

Le déterminant de la double énumération des ASM

Philippe Biane

Bordeaux, Journées Combinatoire

27 janvier 2011

Travail avec Luigi Cantini et Andrea Sportiello

Matrices à signes alternants

Une matrice à signes alternants:

- ▶ carrée à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices à signes alternants

Une matrice à signes alternants:

- ▶ carrée à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ▶ dans chaque ligne ou colonne, les 1 et -1 alternent, en commençant et terminant par 1.

- ▶ Ces matrices interviennent dans l'analyse de l'algorithme de Lewis Carroll pour les déterminants (liens avec les algèbres amassées).

- ▶ Ces matrices interviennent dans l'analyse de l'algorithme de Lewis Carroll pour les déterminants (liens avec les algèbres amassées).
- ▶ L'étude du modèle $O(1)$ en mécanique statistique.

- ▶ Ces matrices interviennent dans l'analyse de l'algorithme de Lewis Carroll pour les déterminants (liens avec les algèbres amassées).
- ▶ L'étude du modèle $O(1)$ en mécanique statistique.
- ▶ La complétion de l'ordre de Bruhat en un treillis.

- ▶ Ces matrices interviennent dans l'analyse de l'algorithme de Lewis Carroll pour les déterminants (liens avec les algèbres amassées).
- ▶ L'étude du modèle $O(1)$ en mécanique statistique.
- ▶ La complétion de l'ordre de Bruhat en un treillis.
- ▶ Les représentations irréductibles de la superalgèbre de Lie "étrange", $Q(n)$, qui permet de montrer la formule de 2-énumération

$$\sum_{M \in ASM(n)} 2^{\#(-1)(M)} = 2^{n(n-1)/2}$$

Énumération des ASM

Le nombre d'ASM de taille n est

1 2 7 42 429 7436 218348

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$$

Conjecturé par Mills, Robbins, Rumsey, prouvé par Zeilberger (1994).

Une preuve utilisant la mécanique statistique donnée par Kuperberg (1995).

Énumération raffinée

On remarque qu'une ASM a exactement un 1 sur la première ligne (et également sur la dernière ligne, ainsi que sur la première et la dernière colonne).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut énumérer les ASM selon la place du 1 sur la première ligne.

$n = 1 :$				1						
$n = 2 :$			1		1					
$n = 3 :$			2		3		2			
$n = 4 :$			7		14		14		7	
$n = 5 :$		42		105		135		105		42

Le nombre d'ASM ayant un 1 à la k^e place sur la première ligne est

$$A_{n,k} = A_n \frac{\binom{n+k-2}{n-1} \binom{2n-1-r}{n-1}}{\binom{3n-2}{n-1}}$$

(Zeiberger, 1996). Ces nombres satisfont les relations

$$\sum_{i=1}^n A_{n,i} (-1)^{i+1} \binom{2n-k-1}{n-k-i+1} = A_{n,k}$$

Énumération doublement raffinée

- ▶ On peut énumérer les ASM suivant les places des 1 sur la première et la dernière lignes.

Énumération doublement raffinée

- ▶ On peut énumérer les ASM suivant les places des 1 sur la première et la dernière lignes.
- ▶ \mathcal{A}_{ij}^n = nombre d'ASM avec un 1 à la place i sur la première ligne, à la place j sur la dernière ligne.

Énumération doublement raffinée

- ▶ On peut énumérer les ASM suivant les places des 1 sur la première et la dernière lignes.
- ▶ \mathcal{A}_{ij}^n = nombre d'ASM avec un 1 à la place i sur la première ligne, à la place j sur la dernière ligne.
- ▶

$$\mathcal{A}^1 = (1); \quad \mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{A}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 14 & 14 & 7 \\ 7 & 21 & 33 & 30 & 14 \\ 14 & 33 & 41 & 33 & 14 \\ 14 & 30 & 33 & 21 & 7 \\ 7 & 14 & 14 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la double énumération

$$\begin{aligned}\det(\mathcal{A}^2) &= -1 &&= (-1)^{-1} \\ \det(\mathcal{A}^3) &= 1 &&= (-2)^0 \\ \det(\mathcal{A}^4) &= -7 &&= (-7)^1 \\ \det(\mathcal{A}^5) &= 1764 &&= (-42)^2 \\ \det(\mathcal{A}^6) &= -78953589 &&= (-429)^3\end{aligned}$$

Théorème:

$$\det(\mathcal{A}^n) = (-A_{n-1})^{n-3}$$

Fonction génératrice des ASM

On affecte chaque case (i, j) d'une ASM d'un poids $w_{ij}(M)$.

$$\begin{pmatrix} SE & SE & SE & 1 & SO \\ 1 & SO & SO & -1 & 1 \\ NE & SE & SE & 1 & NO \\ NE & 1 & SO & NO & NO \\ NE & NE & 1 & NO & NO \end{pmatrix}$$

$$w_{ij}(M) = \begin{cases} (q - q^{-1})\sqrt{x_i y_j} & M_{ij} = \pm 1; \\ qx_i - q^{-1}y_j & M_{ij} = 0, \quad (i, j) \text{ est NO ou SE} \\ -x_i + y_j & M_{ij} = 0, \quad (i, j) \text{ est NE ou SO;} \end{cases}$$

Le déterminant d'Izergin-Korepin

- ▶ La somme

$$Z(\vec{x}, \vec{y}, q) = \sum_{M \in ASM(n)} \prod_{ij} w_{ij}(M)$$

est symétrique en les x_i et en les y_i (relation de Yang-Baxter).
Cela permet d'établir, par récurrence, une expression déterminantale pour cette somme.

Le déterminant d'Izergin-Korepin

- ▶ La somme

$$Z(\vec{x}, \vec{y}, q) = \sum_{M \in ASM(n)} \prod_{ij} w_{ij}(M)$$

est symétrique en les x_i et en les y_i (relation de Yang-Baxter).
Cela permet d'établir, par récurrence, une expression déterminantale pour cette somme.

- ▶ Lorsque $q = e^{2i\pi/3}$,

$$Z(\vec{x}, \vec{y}, q) = s_{\lambda_n}(qx_1, \dots, qx_n, q^{-1}y_1, \dots, q^{-1}y_n)$$

avec

$$\lambda_n = (n-1, n-1, n-2, n-2, \dots, 1, 1, 0, 0)$$

On en déduit la fonction génératrice des ASM suivant la double énumération.

$$\mathcal{A}^n(u, v) = \sum_{i,j} u^{i-1} v^{n-j} \mathcal{A}_{ij}^n$$

$$\mathcal{A}^n(u, v) = C_n((q+u)(q+v))^{n-1} s_{\lambda_n} \left(\frac{1+qu}{q+u}, \frac{1+qv}{q+v}, 1, 1, \dots, 1 \right)$$

Un déterminant de fonctions de Schur

Théorème

$$\det (s_{\lambda_n}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1\dots n} = V(u)V(v)s_{2\rho_{2n-2}}(\vec{z})(-s_{\lambda_{n-1}}(\vec{z}))^{n-3}$$

$$\vec{z} = (z_1, \dots, z_{2n-2})$$

$V(u) = \prod_{i < j} (u_i - u_j)$, est le Vandermonde

$2\rho_{2n-2} = (4n - 6, 4n - 8, \dots, 4, 2, 0)$ est le double escalier.

$$s_{2\rho_{2n-2}}(\vec{z}) = \prod_{i < j} (z_i^2 + z_i z_j + z_j^2)$$

Le résultat sur le déterminant de la double énumération des ASM s'en déduit (exercice!)

Factorisations analogues

L'escalier multiple:

$$\det (s_{k\rho_n}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1\dots kn} = V(u)V(v)s_{k\rho_{n-2}}(\vec{z})^{kn}$$
$$k\rho_n = (k(n-1), k(n-2), \dots, k, 0)$$

$$s_{k\rho_n}(\vec{z}) = \prod_{i < j} \frac{z_i^{k+1} - z_j^{k+1}}{z_i - z_j}$$

Exo!!

Partitions rectangulaires:

$$\det (s_{r^p}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1\dots r+1} = V(u)V(v) (s_{(r+1)^{p-1}}(\vec{z}))^r$$

Lascoux (1985).

Utilise le théorème de Bazin.

Preuve de la formule:

$$\det (s_{\lambda_n}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1\dots n} = V(u)V(v)s_{2\rho_{2n-2}}(\vec{z})(-s_{\lambda_{n-1}}(\vec{z}))^{n-3}$$

- ▶ Par antisymétrie en u et v , le membre de gauche est divisible par $V(u)V(v)$

Preuve de la formule:

$$\det (s_{\lambda_n}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1\dots n} = V(u)V(v)s_{2\rho_{2n-2}}(\vec{z})(-s_{\lambda_{n-1}}(\vec{z}))^{n-3}$$

- ▶ Par antisymétrie en u et v , le membre de gauche est divisible par $V(u)V(v)$
- ▶ Pour des raisons de degré le quotient est une fonction symétrique de \vec{z} , indépendante de u, v .

Preuve de la formule:

$$\det (s_{\lambda_n}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1\dots n} = V(u)V(v)s_{2\rho_{2n-2}}(\vec{z})(-s_{\lambda_{n-1}}(\vec{z}))^{n-3}$$

- ▶ Par antisymétrie en u et v , le membre de gauche est divisible par $V(u)V(v)$
- ▶ Pour des raisons de degré le quotient est une fonction symétrique de \vec{z} , indépendante de u, v .
- ▶ On montre que le membre de gauche est divisible par $s_{2\rho_n}(\vec{z})$

Preuve de la formule:

$$\det (s_{\lambda_n}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1\dots n} = V(u)V(v)s_{2\rho_{2n-2}}(\vec{z})(-s_{\lambda_{n-1}}(\vec{z}))^{n-3}$$

- ▶ Par antisymétrie en u et v , le membre de gauche est divisible par $V(u)V(v)$
- ▶ Pour des raisons de degré le quotient est une fonction symétrique de \vec{z} , indépendante de u, v .
- ▶ On montre que le membre de gauche est divisible par $s_{2\rho_n}(\vec{z})$
- ▶ On montre que le membre de gauche est divisible par $s_{\lambda_{n-1}}(\vec{z})^{n-3}$

Preuve de la formule:

$$\det (s_{\lambda_n}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1\dots n} = V(u)V(v)s_{2\rho_{2n-2}}(\vec{z})(-s_{\lambda_{n-1}}(\vec{z}))^{n-3}$$

- ▶ Par antisymétrie en u et v , le membre de gauche est divisible par $V(u)V(v)$
- ▶ Pour des raisons de degré le quotient est une fonction symétrique de \vec{z} , indépendante de u, v .
- ▶ On montre que le membre de gauche est divisible par $s_{2\rho_n}(\vec{z})$
- ▶ On montre que le membre de gauche est divisible par $s_{\lambda_{n-1}}(\vec{z})^{n-3}$
- ▶ Pour des raisons de degré le quotient est une constante qu'on identifie.

Idéaux résultants

Les fonctions symétriques telles que

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n-2}, z, -z) = 0$$

forment un idéal gradué. C'est un idéal principal, engendré par

$$s_{\rho_n} = \prod_{i < j} (z_i + z_j)$$

$$P(z) = \prod (z - z_i)$$

$$Q(z^2) = (P(z) + P(-z))/2, \quad R(z^2) = (P(z) - P(-z))/2z$$

L'idéal décrit les couples de polynômes (Q, R) ayant une racine commune. C'est un **idéal résultant** (lieu où deux polynômes ont une racine commune).

On considère l'idéal formé des fonctions symétriques $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ telles que

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n-3}, z, qz, q^2z) = 0$$

C'est l'idéal résultant des trois polynômes

$$R(z^3) = \frac{1}{3}(P(z) + P(qz) + P(q^2z))$$

$$S(z^3) = \frac{1}{3z}(P(z) + q^2P(qz) + qP(q^2z))$$

$$T(z^3) = \frac{1}{3z^2}(P(z) + qP(qz) + q^2P(q^2z))$$

Le sous-espace de degré minimal de cet idéal est de dimension 1, s_{λ_n} est un générateur.

Relation de récurrence

$$s_{\lambda_n}(z_1, \dots, z_{2n-2}, z, q^2 z) = \prod_{j=1}^{2n-2} (qz - z_j) s_{\lambda_{n-1}}(z_1, \dots, z_{2n-2})$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} & \det \left(s_{\lambda_n}(z_1, \dots, z_{2n-4}, z, q^2 z, x_i, y_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= H(x, y) \det \left(s_{\lambda_{n-1}}(z_1, \dots, z_{2n-4}, x_i, y_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

car le déterminant est une fonction antisymétrique des x_i, y_j , de degré $< n(n-1)/2$.

On en déduit la divisibilité par $z_{2n-3} - q^2 z_{2n-2}$, puis par $s_{2\rho_{2n-2}}$.

Une question ouverte

$\det (s_{\lambda_n}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1\dots n}$ est dans I^n et $s_{2\rho_{2n-2}}(\vec{z}) \notin I^4$.

A-t-on $\det (s_{\lambda_n}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1\dots n} / s_{2\rho_{2n-2}}(\vec{z}) \in I^{n-3}$?

Si c'est vrai, alors pour des raisons de degré ce quotient est un multiple de $s_{\lambda_{n-1}}(\vec{z})^{n-3}$.

Question plus générale:

$\bigoplus_n I^n / I^{n+1}$ est-il un anneau intègre?

Représentations

$$\frac{(-1)^{n-3} \det (s_{\lambda_n}(\vec{z}, u_i, v_j))_{i,j=1 \dots n}}{V(u)V(v)} = s_{2\rho_{2n-2}}(\vec{z}) s_{\lambda_{n-1}}(\vec{z})^{n-3}$$

Le membre de droite est le caractère d'une représentation de GL_n , qui se factorise en un produit tensoriel.

Exist-t-il une représentation naturelle de GL_n dont le caractère soit le membre de gauche?

Le théorème de Bazin

$$m \leq n$$

$A, B =$ matrices $n \times m$,

$C =$ matrice $n \times (n - m)$

$M^{ij} =$ déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans $A|C$ la i^e colonne de A par la j^e colonne de B .

$$\det M = \det (A|C)^{n-1} \det (B|C)$$