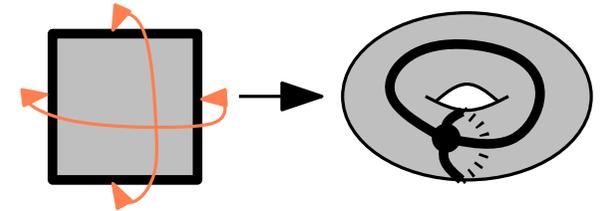
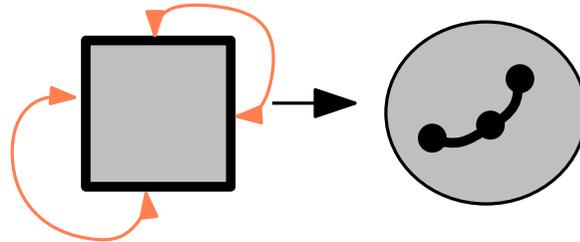
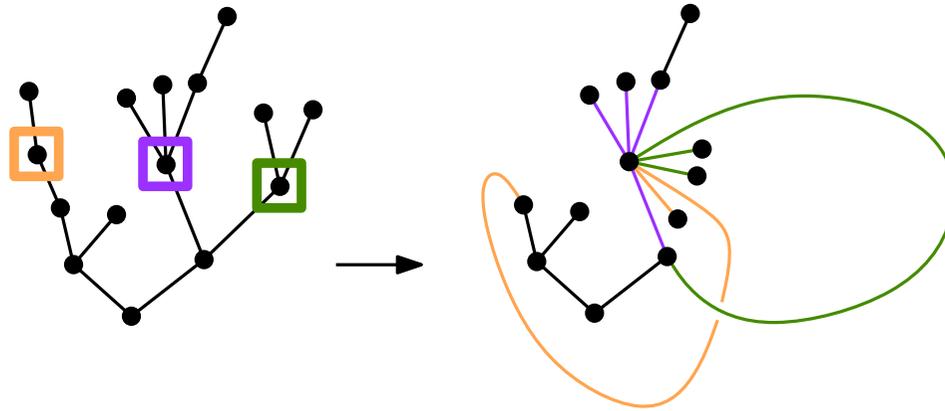
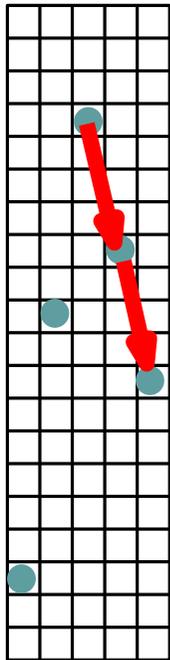
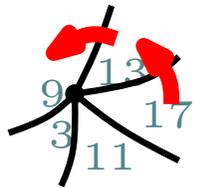


Une bijection pour les cartes à une face.



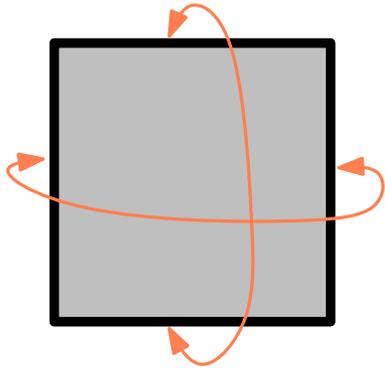
Guillaume Chapuy.
Bordeaux, Février 2009.

Cartes à une face, version polygone.

On recolle deux à deux les arêtes d'un $2n$ -gone pour former une surface sans bord.

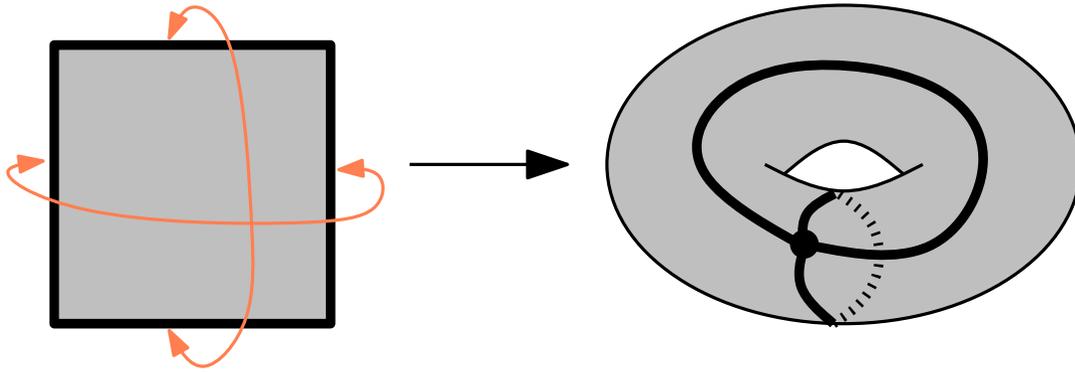
Cartes à une face, version polygone.

On recolle deux à deux les arêtes d'un $2n$ -gone pour former une surface sans bord.



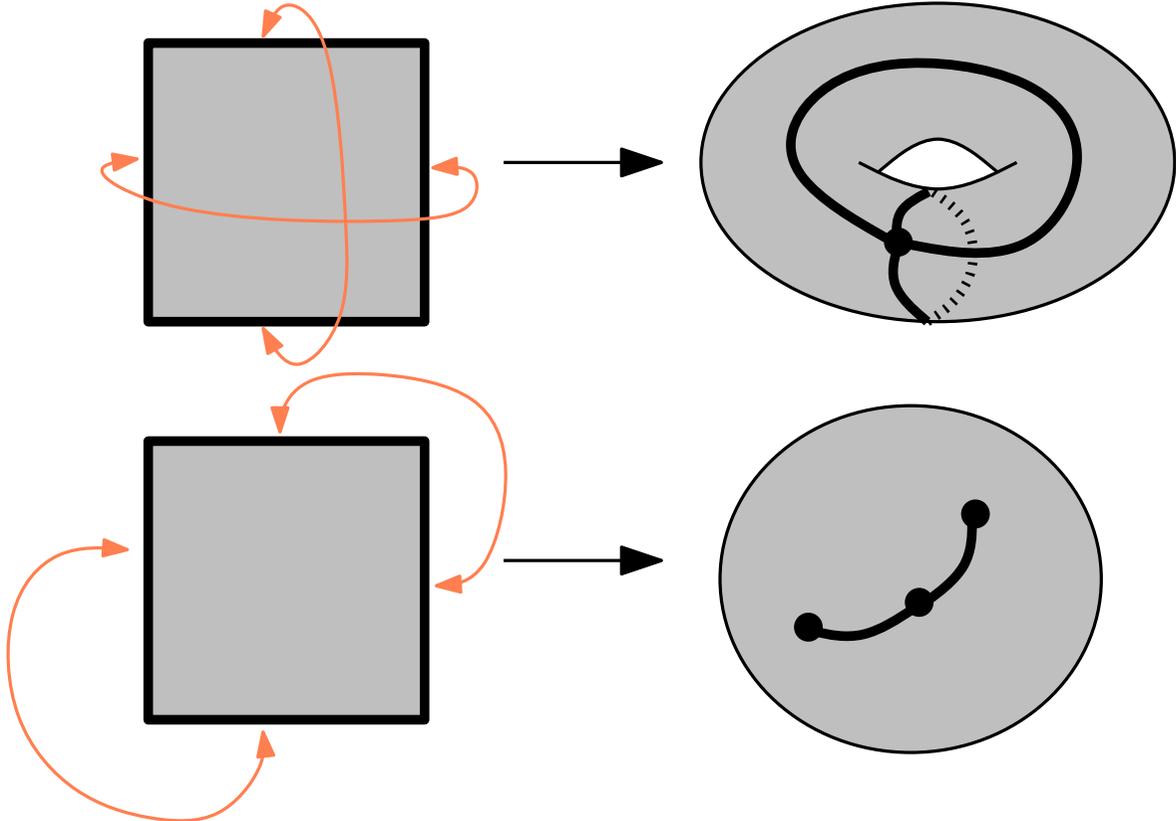
Cartes à une face, version polygone.

On recolle deux à deux les arêtes d'un $2n$ -gone pour former une surface sans bord.



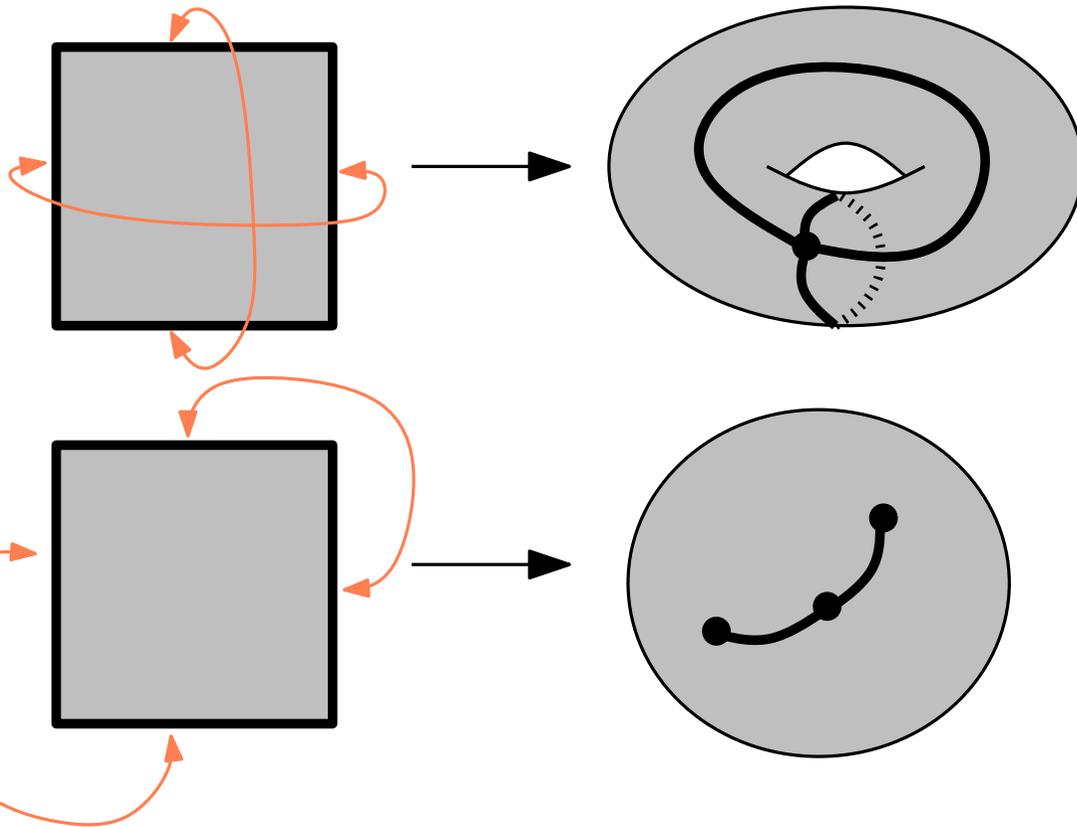
Cartes à une face, version polygone.

On recolle deux à deux les arêtes d'un $2n$ -gone pour former une surface sans bord.



Cartes à une face, version polygone.

On recolle deux à deux les arêtes d'un $2n$ -gone pour former une surface sans bord.



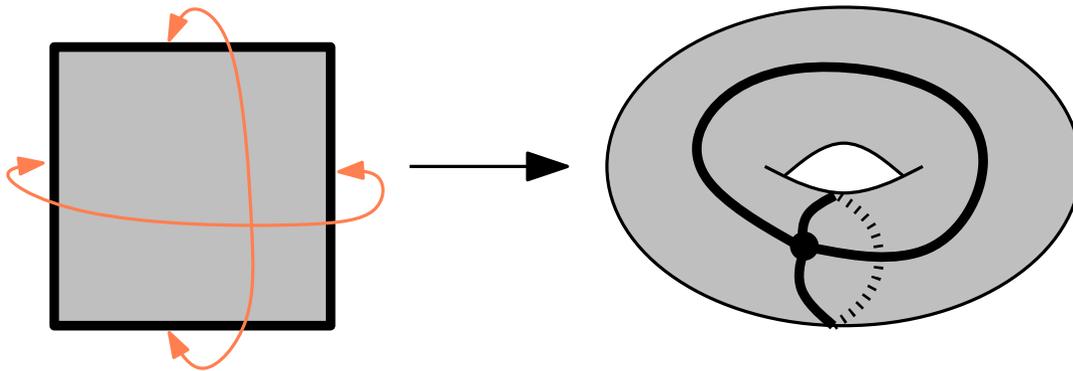
L'image du polygone de départ forme le dessin d'un **graphe à n arêtes** sur la surface.

La **relation d'Euler** relie le nombre de **sommets** au **genre** de la surface :

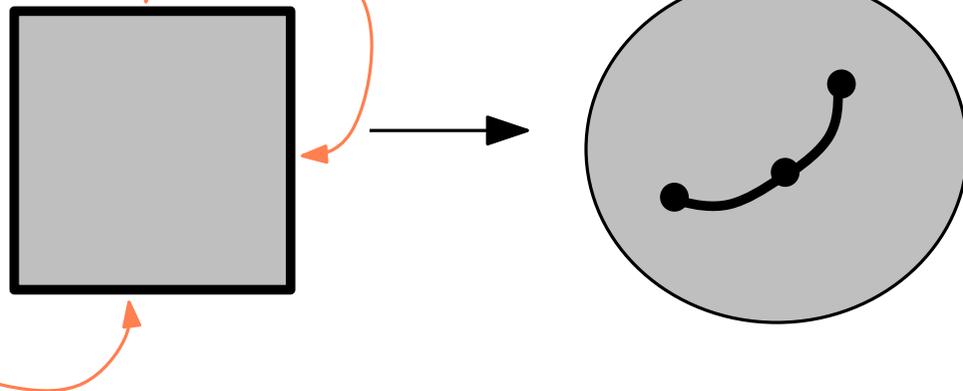
$$s = n + 1 - 2g$$

Cartes à une face, version polygone.

On recolle deux à deux les arêtes d'un $2n$ -gone pour former une surface sans bord.



1 sommet, genre 1



3 sommets, genre 0

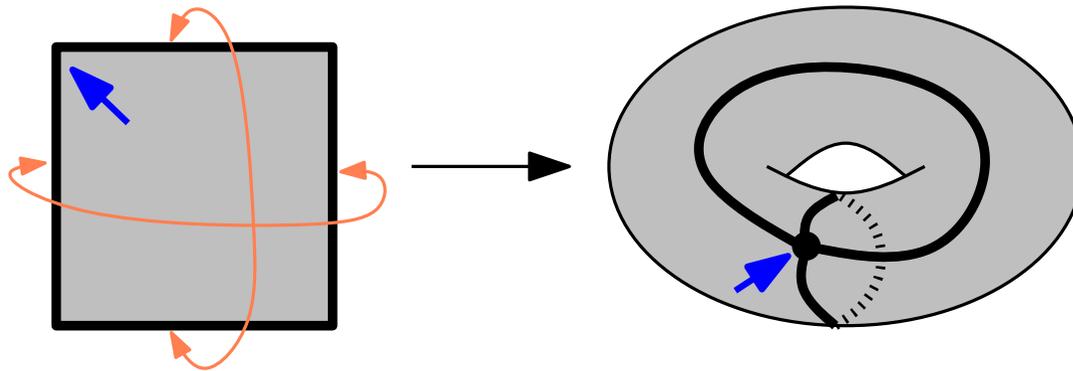
L'image du polygone de départ forme le dessin d'un **graphe à n arêtes** sur la surface.

La **relation d'Euler** relie le nombre de **sommets** au **genre** de la surface :

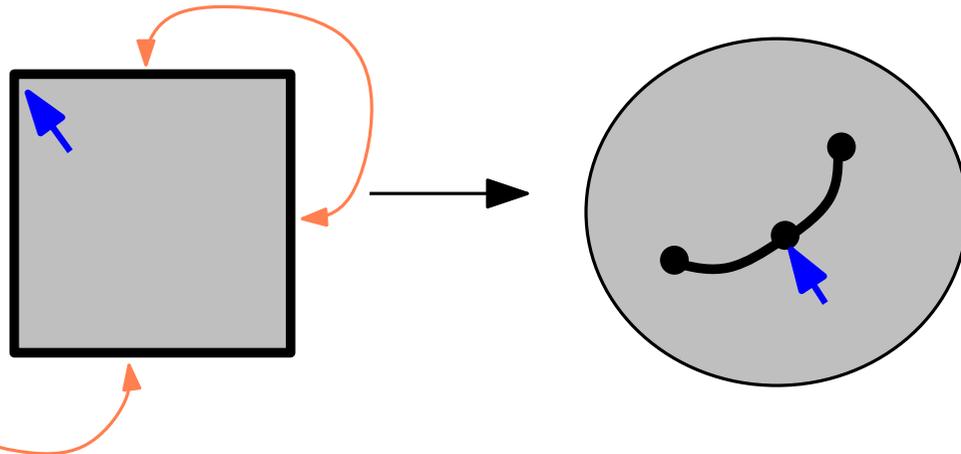
$$s = n + 1 - 2g$$

Cartes à une face, version polygone.

On recolle deux à deux les arêtes d'un $2n$ -gone pour former une surface sans bord.



1 sommet, genre 1



3 sommets, genre 0

L'image du polygone de départ forme le dessin d'un **graphe à n arêtes** sur la surface.

La **relation d'Euler** relie le nombre de **sommets** au **genre** de la surface :

$$s = n + 1 - 2g$$

But du jeu = compter.

Le nombre de cartes à une face à n arêtes est égal au nombre d'appariements : $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

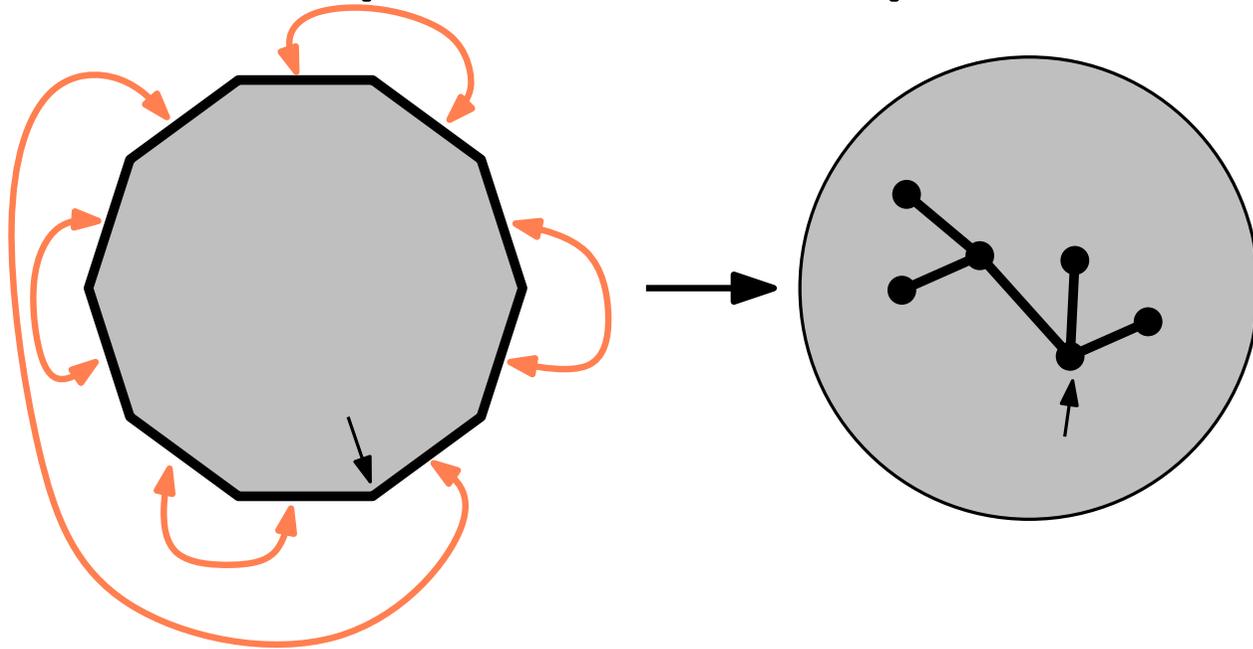
Notre but : énumérer les cartes à une face **de genre fixé**.

But du jeu = compter.

Le nombre de cartes à une face à n arêtes est égal au nombre d'appariements : $\frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Notre but : énumérer les cartes à une face **de genre fixé**.

Par exemple, dans le cas planaire...



Les cartes à une face sont exactement les **arbres plans**.

Le nombre de cartes à une face à n arêtes de genre 0 est donc :

$$\epsilon_0(n) = \text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Et en genre supérieur ?

Pour chaque g , le nombre de cartes à une face à n arêtes de genre g a la forme remarquable : $\epsilon_g(n) = (\text{un polynôme}) \times \text{Cat}(n)$

Par exemple :
$$\epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \text{Cat}(n)$$

$$\epsilon_2(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440} \text{Cat}(n)$$

Références : [Lehman et Walsh 72](#) (résolution d'équations de récurrence) [Harer et Zagier 86](#) (intégrales de matrices).

Et en genre supérieur ?

Pour chaque g , le nombre de cartes à une face à n arêtes de genre g a la forme remarquable : $\epsilon_g(n) = (\text{un polynôme}) \times \text{Cat}(n)$

Par exemple :
$$\epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \text{Cat}(n)$$

$$\epsilon_2(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440} \text{Cat}(n)$$

Références : [Lehman et Walsh 72](#) (résolution d'équations de récurrence) [Harer et Zagier 86](#) (intégrales de matrices).

Pas d'interprétation combinatoire !

Et en genre supérieur ?

Pour chaque g , le nombre de cartes à une face à n arêtes de genre g a la forme remarquable : $\epsilon_g(n) = (\text{un polynôme}) \times \text{Cat}(n)$

Par exemple :

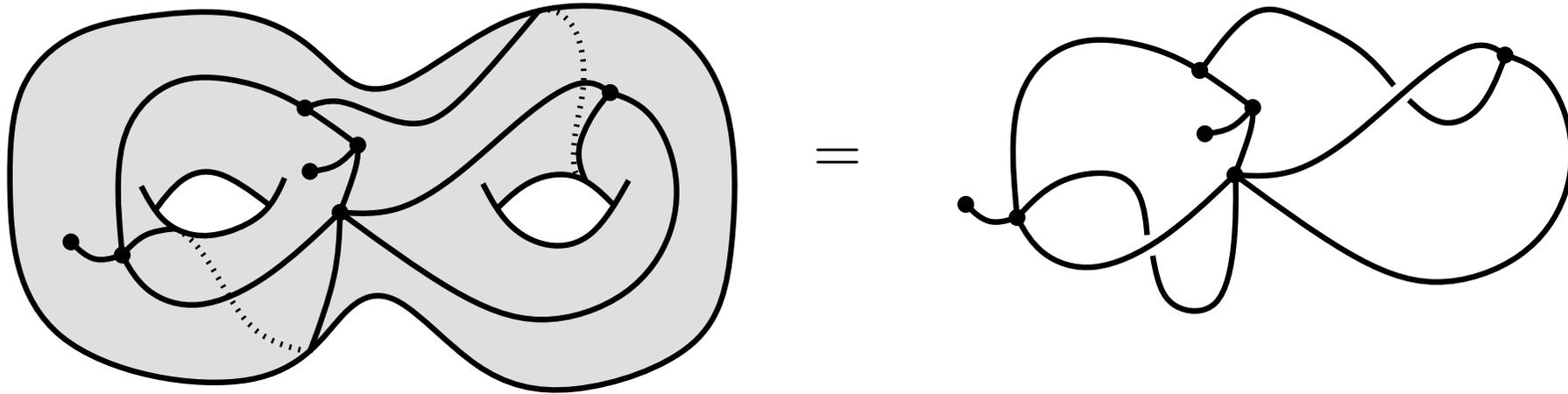
$$\epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{12} \text{Cat}(n)$$
$$\epsilon_2(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440} \text{Cat}(n)$$

Références : [Lehman et Walsh 72](#) (résolution d'équations de récurrence) [Harer et Zagier 86](#) (intégrales de matrices).

[Pas d'interprétation combinatoire !](#)

Une des formules d'Harer et Zagier a une interprétation combinatoire due à [Lass, Goulden et Nica](#) mais elle concerne des cartes de genre quelconque et qui sont pondérées (coloriées) en fonction de leur genre. Elle n'explique pas combinatoirement la forme de $\epsilon_g(n)$.

Cartes à une face, vues du graphe sous-jacent.

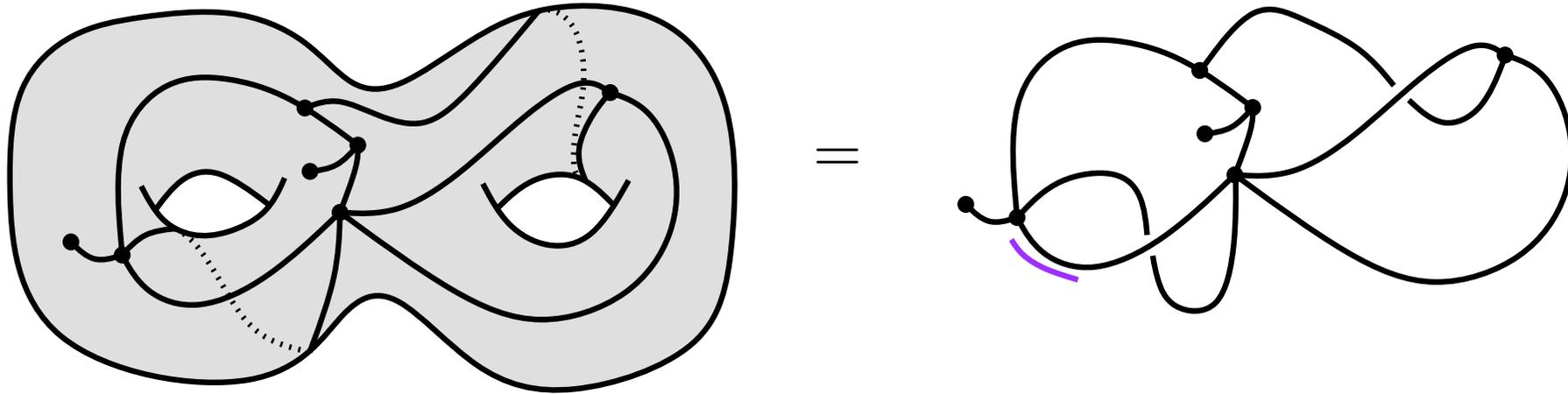


Toute l'information est contenue dans la paire formée du **graphe** et de **l'ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet.

Une tel objet s'appelle une **carte combinatoire**.

La carte combinatoire obtenue n'a **qu'un seul bord**.

Cartes à une face, vues du graphe sous-jacent.

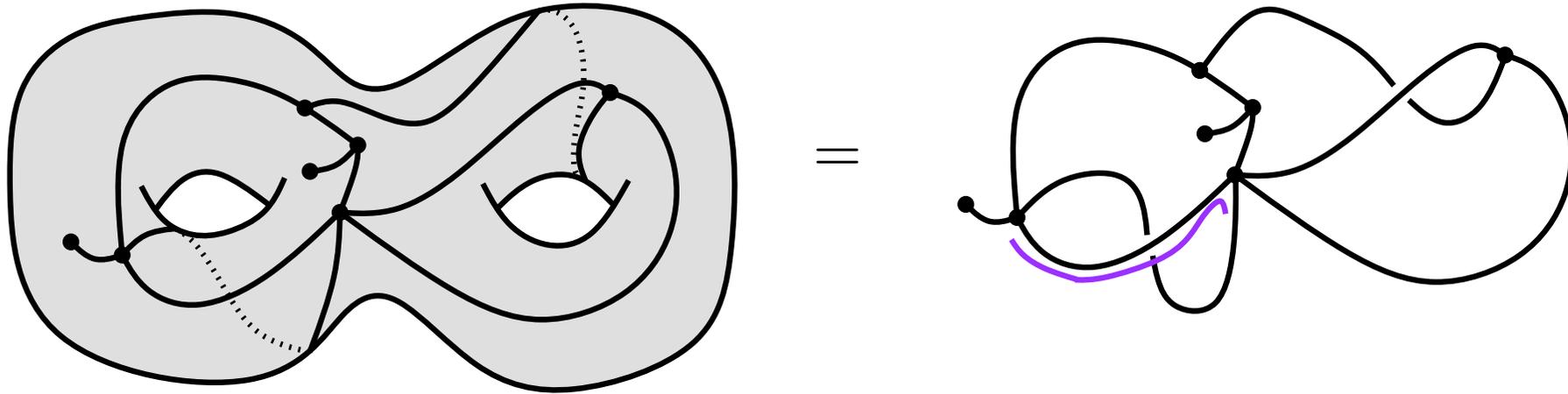


Toute l'information est contenue dans la paire formée du **graphe** et de **l'ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet.

Une tel objet s'appelle une **carte combinatoire**.

La carte combinatoire obtenue n'a **qu'un seul bord**.

Cartes à une face, vues du graphe sous-jacent.

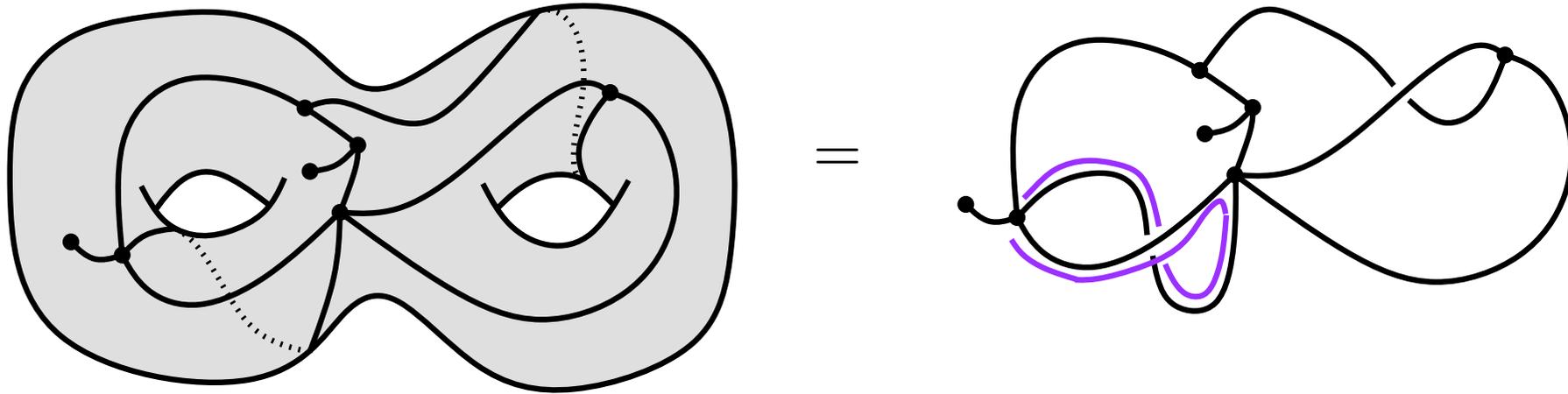


Toute l'information est contenue dans la paire formée du **graphe** et de **l'ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet.

Une tel objet s'appelle une **carte combinatoire**.

La carte combinatoire obtenue n'a **qu'un seul bord**.

Cartes à une face, vues du graphe sous-jacent.

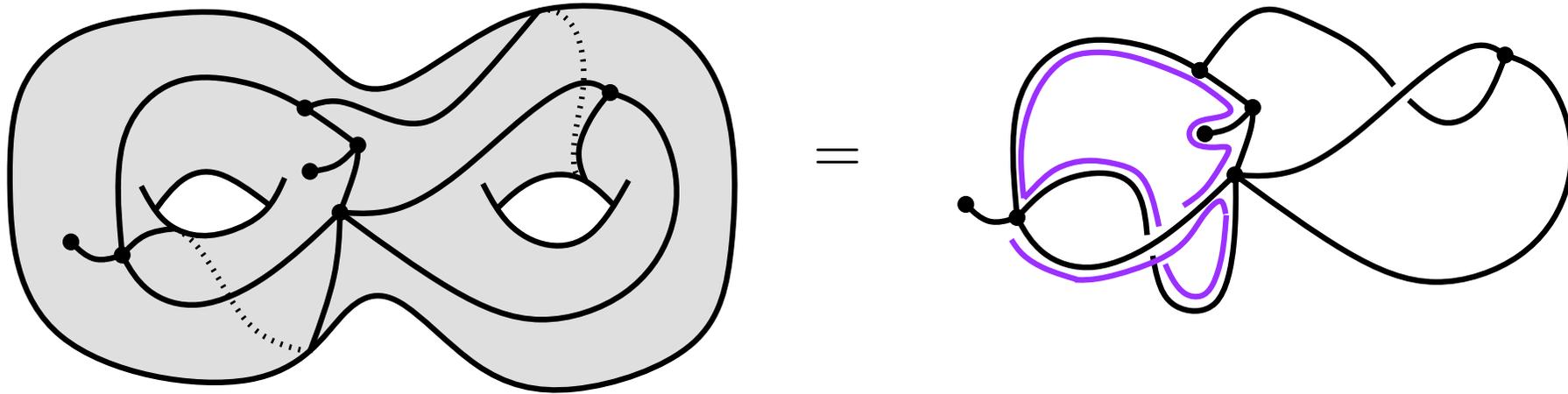


Toute l'information est contenue dans la paire formée du **graphe** et de **l'ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet.

Une tel objet s'appelle une **carte combinatoire**.

La carte combinatoire obtenue n'a **qu'un seul bord**.

Cartes à une face, vues du graphe sous-jacent.

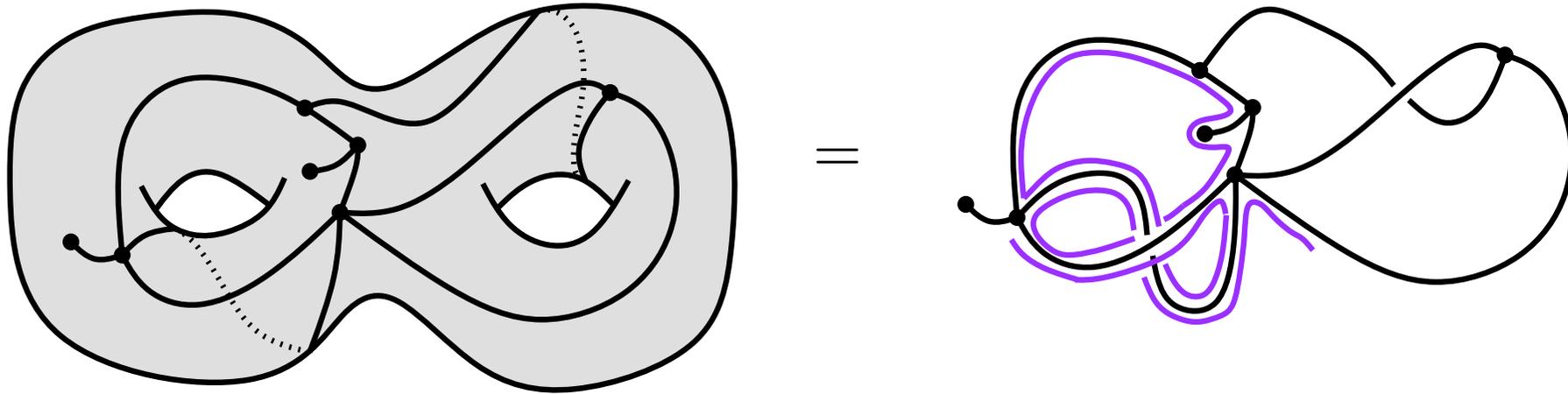


Toute l'information est contenue dans la paire formée du **graphe** et de **l'ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet.

Une tel objet s'appelle une **carte combinatoire**.

La carte combinatoire obtenue n'a **qu'un seul bord**.

Cartes à une face, vues du graphe sous-jacent.

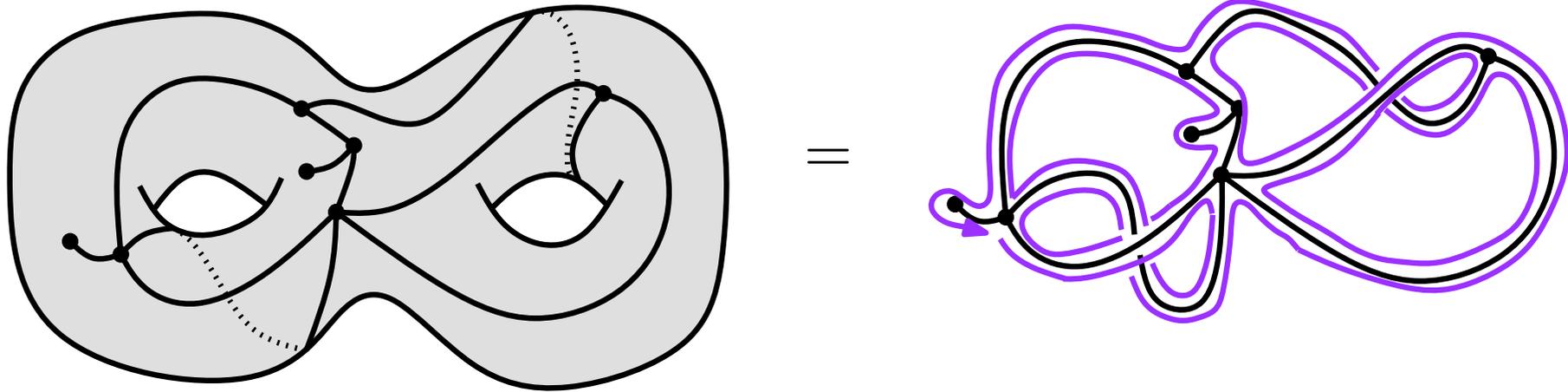


Toute l'information est contenue dans la paire formée du **graphe** et de **l'ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet.

Une tel objet s'appelle une **carte combinatoire**.

La carte combinatoire obtenue n'a **qu'un seul bord**.

Cartes à une face, vues du graphe sous-jacent.

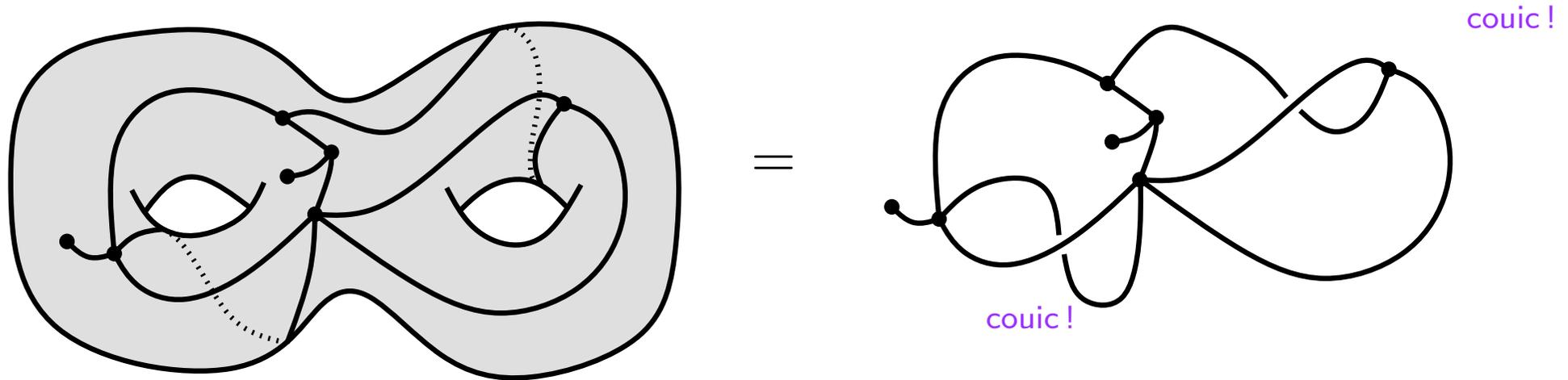


Toute l'information est contenue dans la paire formée du **graphe** et de **l'ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet.

Une tel objet s'appelle une **carte combinatoire**.

La carte combinatoire obtenue n'a **qu'un seul bord**.

Cartes à une face, vues du graphe sous-jacent.



Toute l'information est contenue dans la paire formée du **graphe** et de **l'ordre cyclique** des arêtes autour de chaque sommet.

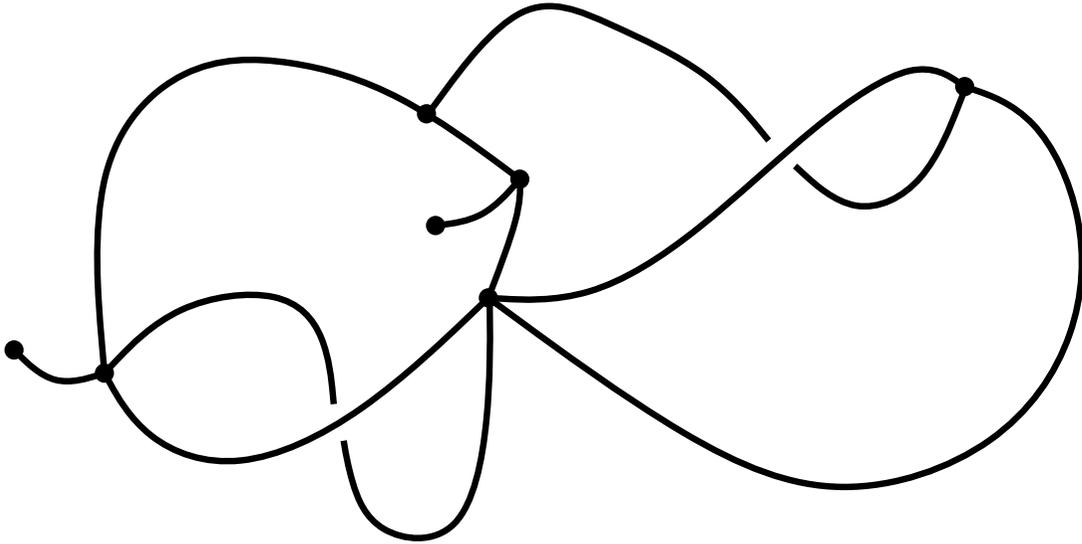
Une tel objet s'appelle une **carte combinatoire**.

La carte combinatoire obtenue n'a **qu'un seul bord**.

Dans la suite, nous allons prendre un **paire de ciseaux** et découper nos cartes à une face jusqu'à en faire des arbres.

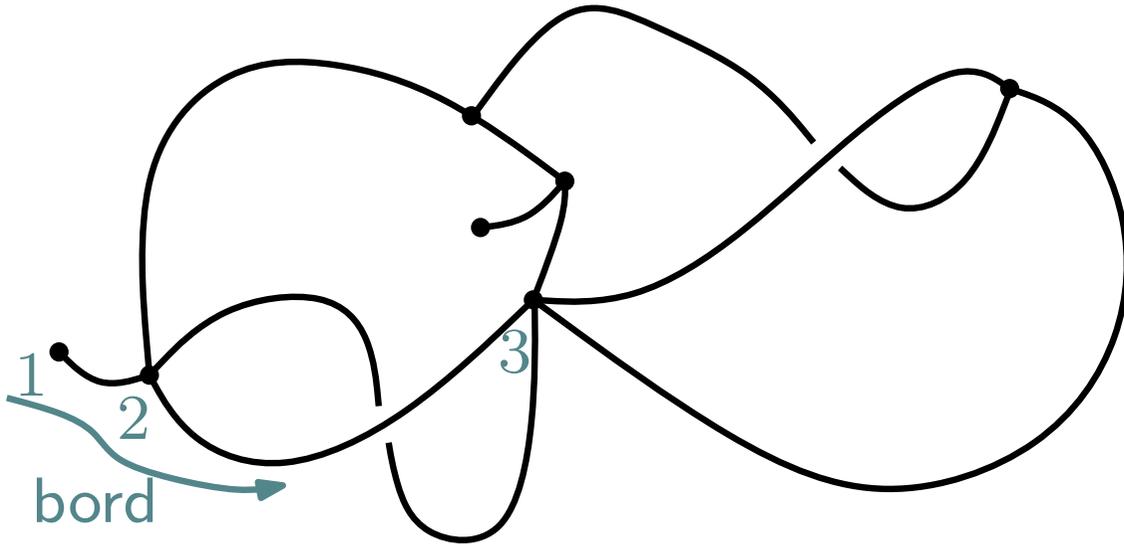
Numérotation des coins par l'ordre de passage du tour.

On parcourt le bord de la carte à partir de la racine et on numérote les coins de 1 à $2n$.



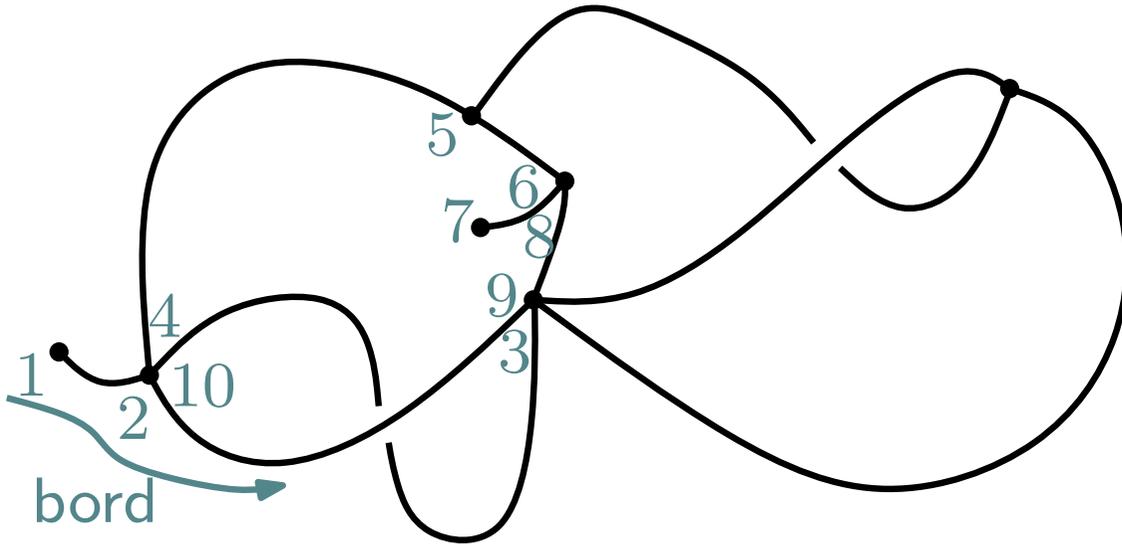
Numérotation des coins par l'ordre de passage du tour.

On parcourt le bord de la carte à partir de la racine et on numérote les coins de 1 à $2n$.



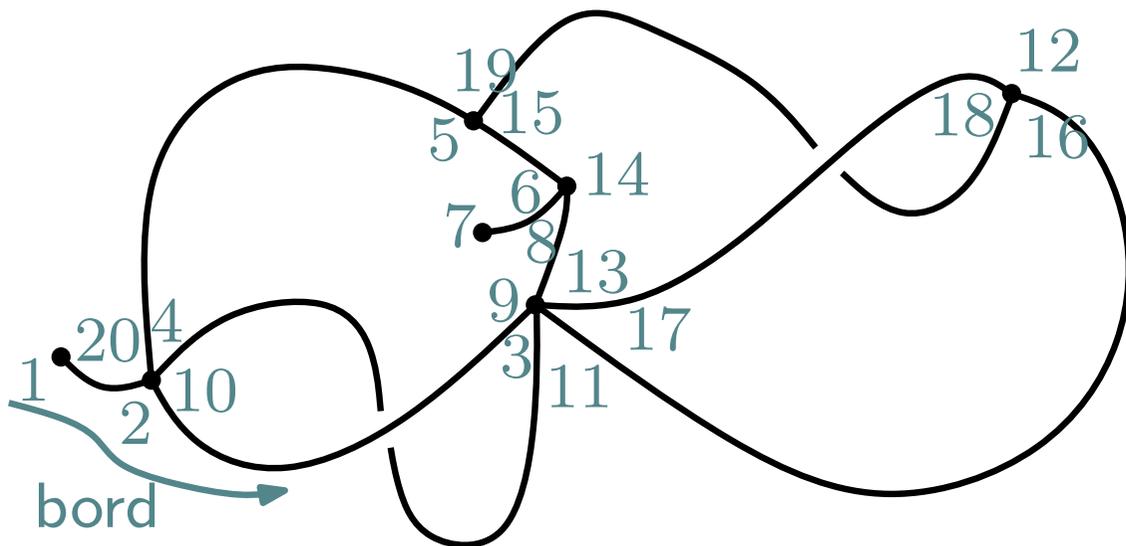
Numérotation des coins par l'ordre de passage du tour.

On parcourt le bord de la carte à partir de la racine et on numérote les coins de 1 à $2n$.



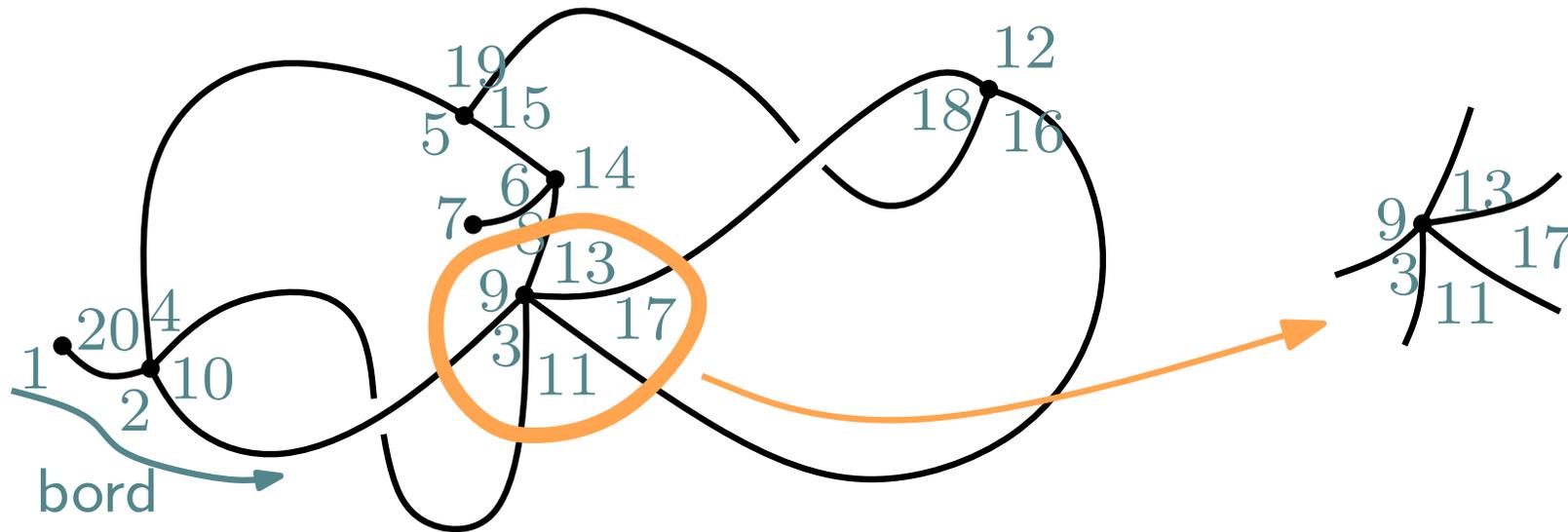
Numérotation des coins par l'ordre de passage du tour.

On parcourt le bord de la carte à partir de la racine et on numérote les coins de 1 à $2n$.



Numérotation des coins par l'ordre de passage du tour.

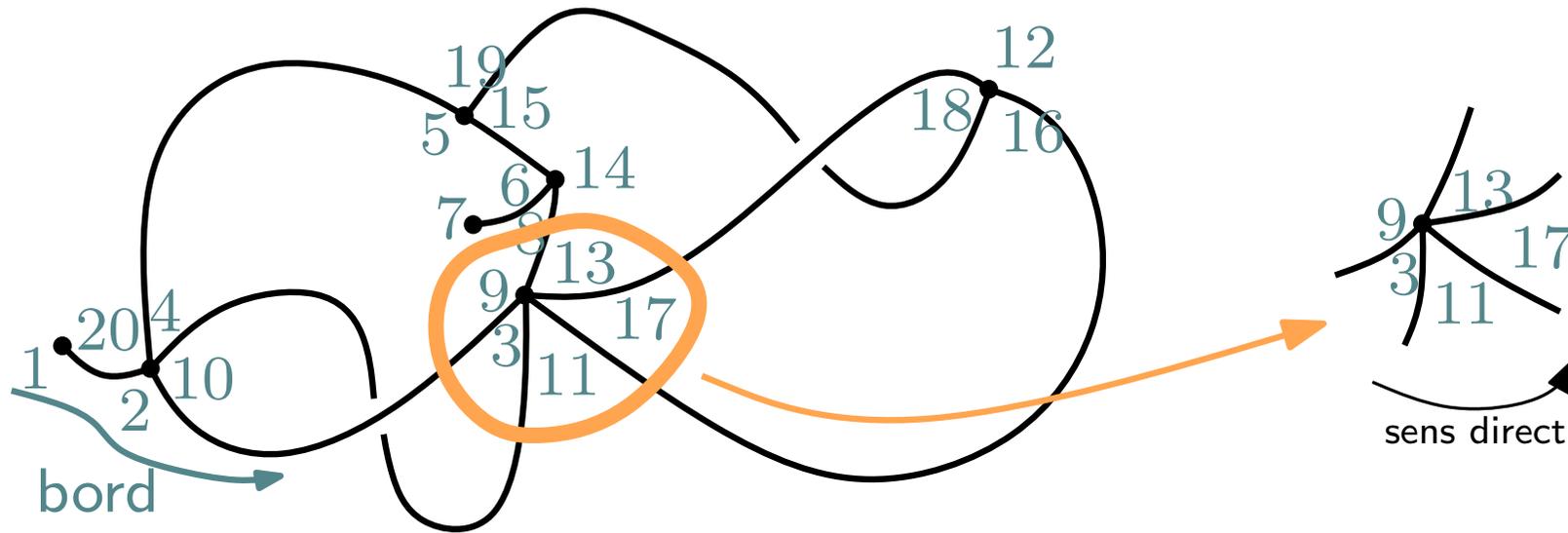
On parcourt le bord de la carte à partir de la racine et on numérote les coins de 1 à $2n$.



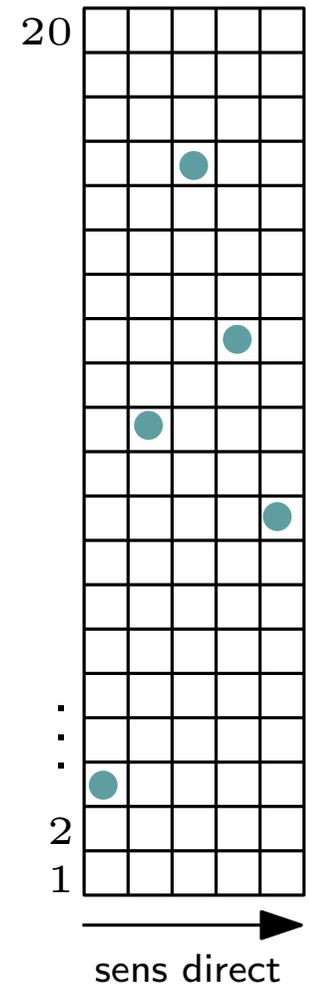
On va s'intéresser à l'ordre d'apparition des coins autour d'un sommet.

Numérotation des coins par l'ordre de passage du tour.

On parcourt le bord de la carte à partir de la racine et on numérote les coins de 1 à $2n$.

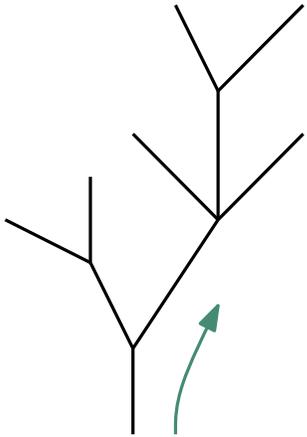


On va s'intéresser à l'ordre d'apparition des coins autour d'un sommet.



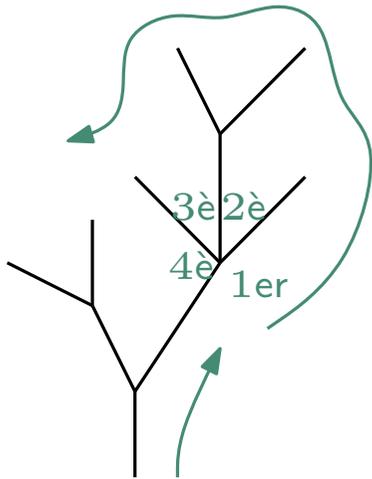
Cas planaire

Dans le cas planaire, l'ordre du parcours et l'ordre direct **coïncident toujours** :

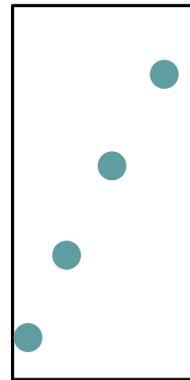
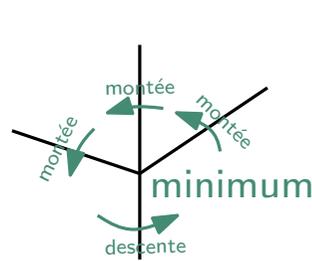


Cas planaire

Dans le cas planaire, l'ordre du parcours et l'ordre direct **coïncident toujours** :

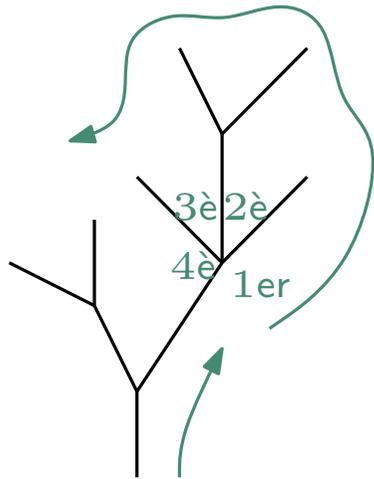


Autour de chaque sommet on ne voit donc qu'une seule descente : **celle qui va vers le minimum.**

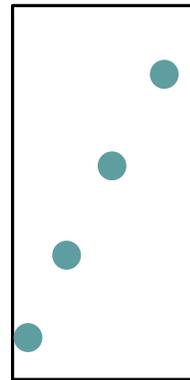
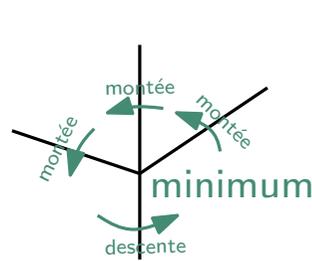


Cas planaire

Dans le cas planaire, l'ordre du parcours et l'ordre direct **coïncident toujours** :

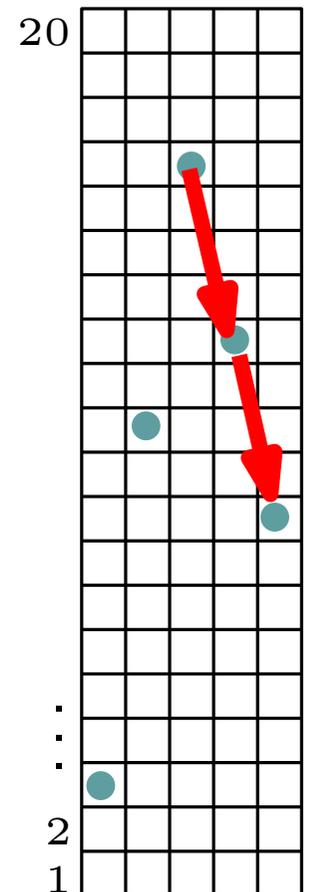
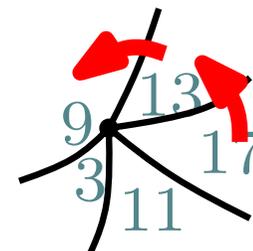


Autour de chaque sommet on ne voit donc qu'une seule descente : **celle qui va vers le minimum**.



Genre supérieur

Autour d'un sommet, une descente qui ne descend pas vers le minimum est appelée une **trisection**.



Lemme des trisections.

Une carte à une face de genre g a exactement $2g$ trisections.

Démonstration très simple par comptage du nombre total de descentes :

- chaque arête donne une montée et une descente, sauf la racine qui donne deux descentes. Le nombre total de descentes est donc $(n - 1) + 2 = n + 1$;
- chacun des $n + 1 - 2g$ sommets possède exactement une descente vers son minimum. Le nombre de descentes qui ne vont pas vers le minimum de leur sommet est donc $n + 1 - (n + 1 - 2g) = 2g$.

Dans la suite, nous chercherons à énumérer les cartes à une face portant **une trisection marquée**.

Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec trois sommets marqués.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :



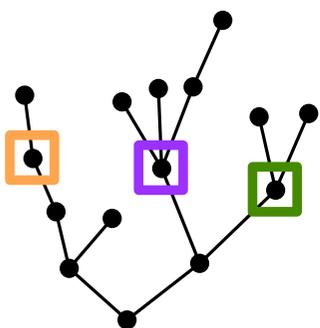
Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec trois sommets marqués.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :



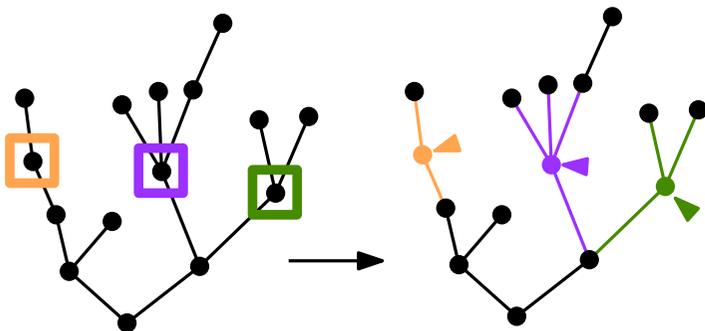
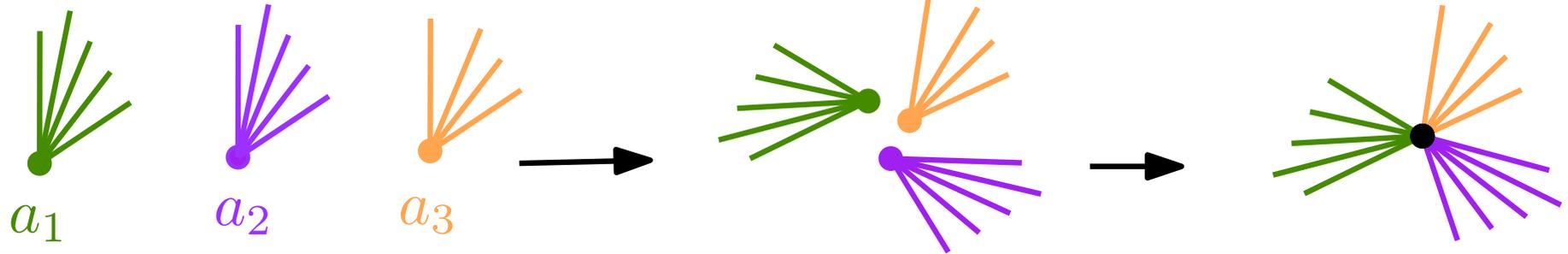
Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec trois sommets marqués.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :



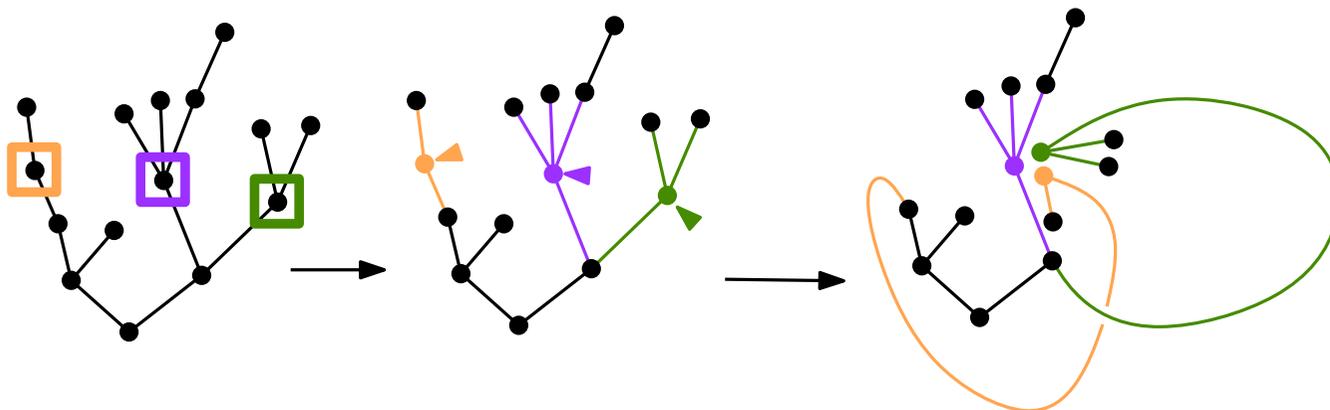
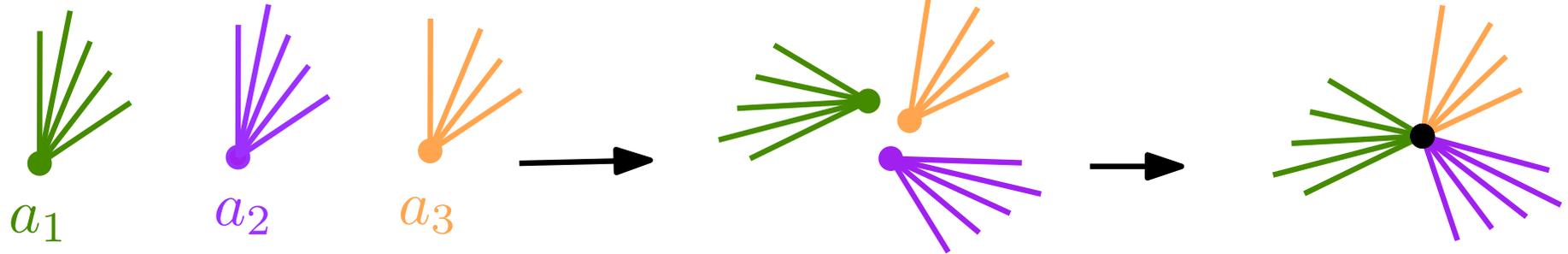
Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec trois sommets marqués.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :



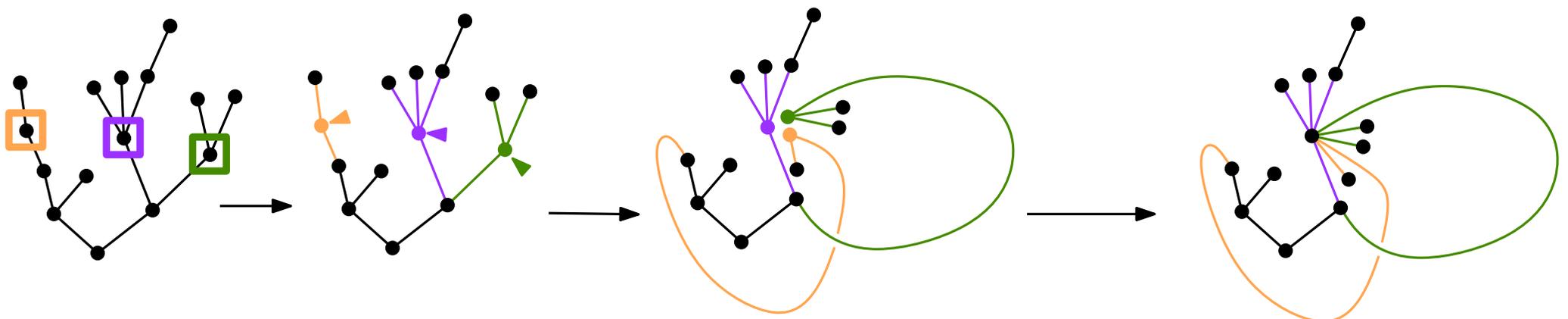
Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec trois sommets marqués.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :



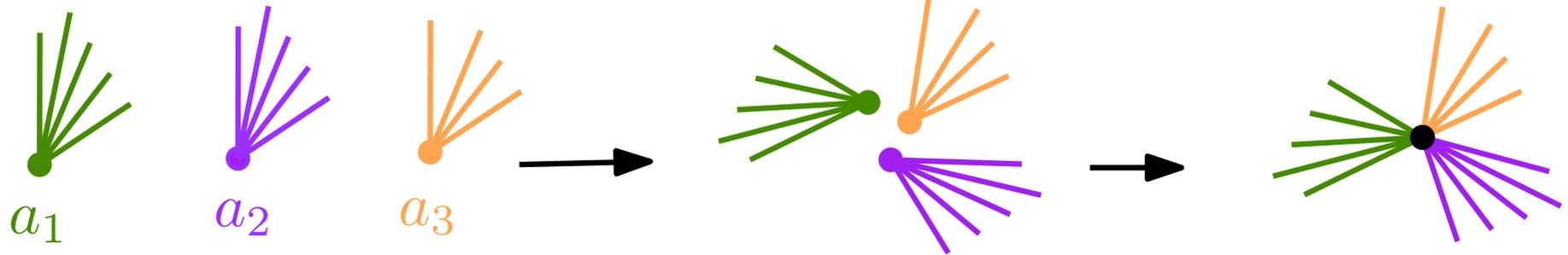
Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec trois sommets marqués.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :



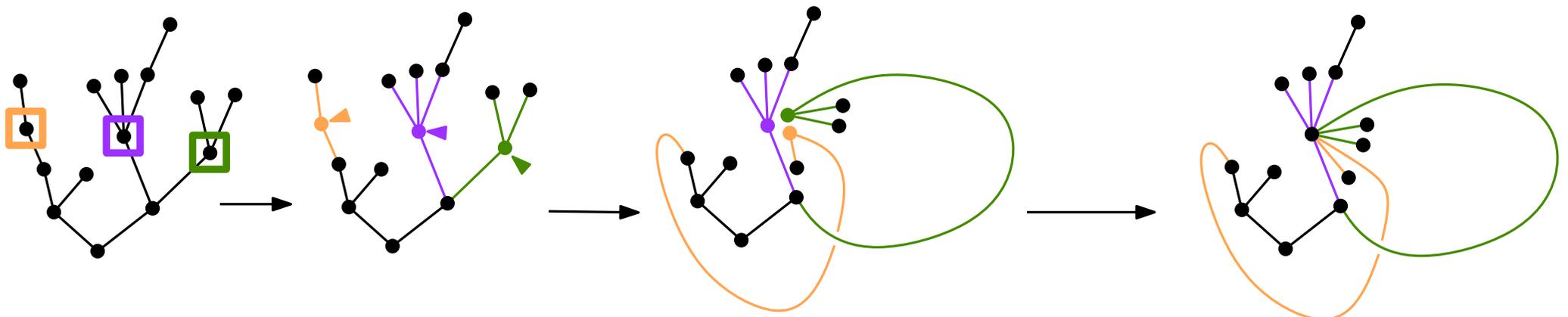
Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec trois sommets marqués.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :



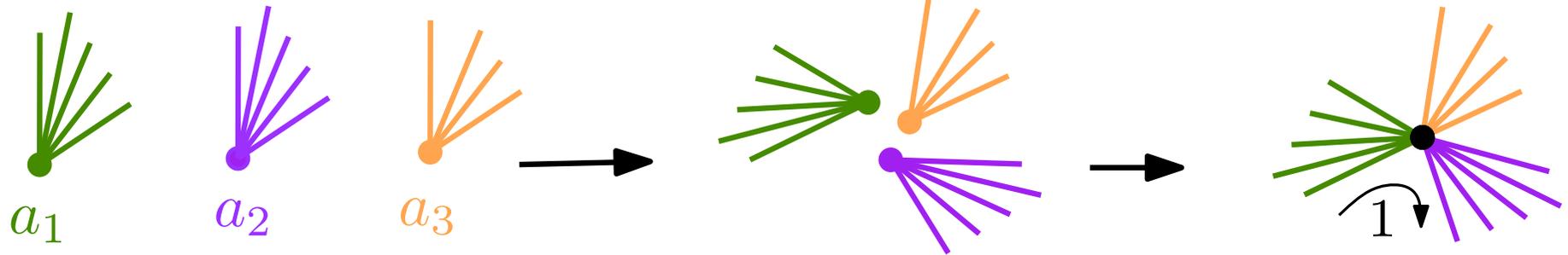
- La carte obtenue a **une seule face** :

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\text{green}} a_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{\text{purple}} a_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{\text{orange}} a_3 \rightarrow \dots \rightarrow 2n$$

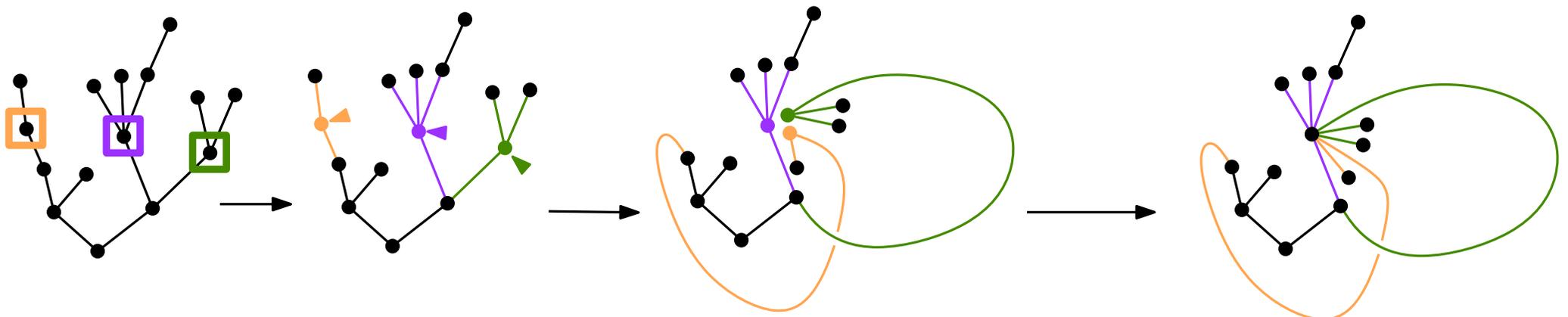
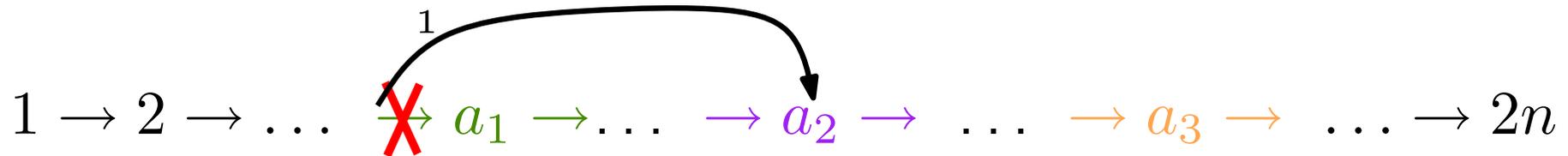


Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec trois sommets marqués.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :

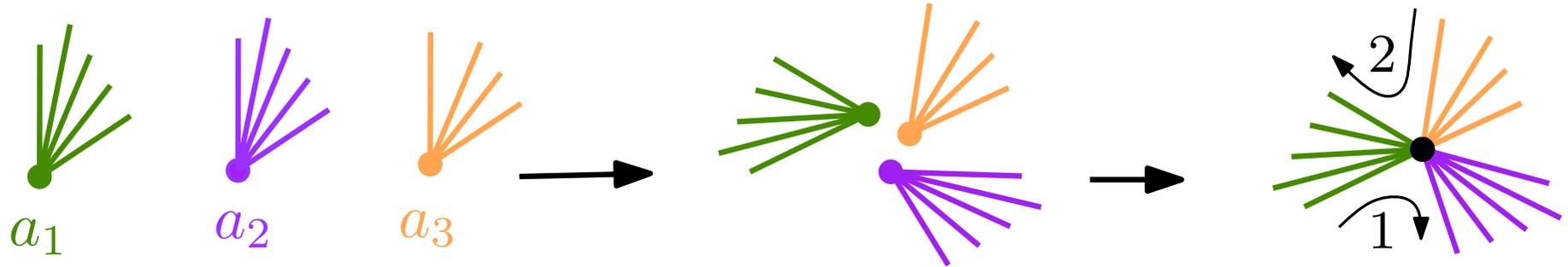


- La carte obtenue a **une seule face** :

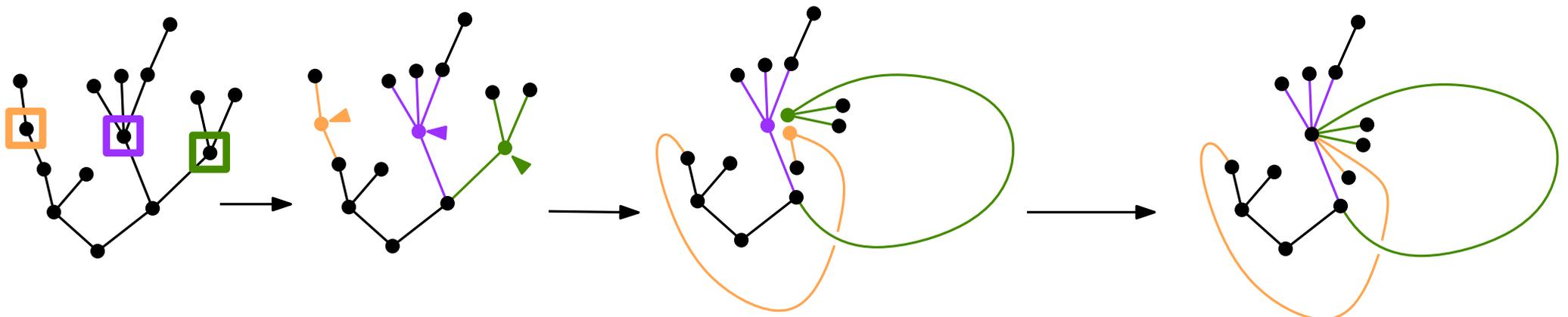
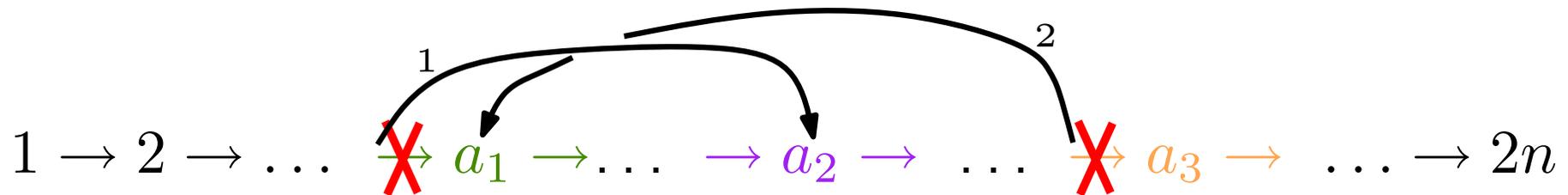


Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec trois sommets marqués.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :

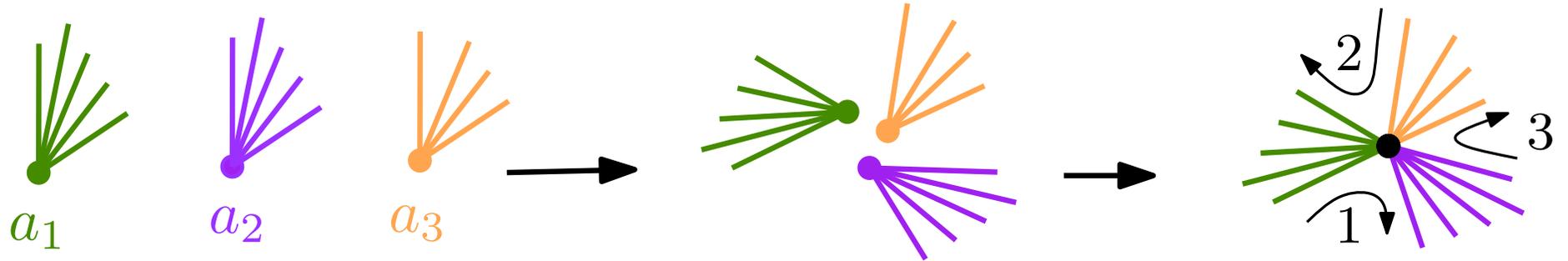


- La carte obtenue a **une seule face** :

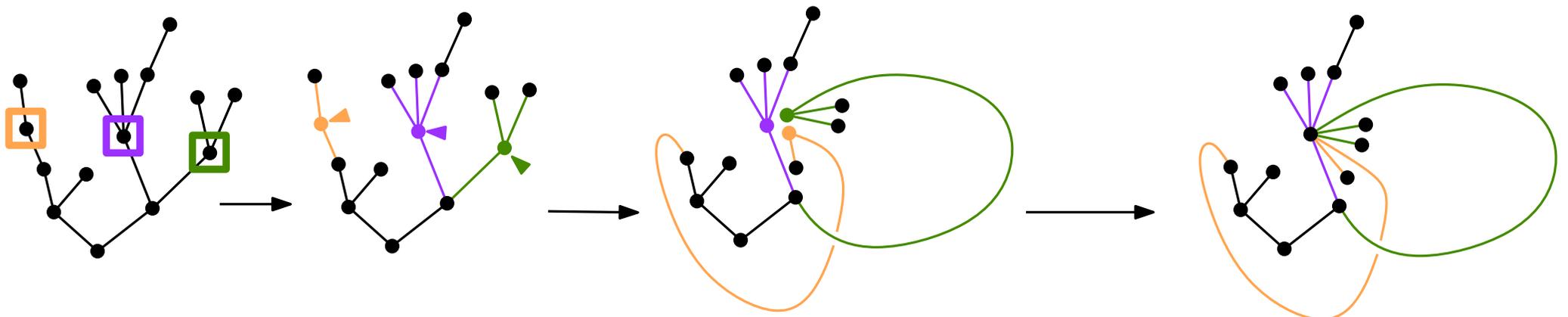
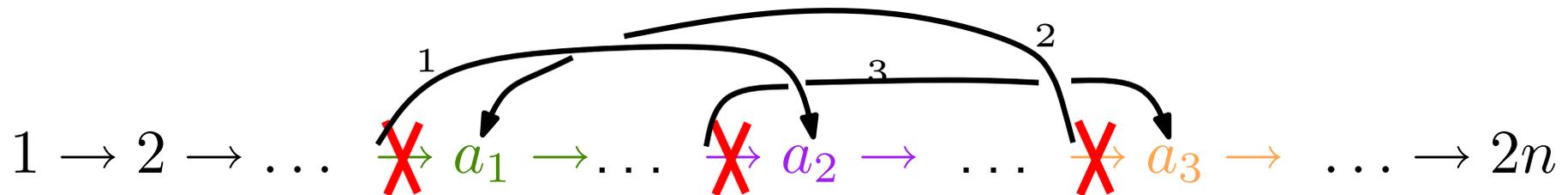


Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec trois sommets marqués.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :

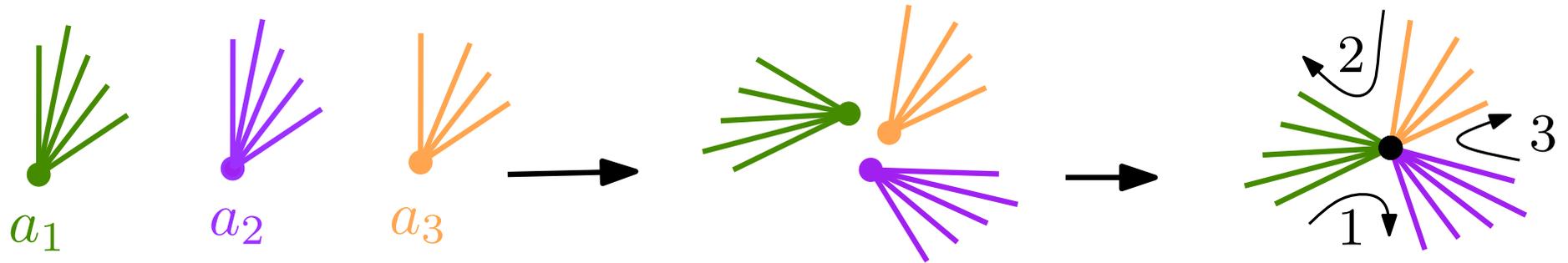


- La carte obtenue a **une seule face** :

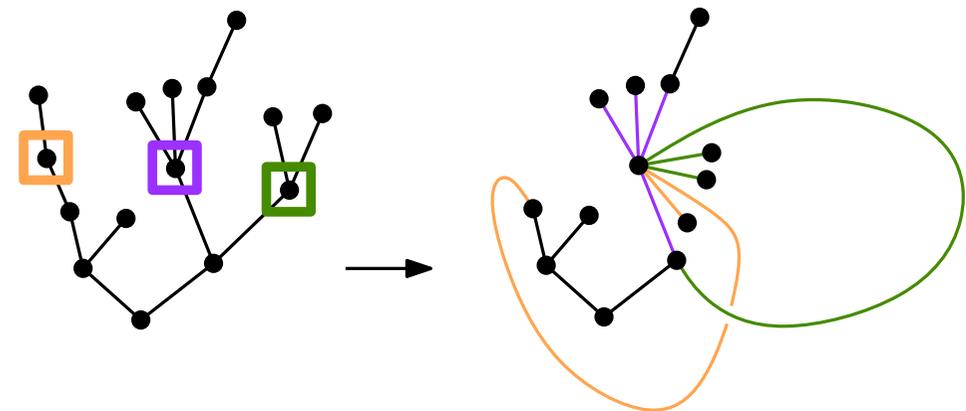
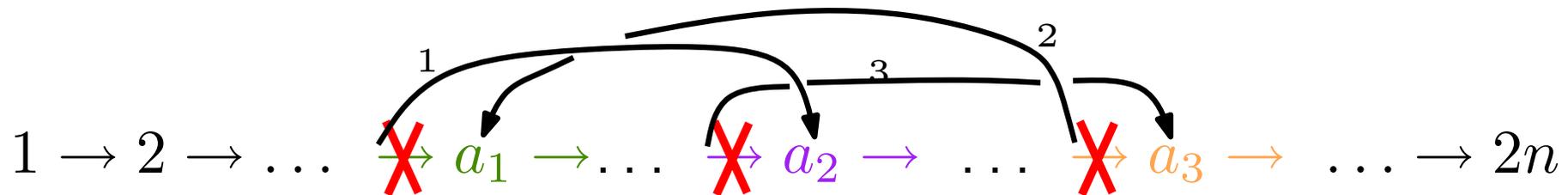


Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec **trois sommets marqués**.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :

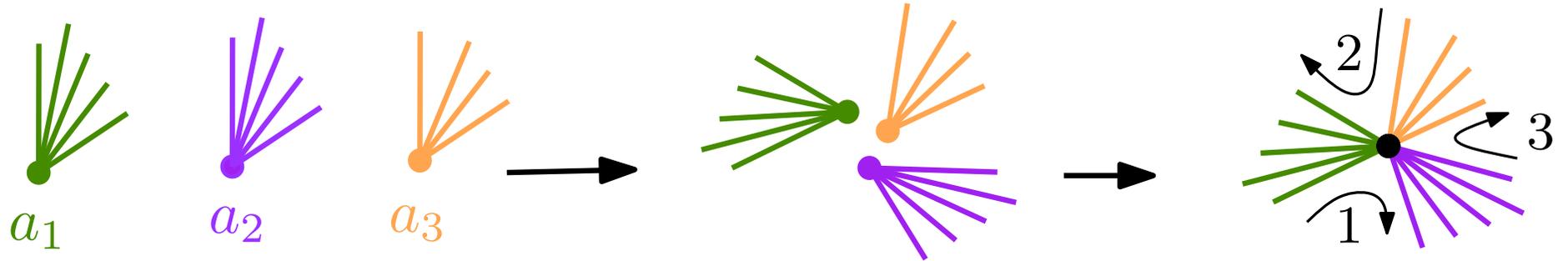


- La carte obtenue a **une seule face** :

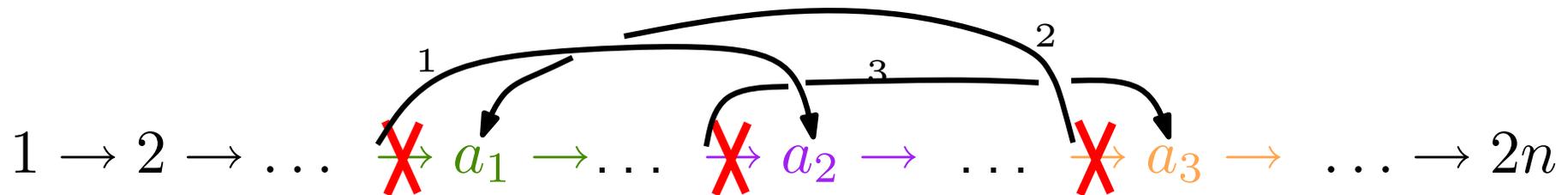


Comment fabriquer une trisection : première méthode.

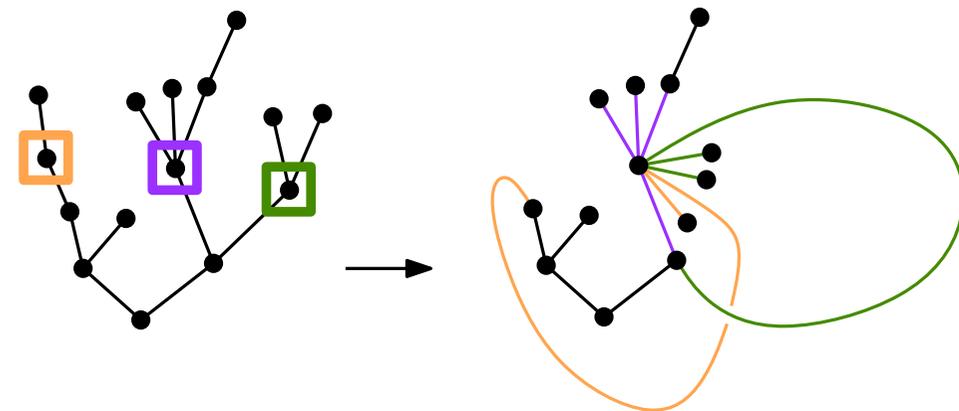
- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec **trois sommets marqués**.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :



- La carte obtenue a **une seule face** :

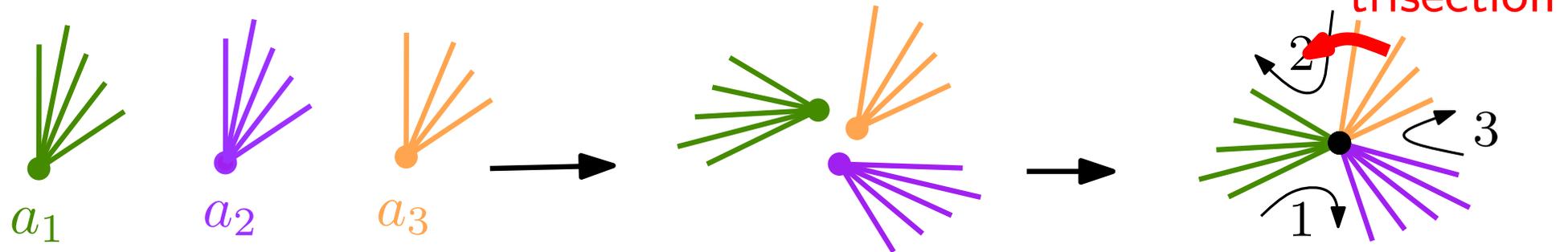


- Par la formule d'Euler, elle a donc **genre g** .

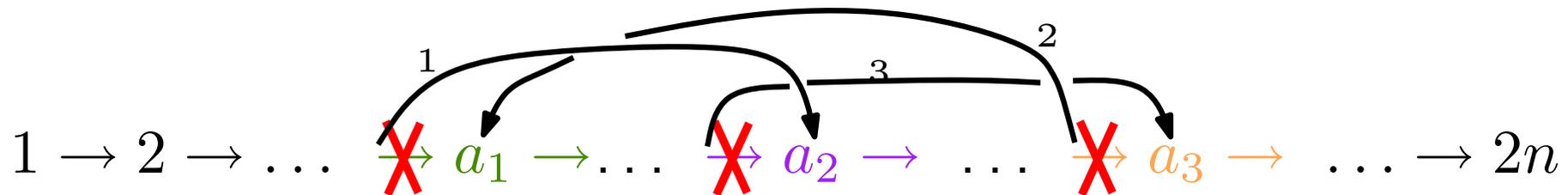


Comment fabriquer une trisection : première méthode.

- On part d'une carte de genre $(g - 1)$ avec **trois sommets marqués**.
- On note $a_1 < a_2 < a_3$ les étiquettes de leurs coins minimaux.
- On **recolle** ces trois coins ensemble "dans le bon ordre" :

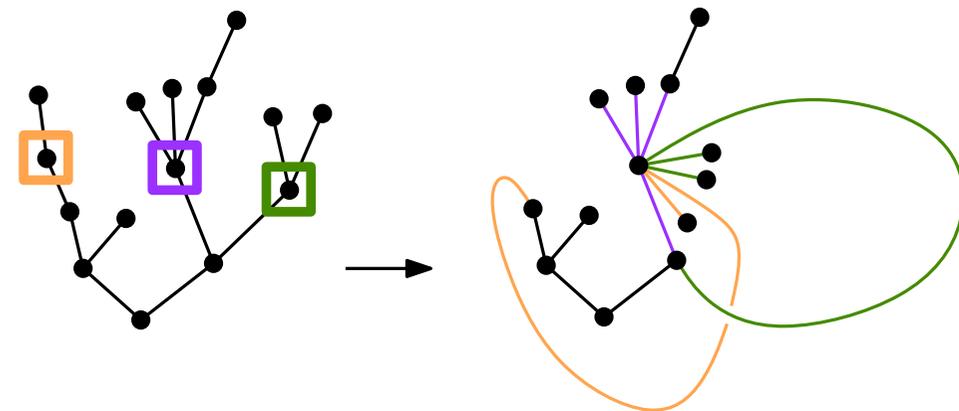


- La carte obtenue a **une seule face** :

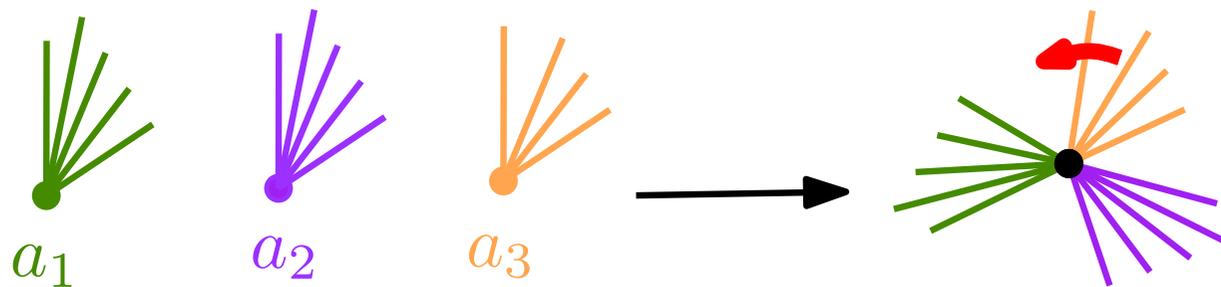


- Par la formule d'Euler, elle a donc **genre g** .

- On a fabriqué une **trisection**.



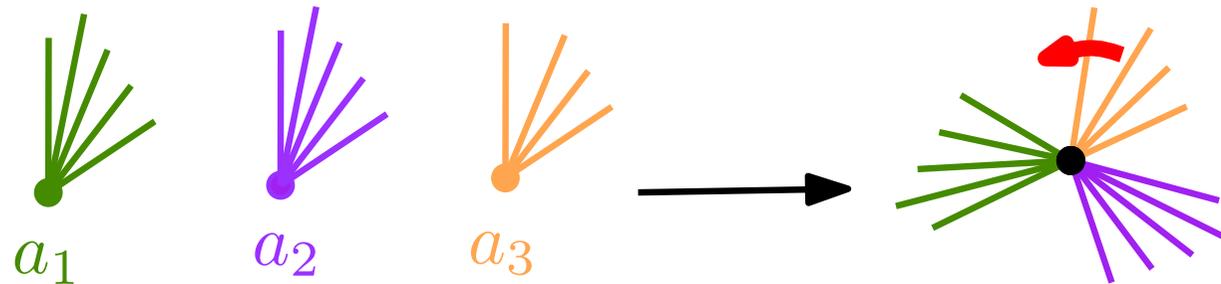
On a donc une application :



genre $g - 1$, trois
sommets marqués

genre g , une trisection
marquée

On a donc une application :

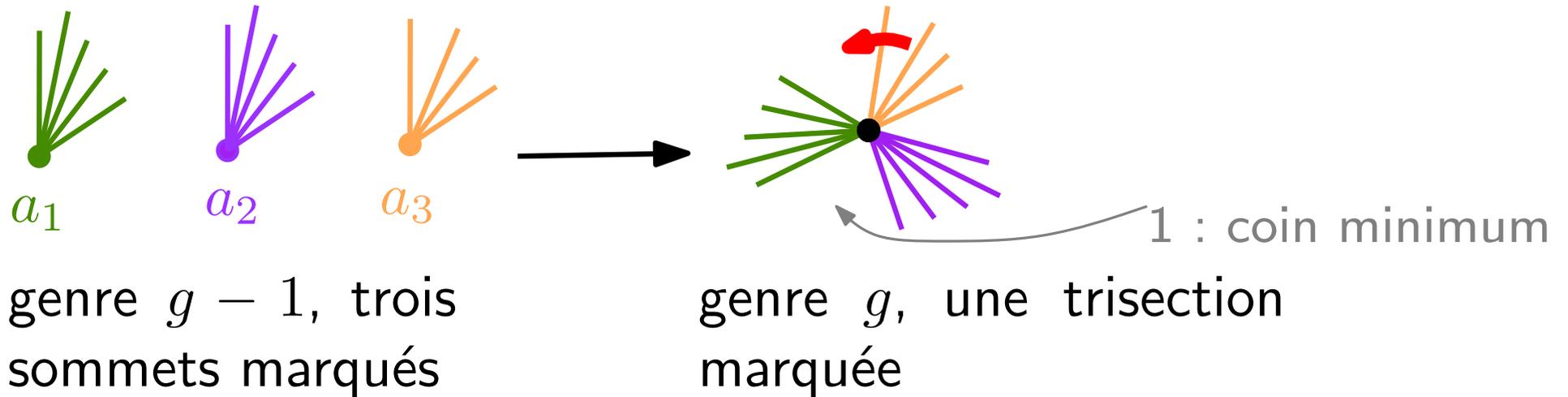


genre $g - 1$, trois
sommets marqués

genre g , une trisection
marquée

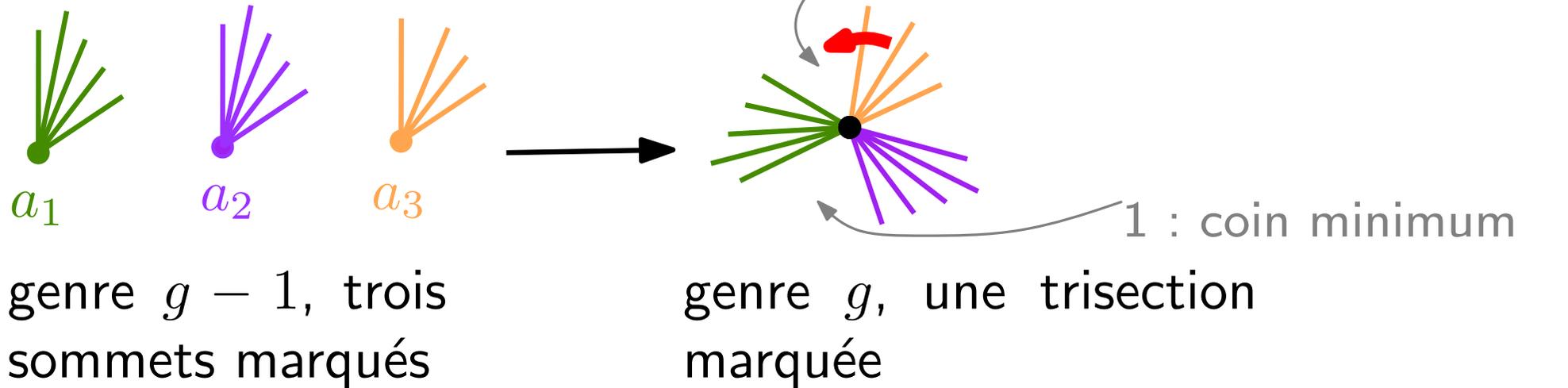
Cette application est **injective** car on peut retrouver les trois coins,
puis **découper**.

On a donc une application :



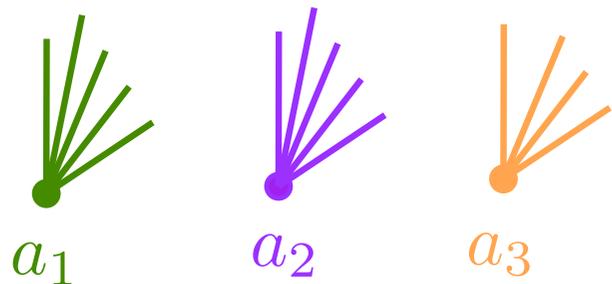
Cette application est **injective** car on peut retrouver les trois coins, puis **découper**.

On a donc une application :

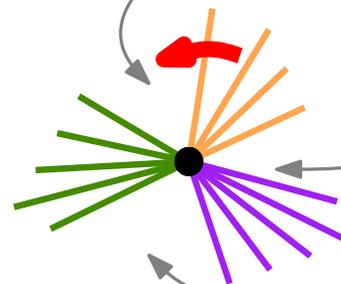


Cette application est **injective** car on peut retrouver les trois coins, puis **découper**.

On a donc une application :



genre $g - 1$, trois sommets marqués



genre g , une trisection marquée

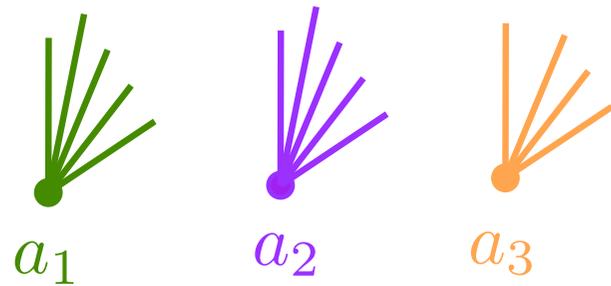
2 : coin suivant la trisection marquée

3 : plus petit coin entre 2 et 1 qui soit plus grand que 2

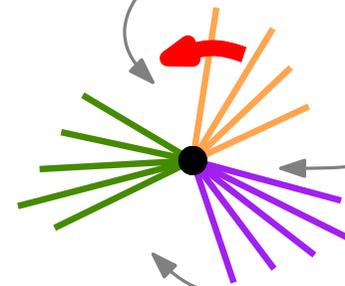
1 : coin minimum

Cette application est **injective** car on peut retrouver les trois coins, puis **découper**.

On a donc une application :



genre $g - 1$, trois sommets marqués



genre g , une trisection marquée

- 2 : coin suivant la trisection marquée
- 3 : plus petit coin entre 2 et 1 qui soit plus grand que 2
- 1 : coin minimum

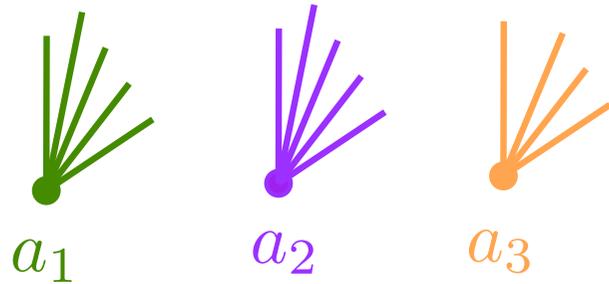
Cette application est **injective** car on peut retrouver les trois coins, puis **découper**.

$$\text{On a donc : } 2g \cdot \epsilon_g(n) = \binom{n + 3 - 2g}{3} \epsilon_{g-1}(n) + \dots$$

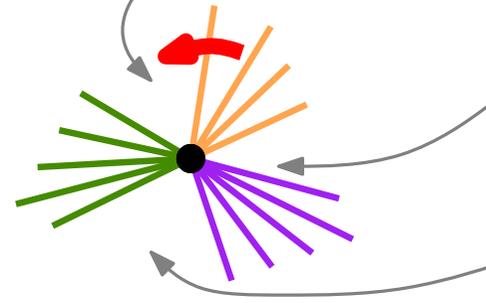
↑
genre g
trisection marquée

↑
genre $g - 1$
3 sommets marqués

On a donc une application :



genre $g - 1$, trois sommets marqués



genre g , une trisection marquée

- 2 : coin suivant la trisection marquée
- 3 : plus petit coin entre 2 et 1 qui soit plus grand que 2
- 1 : coin minimum

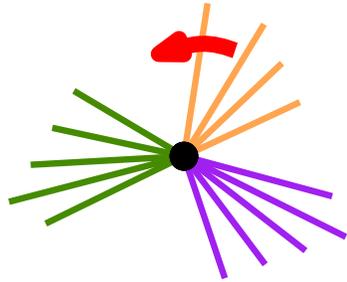
Cette application est **injective** car on peut retrouver les trois coins, puis **découper**.

On a donc :

$$2g \cdot \epsilon_g(n) = \binom{n + 3 - 2g}{3} \epsilon_{g-1}(n) + \dots$$

↑ genre g
trisection marquée
↑ genre $g - 1$
3 sommets marqués
)
?

Tentative d'application inverse :



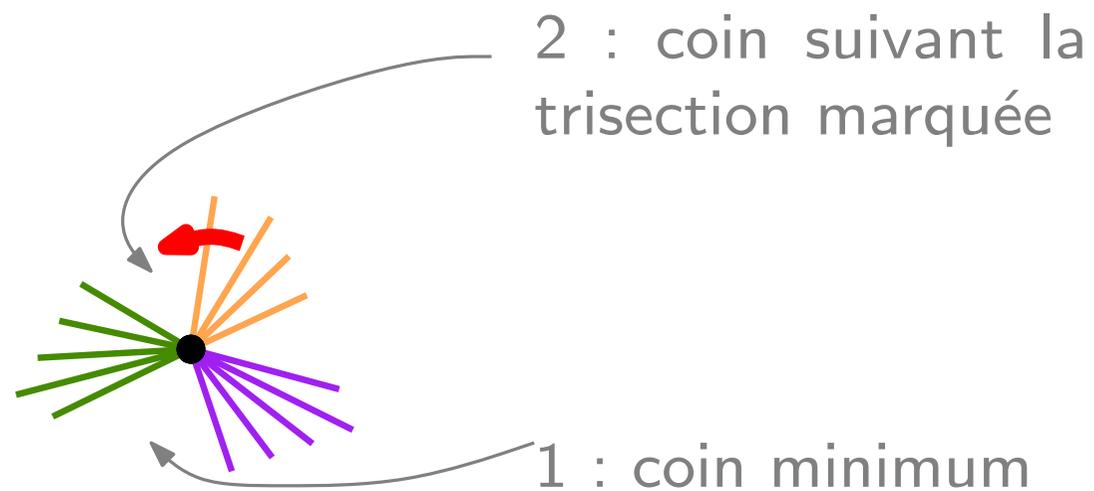
genre g , une trisection
marquée

Tentative d'application inverse :



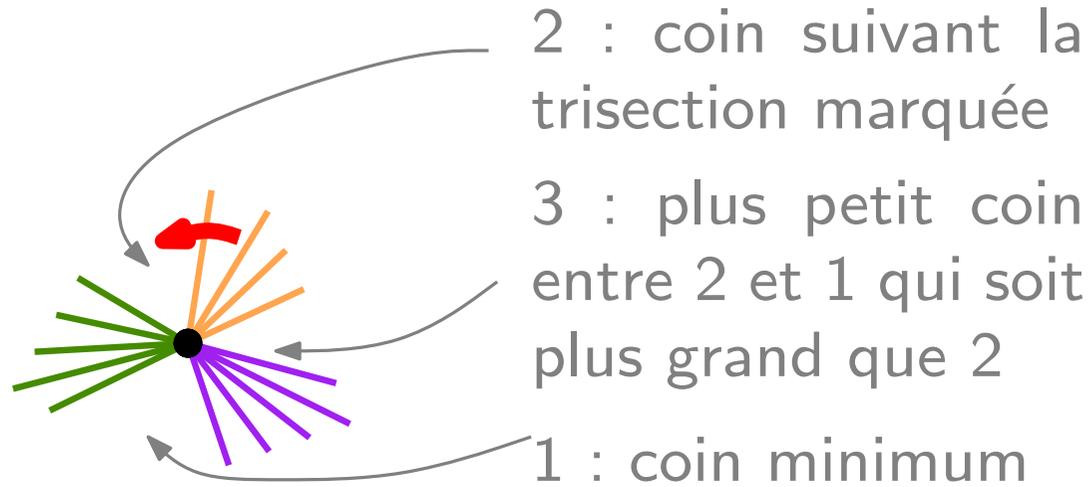
genre g , une trisection
marquée

Tentative d'application inverse :



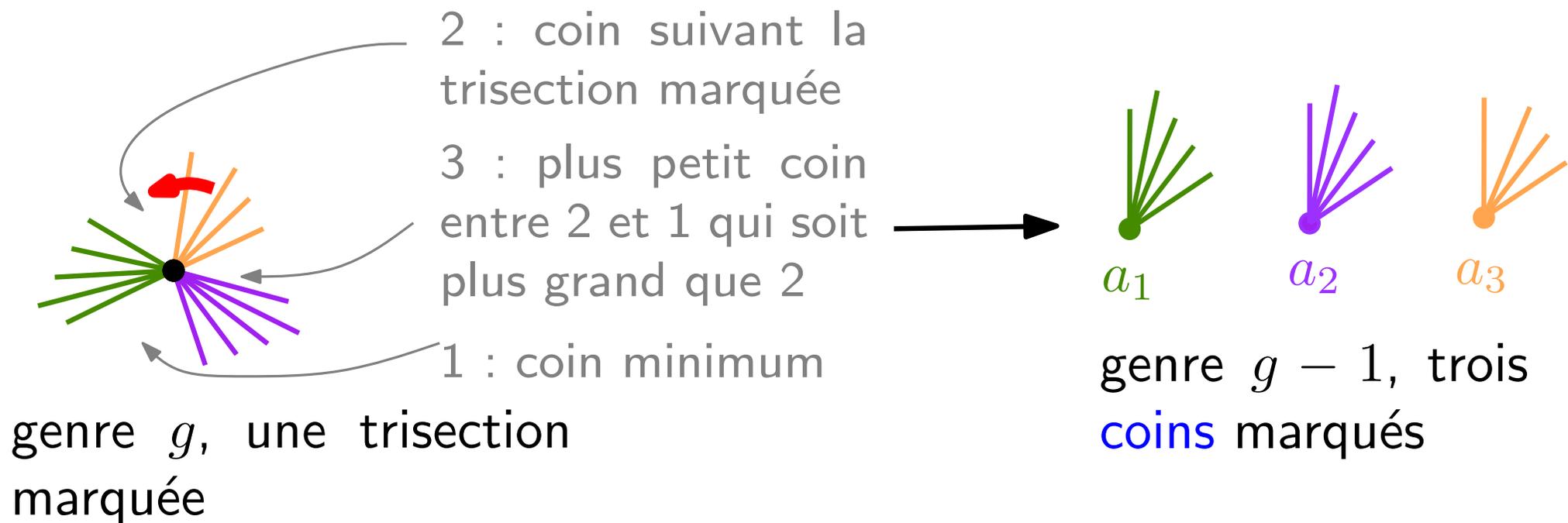
genre g , une trisection
marquée

Tentative d'application inverse :

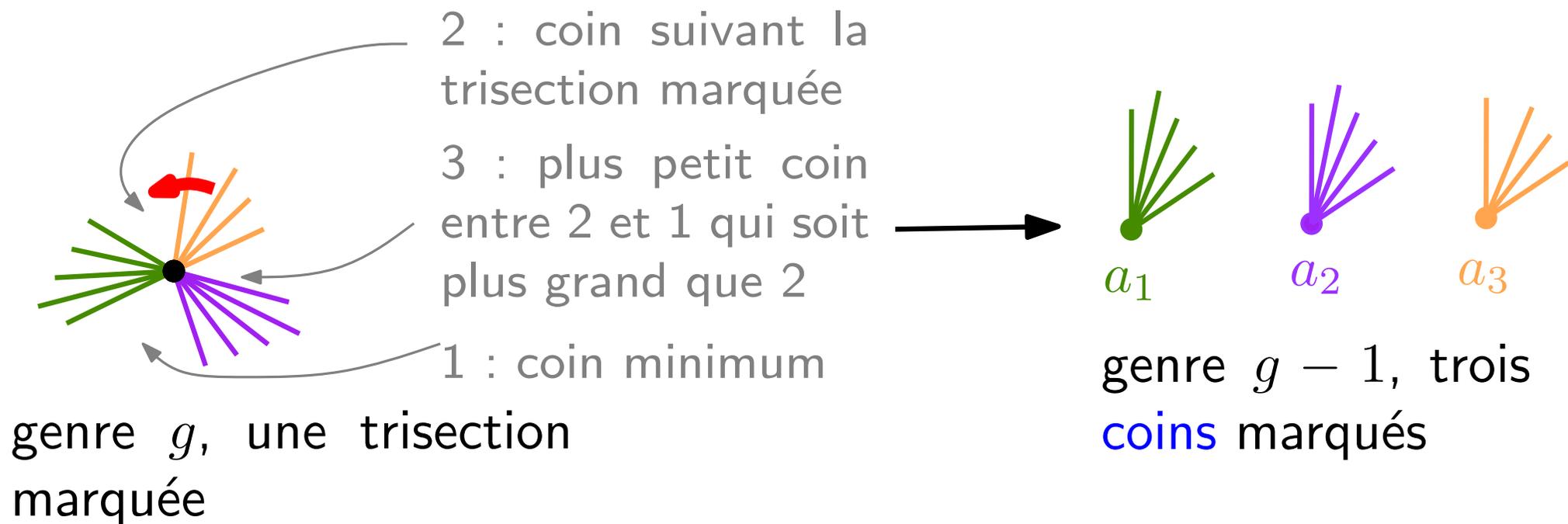


genre g , une trisection marquée

Tentative d'application inverse :

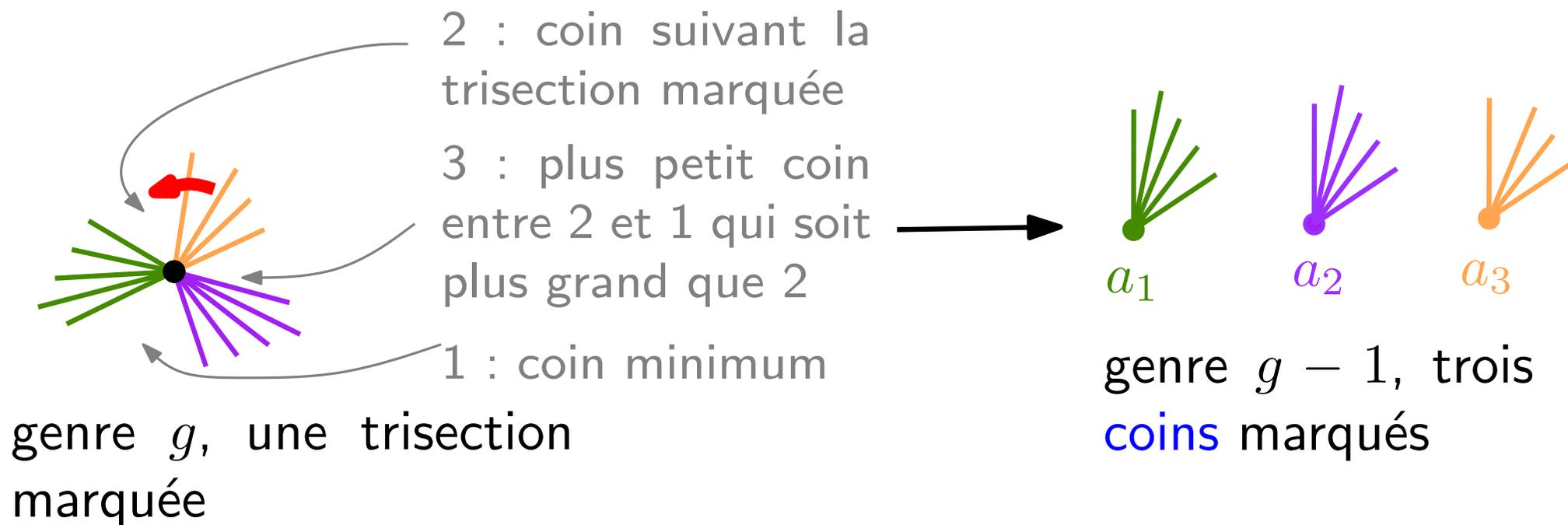


Tentative d'application inverse :



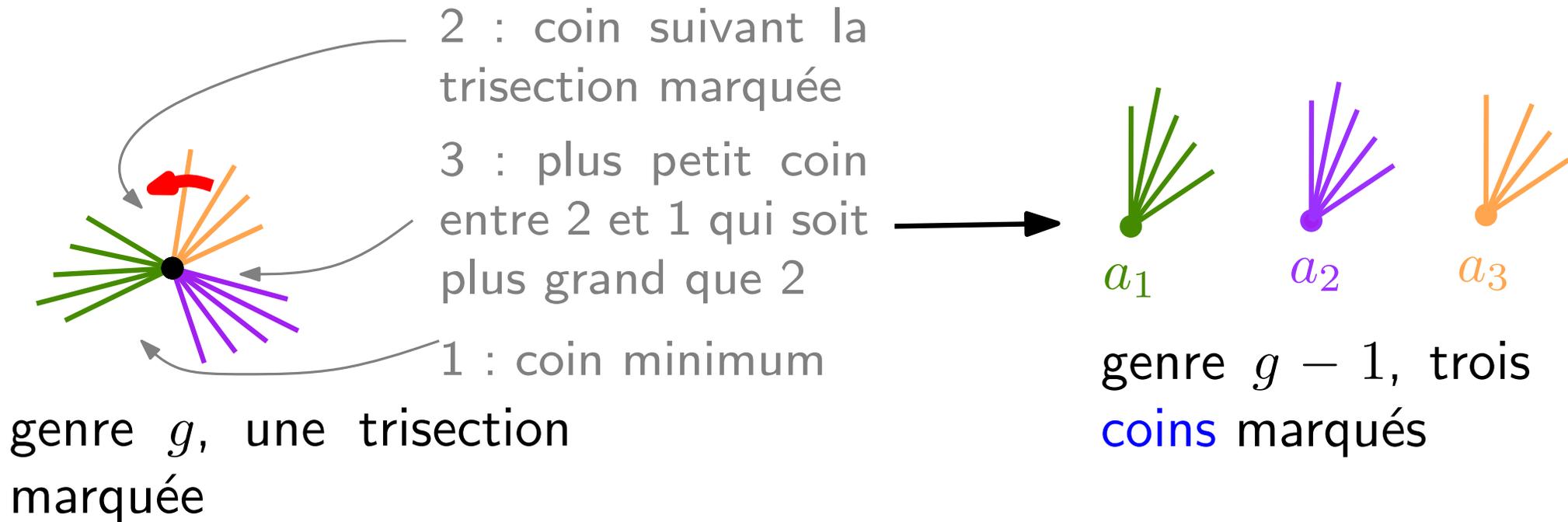
- On a toujours $a_1 < a_2 < a_3$ dans la carte de genre $g - 1$.

Tentative d'application inverse :



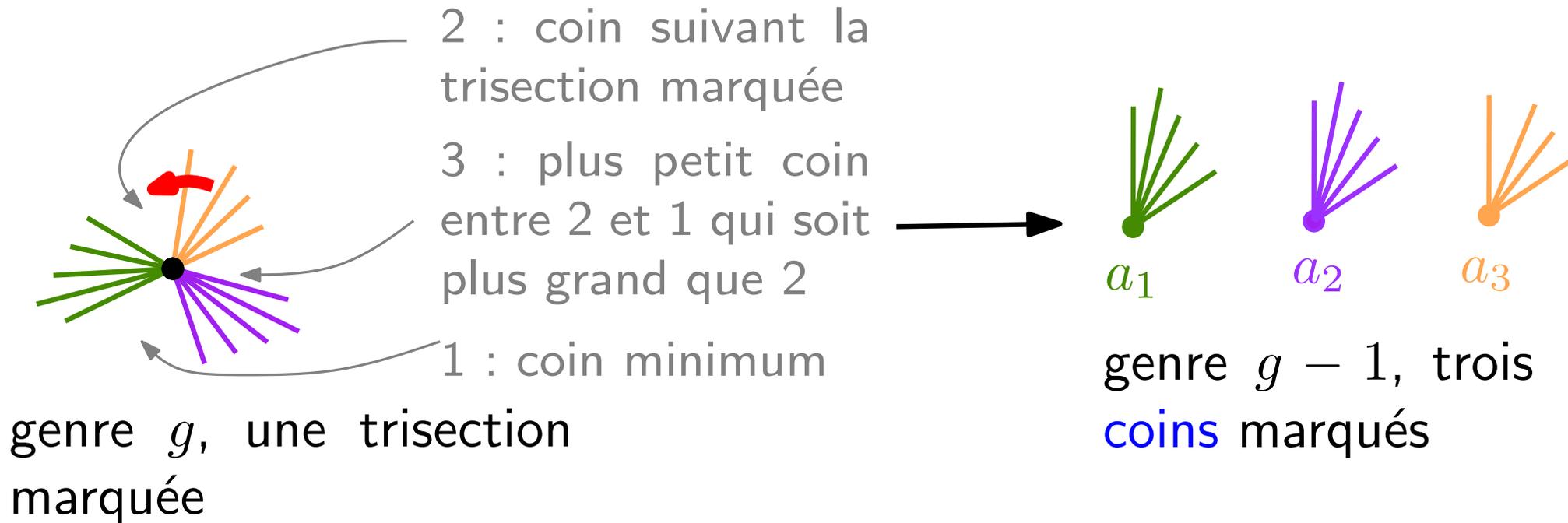
- On a toujours $a_1 < a_2 < a_3$ dans la carte de genre $g - 1$.
- a_1 et a_2 sont chacun le **coin minimum** de son sommet.

Tentative d'application inverse :



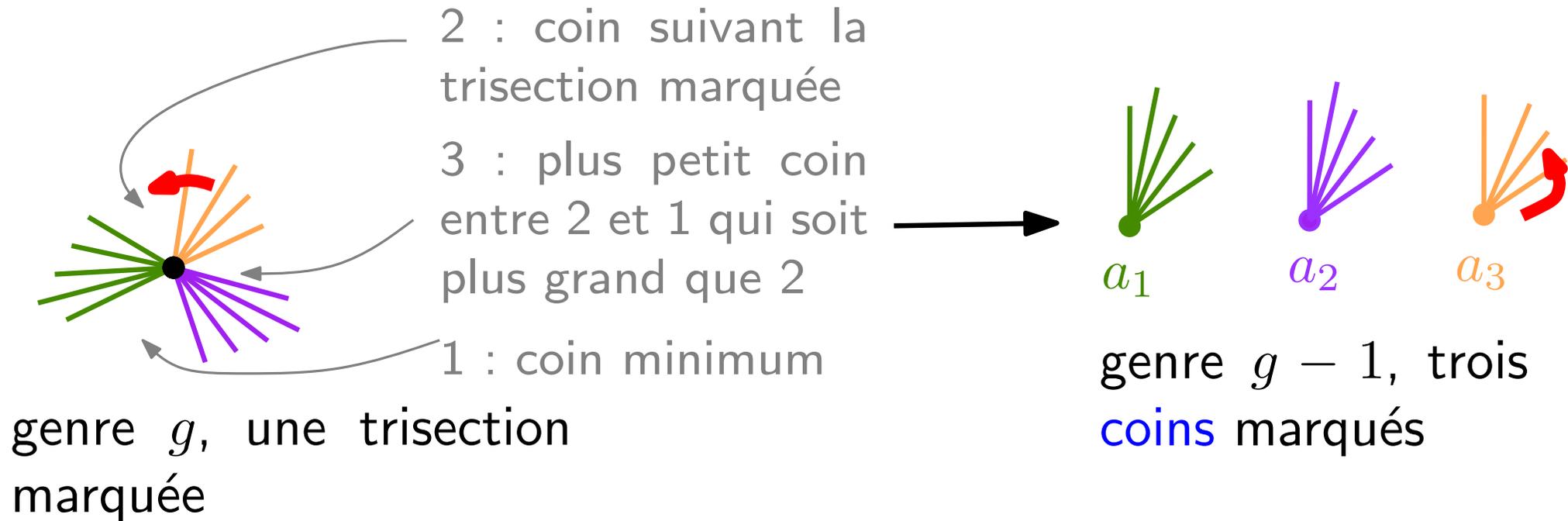
- On a toujours $a_1 < a_2 < a_3$ dans la carte de genre $g - 1$.
- a_1 et a_2 sont chacun le **coin minimum** de son sommet.
- Ce n'est **pas toujours** le cas de a_3 :

Tentative d'application inverse :



- On a toujours $a_1 < a_2 < a_3$ dans la carte de genre $g - 1$.
- a_1 et a_2 sont chacun le **coin minimum** de son sommet.
- Ce n'est **pas toujours** le cas de a_3 :
 - Si a_3 est le **minimum** de son sommet : on est dans l'image de la construction précédente.

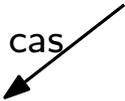
Tentative d'application inverse :



- On a toujours $a_1 < a_2 < a_3$ dans la carte de genre $g - 1$.
- a_1 et a_2 sont chacun le **coin minimum** de son sommet.
- Ce n'est **pas toujours** le cas de a_3 :
 - Si a_3 est le **minimum** de son sommet : on est dans l'image de la construction précédente.
 - Sinon a_3 est incident à **une trisection** de la carte de genre $g - 1$

On a donc :

genre g , une trisection
marquée

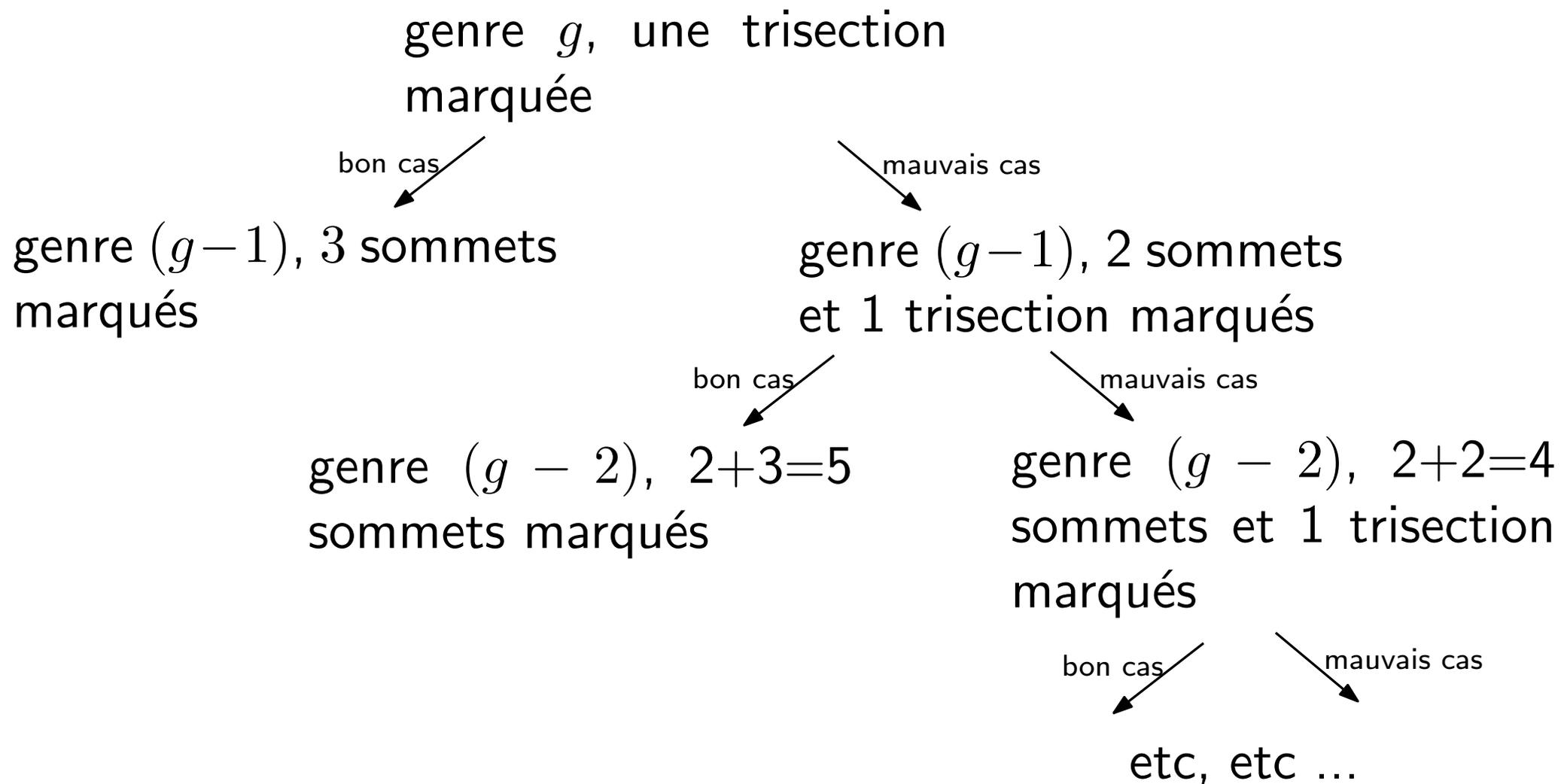
bon cas


genre $(g-1)$, 3 sommets
marqués

mauvais cas


genre $(g-1)$, 2 sommets
et 1 trisection marqués

On a donc :



D'où notre résultat principal :

genre g , une trisection
marquée $\stackrel{\text{bij.}}{=} \bigcup_{i > 0} \left(\begin{array}{l} \text{genre } g - i \text{ et } 2i + 1 \\ \text{sommets marqués.} \end{array} \right)$

D'où notre résultat principal :

genre g , une trisection
marquée $\stackrel{\text{bij.}}{=} \bigcup_{i > 0} \left(\begin{array}{l} \text{genre } g - i \text{ et } 2i + 1 \\ \text{sommets marqués.} \end{array} \right)$

Et une nouvelle identité combinatoire :

$$2g \cdot \epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3} \epsilon_{g-1}(n) +$$

D'où notre résultat principal :

genre g , une trisection
marquée $\stackrel{\text{bij.}}{=} \bigcup_{i > 0} \left(\begin{array}{l} \text{genre } g - i \text{ et } 2i + 1 \\ \text{sommets marqués.} \end{array} \right)$

Et une nouvelle identité combinatoire :

$$2g \cdot \epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3} \epsilon_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5} \epsilon_{g-2}(n) +$$

D'où notre résultat principal :

genre g , une trisection
marquée $\stackrel{\text{bij.}}{=} \bigcup_{i > 0} \left(\begin{array}{l} \text{genre } g - i \text{ et } 2i + 1 \\ \text{sommets marqués.} \end{array} \right)$

Et une nouvelle identité combinatoire :

$$2g \cdot \epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3} \epsilon_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5} \epsilon_{g-2}(n) + \dots + \binom{n+1}{2g+1} \text{Cat}(n)$$

D'où notre résultat principal :

$$\text{genre } g, \text{ une trisection } \underset{\text{marquée}}{\overset{\text{bij.}}{=}} \bigcup_{i > 0} \left(\begin{array}{l} \text{genre } g - i \text{ et } 2i + 1 \\ \text{sommets marqués.} \end{array} \right)$$

Et une nouvelle identité combinatoire :

$$2g \cdot \epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3} \epsilon_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5} \epsilon_{g-2}(n) + \dots + \binom{n+1}{2g+1} \text{Cat}(n)$$

En particulier :

$$\epsilon_g(n) = \underbrace{(\text{un polynôme})}_{\text{nombre de possibilités pour les choix successifs de sommets.}} \times \text{Cat}(n)$$

$$= \sum_{0=g_0 < g_1 < \dots < g_r = g} \prod_{i=1}^r \frac{1}{2g_i} \binom{n+1-2g_{i-1}}{2(g_i - g_{i-1}) + 1}$$

Par exemple :

$$2 \cdot \epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \text{Cat}(n)$$

Par exemple :

$$2 \cdot \epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \text{Cat}(n)$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot \epsilon_2(n) &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \epsilon_1(n) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{5!} \text{Cat}(n) \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440} \text{Cat}(n) \end{aligned}$$

Avantages :

- Première interprétation bijective.
- Facile de calculer $\epsilon_g(n)$ (\neq Harer-Zagier).
- Génération aléatoire/exhaustive de cartes à une face en temps linéaire (et l'algorithme est simple).

Variantes :

- Cartes à une face biparties.
- Cartes à une face étiquetées ?

Avantages :

- Première interprétation bijective.
- Facile de calculer $\epsilon_g(n)$ (\neq Harer-Zagier).
- Génération aléatoire/exhaustive de cartes à une face en temps linéaire (et l'algorithme est simple).

Variantes :

- Cartes à une face biparties.
- Cartes à une face étiquetées ?

Formules d'Harer et Zagier :

Récurrance :

$$(n+1)\epsilon_g(n) = 2(2n-1)\epsilon_g(n-1) + (2n-1)(n-1)(2n-3)\epsilon_{g-1}(n-2)$$

Version sommatoire :

$$\sum_{g \geq 0} \epsilon_g(n) y^{n+1-2g} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sum_{i \geq 1} 2^{i-1} \binom{n}{i-1} \binom{y}{i}$$