

Combinatoire des fractions rationnelles de Greene

Adrien BOUSSICAULT

Travail en collaboration avec Valentin Féray

Laboratoire d'Informatique Gaspard-Monge,
Université Paris-Est

Journées de combinatoire de Bordeaux 2010

Présentation du problème (1)

Les fractions de Greene :

$$\psi_{123\dots n} = \frac{1}{(x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_3) \cdot \dots \cdot (x_{n-1} - x_n)}$$

$$\Psi_P = \sum_{w \in \mathcal{L}(P)} \psi_w$$

où P est un ordre partiel et $\mathcal{L}(P)$ l'ensemble de ses extensions linéaires.

Objectif : caractériser le numérateur et le dénominateur de Ψ_P .

Présentation du problème (2)

$$P = \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ \bullet & \bullet \\ \diagdown & \diagup \\ 1 & 3 \\ \bullet & \bullet \end{array} \rightarrow \mathcal{L}(P) = \{2143, 2134, 1243, 1234\}$$

$$\Psi_P = \psi_{2143} + \psi_{2134} + \psi_{1243} + \psi_{1234}$$

$$\Psi_P = \frac{1}{(x_2-x_1)(x_1-x_4)(x_4-x_3)} + \frac{1}{(x_2-x_1)(x_1-x_3)(x_3-x_4)} + \frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_3)} + \frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)}$$

$$\Psi_P = \frac{\left[\begin{array}{l} (x_1-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_3) - (x_1-x_4)(x_2-x_4)(x_2-x_3) - \\ (x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_2-x_3) + (x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_2-x_4) \end{array} \right]}{(x_1-x_2)(x_3-x_4)(x_2-x_4)(x_2-x_3)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$\Psi_P = \frac{x_2 + x_1 - x_4 - x_3}{(x_2-x_4) \cdot (x_2-x_3) \cdot (x_1-x_4) \cdot (x_1-x_3)}$$

Motivations

- Théorie des représentations : C. Greene utilise Ψ_P pour calculer les caractères d'une représentation irréductible.
(C. Greene, *A rational function identity related to the Murnaghan-Nakayama formula for the characters of S_n* , 1992)
- Théorie des semi-groupes : la fraction rationnelle Ψ_P permet de caractériser certaines familles de cônes.
(travail en cours avec V. Reiner)
- Les variétés de Schubert : une variété indexée par une permutation σ est non-singulière si et seulement si $\overleftarrow{\sigma}$ évite 1324 et 2143. Ces deux motifs jouent un rôle particulier pour la fraction rationnelle Ψ_P .

Plan

- 1 Définitions
- 2 Opérations sur les graphes et les fractions
- 3 Dénominateur de Ψ_G et quelques résultats connexes
- 4 Numérateur de Ψ_G

Plan

1 Définitions

- Graphes
- Extensions linéaires d'un graphe

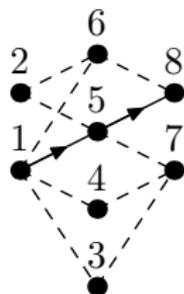
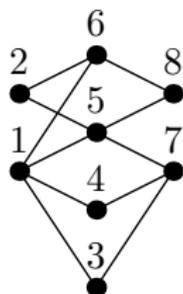
2 Opérations sur les graphes et les fractions

3 Dénominateur de Ψ_G et quelques résultats connexes

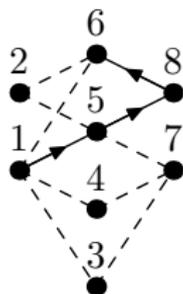
4 Numérateur de Ψ_G

Graphes orientés

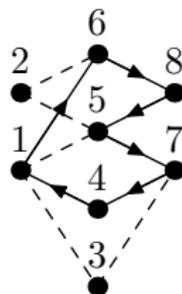
Une arête sans flèche est orientée de la gauche vers la droite.



Une chaîne



Un chemin



Un cycle

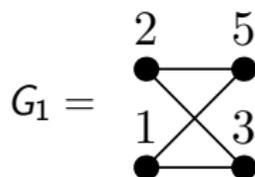
Diagramme de Hasse d'un graphe orienté sans circuit

Le diagramme de Hasse d'un graphe G est le graphe obtenu à partir de G en enlevant toutes les arêtes telles qu'il existe une chaîne reliant l'origine et la fin de cette arête.

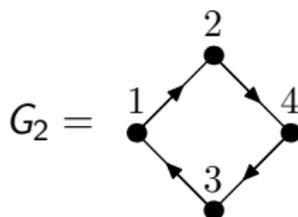


Extensions linéaires d'un graphe

Ensemble totalement ordonné compatible avec les arêtes du graphe G



$$\mathcal{L}(G_1) = \{1235, 1253, 2135, 2153\}$$



$$\mathcal{L}(G_2) = \{\}$$

Rappel : objet principal

$$\psi_{12\dots n} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)\dots(x_{n-1} - x_n)}$$

$$\Psi_G = \sum_{w \in \mathcal{L}(G)} \psi_w$$

Rappel : exemple

$$G = \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ \bullet & \bullet \\ \diagdown & \diagup \\ 1 & 3 \\ \bullet & \bullet \end{array} \rightarrow \mathcal{L}(P) = \{2143, 2134, 1243, 1234\}$$

$$\Psi_G = \psi_{2143} + \psi_{2134} + \psi_{1243} + \psi_{1234}$$

$$\Psi_G = \frac{1}{(x_2-x_1)(x_1-x_4)(x_4-x_3)} + \frac{1}{(x_2-x_1)(x_1-x_3)(x_3-x_4)} + \frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_3)} + \frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_4)}$$

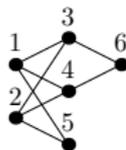
$$\Psi_G = \frac{\left[\begin{array}{l} (x_1-x_3)(x_2-x_4)(x_2-x_3) - (x_1-x_4)(x_2-x_4)(x_2-x_3) - \\ (x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_2-x_3) + (x_1-x_4)(x_1-x_3)(x_2-x_4) \end{array} \right]}{(x_1-x_2)(x_3-x_4)(x_2-x_4)(x_2-x_3)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}$$

$$\Psi_G = \frac{x_2 + x_1 - x_4 - x_3}{(x_2-x_4) \cdot (x_2-x_3) \cdot (x_1-x_4) \cdot (x_1-x_3)}$$

Plan

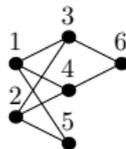
- 1 Définitions
- 2 Opérations sur les graphes et les fractions
 - Linéarisation partielle d'un graphe
 - Contraction et résidu
 - Décontraction et graphe biparti
 - Poinçonnage de Féray
 - Factorisation par chaîne
- 3 Dénominateur de Ψ_G et quelques résultats connexes
- 4 Numérateur de Ψ_G

Linéarisation partielle d'un graphe

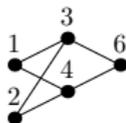


Linéarisation partielle d'un graphe

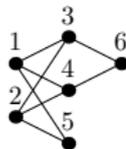
← Choix d'un
sous-graphe



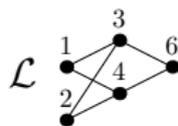
Linéarisation partielle d'un graphe



← Choix d'un
sous-graphe

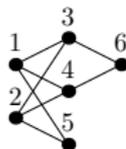


Linéarisation partielle d'un graphe

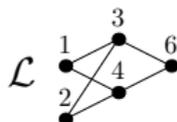


||

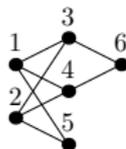
← Choix d'un
sous-graphe



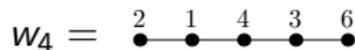
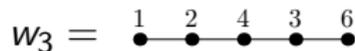
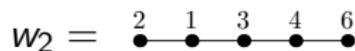
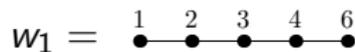
Linéarisation partielle d'un graphe



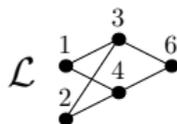
← Choix d'un
sous-graphe



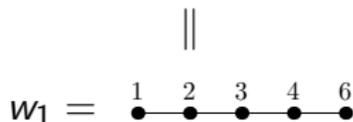
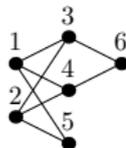
||



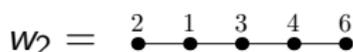
Linéarisation partielle d'un graphe



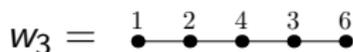
← Choix d'un
sous-graphe



Linéarisation de G
selon w_1



Linéarisation de G
selon w_2

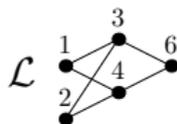


Linéarisation de G
selon w_3

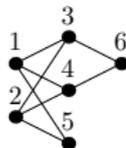


Linéarisation de G
selon w_4

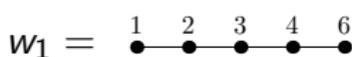
Linéarisation partielle d'un graphe



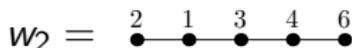
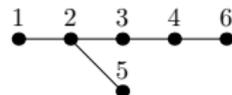
← Choix d'un sous-graphe



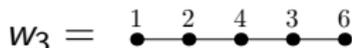
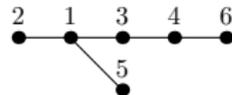
||



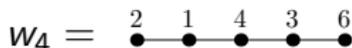
Linéarisation de G
selon w_1



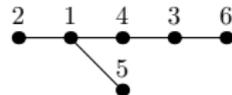
Linéarisation de G
selon w_2



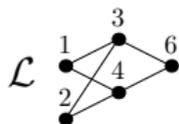
Linéarisation de G
selon w_3



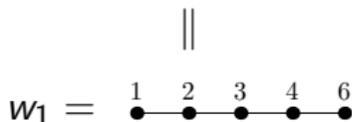
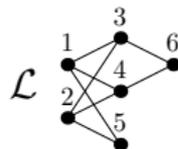
Linéarisation de G
selon w_4



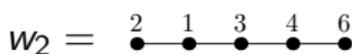
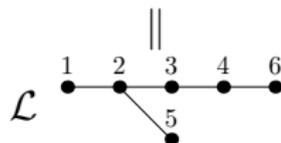
Linéarisation partielle d'un graphe



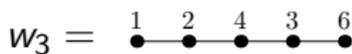
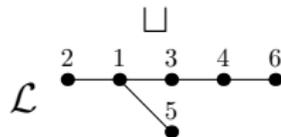
← Choix d'un sous-graphe



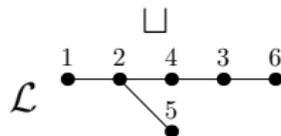
Linéarisation de G
selon w_1



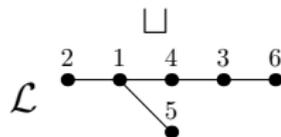
Linéarisation de G
selon w_2



Linéarisation de G
selon w_3



Linéarisation de G
selon w_4



Linéarisation partielle d'un graphe

Propriété

Soit G un graphe, $I \subset G$ et G_I le graphe induit par I . Alors,

$$\mathcal{L}(G) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{L}(G_I)} \mathcal{L}(G_w)$$

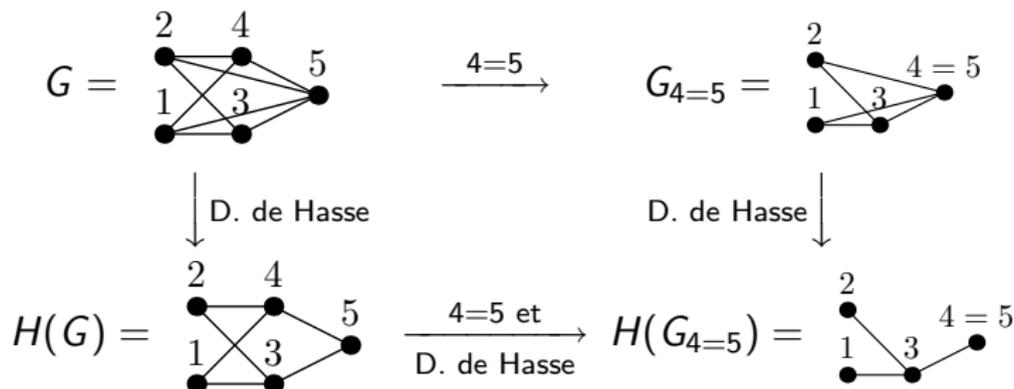
où G_w est le graphe obtenu en réunissant les arêtes de G et les arêtes associées aux relations d'ordre de w .

Conséquence :

$$\Psi_G = \sum_{w \in \mathcal{L}(G_I)} \Psi_{G_w}$$

Contraction

Condition de contraction : l'arête choisie doit être une arête appartenant au diagramme de Hasse $H(G)$ du graphe



Contraction et résidu

Proposition (Boussicault, FPSAC 2007)

$$w'abw'' \in \mathcal{L}(G) \Leftrightarrow w'aw'' \in \mathcal{L}(G_{a=b})$$

Conséquence :

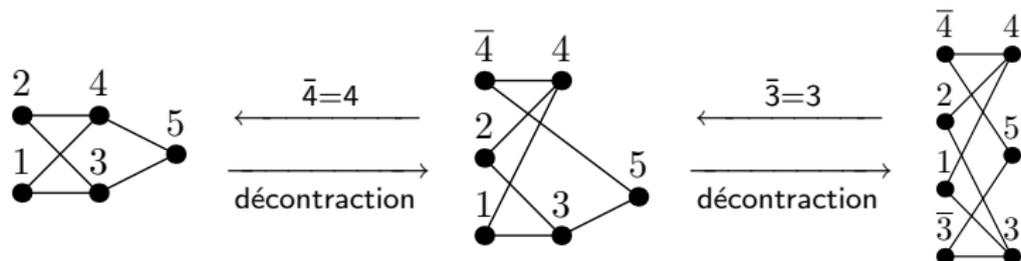
Théorème (Boussicault, FPSAC 2007)

Soient a et b deux sommets d'un graphe G . Alors,

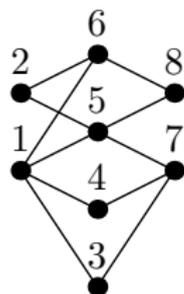
$$((x_a - x_b) \cdot \Psi_G)|_{x_b=x_a} = \begin{cases} \Psi_{G_{b=a}} & \text{si } (a, b) \text{ est une arête de } H(G), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Décontraction et graphe biparti

Tout calcul de fraction rationnelle d'un ordre partiel peut se ramener au calcul d'une fraction rationnelle associée à un graphe biparti à l'aide des opérations de contraction et de décontraction. (Boussicault, FPSAC 2007)

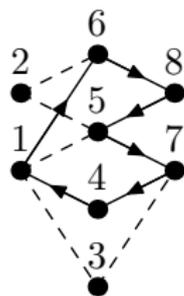


Poinçonnage de Féray



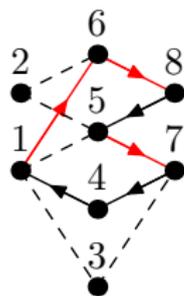
Référence: *Combinatorial interpretation and positivity of Kerov's character polynomials*, Féray, J. Alg. Comb 2008.

Poinçonnage de Féray



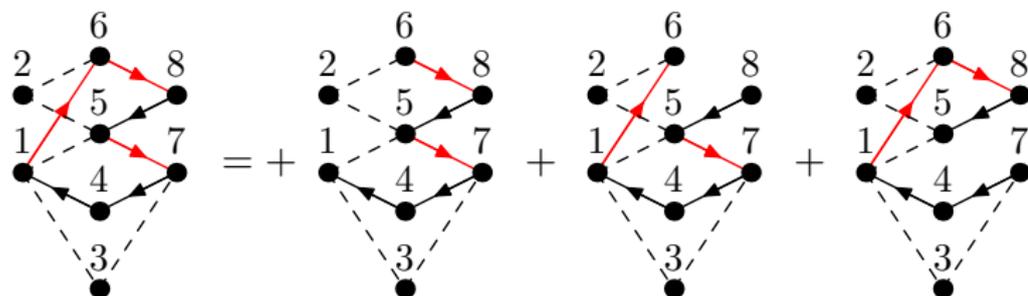
Référence: *Combinatorial interpretation and positivity of Kerov's character polynomials*, Féray, J. Alg. Comb 2008.

Poinçonnage de Féray



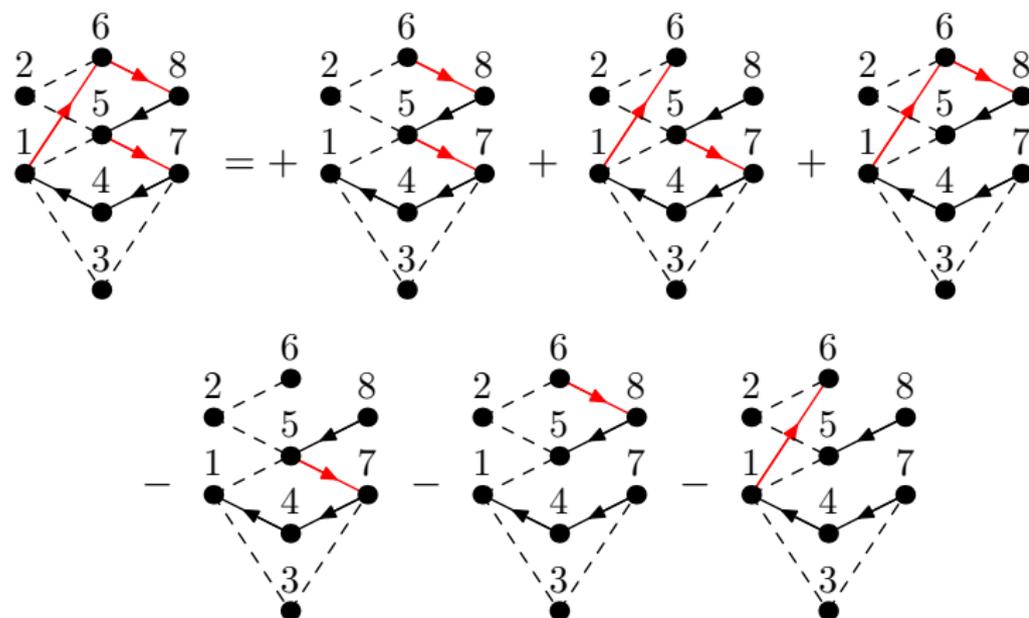
Référence: *Combinatorial interpretation and positivity of Kerov's character polynomials*, Féray, J. Alg. Comb 2008.

Poinçonnage de Féray



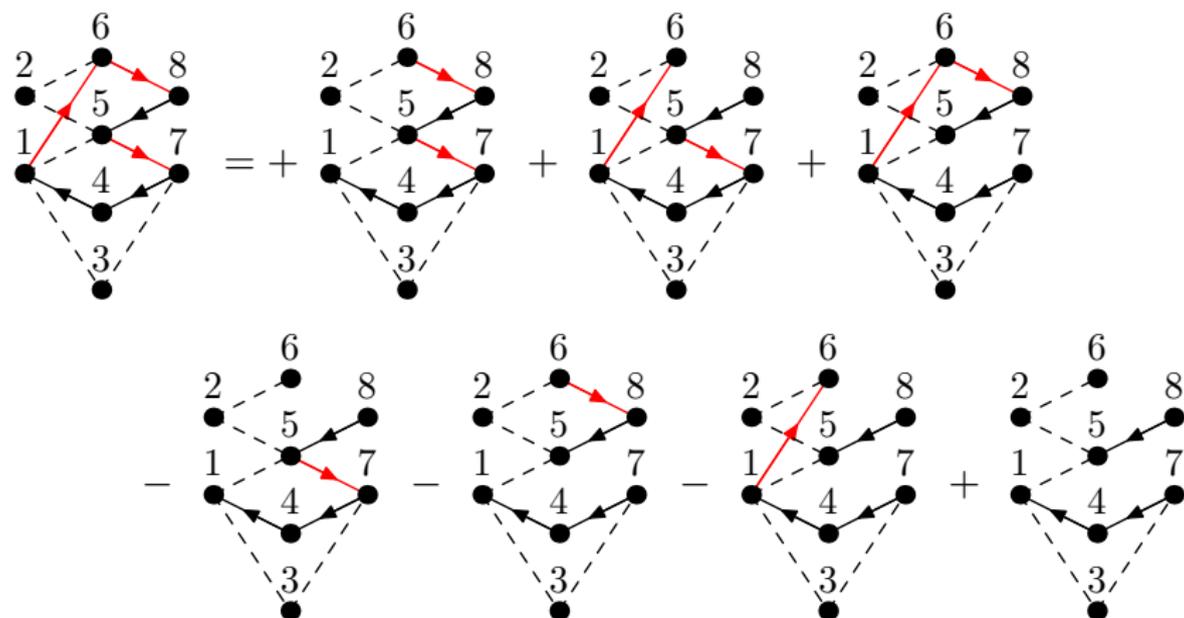
Référence: *Combinatorial interpretation and positivity of Kerov's character polynomials*, Féray, J. Alg. Comb 2008.

Poinçonnage de Féray



Référence: *Combinatorial interpretation and positivity of Kerov's character polynomials*, Féray, J. Alg. Comb 2008.

Poinçonnage de Féray



Référence: *Combinatorial interpretation and positivity of Kerov's character polynomials*, Féray, J. Alg. Comb 2008.

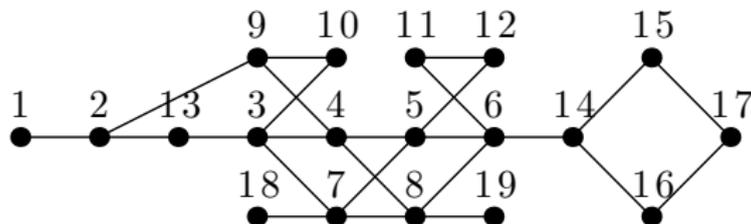
Poinçonnage de Féray

Théorème (Boussicault/Féray, EJC 2009)

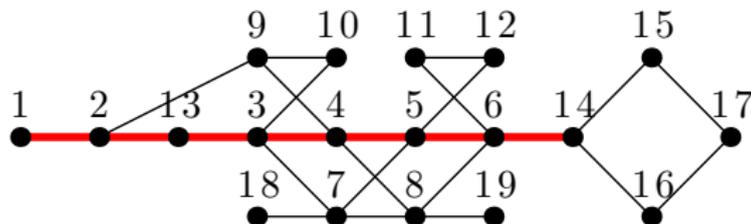
Soit C un circuit obtenu en orientant un cycle de G . Soit $HE(G)$ l'ensemble des arêtes qui ont les mêmes orientations que celles de G . Alors,

$$\Psi_G = \sum_{E \subset HE(C)} (-1)^{|E|-1} \Psi_{G \setminus E}$$

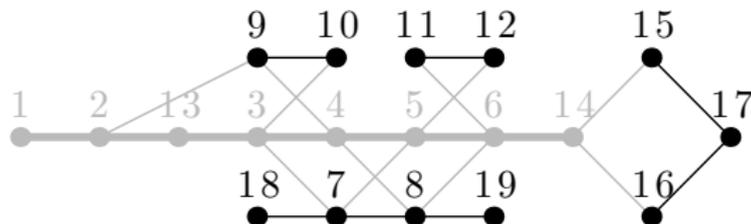
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



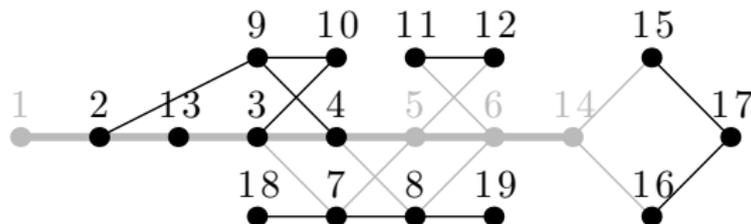
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



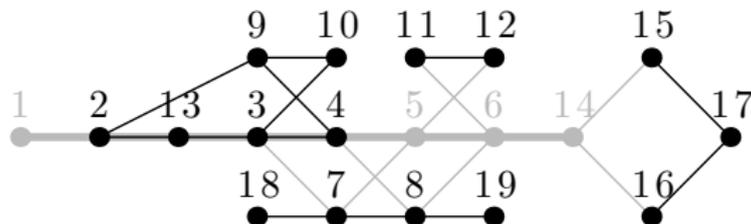
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



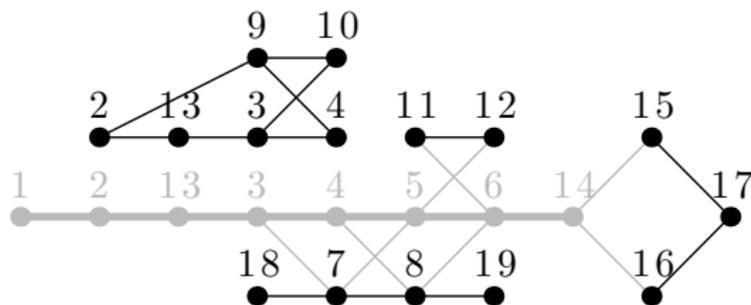
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



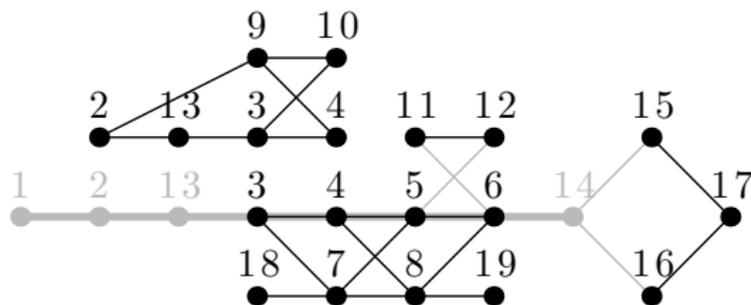
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



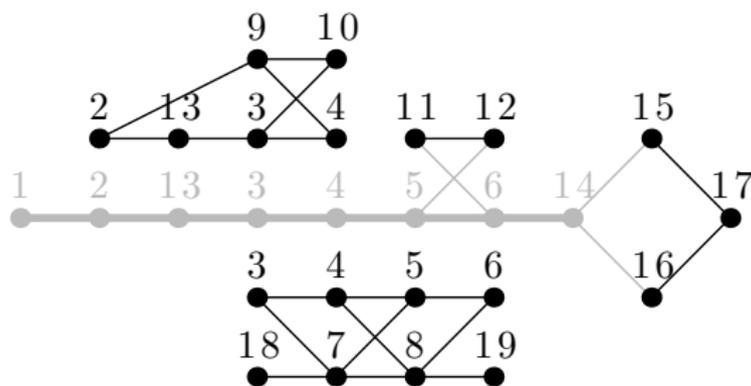
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



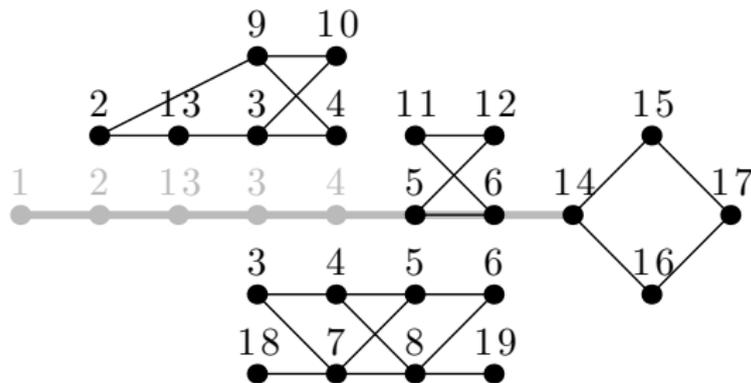
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



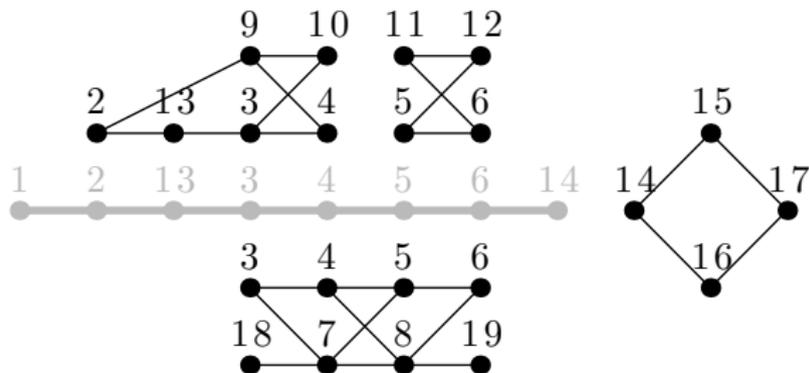
Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



Factorisation par chaîne : composantes connexes et leurs adhérences



Factorisation par chaîne (autre exemple)

$$N \left(\begin{array}{c} 7 & 8 \\ \bullet & \bullet \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & & 9 \\ & & & & & \bullet \end{array} \right) = N \left(\begin{array}{c} 7 \\ \bullet \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{c} 8 \\ \bullet \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{c} 3 & 4 & 5 & 6 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & 9 \\ & & & \bullet \end{array} \right)$$

Factorisation par chaîne

Théorème (Boussicault/Féray, EJC 2009)

Soient G un graphe orienté sans circuit, c une chaîne de G et $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_K$ les composantes connexes associées à c , alors

$$N(\Psi_G) = \prod_{j=1}^K N(\Psi_{\overline{\mathcal{C}}_j})$$

De plus, $\overline{\mathcal{C}}_j = H(G)|_{\overline{\mathcal{C}}_j}$.

Plan

- 1 Définitions
- 2 Opérations sur les graphes et les fractions
- 3 Dénominateur de Ψ_G et quelques résultats connexes
 - Dénominateur de Ψ_G
 - Graphes non connexes
 - Diagramme de Hasse avec au plus un cycle
 - Décomposition en éléments simples
- 4 Numérateur de Ψ_G

Dénominateur de la fraction réduite

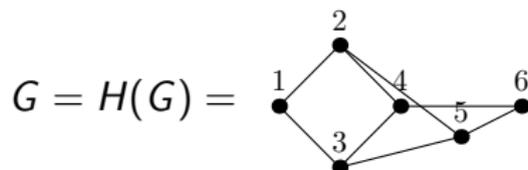
Théorème (Boussicault, FPSAC 2007)

Soit G un graphe, et $D(\Psi_G)$ le dénominateur de la fraction réduite de Ψ_G alors,

$$D(\Psi_G) = \prod_{(a,b) \in H(G)} (x_a - x_b)$$

Conséquence : Le degré du numérateur est égal au nombre cyclomatique dans $H(G)$.

Exemple



$$\begin{aligned} N(\Psi_G) = & -x_1x_2x_3 + x_1x_2x_6 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_6 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_5 \\ & - x_1x_4x_6 - x_2x_3x_6 - x_2x_4x_5 - x_1x_5x_6 - x_3x_4x_5 + x_4x_5x_6 \end{aligned}$$

$$D(\Psi_G) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)(x_4 - x_6)(x_3 - x_5)(x_5 - x_6)(x_2 - x_5)$$

Graphes non connexes

Propriété (Greene, J. Alg. Comb. 1992 - Boussicault, FPSAC 2007)

Soit G un graphe. Le diagramme de Hasse de G est connexe si et seulement si $\Psi_G \neq 0$.

Exemple :

$$\Psi \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \bullet & \bullet \end{array} = 0$$

Diagramme de Hasse sans cycle

Propriété (Greene, J. Alg. Comb. 1992 - Boussicault, FPSAC 2007)

Si le diagramme de Hasse de G ne possède pas de cycle alors

$$N(\Psi_G) = 1$$

Exemple

$$= \frac{1}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)}$$

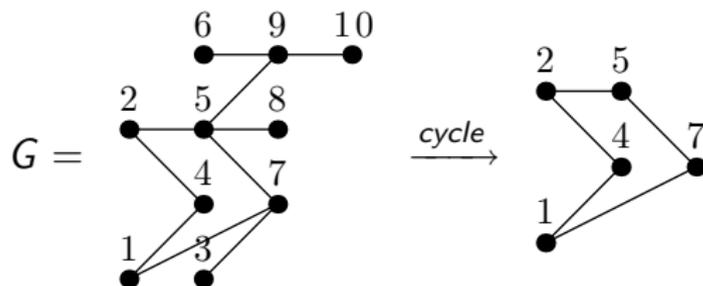
Diagramme de Hasse possédant un seul cycle

Propriété (Boussicault, FPSAC 2007)

Si le diagramme de Hasse de G possède un seul cycle noté C alors

$$N(\Psi_G) = \sum_{i \in \min(C)} x_i - \sum_{j \in \max(C)} x_j$$

Exemple :

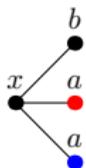


$$\text{Num}(\Psi_G) = x_1 + x_2 - x_4 - x_7$$

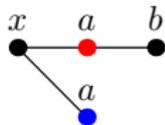
Décomposition en éléments simples (cas sans numérateur)

$$\frac{1}{(x-a)^2(x-b)}$$

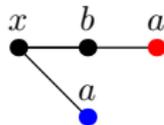
=



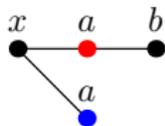
=



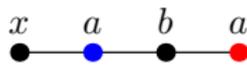
+



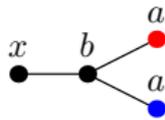
=



+



+



=

$$\frac{1}{a-b} \frac{1}{(x-a)^2}$$

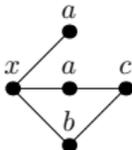
+

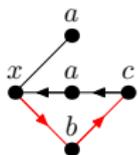
$$\frac{-1}{(b-a)^2} \frac{1}{x-a}$$

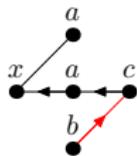
+

$$\frac{1}{(b-a)^2} \frac{1}{x-b}$$

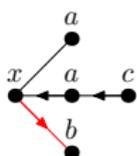
Décomposition en éléments simples (cas avec numérateur)

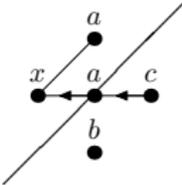
$$\frac{x - c}{(x - a)^2(x - b)} = (a - c)(b - c) \cdot$$


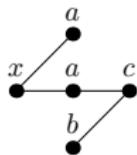


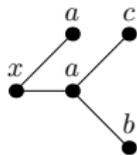
$$=$$


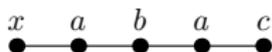
$$+$$



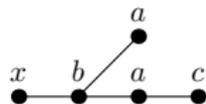
$$-$$


$$=$$


$$+$$


$$+$$


$$+$$



$$=$$

$$\frac{1}{(a-c)(b-c)} + \frac{1}{(a-c)(a-b)}$$

$$\frac{1}{(x-a)^2}$$

$$+$$

$$\frac{-1}{(b-a)^2(a-c)}$$

$$x - a$$

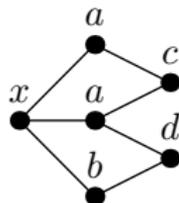
$$+$$

$$\frac{1}{(b-a)^2(a-c)}$$

$$x - b$$

Décomposition en éléments simples (Cas général)

$$\frac{(x-c)(x-d)}{(x-a)^2(x-b)} = (a-c)^2(a-d)(b-d) \cdot$$

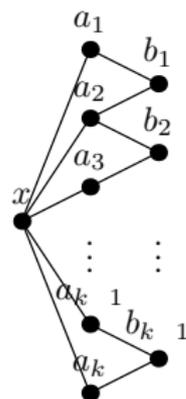


$$N \left(\begin{array}{c} a \\ \bullet \\ x \text{ --- } a \\ \bullet \\ b \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} c \\ \bullet \\ d \\ \bullet \end{array} \right) = N \left(\begin{array}{c} x \text{ --- } a \\ \bullet \\ b \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} d \\ \bullet \end{array} \right) \cdot N \left(\begin{array}{c} a \\ \bullet \\ x \text{ --- } a \\ \bullet \\ c \\ \bullet \end{array} \right)$$

Décomposition en éléments simples (fin)

Soit $(a_i)_i$ et $(b_j)_j$ tels que pour tout indices i et j , a_i est différent de b_j , alors

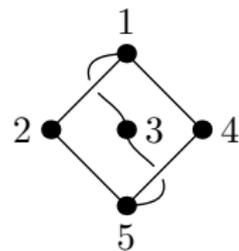
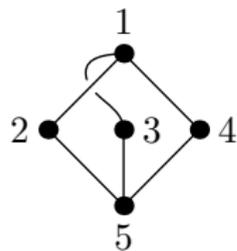
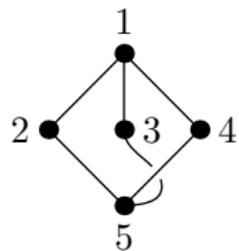
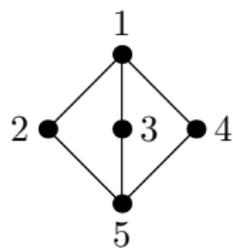
$$\frac{\prod_j (x - b_j)}{\prod_i (x - a_i)} = \prod_i (a_i - b_i)(a_{i+1} - b_i) \quad .$$



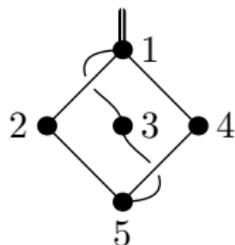
Plan

- 1 Définitions
- 2 Opérations sur les graphes et les fractions
- 3 Dénominateur de Ψ_G et quelques résultats connexes
- 4 Numérateur de Ψ_G
 - Carte enracinée et cycle admissible
 - Poinçonnage de Féray appliqué aux cycles admissibles
 - Bon arbre recouvrant
 - Caractérisation du numérateur
 - Poinçonnage de Féray appliqué aux cycles admissibles

Carte enracinée

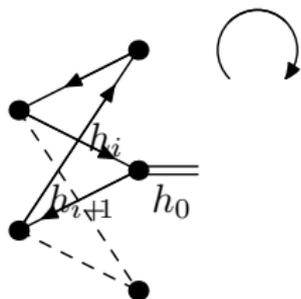


Quatre cartes différentes

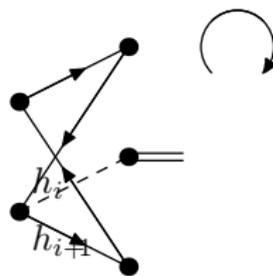


Carte enracinée

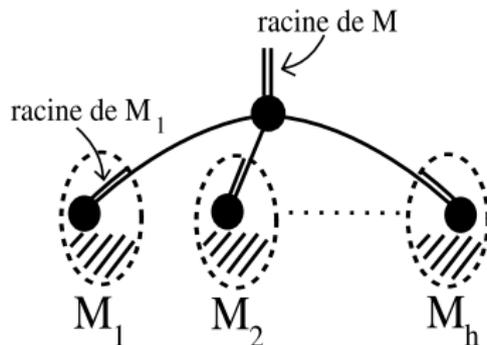
Cycles admissibles



Cycle admissible de type 1



Cycle admissible de type 2

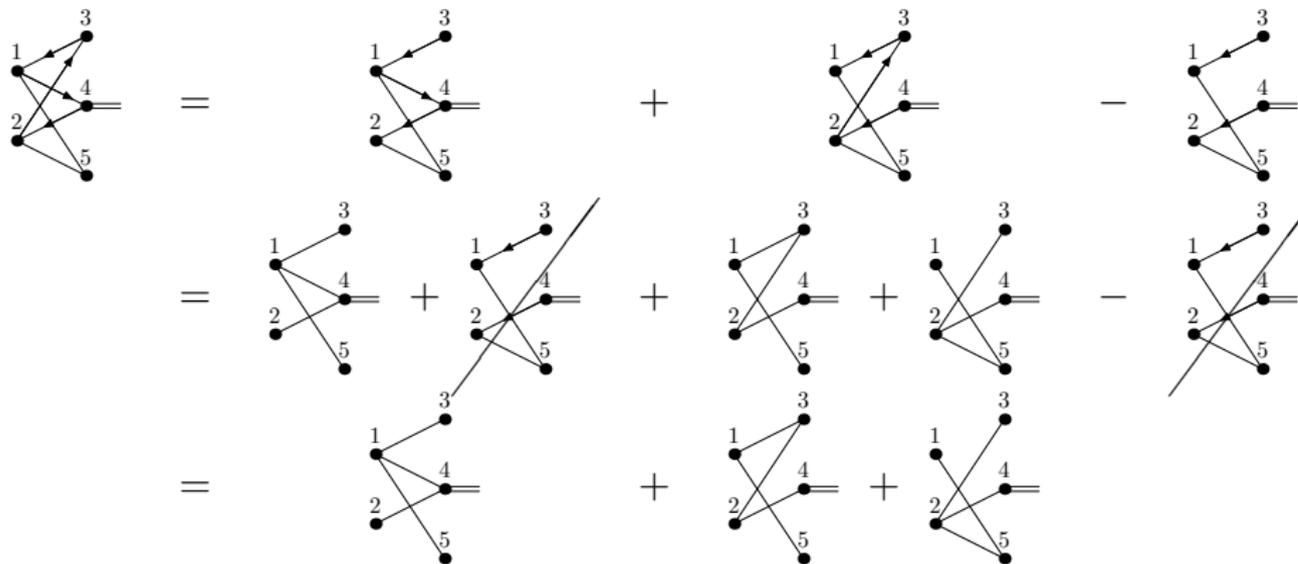


Une carte enracinée générique M sans cycle admissible de type 1

Poinçonnage de Féray appliqué aux cycles admissibles

Algorithme : on applique récursivement le poinçonnage de Féray sur les cycles admissibles afin d'obtenir une somme de fractions uniquement associées à des arbres.

Exemple :



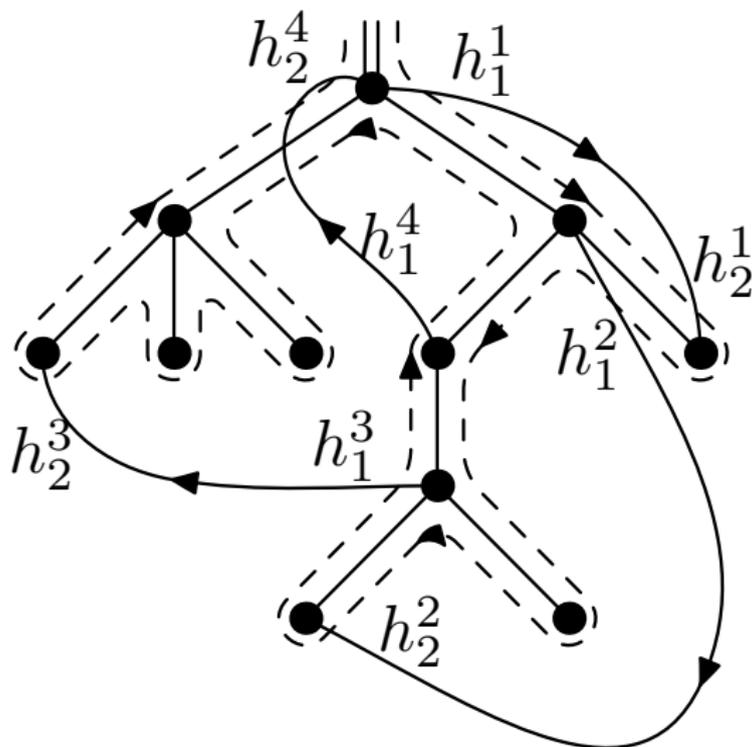
Poinçonnage de Féray appliqué aux cycles admissibles

Algorithme : on applique récursivement le poinçonnage de Féray sur les cycles admissibles afin d'obtenir une somme de fractions uniquement associées à des arbres.

Théorème (Féray, J. Alg. Comb 2008)

Les coefficients associés aux arbres obtenus après itération du poinçonnage de Féray sur les cycles admissibles valent 0 ou +1.

Bon arbre recouvrant



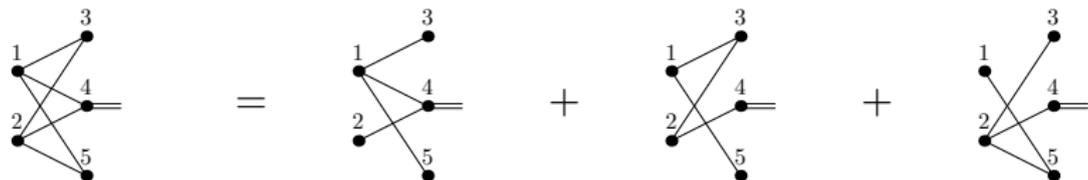
Caractérisation du numérateur

Théorème (Boussicault/Féray, EJC 2009)

Soit G un graphe et M une carte associée au graphe G . Le numérateur $N(\Psi_G)$ est donné par la formule combinatoire suivante :

$$N(\Psi_G) = \sum_{\substack{T \text{ bon arbre} \\ \text{recouvrant de } M}} \left[\prod_{\substack{(a,b) \in HE(G) \\ (a,b) \notin T}} (x_a - x_b) \right]. \quad (1)$$

Caractérisation du numérateur



$$N \left(\begin{array}{c} \text{graph} \\ \text{graph} \\ \text{graph} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} x_2 - x_3 \\ x_2 - x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - x_4 \\ x_2 - x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 - x_4 \end{pmatrix}$$

Merci de votre attention.