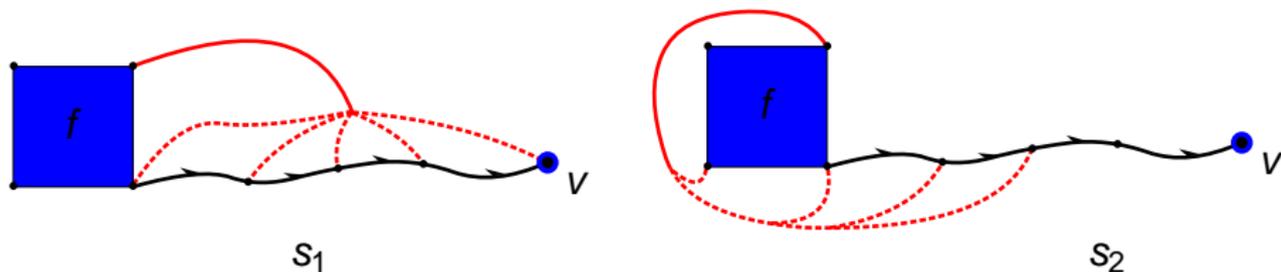
- ✦ On coupe
- ✦ On recolle
- ✦ On distingue deux arêtes  $e$  et  $e'$

## Définition de la valeur de la marque



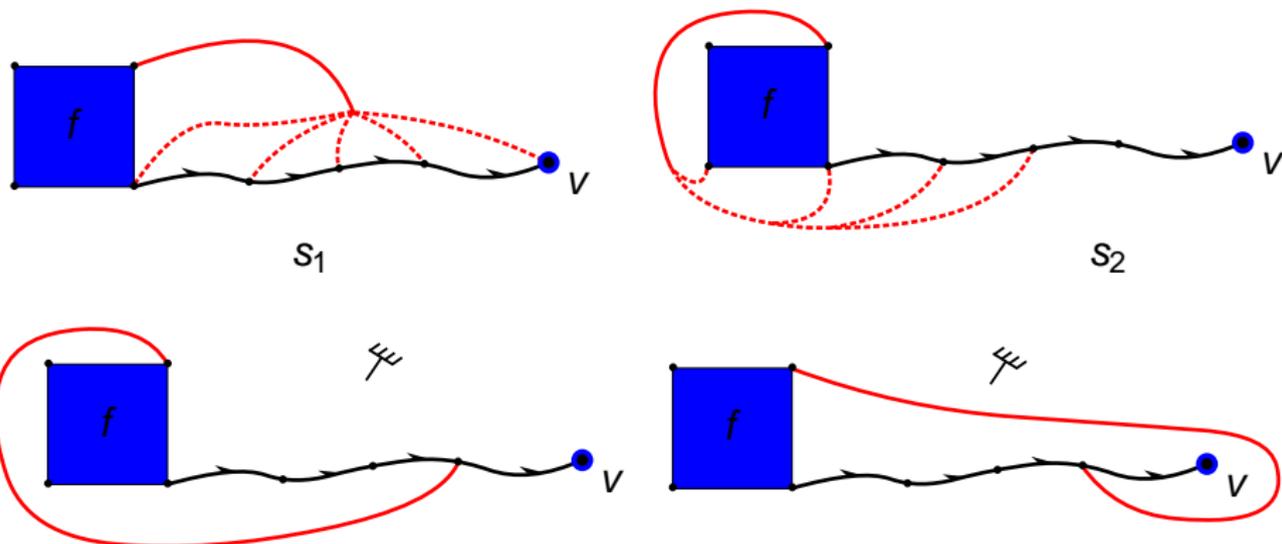
*On définit la valeur de la marque selon la manière dont les deux géodésiques se rencontrent.*

## Définition de la valeur de la marque



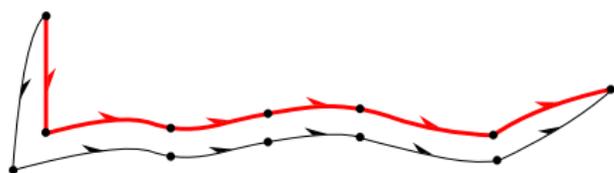
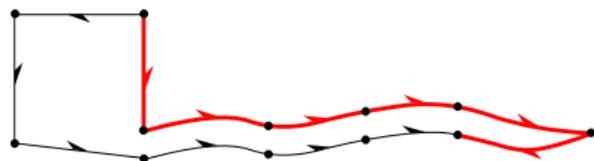
*On définit la valeur de la marque selon la manière dont les deux géodésiques se rencontrent.*

## Définition de la valeur de la marque

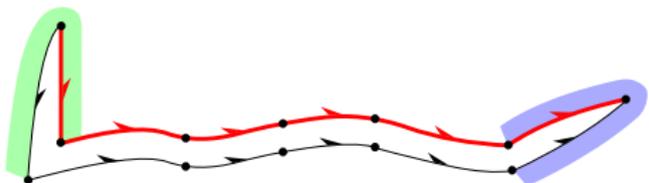
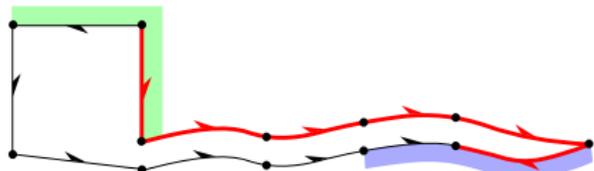
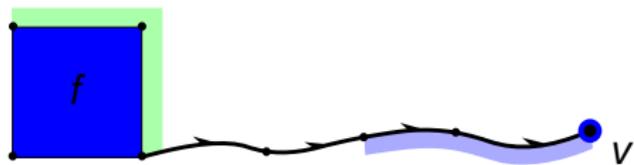


*On définit la valeur de la marque selon la manière dont les deux géodésiques se rencontrent.*

# Comment retrouver le chemin



# Comment retrouver le chemin



# Merci de votre attention