

Arbres binaires, arbres non-croisés, quadrangulations

Frédéric Chapoton

janvier 2010

Plan

- 1 Les arbres binaires
- 2 Les arbres non-croisés
- 3 La relation entre les deux
- 4 Dualité et rotation
- 5 Les intervalles
- 6 Le contexte algébrique

Définition des arbres binaires

On commence avec les **arbres binaires** (plans), dont on peut donner une définition récursive.

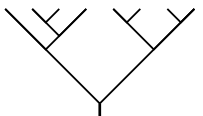
Un arbre binaire T est soit l'arbre binaire trivial $|$ soit une paire (T_1, T_2) d'arbres binaires. Symboliquement

$$T = | + (T_1, T_2).$$

Les premiers arbres binaires sont

$$\{ | \} \quad \{ \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \} \quad \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \} \quad \{ \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \}.$$

Voici un exemple d'arbre binaire plus grand :



Énumération par les nombres de Catalan

On note \mathbf{Y}_n l'ensemble des arbres binaires à $n + 1$ feuilles. Ces arbres binaires ont n sommets internes.

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_0 &= \{|\} & \mathbf{Y}_1 &= \{\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\} & \mathbf{Y}_2 &= \{\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagdown \\ \diagup \end{array}\} \\ \mathbf{Y}_3 &= \{\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagdown \\ \diagup \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagup \\ \diagdown \end{array}, \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \\ \diagup \\ \diagdown \end{array}\}\end{aligned}$$

Le cardinal de l'ensemble \mathbf{Y}_n est

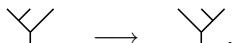
$$\#\mathbf{Y}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

qui sont les **nombres de Catalan** : 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, ...
Bijection avec les parenthésages, les mots de Dyck, etc, etc.

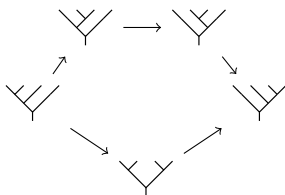
Le graphe orienté des arbres binaires

Les arbres binaires ne forment pas seulement un ensemble, mais aussi un **graphe orienté**.

On a une arête orientée $T \rightarrow T'$ si on passe de T à T' par un changement local de la forme



On a ainsi dans le cas de Y_3 le graphe suivant :



Le graphe orienté définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble \mathbf{Y}_n , en posant $T \geq T'$ si $T \rightarrow T'$. Cet ordre partiel est un treillis, le **treillis de Tamari**.

Le graphe orienté définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble \mathbf{Y}_n , en posant $T \geq T'$ si $T \rightarrow T'$. Cet ordre partiel est un treillis, le **treillis de Tamari**.

On peut aussi considérer le graphe non-orienté associé sur \mathbf{Y}_n . C'est un graphe connexe **régulier** de valence $n - 1$: tout arbre binaire a exactement $n - 1$ arêtes incidentes.

Le graphe orienté définit une relation d'ordre partiel sur l'ensemble \mathbf{Y}_n , en posant $T \geq T'$ si $T \rightarrow T'$. Cet ordre partiel est un treillis, le **treillis de Tamari**.

On peut aussi considérer le graphe non-orienté associé sur \mathbf{Y}_n . C'est un graphe connexe **régulier** de valence $n - 1$: tout arbre binaire a exactement $n - 1$ arêtes incidentes.

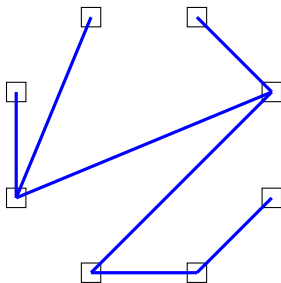
Il existe une famille de polytopes, dont ces graphes sont les graphes formés par les sommets et les arêtes : ce sont les **associaèdres** ou **polytopes de Stasheff**. Pour \mathbf{Y}_n , c'est un polytope de dimension $n - 1$.

Plan

- 1 Les arbres binaires
- 2 Les arbres non-croisés
- 3 La relation entre les deux
- 4 Dualité et rotation
- 5 Les intervalles
- 6 Le contexte algébrique

Définition des arbres non-croisés

On passe à d'autres objets : les **arbres non-croisés**. On considère les sommets d'un polygone régulier d'ordre $n + 1$.



Un arbre non-croisé est un ensemble de segments joignant ces sommets **sans se couper**, qui **relient tous les points** entre eux et ne forment **pas de cycles**.

Un tel arbre a nécessairement n segments.

Énumération des arbres non-croisés

On note NCT_{n+1} l'ensemble des arbres non-croisés dans le polygone à $n + 1$ sommets.

Énumération des arbres non-croisés

On note NCT_{n+1} l'ensemble des arbres non-croisés dans le polygone à $n + 1$ sommets.

On a alors le résultat suivant (Dulucq-Penaud, 1993) :

$$\#\text{NCT}_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n},$$

qui ressemble un peu à la formule pour les nombres de Catalan.

Cette suite commence par 1, 1, 3, 12, 55, 273, 1428, ...

Énumération des arbres non-croisés

On note NCT_{n+1} l'ensemble des arbres non-croisés dans le polygone à $n + 1$ sommets.

On a alors le résultat suivant (Dulucq-Penaud, 1993) :

$$\#\text{NCT}_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \binom{3n}{n},$$

qui ressemble un peu à la formule pour les nombres de Catalan.

Cette suite commence par 1, 1, 3, 12, 55, 273, 1428, ...

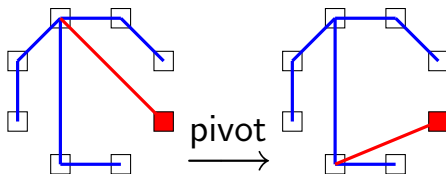
Ces objets sont en bijection avec les **arbres ternaires** et avec les **quadrangulations**.

Graphe orienté des arbres non-croisés

On peut aussi définir un graphe orienté sur les arbres non-croisés : les arêtes sont des **pivots** dans le sens trigonométrique.

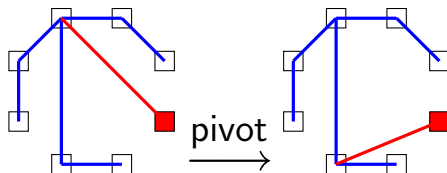
Graphe orienté des arbres non-croisés

On peut aussi définir un graphe orienté sur les arbres non-croisés :
les arêtes sont des **pivots** dans le sens trigonométrique.
Par exemple



Graphe orienté des arbres non-croisés

On peut aussi définir un graphe orienté sur les arbres non-croisés : les arêtes sont des **pivots** dans le sens trigonométrique.
Par exemple



On remplace une arête par une autre arête ayant un point en commun, en tournant autour de ce point dans le sens direct, à l'intérieur du polygone. L'extrémité qui change doit parcourir un segment appartenant à l'arbre non-croisé.

Plan

- 1 Les arbres binaires
- 2 Les arbres non-croisés
- 3 La relation entre les deux
- 4 Dualité et rotation
- 5 Les intervalles
- 6 Le contexte algébrique

Inclusion

On va envoyer

arbres binaires $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{\varphi} \mathbf{NCT}_{n+1}$ arbres non-croisés

Inclusion

On va envoyer

arbres binaires $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{\varphi} \mathbf{NCT}_{n+1}$ arbres non-croisés

La définition de φ est récursive : l'arbre binaire trivial $|$ est envoyé sur l'unique arbre non-croisé (vide) dans le 1-polygone.

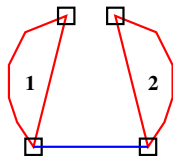
Inclusion

On va envoyer

arbres binaires $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{\varphi} \mathbf{NCT}_{n+1}$ arbres non-croisés

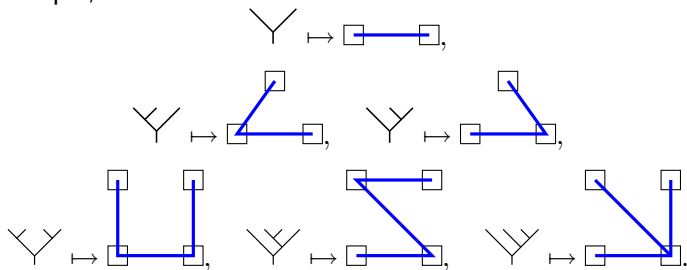
La définition de φ est récursive : l'arbre binaire trivial $|$ est envoyé sur l'unique arbre non-croisé (vide) dans le 1-polygone.

Un arbre binaire T de la forme (T_1, T_2) est envoyé sur l'arbre non-croisé obtenu en plaçant $\varphi(T_1)$ et $\varphi(T_2)$ sur les cotés gauche et droit d'un quadrilatère. On obtient un arbre non-croisé en prenant l'union de $\varphi(T_1)$, $\varphi(T_2)$ et de la base du quadrilatère.



Inclusion : exemples

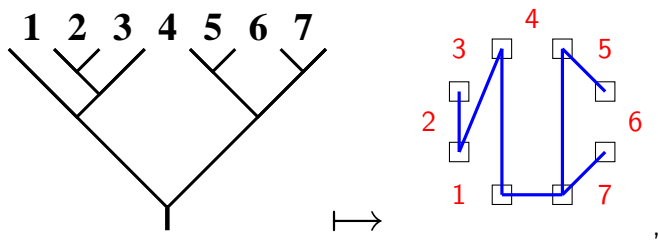
Par exemple,



Définition non récursive de φ

On peut aussi définir φ directement.

On envoie un arbre binaire sur un ensemble de segments entiers dans $[1, n]$, puis cet ensemble sur un arbre non-croisé. Par exemple, pour



l'ensemble est $\{[1, 3], [2, 2], [2, 3], [1, 7], [5, 5], [5, 7], [7, 7]\}$.

Inclusion de graphes orientés

Il est facile de voir que φ est une inclusion d'ensembles finis.

Inclusion de graphes orientés

Il est facile de voir que φ est une inclusion d'ensembles finis.

Proposition

L'application φ est une inclusion de graphes orientés.

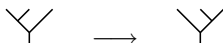
Inclusion de graphes orientés

Il est facile de voir que φ est une inclusion d'ensembles finis.

Proposition

L'application φ est une inclusion de graphes orientés.

Il faut vérifier qu'un changement local de la forme



dans un arbre binaire se traduit par un pivot dans l'arbre non-croisé associé. C'est facile avec la description non-réursive de φ .

Image de φ

Question

Quelle est l'image de φ ?

Image de φ

Question

Quelle est l'image de φ ?

Réponse

Ce sont les arbres non-croisés **sans coin haut**.

Image de φ

Question

Quelle est l'image de φ ?

Réponse

Ce sont les arbres non-croisés **sans coin haut**.

Un **coin** dans un arbre non-croisé est un ensemble de deux arêtes ayant un sommet commun, et qui sont adjacentes.

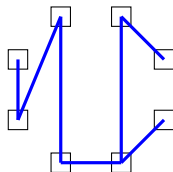


Image de φ

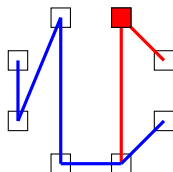
Question

Quelle est l'image de φ ?

Réponse

Ce sont les arbres non-croisés **sans coin haut**.

Un **coin** dans un arbre non-croisé est un ensemble de deux arêtes ayant un sommet commun, et qui sont adjacentes.



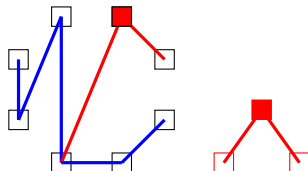
Les trois types de coins

On peut montrer que

Lemme

Dans tout arbre non-croisé dans le $n + 1$ -polygone, il a $n - 1$ coins.

On distingue 3 types de coins : **haut**, gauche et droit.



selon la restriction de l'arbre non croisé au triangle associé au coin.
On prend comme base du triangle le coté le plus proche de la base du polygone.

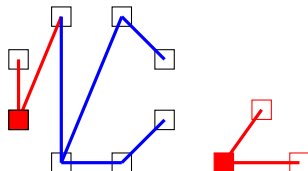
Les trois types de coins

On peut montrer que

Lemme

Dans tout arbre non-croisé dans le $n + 1$ -polygone, il a $n - 1$ coins.

On distingue 3 types de coins : haut, **gauche** et droit.



selon la restriction de l'arbre non croisé au triangle associé au coin.
On prend comme base du triangle le coté le plus proche de la base du polygone.

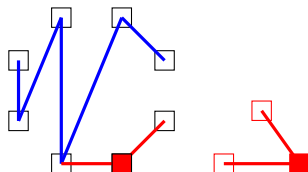
Les trois types de coins

On peut montrer que

Lemme

Dans tout arbre non-croisé dans le $n + 1$ -polygone, il a $n - 1$ coins.

On distingue 3 types de coins : haut, gauche et **droit**.



selon la restriction de l'arbre non croisé au triangle associé au coin.
On prend comme base du triangle le coté le plus proche de la base du polygone.

Symétrie

Comme dit plus haut, on a une bijection

arbres binaires $\xleftrightarrow{\varphi}$ arbres non-croisés sans coin haut.

Symétrie

Comme dit plus haut, on a une bijection

arbres binaires $\xleftrightarrow{\varphi}$ arbres non-croisés sans coin haut.

Mais il y a une **surprise** !

Symétrie

Comme dit plus haut, on a une bijection

arbres binaires $\xleftrightarrow{\varphi}$ arbres non-croisés sans coin haut.

Mais il y a une **surprise** !

Symétrie totale de (droit, gauche, haut)

La série génératrice finie qui compte les arbres non-croisés selon leurs coins gauches, droits et hauts

$$\sum_{t \in \text{NCT}_{n+1}} x^{G(t)} y^{D(t)} z^{H(t)}$$

est symétrique en x, y, z .

Symétrie

Comme dit plus haut, on a une bijection

arbres binaires $\xleftrightarrow{\varphi}$ arbres non-croisés sans coin haut.

Mais il y a une **surprise** !

Symétrie totale de (droit, gauche, haut)

La série génératrice finie qui compte les arbres non-croisés selon leurs coins gauches, droits et hauts

$$\sum_{t \in \text{NCT}_{n+1}} x^{G(t)} y^{D(t)} z^{H(t)}$$

est symétrique en x, y, z . (cf. arbres ternaires)

On a en fait aussi des bijections naturelles

arbres binaires \longleftrightarrow arbres non-croisés sans coin gauche,

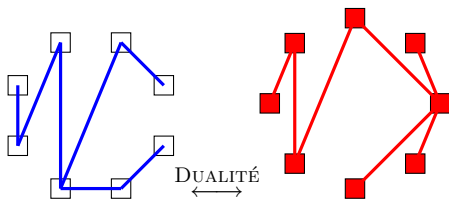
arbres binaires \longleftrightarrow arbres non-croisés sans coin droit.

Plan

- 1 Les arbres binaires
- 2 Les arbres non-croisés
- 3 La relation entre les deux
- 4 Dualité et rotation
- 5 Les intervalles
- 6 Le contexte algébrique

Dualité pour les arbres non-croisés

On a une dualité sur les arbres non-croisés (essentiellement la dualité des graphes plans). On place un sommet du dual entre chaque paire de sommets consécutifs.



On peut dessiner le graphe dual avec ses sommets dans un polygone « posé sur la pointe ». On peut se ramener à un polygone posé sur sa base en pivotant un peu dans le sens horaire. Le carré de la dualité devient alors la rotation d'un cran.

Proposition

Dualité et rotation sont des isomorphismes du graphe orienté des arbres non-croisés.

Il suffit de voir que les pivots sont bien transformés en pivots par la dualité.

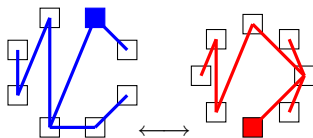
Dualité et graphe orienté

Proposition

Dualité et rotation sont des isomorphismes du graphe orienté des arbres non-croisés.

Il suffit de voir que les pivots sont bien transformés en pivots par la dualité.

Voici un exemple.



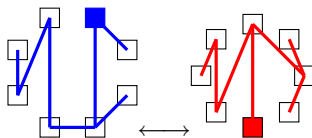
Dualité et graphe orienté

Proposition

Dualité et rotation sont des isomorphismes du graphe orienté des arbres non-croisés.

Il suffit de voir que les pivots sont bien transformés en pivots par la dualité.

Voici un exemple.



Remarque

Le retournement (symétrie droite-gauche des arbres non-croisés) est un anti-automorphisme du graphe orienté. Il transforme pivot en inverse de pivot.

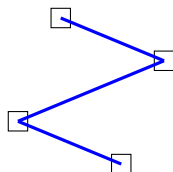
On aimerait comprendre le graphe orienté des arbres non-croisés. On peut se demander par exemple

Question

Quelles sont les orbites sous le groupe engendré par la dualité et les rotations ?

Dualité et quadrangulations

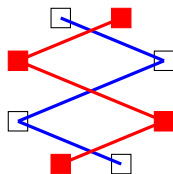
On peut commencer par chercher les orbites pour la dualité.
Elles sont naturellement en bijection avec des **quadrangulations**.



Un arbre non-croisé (un peu penché).

Dualité et quadrangulations

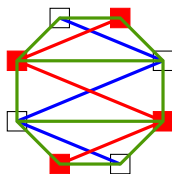
On peut commencer par chercher les orbites pour la dualité.
Elles sont naturellement en bijection avec des **quadrangulations**.



Un arbre non-croisé et son dual.

Dualité et quadrangulations

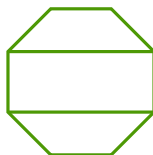
On peut commencer par chercher les orbites pour la dualité.
Elles sont naturellement en bijection avec des **quadrangulations**.



On rajoute toutes les arêtes possibles sans croisement.

Dualité et quadrangulations

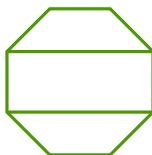
On peut commencer par chercher les orbites pour la dualité.
Elles sont naturellement en bijection avec des **quadrangulations**.



On obtient une quadrangulation (dissection d'un polygone en carrés).

Dualité et quadrangulations

On peut commencer par chercher les orbites pour la dualité.
Elles sont naturellement en bijection avec des **quadrangulations**.



On obtient une quadrangulation (dissection d'un polygone en carrés).

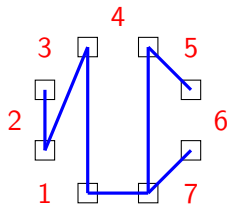
En conclusion, les orbites sous le groupe d'automorphisme sont en bijection avec les quadrangulations à rotation près.

Plan

- 1 Les arbres binaires
- 2 Les arbres non-croisés
- 3 La relation entre les deux
- 4 Dualité et rotation
- 5 Les intervalles
- 6 Le contexte algébrique

Une fraction par arbre

A chaque arbre non-croisé T dans NCT_{n+1} , on associe une fraction $\psi(T)$ en n variables u_1, \dots, u_n .
Par exemple, pour l'arbre



1

$$\frac{1}{(u_1 + u_2 + u_3)(u_2)(u_2 + u_3)(u_1 + \dots + u_7)(u_5)(u_5 + u_6 + u_7)(u_7)}$$

En particulier, on a aussi une fraction $\psi(t)$ pour chaque arbre binaire t , via l'inclusion φ .

Les arbres non-croisés comme intervalles

Rappel : un ordre partiel \leq sur l'ensemble \mathbf{Y}_n , le treillis de Tamari.
On a donc un ensemble d'**intervalles**

$$\{(x, y) \in \mathbf{Y}_n \times \mathbf{Y}_n \mid x \leq y\}. \quad (1)$$

Théorème

[C.-Hivert-Novelli-Thibon] Pour tout arbre non-croisé T dans NCT_{n+1} , il existe un unique intervalle $I(T)$ dans le treillis de Tamari \mathbf{Y}_n tel que

$$\psi(T) = \sum_{t \in I(T)} \psi(t).$$

Ceci définit une **injection** de l'ensemble NCT_{n+1} dans l'ensemble des intervalles de \mathbf{Y}_n .

Les trois inclusions

On avait trois inclusions de \mathbf{Y}_n dans \mathbf{NCT}_{n+1} avec pour images les arbres non-croisés

- sans coin haut,
- sans coin gauche
- sans coin droit.

En composant, on obtient trois inclusions de \mathbf{Y}_n dans les intervalles de \mathbf{Y}_n .

Ca correspond à envoyer t sur les intervalles

- $[t, t]$,
- $[min, t]$ et
- $[t, max]$

respectivement.

Théorème

Le nombre d'intervalles dans \mathbf{Y}_n est $\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}$.

Théorème

Le nombre d'intervalles dans \mathbf{Y}_n est $\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}$.

C'est aussi le nombre de triangulations avec $n + 3$ arêtes.
Bernardi et Bonichon ont obtenu une bijection en 2007.

Théorème

Le nombre d'intervalles dans \mathbf{Y}_n est $\frac{2(4n+1)!}{(n+1)!(3n+2)!}$.

C'est aussi le nombre de triangulations avec $n + 3$ arêtes.
Bernardi et Bonichon ont obtenu une bijection en 2007.
Il y a aussi une égalité entre certains intervalles "nouveaux" et les cartes eulériennes, mais pas encore de bijection à ma connaissance.

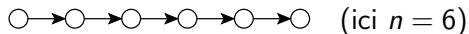
Plan

- 1 Les arbres binaires
- 2 Les arbres non-croisés
- 3 La relation entre les deux
- 4 Dualité et rotation
- 5 Les intervalles
- 6 Le contexte algébrique

Carquois, modules, modules basculants

Ce qu'il y a derrière tout ça.

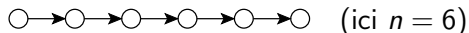
On commence avec le **carquois** (graphe orienté) ci-dessous, nommé $\vec{\mathbb{A}}_n$:



Carquois, modules, modules basculants

Ce qu'il y a derrière tout ça.

On commence avec le **carquois** (graphe orienté) ci-dessous, nommé $\vec{\mathbb{A}}_n$:

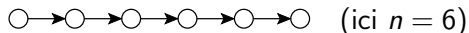


On a une notion de **module** sur ce carquois : un espace vectoriel en chaque sommet, une application linéaire pour chaque flèche.

Carquois, modules, modules basculants

Ce qu'il y a derrière tout ça.

On commence avec le **carquois** (graphe orienté) ci-dessous, nommé $\vec{\mathbb{A}}_n$:



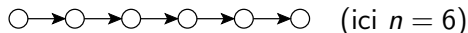
On a une notion de **module** sur ce carquois : un espace vectoriel en chaque sommet, une application linéaire pour chaque flèche. On a alors une correspondance

modules basculants pour $\vec{\mathbb{A}}_n \longleftrightarrow$ arbres binaires dans \mathbf{Y}_n

Carquois, modules, modules basculants

Ce qu'il y a derrière tout ça.

On commence avec le **carquois** (graphe orienté) ci-dessous, nommé $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$:



On a une notion de **module** sur ce carquois : un espace vectoriel en chaque sommet, une application linéaire pour chaque flèche. On a alors une correspondance

modules basculants pour $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n \longleftrightarrow$ arbres binaires dans \mathbf{Y}_n

Pour tout carquois, il existe un ordre partiel naturel sur les modules basculants (Riedtmann-Schofield et Happel-Unger).

Dans le cas $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$, on trouve le treillis de Tamari sur \mathbf{Y}_n .

Suites exceptionnelles

Cette correspondance entre arbres binaires et modules basculants se généralise en une bijection

suites exceptionnelles pour $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n \longleftrightarrow$ arbres non-croisés NCT_{n+1}
(à permutation près)

Ceci nécessite de passer dans la catégorie dérivée de la catégorie des modules sur $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$.

Suites exceptionnelles

Cette correspondance entre arbres binaires et modules basculants se généralise en une bijection

suites exceptionnelles pour $\vec{\mathbb{A}}_n \longleftrightarrow$ arbres non-croisés NCT_{n+1}
(à permutation près)

Ceci nécessite de passer dans la catégorie dérivée de la catégorie des modules sur $\vec{\mathbb{A}}_n$.

On a (pour tout carquois) une action du groupe de tresses sur l'ensemble des suites exceptionnelles.

En termes d'arbres non-croisés, l'action des tresses élémentaires $\sigma_{i,i+1}$ se traduit par un pivot.

Catégories

On peut maintenant considérer la catégorie \mathcal{C}_n des modules sur l'algèbre d'incidence du poset de Tamari \mathbf{Y}_n .

Dans la catégorie \mathcal{C}_n , on a trois familles d'objets en bijection avec \mathbf{Y}_n : les simples, les projectifs et les injectifs.

Catégories

On peut maintenant considérer la catégorie \mathcal{C}_n des modules sur l'algèbre d'incidence du poset de Tamari \mathbf{Y}_n .

Dans la catégorie \mathcal{C}_n , on a trois familles d'objets en bijection avec \mathbf{Y}_n : les simples, les projectifs et les injectifs.

On peut aussi considérer les arbres non-croisés de \mathbf{NCT}_{n+1} comme des objets de \mathcal{C}_n (car les intervalles de \mathbf{Y}_n sont des objets de \mathcal{C}_n).

On cherche en fait à comprendre les catégories \mathcal{C}_n , et leur catégories dérivées.

Catégories

On peut maintenant considérer la catégorie \mathcal{C}_n des modules sur l'algèbre d'incidence du poset de Tamari \mathbf{Y}_n .

Dans la catégorie \mathcal{C}_n , on a trois familles d'objets en bijection avec \mathbf{Y}_n : les simples, les projectifs et les injectifs.

On peut aussi considérer les arbres non-croisés de \mathbf{NCT}_{n+1} comme des objets de \mathcal{C}_n (car les intervalles de \mathbf{Y}_n sont des objets de \mathcal{C}_n).

On cherche en fait à comprendre les catégories \mathcal{C}_n , et leur catégories dérivées.

Tout ce qui précède est donc fortement lié aux carquois de type $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$.

Ces catégories existent aussi pour les autres diagrammes de Dynkin, mais elles sont de nature moins combinatoire.

Dans une autre direction, tout ceci est motivé par les **algèbres dendriformes** introduites par Loday, qui donnent un produit associatif $*$ sur les arbres binaires.

Dans une autre direction, tout ceci est motivé par les **algèbres dendriformes** introduites par Loday, qui donnent un produit associatif $*$ sur les arbres binaires.

Il existe aussi un **jeu de taquin** sur les arbres binaires, défini par Aval et Viennot, qui donne un autre produit associatif $\#$.

Dans une autre direction, tout ceci est motivé par les **algèbres dendriformes** introduites par Loday, qui donnent un produit associatif $*$ sur les arbres binaires.

Il existe aussi un **jeu de taquin** sur les arbres binaires, défini par Aval et Viennot, qui donne un autre produit associatif $\#$.

On a en fait beaucoup d'opérations sur les arbres binaires, certaines se relèvent en opérations sur les arbres non-croisés.

Dans une autre direction, tout ceci est motivé par les **algèbres dendriformes** introduites par Loday, qui donnent un produit associatif $*$ sur les arbres binaires.

Il existe aussi un **jeu de taquin** sur les arbres binaires, défini par Aval et Viennot, qui donne un autre produit associatif $\#$.

On a en fait beaucoup d'opérations sur les arbres binaires, certaines se relèvent en opérations sur les arbres non-croisés.

Il reste beaucoup de choses à comprendre dans les relations entre ces diverses opérations et les catégories qui entrent en jeu.