

Propriétés combinatoires de l'algèbre de Faà di Bruno non commutative

Jean-Paul Bultel

Laboratoire Bordelais d'Informatique

1 février 2011

Introduction

- ▶ Cet exposé a trait à l'inversion de Lagrange non commutative
- ▶ Inversion de Lagrange classique : calcul de l'inverse (au sens de la composition) d'une série formelle à une variable sans termes constants
- ▶ Ce calcul peut être vu comme le calcul de l'antipode d'une algèbre de Hopf
- ▶ Séries à coefficients dans une algèbre commutative : algèbre de Faà di Bruno
- ▶ Analogie non commutatif : algèbre de Faà di Bruno non commutative

Plan

- ▶ Algèbres de Hopf combinatoires et inversion de Lagrange classique
- ▶ Liens avec l'algèbre des fonctions symétriques
- ▶ Analogues non commutatifs
- ▶ L'inversion de Lagrange non commutative
- ▶ Interprétations combinatoires

Algèbres de Hopf combinatoires et inversion de Lagrange classique

- ▶ Cogèbre : structure duale de la structure d'algèbre.
- ▶ Coproduit

$$\Delta : C \rightarrow C \otimes C$$

- ▶ Bigèbre : structure d'algèbre et structure de cogèbre sur le même espace vectoriel, compatibles entre elles.

- ▶ Convolution

$$f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$$

- ▶ Antipode

$$\text{Id} \star S = S \star \text{Id} = u$$

- ▶ De manière équivalente,

$$\mu \circ (\text{Id} \otimes S) \circ \Delta = \mu \circ (S \otimes \text{Id}) \circ \Delta = u$$

- ▶ S'il existe, on dit que B est une *algèbre de Hopf*

- ▶ Bigèbre graduée : graduée en tant qu'algèbre et telle que la graduation est compatible avec le coproduit
- ▶ Lorsque les composantes homogènes sont de dimension finie, l'antipode existe
- ▶ Lorsque chaque composante homogène a une dimension finie qui est le cardinal d'un ensemble d'objets combinatoires, et qu'on peut construire naturellement des bases indexées par ces objets combinatoires, on parle d'*algèbres de Hopf combinatoires*

- ▶ Groupe multiplicatif des séries formelles de terme constant 1

$$G_0 = \{a \mid a(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots\}$$

- ▶ Algèbre \mathcal{H}_0 des fonctions polynomiales sur G_0

$$k_n(a) = a_n$$

- ▶ Exemple

$$(k_2 k_3 + 2k_1 k_5)(e^t) = \frac{1}{2!} \frac{1}{3!} + 2 \frac{1}{5!} \frac{1}{1!}$$

- ▶ Coproduit sur \mathcal{H}_0

$$\Delta_0 f(a, b) = f(ab)$$

► Exemple

$$\Delta_0(k_2)(a, b) = k_2(ab)$$

$$a = 1 + a_1t + a_2t^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}k_2(ab) &= k_2(1 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + a_1b_1 + b_2)t^2 + \dots) \\ &= a_2 + a_1b_1 + b_2 = k_2(a) + k_1(a)k_1(b) + k_2(b)\end{aligned}$$

$$\Delta_0(k_2) = 1 \otimes k_2 + k_1 \otimes k_1 + k_2 \otimes 1$$

$$\Delta_0(k_n) = \sum_{i=0}^n k_i \otimes k_{n-i}$$

- ▶ Élément neutre de la convolution

$$u(f)(a) = f(1 + 0t + 0t^2 + \dots)$$

$$f(ab) = \sum f_1(a)f_2(b) = \sum f_1 \otimes f_2$$

$$\sum u(f_1) \otimes f_2 = \sum f_1(1)f_2(b) = f(1b) = 1f(b) = 1 \otimes f$$

- ▶ Antipode

$$(S_0 f)(a) = f(a^{-1})$$

- ▶ Groupe des difféomorphismes formels de la droite tangents à l'identité

$$G_1 = tG_0 = t + t^2\mathbb{C}[[t]]$$

- ▶ Algèbre de Faà di Bruno \mathcal{H}_1

$$\alpha(t) = t + a_1t^2 + a_2t^3 + \dots$$

$$k_n(\alpha) = a_n$$

- ▶ Coproduit

$$\Delta_1 f(\alpha, \beta) = f(\alpha \circ \beta)$$

- ▶ Antipode

$$(S_1 f)(\alpha) = f(\alpha^{\langle -1 \rangle})$$

Liens avec l'algèbre des fonctions symétriques

- ▶ "fonctions symétriques" : polynômes symétriques en un ensemble infini de variables

$$X = \{x_i | i \geq 1\}$$

- ▶ Bases linéaires : indexées par les partitions d'entiers, habituellement identifiées à des suites décroissantes

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0)$$

- ▶ Longueur $\ell(\lambda)$, poids $|\lambda|$, multiplicités $m_k(\lambda)$

- ▶ Fonctions complètes : h_n somme de tous les monômes de degré n .

$$\sigma_t(X) = \prod_{i \geq 1} (1 - tx_i)^{-1} = \sum_{n \geq 0} h_n(X) t^n$$

- ▶ Fonctions élémentaires

$$e_n(X) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}$$

$$\sum_{n \geq 0} e_n(X) t^n = \prod_{i \geq 1} (1 + tx_i)$$

- ▶ Fonctions "sommes de puissances"

$$p_n(X) = \sum_{i \geq 1} x_i^n$$

► Exemples

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + \dots$$

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$p_4(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$$

► Bases multiplicatives

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_r}$$

► On définit de même les bases (e_λ) et (h_λ) .

► Sommes d'alphabets

$$f(X + Y) = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$$

$$\sigma_t(X + Y) = \sigma_t(X)\sigma_t(Y)$$

$$p_n(X + Y) = p_n(X) + p_n(Y)$$

► Généralisation

$$\sigma_t(\alpha X + \beta Y) = \sigma_t(X)^\alpha \sigma_t(Y)^\beta$$

► De manière équivalente,

$$p_n(\alpha X + \beta Y) = \alpha p_n(X) + \beta p_n(Y)$$

► Exemples

$$X = (x_1, x_2, x_3), Y = (y_1, y_2)$$

$$p_2(X + Y) = p_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$$

$$p_2(X + Y) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 = p_2(X) + p_2(Y)$$

$$p_2(-X) = -p_2(X)$$

► Isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{H}_0 \rightarrow \Lambda$$

$$k_n \mapsto h_n$$

► Coproduit

$$\Delta_0 h_n = \sum_{k=0}^n h_k \otimes h_{n-k}$$

- ▶ Ce coproduit peut aussi s'écrire

$$\Delta_0 f = f(X + Y)$$

$$f \otimes g = f(X)g(Y)$$

- ▶ Antipode

$$S_0(f)(X) = f(-X)$$

- ▶ C'est la structure classique d'algèbre de Hopf de Λ

- ▶ Isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{H}_1 \rightarrow \Lambda$$

$$k_n \mapsto h_n$$

- ▶ Coproduit

$$\Delta_1 h_n(X) = \sum_{k=0}^n h_k(X) \otimes h_{n-k}((k+1)X)$$

- ▶ Antipode

$$S_1(h_n) = h_n^*$$

- ▶ L'inverse de la série

$$tH(t) = t + h_1 t^2 + h_2 t^3 + \dots$$

pour la composition est la série

$$t + h_1^* t^2 + h_2^* t^3 + \dots$$

- ▶ Formule d'inversion de Lagrange : $(n + 1)h_n^*$ est le coefficient de t^n dans $H(t)^{-(n+1)}$, qui est

$$h_n^*(X) = \frac{h_n(-(n+1)X)}{n+1}$$

Analogues non commutatifs

- ▶ Algèbre **Sym** des fonctions symétriques non commutatives
- ▶ Algèbre associative librement engendrée par une suite infinie (S_n) de générateurs non commutatifs
- ▶ Bases linéaires indexées par les compositions d'entiers, habituellement identifiées à des suites d'entiers strictement positifs

$$I = (i_1 i_2 \dots, i_r)$$

- ▶ Longueur $\ell(I)$, poids $|I|$, multiplicités $m_k(I)$

- ▶ Réalisations polynomiales : ensemble totalement ordonné de variables non commutatives

$$A = \{a_i \mid i \geq 1\}$$

- ▶ On pose

$$\sigma_t(A) = \sum_{n \geq 0} S_n(A) t^n = \prod_{i \geq 1}^{\rightarrow} (1 - ta_i)^{-1}$$

- ▶ Les S_n sont des analogues non commutatifs des h_n
- ▶ On obtient des analogues non commutatifs Λ_n des e_n en posant

$$\sum_{n \geq 0} \Lambda_n(A) t^n = \prod_{i \geq 1}^{\leftarrow} (1 + ta_i)$$

- ▶ On dit qu'un mot $w = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r}$ a une descente en k si

$$i_k > i_{k+1}$$

- ▶ Somme de tous les mots de longueur n sans descente : $S_n(A)$
- ▶ Sommes des mots de longueur n qui n'ont que des descentes : $\Lambda_n(A)$

- ▶ Bases multiplicatives (S^I) et (Λ^I)

$$S^I = S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_r}$$

$$\Lambda^I = \Lambda_{i_1} \Lambda_{i_2} \dots \Lambda_{i_r}$$

- ▶ S^I est la somme des mots w de longueur $|I|$ tels que

$$\text{Des}(w) \subset \text{Des}(I) = \{i_1, i_1 + i_2, \dots, |I|\}$$

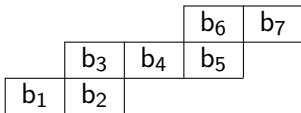
- ▶ On note $C(w)$ la composition I telle que

$$\text{Des}(I) = \text{Des}(w)$$

- ▶ Il est alors naturel d'introduire la base des *rubans* R_I

$$R_I(A) = \sum_{C(w)=I} w$$

- Exemple : pour $l = (2, 3, 2)$, R_l est la somme des mots $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7$



tels que $b_1 \leq b_2 > b_3 \leq b_4 \leq b_5 > b_6 \leq b_7$.

► Sommes d'alphabets

$$f(A + B) = f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$$

$$\sigma_t(A + B) = \sigma_t(A)\sigma_t(B)$$

► Généralisation

$$\sigma_t(\alpha A + \beta B) = \sigma_t(A)^\alpha \sigma_t(B)^\beta$$

- ▶ Coproduit usuel sur **Sym**

$$\Delta_0(F) = F(A + B)$$

$$F \otimes G = F(A)G(B)$$

- ▶ De manière équivalente

$$\Delta_0 S_n = \sum_{k=0}^n S_k \otimes S_{n-k}$$

- ▶ Algèbre de Hopf \mathcal{H}_0^{NC} des fonctions symétriques non commutatives

- ▶ Les séries entières à une variable à coefficients dans une algèbre non commutative peuvent également être composées (par substitution de la variable)
- ▶ Cette loi n'est pas associative, et ne forme donc pas un groupe
- ▶ Cependant, l'analogue \mathcal{H}_1^{NC} de l'algèbre de Faà di Bruno existe tout de même dans ce contexte

► Coproduit

$$\Delta_1 S_n(A) = \sum_{k=0}^n S_k(A) \otimes S_{n-k}((k+1)A)$$

► Antipode

$$s_1(S_n) = \sum_l \alpha_l S^l = \sum_l \beta_l R_l = \sum_l \delta_l \Lambda^l$$

L'inversion de Lagrange non commutative

- ▶ Formule d'inversion de Lagrange non commutative de Brouder-Frabetti-Krattenthaler

$$\alpha_I = (-1)^{\ell(I)} \sum_{F \in \text{NDPF}(I(I)-1)} \prod_{k=1}^{I(I)-1} \binom{i_k + 1}{m_k(F)}$$

- ▶ Formule d'inversion de Lagrange non commutative de Gessel et Pak-Postnikov-Retakh

$$\delta_I = (-1)^{|I|} \sum_{F \in \text{NDPF}(I(I)-1)} \prod_{k=1}^{I(I)-1} \binom{i_k}{m_k(F)}$$

- ▶ $\text{NDPF}(n)$: fonctions de parking croissantes de taille n

$$F = (f_1 \leq \dots \leq f_n), 0 < f_i \leq i$$

- ▶ Ensemble de cardinal Cat_n

- ▶ Novelli et Thibon introduisent une involution qui leur permet de montrer

$$\delta_I = \delta_{\bar{I}}$$

- ▶ On en déduit

$$\alpha_I = (-1)^{|I| - \ell(I)} \beta_{I'}$$

- ▶ En calculant l'antipode d'une déformation \mathcal{H}_γ^{NC} de \mathcal{H}_1^{NC} introduite par Foissy, on obtient une formule de récurrence pour α_I
- ▶ Le développement des R_I sur la base des S^J permet d'en déduire une récurrence pour β_I
- ▶ A partir de ces deux récurrences et des liens entre les α_I et les β_I , on en déduit une formule de récurrence plus simple

- ▶ Le coefficient β_I est déterminé par

$$\beta_I = \beta_{(i_1, \dots, i_{s-1}+1, i_s-1)} + \beta_{(i_1, \dots, i_{s-1})} \beta_{i_s}$$

lorsque $l(I) > 1$. Lorsque $I = (n)$,

$$\beta_n = (-1)^n.$$

- ▶ On en déduit une formule de récurrence du même type pour le coefficient δ_I .

- ▶ Le coefficient δ_l est déterminé par

$$\delta_n = \delta_{1^n} = (-1)^n,$$

$$\delta_{(1^n) \cdot l} = (-1)^n \delta_l,$$

$$\delta_{l \cdot (n)} = (-1)^{n-1} \delta_l,$$

et pour $n > 1$ et $k > 0$,

$$\delta_{(n,k) \cdot l} = -(\delta_{(n-1,k) \cdot l} + \delta_{(n+k-1) \cdot l})$$

- ▶ Interprétations algébriques

Interprétations combinatoires

- ▶ Une interprétation combinatoire de la formule de Brouder-Frabetti-Krattenthaler (Novelli-Thibon)
- ▶ $|\alpha_I|$ est le nombre d'arbres ordonnés à $n + 1$ feuilles dont la suites des arités non nulles moins 1 dans l'ordre préfixe est I
- ▶ Les deux formules de récurrence nous permettent de donner de nouvelles interprétations combinatoires des coefficients β_I et δ_I , cette fois en termes de fonctions de parking croissantes

- ▶ Interprétation combinatoire des β_I

$$\beta_I = (-1)^{|I|} \#\{F \in \text{NDPF}(|I|) \mid F \leq \rho(I)\}$$

- ▶ $\rho(I) = (1^{i_1} 2^{i_2} \dots s^{i_s})$

$$\rho(212) = (11233)$$

- ▶ On note $F \leq G$ lorsque pour tout i , $F_i \leq G_i$

$$(1123) \leq (1224)$$

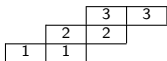
- ▶ On a

$$|\alpha_I| = |\beta_{I'}|$$

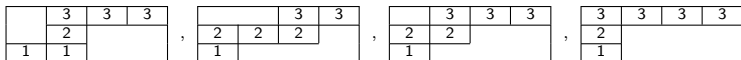
- ▶ Le nombre d'arbres ordonnés à $n + 1$ feuilles dont la suite des arités non nulles moins 1 dans l'ordre préfixe est I , est le même que le nombre de fonctions de parking croissantes inférieures à $p(I')$ terme à terme et de même taille
- ▶ Interprétation combinatoire des δ_I

$$\delta_I = (-1)^{|I|} \#\{J \models |I| \mid \ell(I) = \ell(J) \text{ et } p(J) \geq p(I)\}$$

- ▶ On représente $p(I)$ par un ruban, par exemple pour $I = (222)$



- ▶ $|\delta_I|$ est alors le nombre de rubans inscrits dans le même rectangle et qui passent en haut à gauche du premier ruban. Ces rubans sont les suivants



ainsi que le premier, d'où

$$\delta_{(222)} = 5$$

- ▶ On peut facilement comprendre la formule $\tilde{\delta}_I = \delta_I$ en faisant effectuer un quart de tour aux dessins de rubans
- ▶ En faisant effectuer un demi-tour aux dessins de rubans, on s'aperçoit que l'on a aussi

$$\delta_I = (-1)^{|I|} \#\{J \models |I| \mid \ell(I) = \ell(J) \text{ et } p(J) \leq p(I')\}$$

- ▶ De la formule de Brouder-Frabetti-Krattenthaler et de celle de Gessel et Pak-Postnikov-Retakh, on déduit directement que

$$\alpha_I = (-1)^{|I|} \delta_{i_1+1, i_2+1, \dots}$$

- ▶ σ_1^* est invariante par le morphisme d'algèbres de \mathcal{H}_1^{NC} dans \mathcal{H}_1^{NC} qui envoie Λ_1 sur 0 et Λ_n sur $(-1)^{n-1} S_{n-1}$

- ▶ Fonctions de parking croissantes tassées : images des compositions par ρ
- ▶ Exemple

$$F = (1123)$$

- ▶ A partir d'une fonction de parking croissante tassée F de taille s , on construit une fonction de parking croissante \tilde{F} en rajoutant une part de chaque valeur comprise entre 1 et sa dernière part

$$\tilde{F} = (11112233)$$

- ▶ Le nombre de fonctions de parking croissantes tassées G de même taille que \tilde{F} , de même dernière part et vérifiant $G \leq \tilde{F}$, est égal au nombre total de fonctions de parking G de même taille que F vérifiant $G \leq F$

- ▶ Une bijection explicite

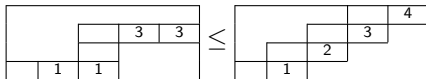
$$f : A_F \mapsto B_F$$

- ▶ A_F : ensemble des $G \in \text{NDPF}(n)$ telles que $G \leq F$
- ▶ B_F : ensemble des $G \in \text{NDPF}(k)$ tassées, de même dernier terme que \tilde{F} et vérifiant $G \leq \tilde{F}$
- ▶ n : taille de F
- ▶ k : taille de \tilde{F}

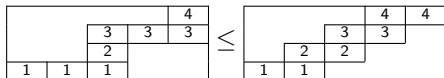
- ▶ $f(G)$ est obtenue en ajoutant à G une part s pour chaque s compris entre 1 et le dernier terme de \tilde{F}
- ▶ Exemple : $F = (12334)$, $G = (11333)$

$$\tilde{F} = (11223344), f(G) = (11123334)$$

- ▶ $G \leq F$



- ▶ $f(G) \leq \tilde{F}$



Merci