

ASMs et TSSCPPs

Hayat Cheballah

JCB 2012

1^{er} février 2012

Sommaire

1 Les triangles de Gelfand-Tsetlin

- Généralités
- Les triangles Gog
- Les triangles Magog

2 Les trapézoïdes

- Gog trapézoïdes
- Magog trapézoïdes

3 Une construction

- Involution de Schützenberger
- Les triangles GOGAm
- Traiter les inversions

4 L'algorithme

5 Raffinement : Statistiques

- Triangles Gog
- Triangles Magog

Sommaire

1 Les triangles de Gelfand-Tsetlin

- Généralités
- Les triangles Gog
- Les triangles Magog

2 Les trapézoïdes

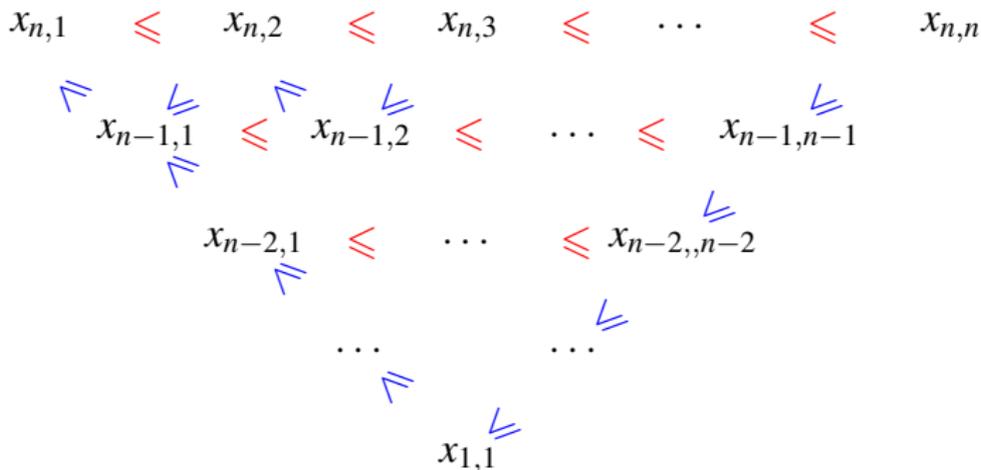
3 Une construction

4 L'algorithme

5 Raffinement : Statistiques

Triangles de Gelfand-Tsetlin de taille n

Arrangement triangulaire de $n(n + 1)/2$ éléments $X = (x_{i,j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$



Généralités

- $\omega(G) \in \mathbb{R}^n$: Poids d'un \mathcal{GT} :

$$\omega_i(G) = \sum_{j=0}^i g_{i,j} - \sum_{j=0}^{i-1} g_{i-1,j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 4 & 4 \\ & 1 & 1 & 4 \\ & & 1 & 4 \\ & & & 2 \end{array}$$

Généralités

- $\omega(G) \in \mathbb{R}^n$: Poids d'un \mathcal{GT} :

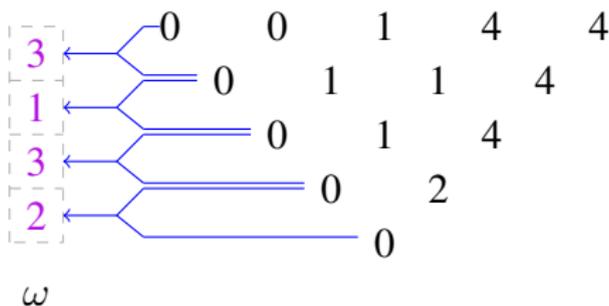
$$\omega_i(G) = \sum_{j=0}^i g_{i,j} - \sum_{j=0}^{i-1} g_{i-1,j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & \\ & 0 & 1 & 1 & 4 & \\ & & 0 & 1 & 4 & \\ & & & 0 & 2 & \\ & & & & 0 & \end{array}$$

Généralités

- $\omega(G) \in \mathbb{R}^n$: Poids d'un \mathcal{GT} :

$$\omega_i(G) = \sum_{j=0}^i g_{i,j} - \sum_{j=0}^{i-1} g_{i-1,j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$



Généralités

- $\omega(G) \in \mathbb{R}^n$: Poids d'un \mathcal{GT} :

$$\omega_i(G) = \sum_{j=0}^i g_{i,j} - \sum_{j=0}^{i-1} g_{i-1,j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

- Inversions dans un \mathcal{GT} : paire (i, j) tq.

$$g_{i,j} = g_{i+1,j}$$

$$\begin{array}{cccc}
 g_{4,1} & g_{4,2} & g_{4,3} & g_{4,4} \\
 g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} & \\
 g_{2,1} & g_{2,2} & & \\
 g_{1,1} & & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccc}
 0 & 1 & 4 & 7 \\
 1 & 1 & 4 & \\
 & 1 & 4 & \\
 & & 2 &
 \end{array}$$

Généralités

- $\omega(G) \in \mathbb{R}^n$: Poids d'un \mathcal{GT} :

$$\omega_i(G) = \sum_{j=0}^i g_{i,j} - \sum_{j=0}^{i-1} g_{i-1,j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

- Inversions dans un \mathcal{GT} : paire (i, j) tq.

$$g_{i,j} = g_{i+1,j}$$

- Les paires (m, p) telles que $m = i + k$ et $p = j + k$ pour $1 \leq k \leq n - i$ sont dites **couvertes** par cette inversion

$g_{4,1}$ $g_{4,2}$ $g_{4,3}$ $g_{4,4}$

$g_{3,1}$ $g_{3,2}$ $g_{3,3}$

$g_{2,1}$ $g_{2,2}$

$g_{1,1}$

=

0

1

4

7

1

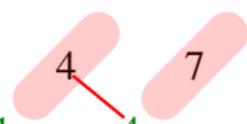
1

4

1

4

2



Généralités

- $\omega(G) \in \mathbb{R}^n$: Poids d'un \mathcal{GT} :

$$\omega_i(G) = \sum_{j=0}^i g_{i,j} - \sum_{j=0}^{i-1} g_{i-1,j} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n$$

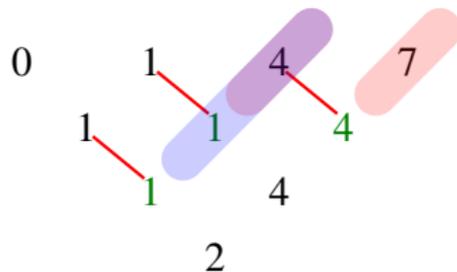
- Inversions dans un \mathcal{GT} : paire (i, j) tq.

$$g_{i,j} = g_{i+1,j}$$

- Les paires (m, p) telles que $m = i + k$ et $p = j + k$ pour $1 \leq k \leq n - i$ sont dites **couvertes** par cette inversion

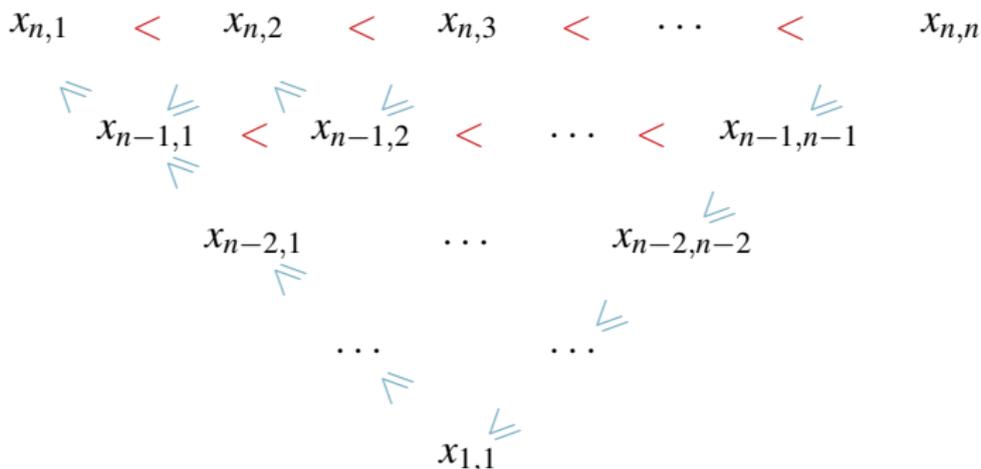
$$\begin{array}{cccc}
 g_{4,1} & g_{4,2} & g_{4,3} & g_{4,4} \\
 g_{3,1} & g_{3,2} & g_{3,3} & \\
 g_{2,1} & g_{2,2} & & \\
 g_{1,1} & & &
 \end{array}$$

=



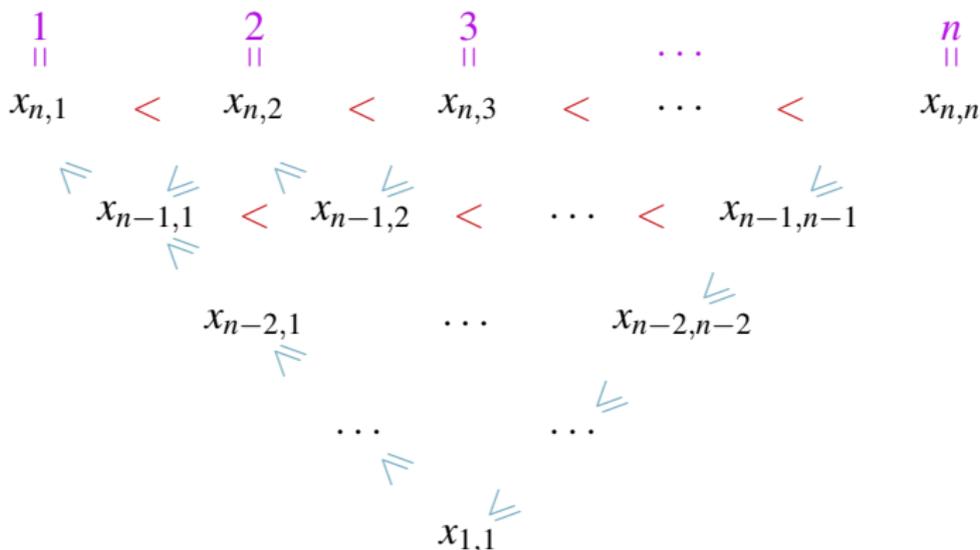
Triangle Gog de taille n

Arrangement triangulaire de $n(n + 1)/2$ éléments $\in \llbracket 1, n \rrbracket$



Triangle Gog de taille n

Arrangement triangulaire de $n(n + 1)/2$ éléments $\in \llbracket 1, n \rrbracket$



Théorème [Mills, Robbins, Rumsey,80']

Les triangles Gog de taille n sont en bijection avec les ASMs de taille n

Matrices à signes alternants

Matrices à signes alternants (ASMs)

Matrice carrée

- à coefficients dans $\{0, 1, -1\}$,
- dans chaque ligne ou colonne, les 1 et -1 alternent, en commençant et terminant par 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices à signes alternants

Matrices à signes alternants (ASMs)

Matrice carrée

- à coefficients dans $\{0, 1, -1\}$,
- dans chaque ligne ou colonne, les 1 et -1 alternent, en commençant et terminant par 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

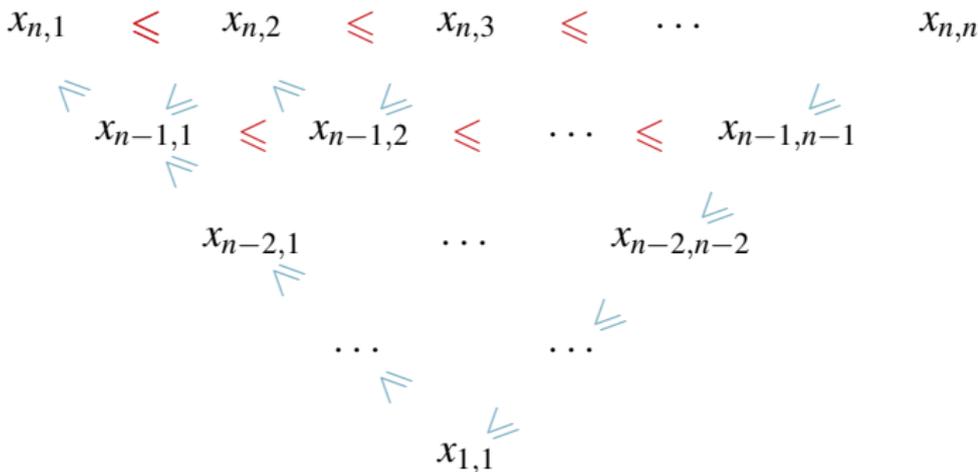
Formule d'énumération des ASMs [Mills,Robbins, Rumsey,80']

Le nombre d'ASMs de taille $n \times n$ est donné par

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!}$$

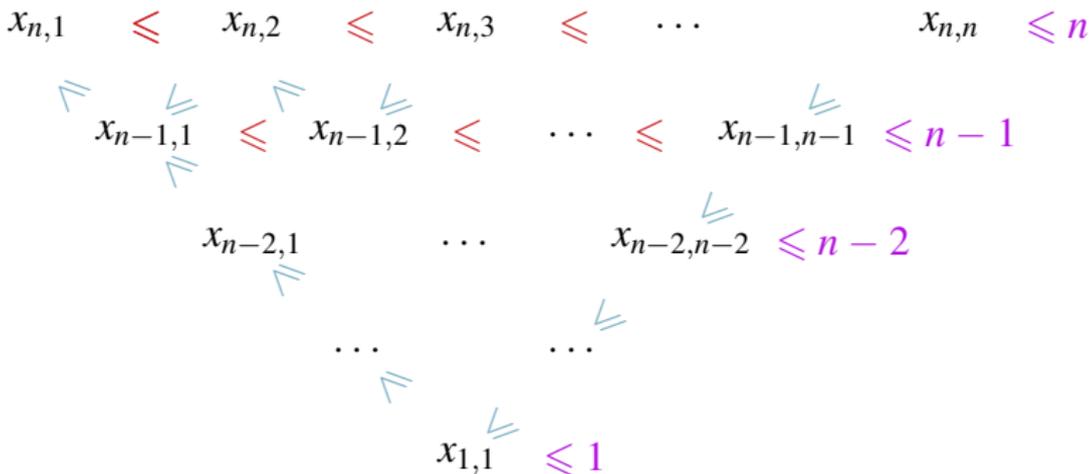
Triangles Magog de taille n

Arrangement triangulaire de $n(n + 1)/2$ éléments $\in \llbracket 1, n \rrbracket$



Triangles Magog de taille n

Arrangement triangulaire de $n(n + 1)/2$ éléments $\in \llbracket 1, n \rrbracket$

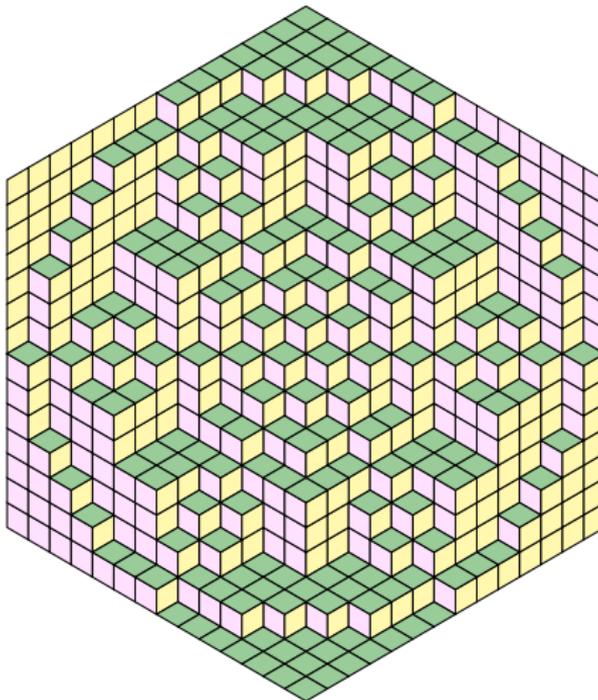


Théorème [Mills, Robbins, Rumsey, 80']

Les triangles Magog de taille n sont en bijection avec les TSSCPPs de taille $2n \times 2n \times 2n$

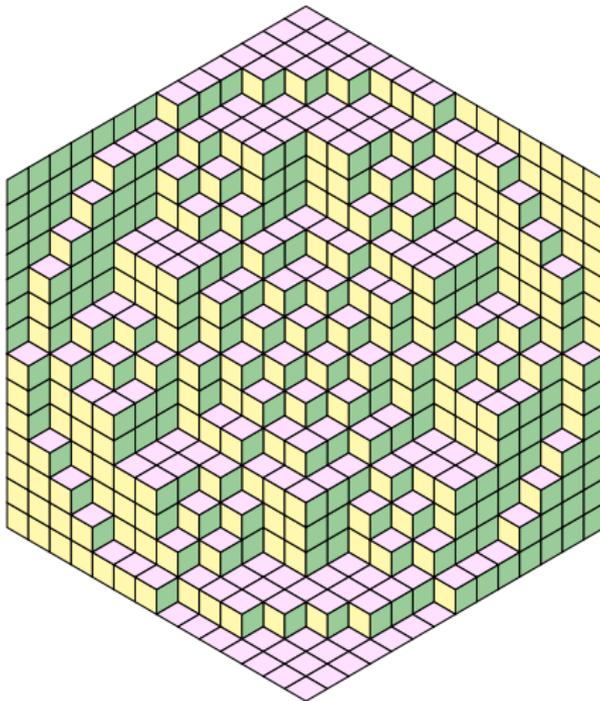
TSSCPPs

Les **PPs totalement symétriques auto-complémentaires** : PP dans un hexagone de taille $2n \times 2n \times 2n$ ayant toutes les symétries de l'hexagone



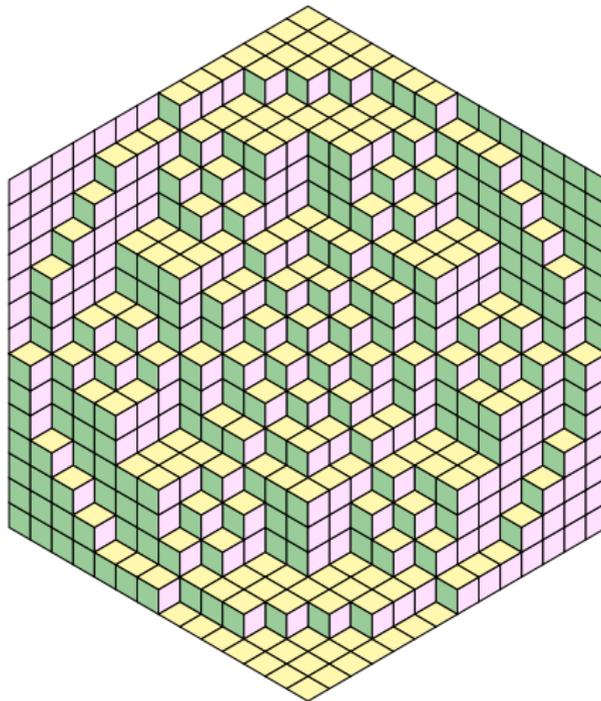
TSSCPPs

Les **PPs totalement symétriques auto-complémentaires** : PPs dans un hexagone de taille $2n \times 2n \times 2n$ ayant toutes les symétries de l'hexagone



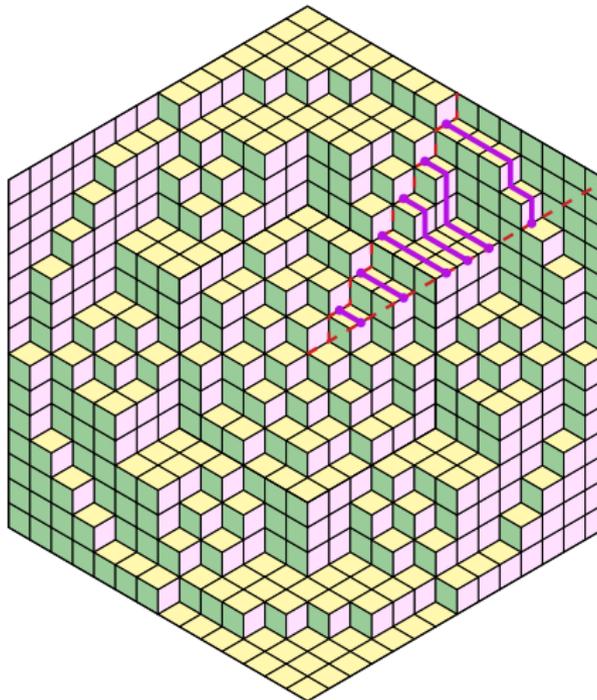
TSSCPPs

Les **PPs totalement symétriques auto-complémentaires** : PPs dans un hexagone de taille $2n \times 2n \times 2n$ ayant toutes les symétries de l'hexagone

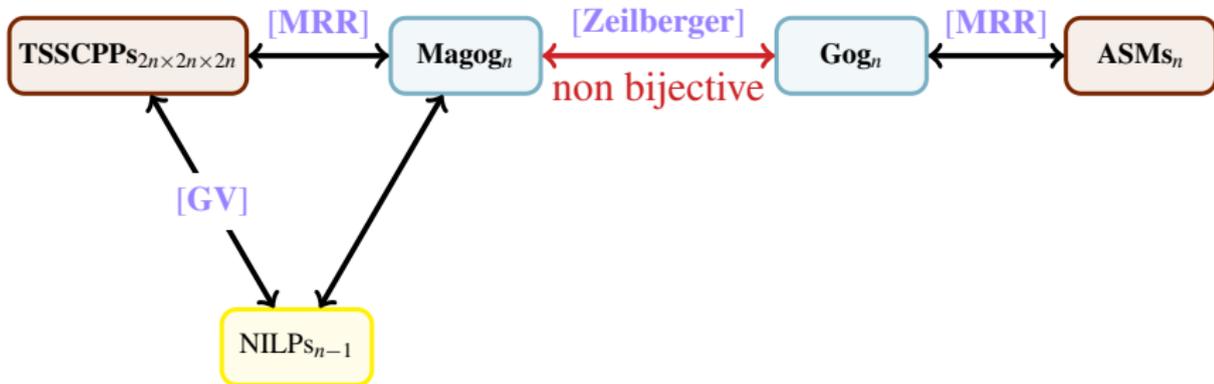


TSSCPPs

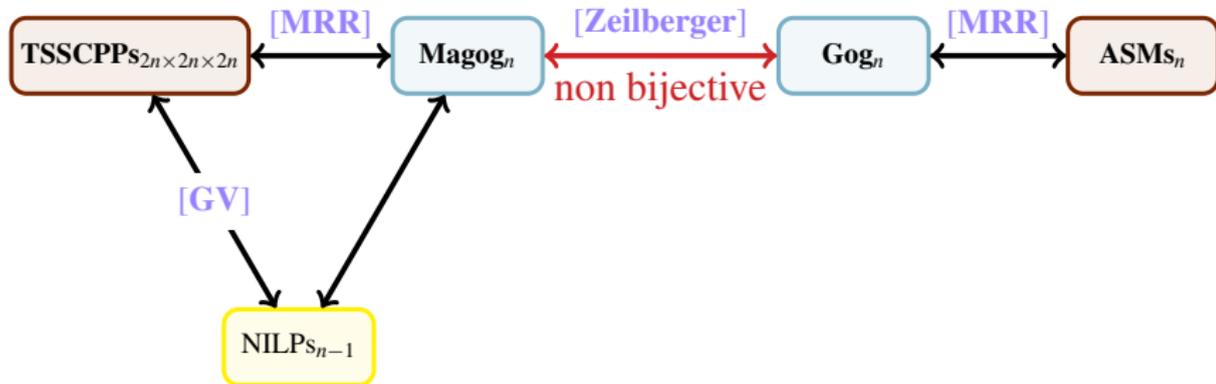
Les **PPs totalement symétriques auto-complémentaires** : PP dans un hexagone de taille $2n \times 2n \times 2n$ ayant toutes les symétries de l'hexagone



Récapitulatif



Récapitulatif



Construire une **bijection explicite** entre les triangles Gog et les triangles Magog

↔ Gog et Magog trapézoïdes

Sommaire

1 Les triangles de Gelfand-Tsetlin

2 Les trapézoïdes

- Gog trapézoïdes

- Magog trapézoïdes

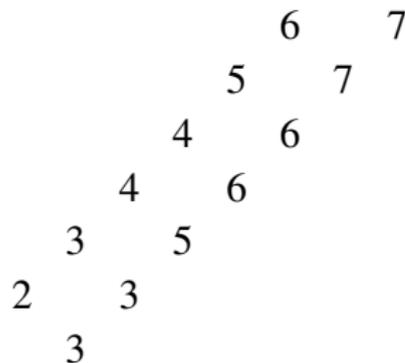
3 Une construction

4 L'algorithme

5 Raffinement : Statistiques

(n, k) –Gog trapézoïde

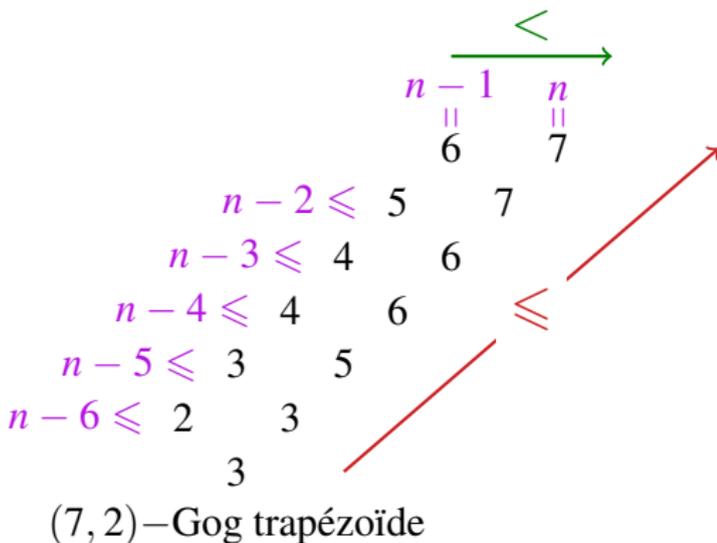
(n, k) –Gog Trapézoïde : k dernières diagonales SW-NE d'un triangle Gog de taille n .



$(7, 2)$ –Gog trapézoïde

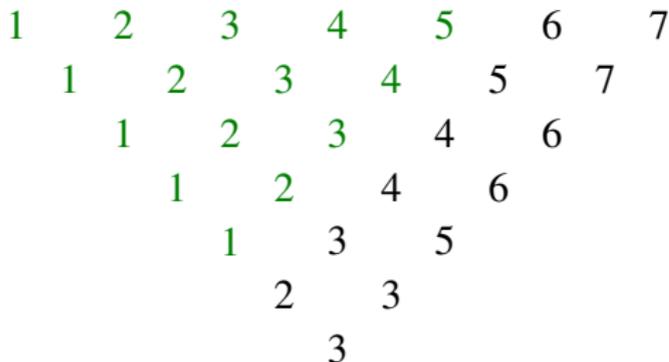
(n, k) –Gog trapézoïde

(n, k) –Gog Trapézoïde : k dernières diagonales SW-NE d'un triangle Gog de taille n .



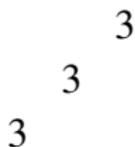
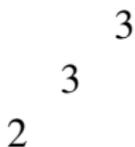
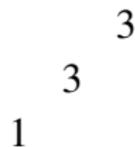
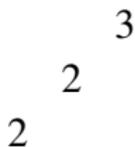
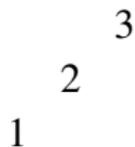
(n, k) –Gog trapézoïde

(n, k) –Gog Trapézoïde : k dernières diagonales SW-NE d'un triangle Gog de taille n .

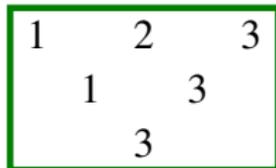
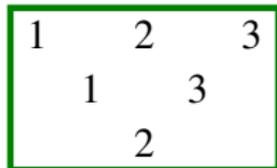
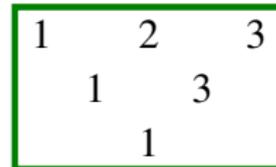
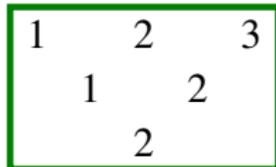
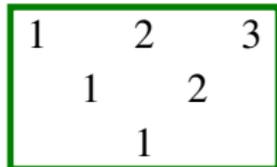


Complétion canonique en un triangle Gog de taille n \rightsquigarrow Insertion Gog minimal

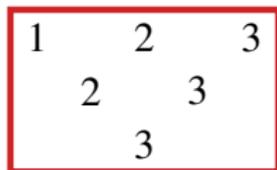
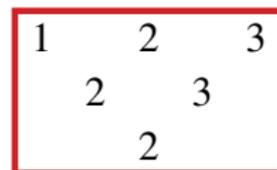
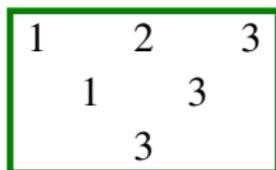
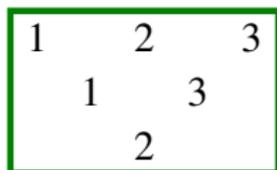
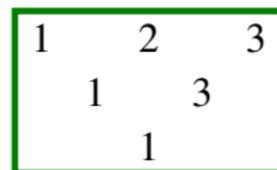
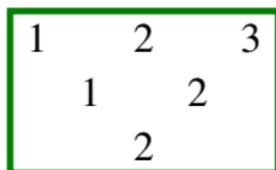
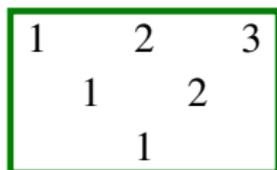
Exemple : $(3, 1)$ –Gog trapézoïdes



Exemple : $(3, 1)$ -Gog trapézoïdes

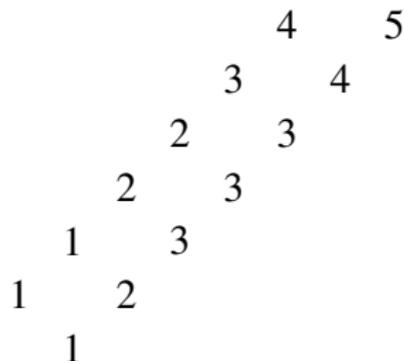


Exemple : $(3, 1)$ -Gog trapézoïdes



(n, k) –Magog trapézoïdes

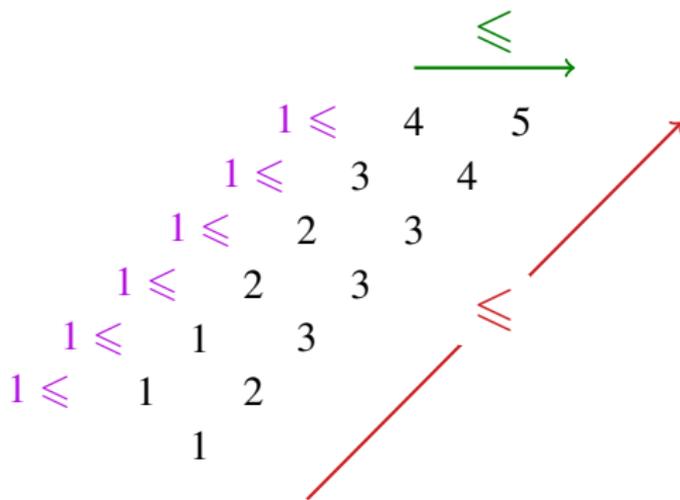
(n, k) –Magog trapézoïde : k dernières diagonales SW-NE d'un triangle Magog de taille n .



$(7, 2)$ –Magog trapézoïde

(n, k) –Magog trapézoïdes

(n, k) –Magog trapézoïde : k dernières diagonales SW-NE d'un triangle Magog de taille n .



$(7, 2)$ –Magog trapézoïde

Exemple : $(3, 1)$ –Magog trapézoïdes

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \ 1 \\ 1 \end{array}$$

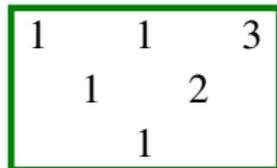
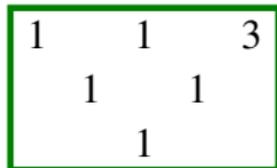
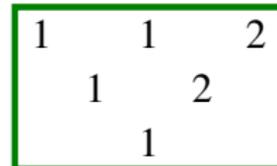
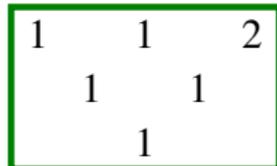
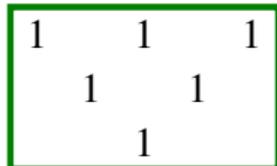
$$\begin{array}{c} 2 \\ 1 \ 1 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 2 \\ 2 \ 1 \\ 1 \end{array}$$

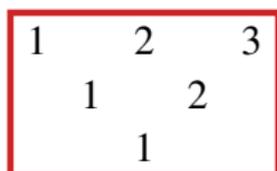
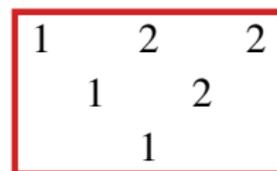
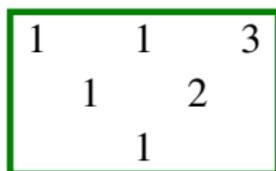
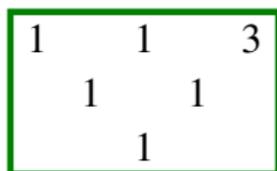
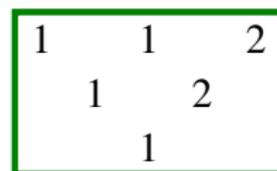
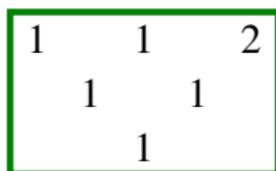
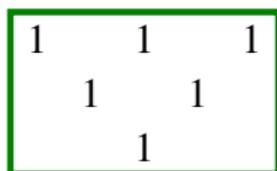
$$\begin{array}{c} 3 \\ 1 \ 1 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \\ 2 \ 1 \\ 1 \end{array}$$

Exemple : $(3, 1)$ -Magog trapézoïdes



Exemple : $(3, 1)$ -Magog trapézoïdes



Sommaire

1 Les triangles de Gelfand-Tsetlin

2 Les trapézoïdes

3 Une construction

- Involution de Schützenberger
- Les triangles GOGAm
- Traiter les inversions

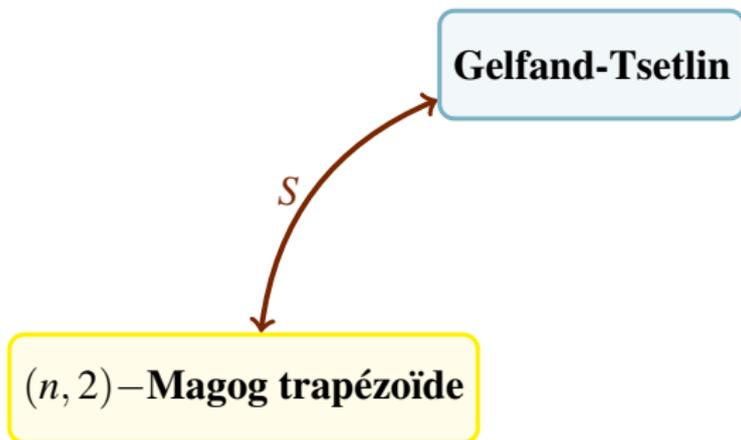
4 L'algorithme

5 Raffinement : Statistiques

Principe de la construction

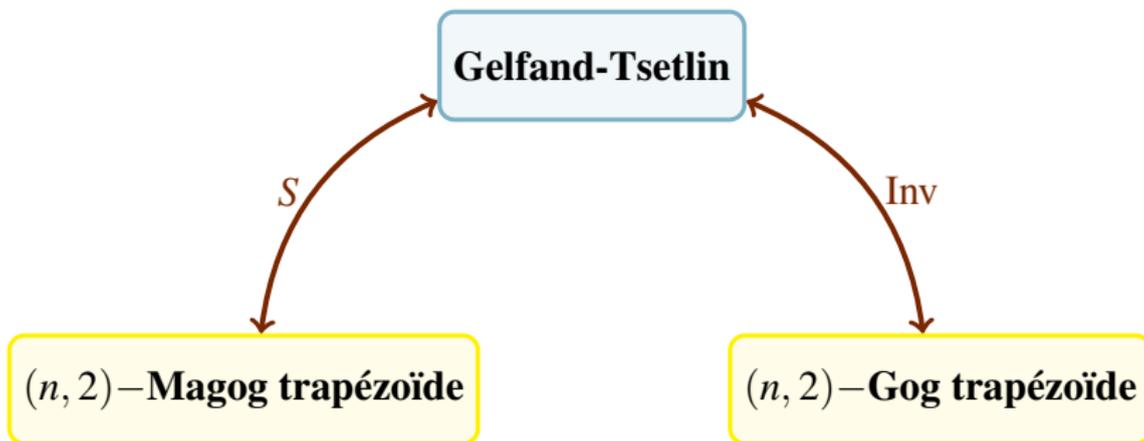
$(n, 2)$ –Magog trapézoïde

Principe de la construction



- S : Involution de Schützenberger

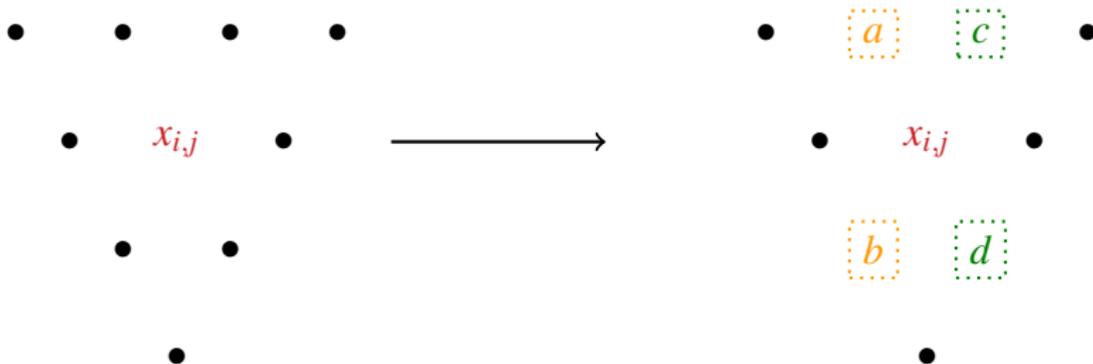
Principe de la construction



- S : Involution de Schützenberger
- Inv : Traiter les inversions

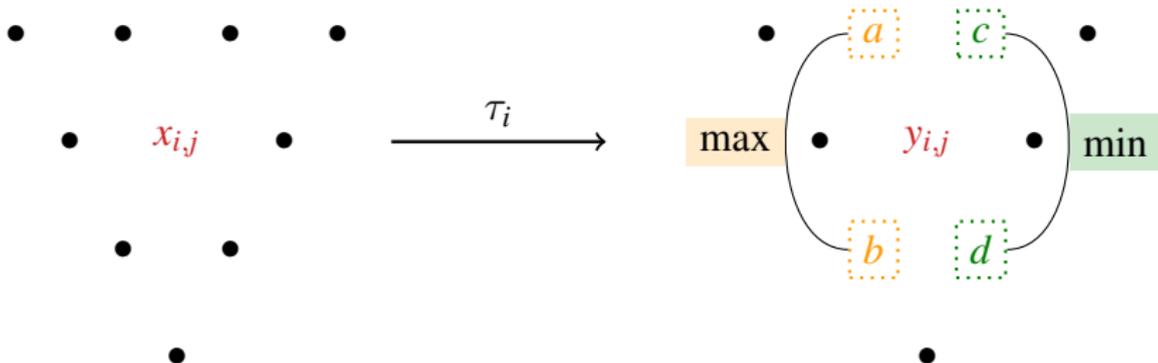
Involution de Schützenberger

Soit X un triangle de Gelfand-Tsetlin de taille n . Soit τ l'opération qui agit sur un élément $x_{i,j}$ de X [Berenstein, Kirillov, 96] :



Involution de Schützenberger

Soit X un triangle de Gelfand-Tsetlin de taille n . Soit τ l'opération qui agit sur un élément $x_{i,j}$ de X [Berenstein, Kirillov, 96] :



$$y_{i,j} = \max(a, b) + \min(c, d) - x_{i,j}$$

τ_i agit sur tous les éléments de la i^{me} ligne

Involution de Schützenberger

On note S l'involution de Schützenberger

$$S = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-2} \cdots \tau_1 \tau_2 \tau_1$$

Exemple : $S = \tau_1 \tau_2 \tau_1$

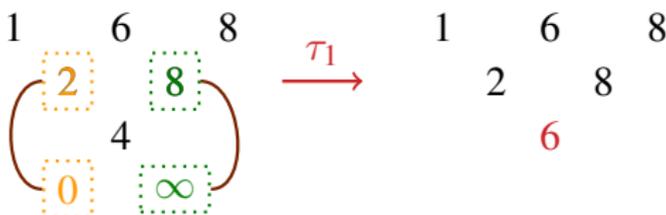
1	6	8
	2	8
	4	

Involution de Schützenberger

On note S l'involution de Schützenberger

$$S = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-2} \cdots \tau_1 \tau_2 \tau_1$$

Exemple : $S = \tau_1 \tau_2 \tau_1$

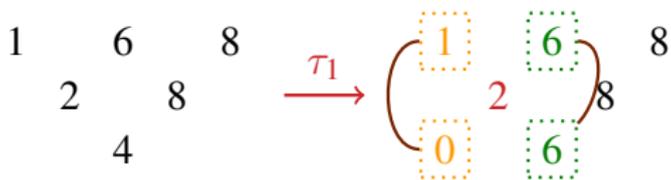


Involution de Schützenberger

On note S l'involution de Schützenberger

$$S = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-2} \cdots \tau_1 \tau_2 \tau_1$$

Exemple : $S = \tau_1 \tau_2 \tau_1$



Involution de Schützenberger

On note S l'involution de Schützenberger

$$S = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-2} \cdots \tau_1 \tau_2 \tau_1$$

Exemple : $S = \tau_1 \tau_2 \tau_1$

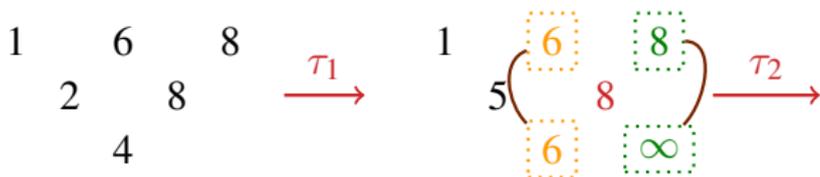


Involution de Schützenberger

On note S l'involution de Schützenberger

$$S = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-2} \cdots \tau_1 \tau_2 \tau_1$$

Exemple : $S = \tau_1 \tau_2 \tau_1$

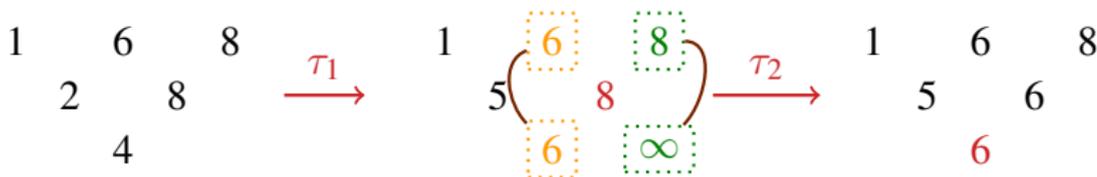


Involution de Schützenberger

On note S l'involution de Schützenberger

$$S = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-2} \cdots \tau_1 \tau_2 \tau_1$$

Exemple : $S = \tau_1 \tau_2 \tau_1$

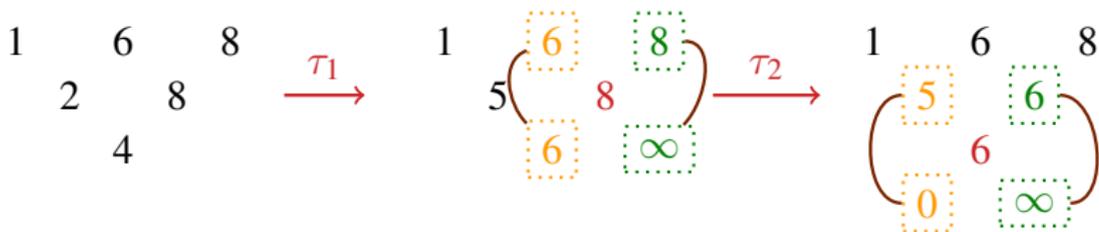


Involution de Schützenberger

On note S l'involution de Schützenberger

$$S = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-2} \cdots \tau_1 \tau_2 \tau_1$$

Exemple : $S = \tau_1 \tau_2 \tau_1$

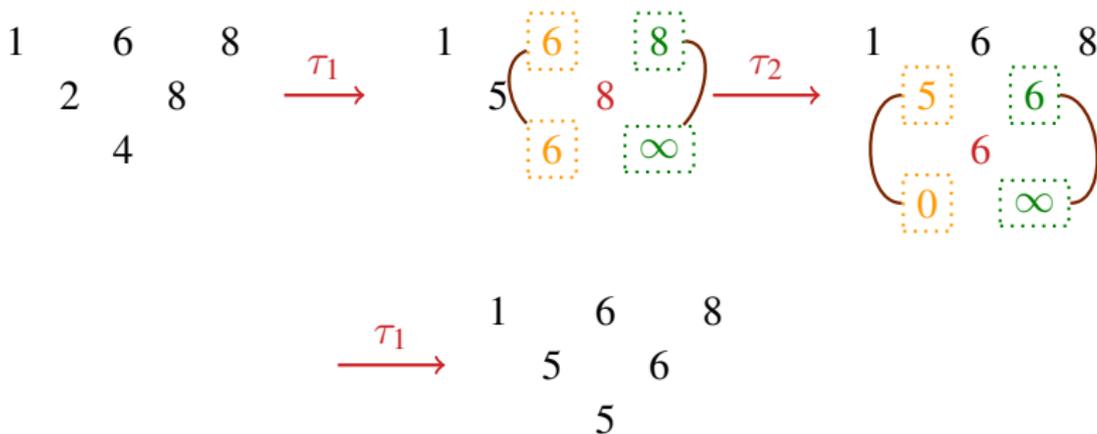


Involution de Schützenberger

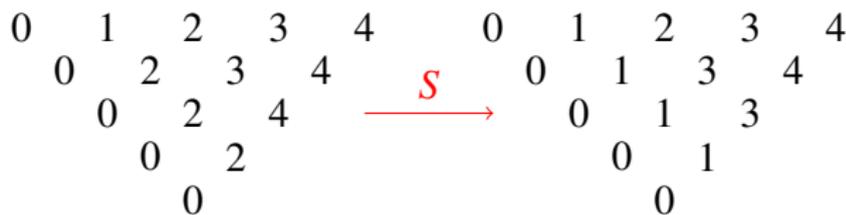
On note S l'involution de Schützenberger

$$S = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-1} \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_{n-2} \cdots \tau_1 \tau_2 \tau_1$$

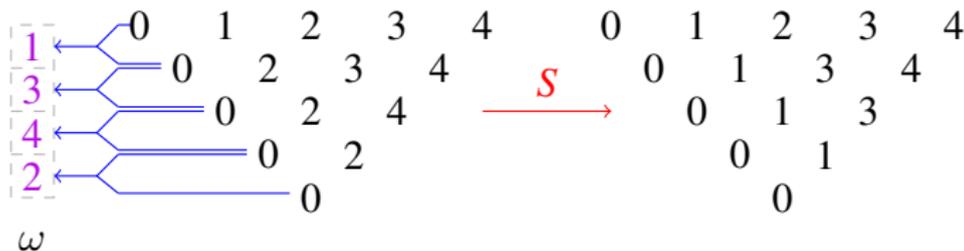
Exemple : $S = \tau_1 \tau_2 \tau_1$



Involution de Schützenberger : Propriétés



Involution de Schützenberger : Propriétés



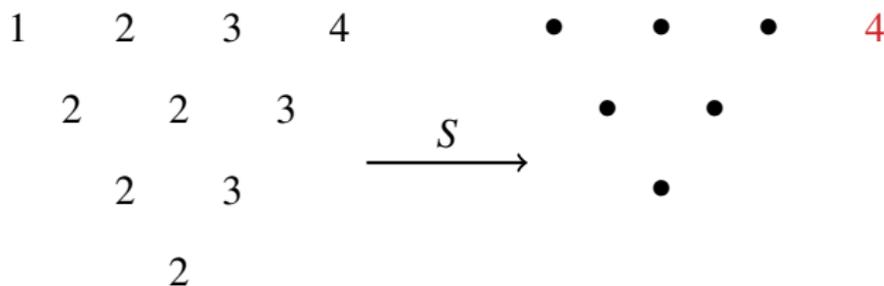
Lemme : calcul de la dernière diagonale de SX

Soit X un triangle de Gelfand-Tsetlin et $Y = SX$ son image par S , alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{nn} = X_{nn} \\ Y_{kk} = \max_{n=j_0 > j_1 > \dots > j_{n-k} \geq 1} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i, j_i} - X_{j_{i+1}+i, j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k, j_{n-k}} \right] \end{array} \right.$$

EXEMPLE

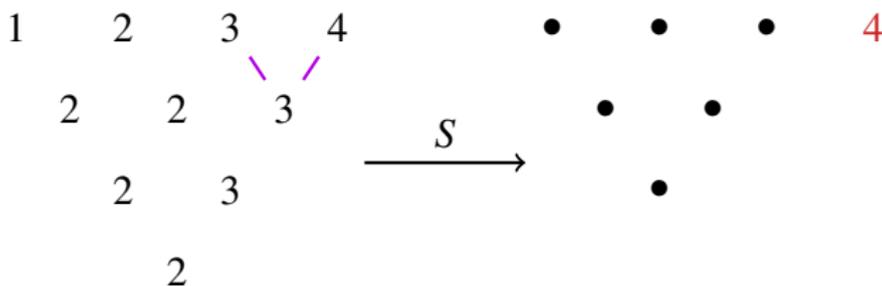
$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{kk} = \max_{n=j_0 > j_1 > \dots > j_{n-k} \geq 1} \\ \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i, j_i} - X_{j_{i+1}+i, j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k, j_{n-k}} \right] \end{array} \right.$$



$$Y_{4,4} = X_{4,4} = 4$$

EXEMPLE

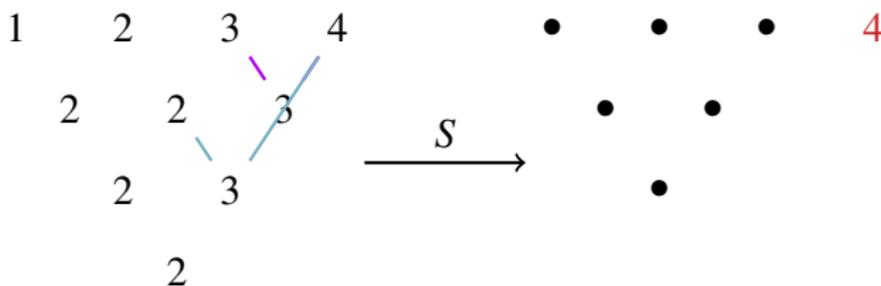
$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{kk} = \max_{n=j_0 > j_1 > \dots > j_{n-k} \geq 1} \\ \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i, j_i} - X_{j_{i+1}+i, j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k, j_{n-k}} \right] \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} Y_{3,3} &= \max_{4=j_0 > j_1 \geq 1} [(X_{j_0, j_0} - X_{j_1, j_1}) + X_{j_1+1, j_1}] = \\ &= \max(X_{4,4} - X_{3,3}) + X_{4,3}, (X_{4,4} - X_{2,2}) + X_{3,2}, \\ &\quad (X_{4,4} - X_{1,1}) + X_{2,1} = 4 \end{aligned}$$

EXEMPLE

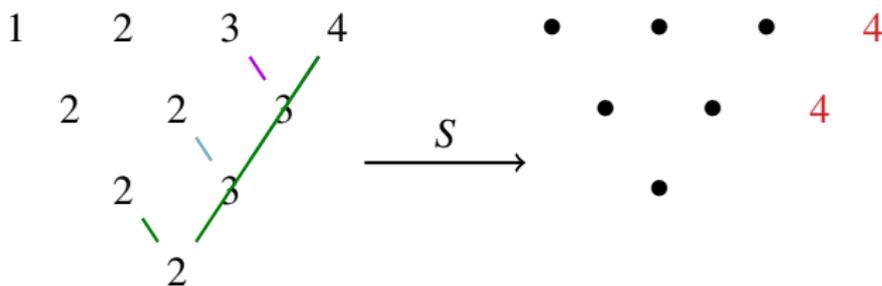
$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{kk} = \max_{n=j_0 > j_1 > \dots > j_{n-k} \geq 1} \\ \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i, j_i} - X_{j_{i+1}+i, j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k, j_{n-k}} \right] \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} Y_{3,3} &= \max_{4=j_0 > j_1 \geq 1} [(X_{j_0, j_0} - X_{j_1, j_1}) + X_{j_1+1, j_1}] = \\ &= \max(X_{4,4} - X_{3,3}) + X_{4,3}, (X_{4,4} - X_{2,2}) + X_{3,2}, \\ &\quad (X_{4,4} - X_{1,1}) + X_{2,1} = 4 \end{aligned}$$

EXEMPLE

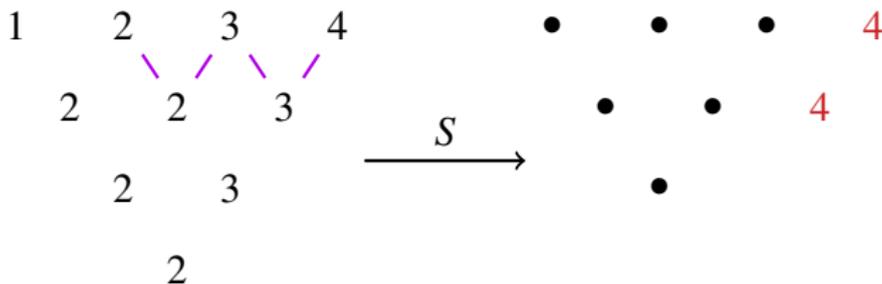
$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{kk} = \max_{n=j_0 > j_1 > \dots > j_{n-k} \geq 1} \\ \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i, j_i} - X_{j_{i+1}+i, j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k, j_{n-k}} \right] \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} Y_{3,3} &= \max_{4=j_0 > j_1 \geq 1} [(X_{j_0, j_0} - X_{j_1, j_1}) + X_{j_1+1, j_1}] = \\ &= \max(X_{4,4} - X_{3,3}) + X_{4,3}, (X_{4,4} - X_{2,2}) + X_{3,2}, \\ &\quad (X_{4,4} - X_{1,1}) + X_{2,1} = 4 \end{aligned}$$

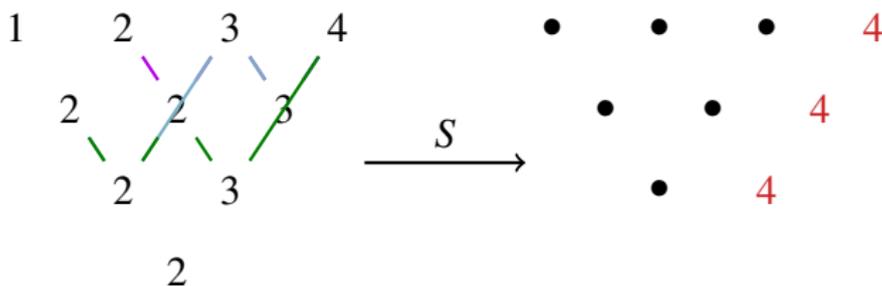
EXEMPLE

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{kk} = \max_{n=j_0 > j_1 > \dots > j_{n-k} \geq 1} \\ \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i, j_i} - X_{j_{i+1}+i, j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k, j_{n-k}} \right] \end{array} \right.$$



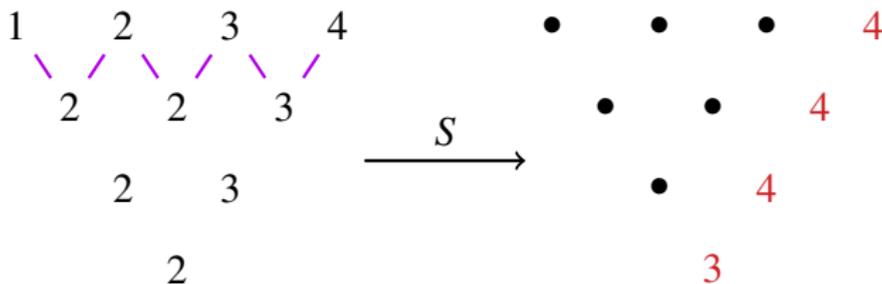
EXEMPLE

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{kk} = \max_{n=j_0 > j_1 > \dots > j_{n-k} \geq 1} \\ \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i, j_i} - X_{j_{i+1}+i, j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k, j_{n-k}} \right] \end{array} \right.$$



EXEMPLE

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{kk} = \max_{n=j_0 > j_1 > \dots > j_{n-k} \geq 1} \\ \left[\left(\sum_{i=0}^{n-k-1} X_{j_i+i, j_i} - X_{j_{i+1}+i, j_{i+1}} \right) + X_{j_{n-k}+n-k, j_{n-k}} \right] \end{array} \right.$$



Triangles GOGAm

Définition : triangle GOGAm

Un triangle **GOGAm** de taille n est un triangle de Gelfand-Tsetlin tel que son image par S est un triangle Magog de taille n .

Triangles GOGAm

Définition : triangle GOGAm

Un triangle **GOGAm** de taille n est un triangle de Gelfand-Tsetlin tel que son image par S est un triangle Magog de taille n .

Proposition : triangle GOGAm

$X = (X_{i,j})$ est un GOGAm $\Leftrightarrow X_{n,n} \leq n$, $\forall 1 \leq k \leq n-1$, et $n > j_1 > \dots > j_{n-k} \geq 1$

$$X_{n,n} + \sum_{i=1}^{n-k} X_{j_i+i, j_i} - X_{j_i+i-1, j_i} \leq k$$

$(n, 2)$ –GOGAm trapézoïdes

S

Inv

$(n, 2)$ –Magog trapézoïde

$(n, 2)$ –Gog trapézoïde



$(n, 2)$ -GOGAm trapézoïdes

S



$(n, 2)$ -Magog trapézoïde

φ



$(n, 2)$ -Gog trapézoïde

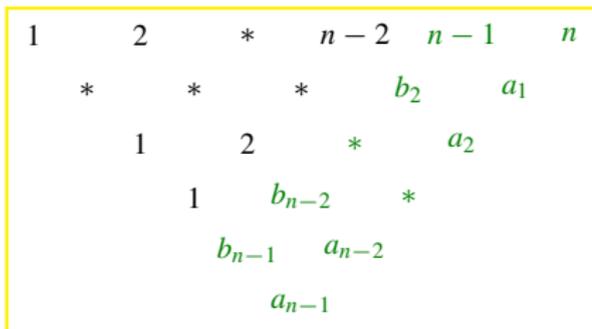
$(n, 2)$ -GOGAm trapézoïdes

S

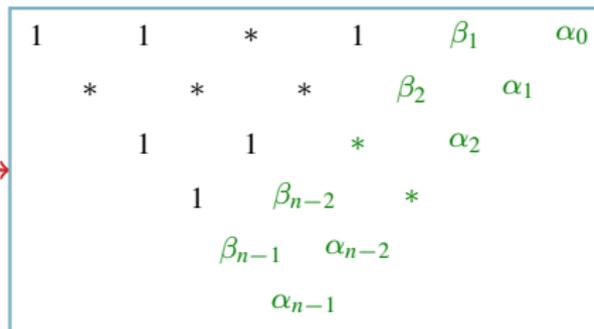
φ

$(n, 2)$ -Magog trapézoïde

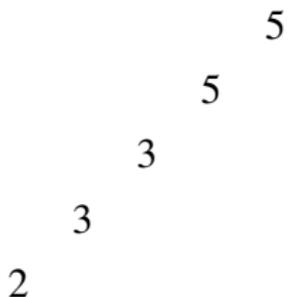
$(n, 2)$ -Gog trapézoïde



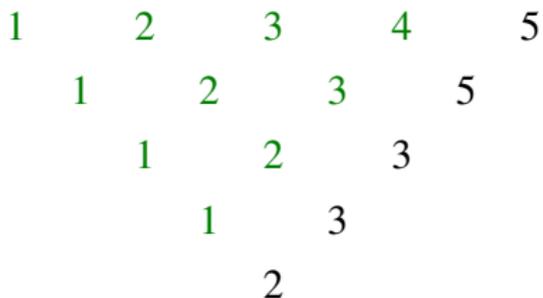
φ



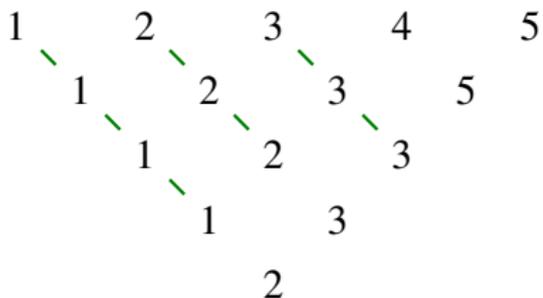
Action de φ : Application aux $(n, 1)$ -trapézoïdes



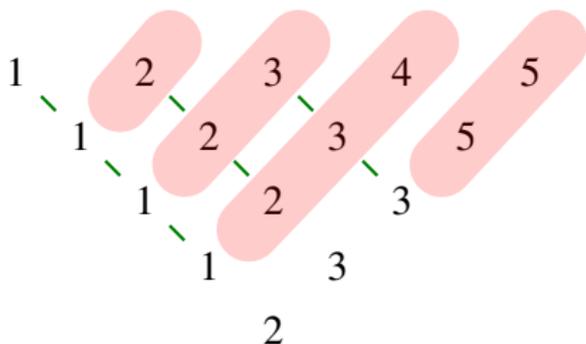
Action de φ : Application aux $(n, 1)$ -trapézoïdes



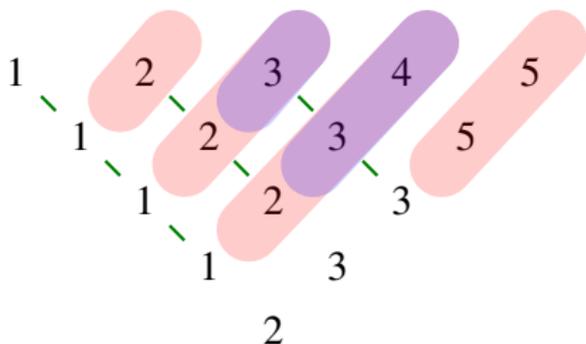
Action de φ : Application aux $(n, 1)$ -trapézoïdes



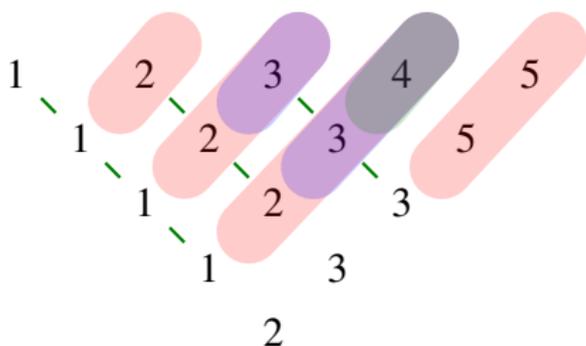
Action de φ : Application aux $(n, 1)$ -trapézoïdes



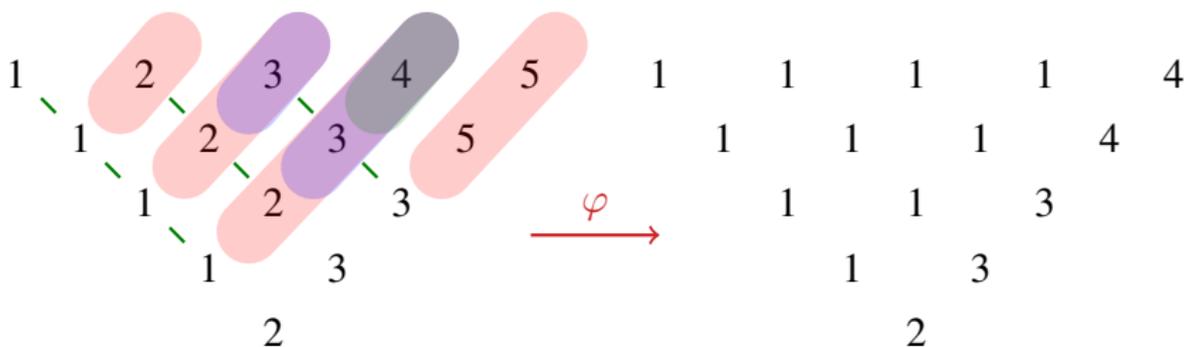
Action de φ : Application aux $(n, 1)$ -trapézoïdes



Action de φ : Application aux $(n, 1)$ -trapézoïdes



Action de φ : Application aux $(n, 1)$ -trapézoïdes



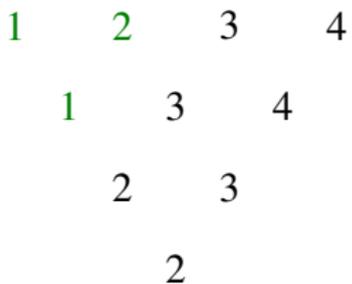
Théorème

Dans le cas des $(n, 1)$ trapézoïdes, cet algorithme est une bijection.

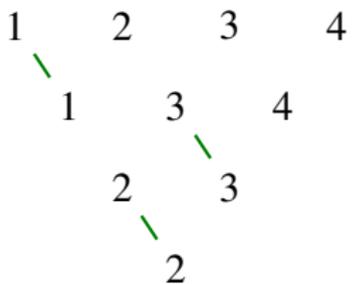
Problématique

3 4
3 4
2 3
2

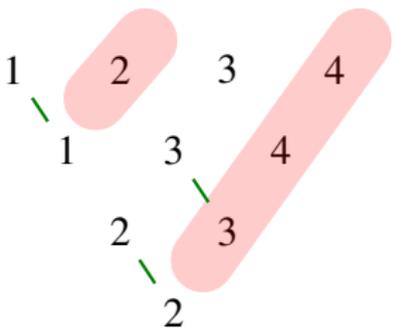
Problématique



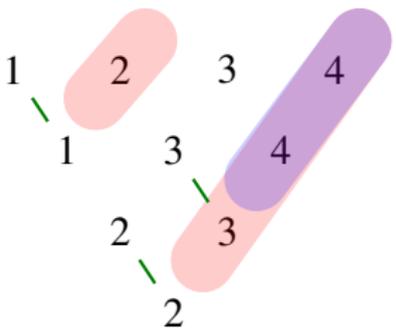
Problématique



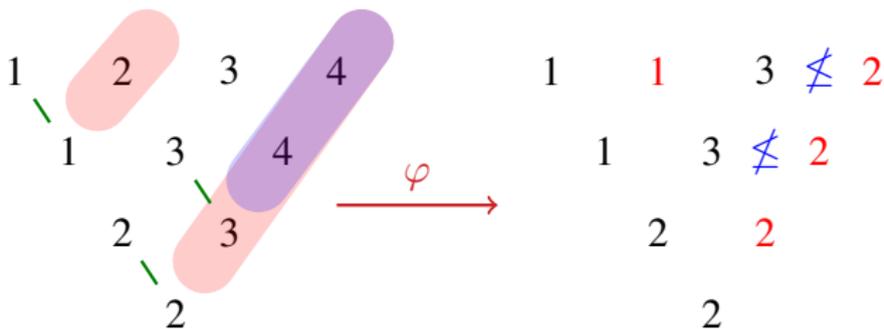
Problématique



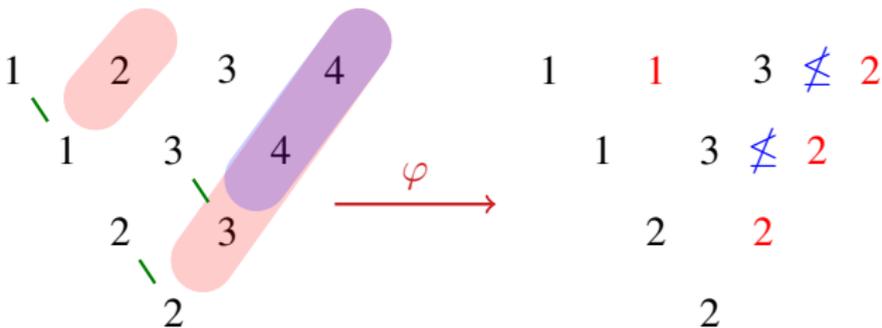
Problématique



Problématique



Problématique



Solution

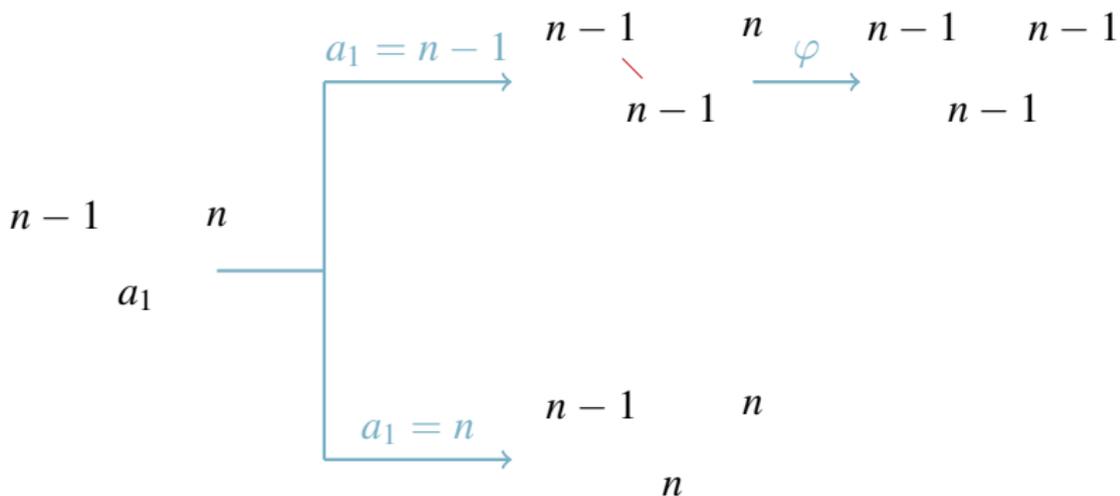
Traitement successif des inversions \Rightarrow Ajout de diagonales NW-SE

Sommaire

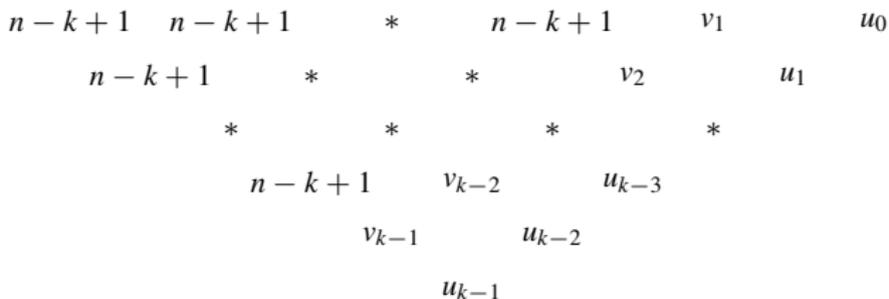
- 1 Les triangles de Gelfand-Tsetlin
- 2 Les trapézoïdes
- 3 Une construction
- 4 L'algorithme**
- 5 Raffinement : Statistiques

Algorithme : $(n, 2)$ -Gog trapézoïde \rightarrow $(n, 2)$ -GOGAm trapézoïde

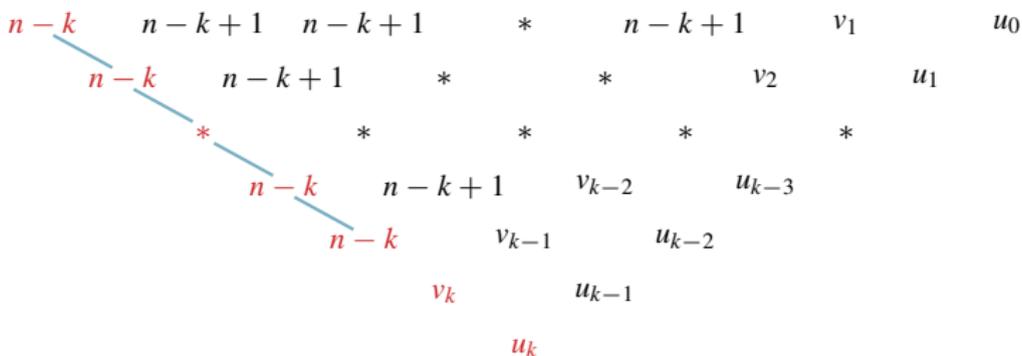
- *Init.* Gog de taille 1 $\Rightarrow X^{(1)} = n$
- *1^{re} étape* \Rightarrow 2 diagonales



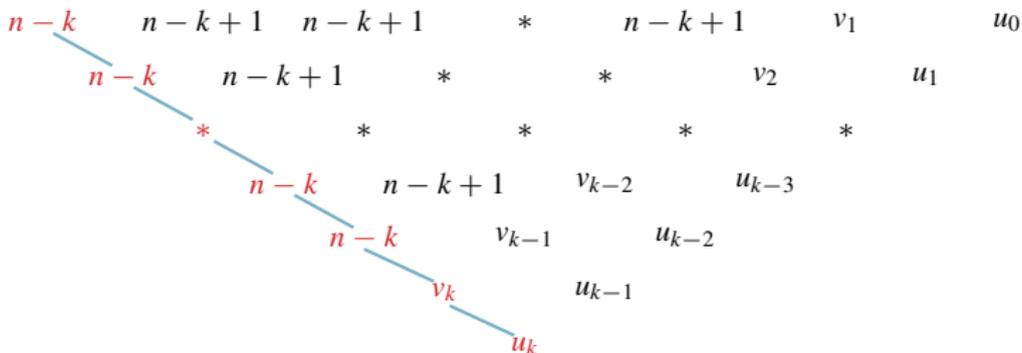
Hypothèse : k diagonales traitées $X^{(k)}$



■ Insertion de la $k + 1^e$ diagonale



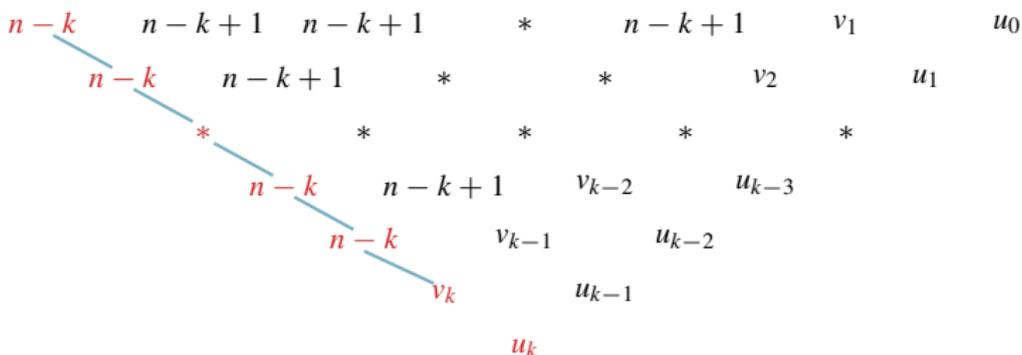
■ Insertion de la $k + 1^e$ diagonale



4 cas :

1 $v_k = n - k = u_k$

■ Insertion de la $k + 1^e$ diagonale

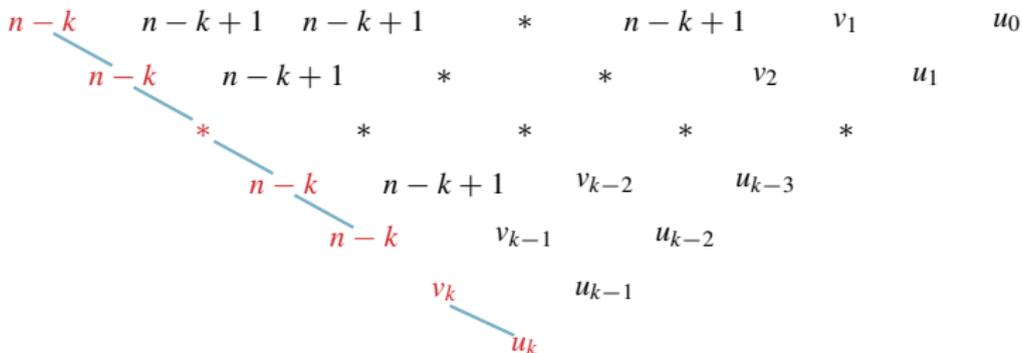


4 cas :

1 $v_k = n - k = u_k$

2 $v_k = n - k < u_k$

■ Insertion de la $k + 1^e$ diagonale



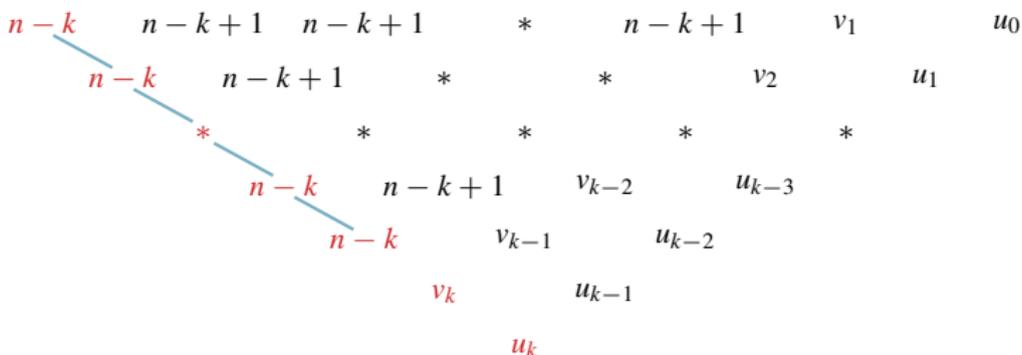
4 cas :

1 $v_k = n - k = u_k$

2 $v_k = n - k < u_k$

3 $n - k < v_k = u_k$

■ Insertion de la $k + 1^e$ diagonale



4 cas :

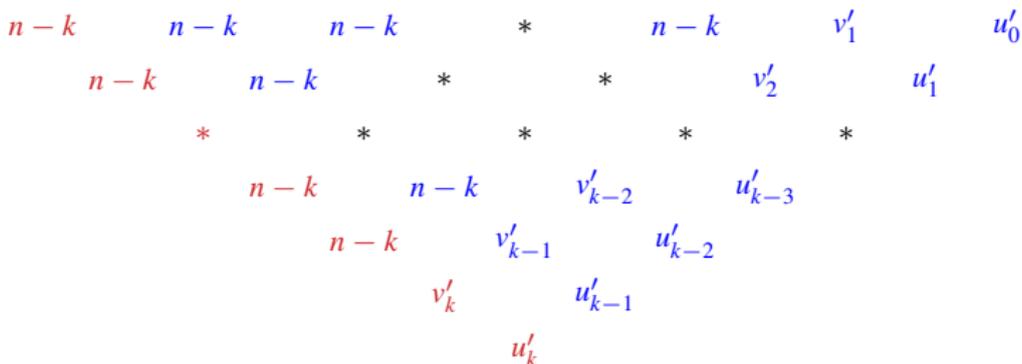
1 $v_k = n - k = u_k$

2 $v_k = n - k < u_k$

3 $n - k < v_k = u_k$

4 $n - k < v_k < u_k$

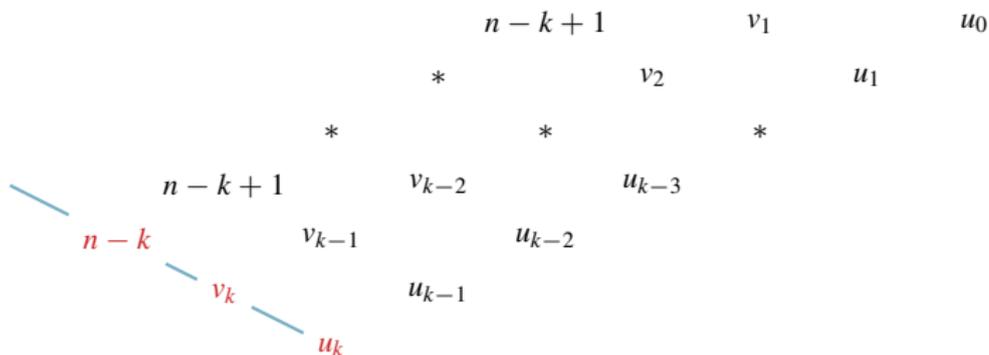
■ Insertion de la $k + 1^e$ diagonale $\Rightarrow X^{(k+1)}$



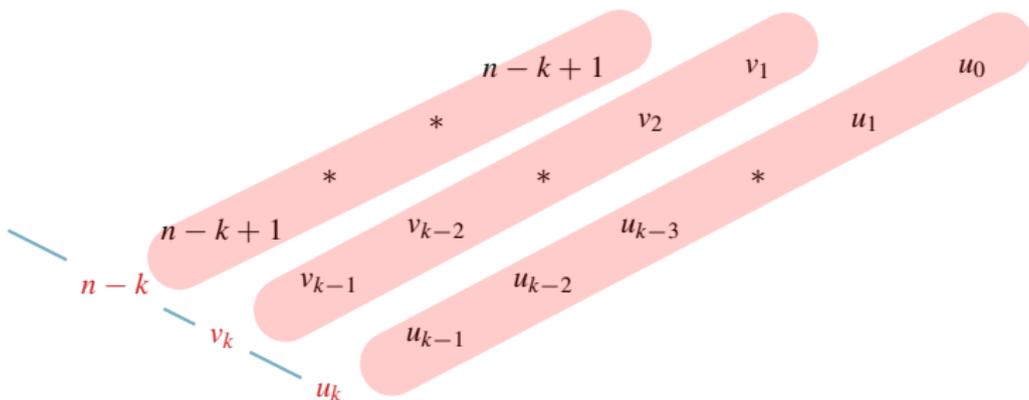
Remarque

Dans tous les cas $u'_k = u_k$

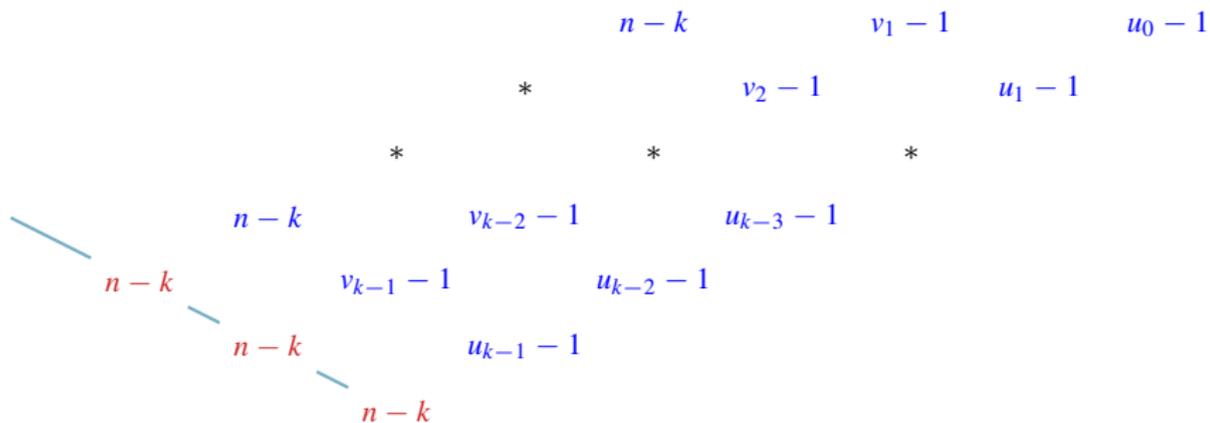
1^{er} cas : $n - k = v_k = u_k$



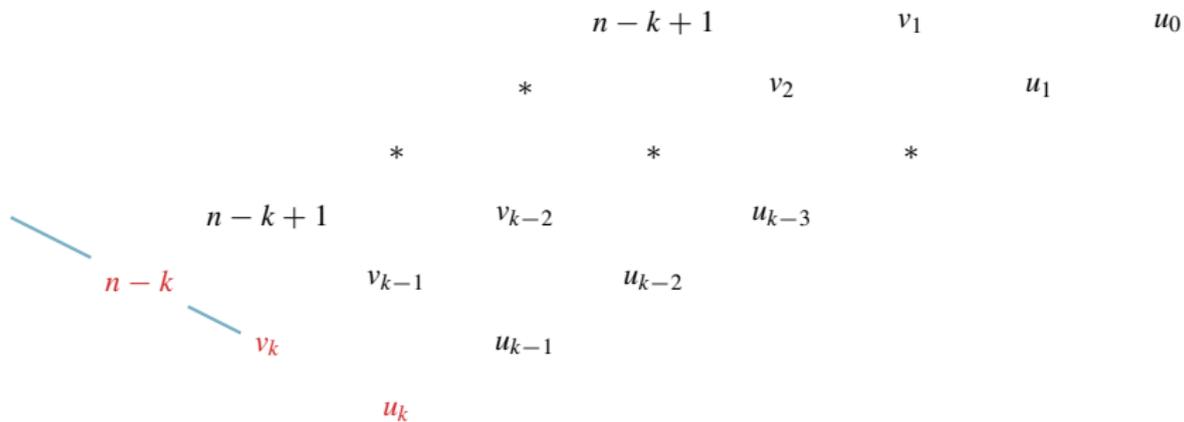
1^{er} cas : $n - k = v_k = u_k$



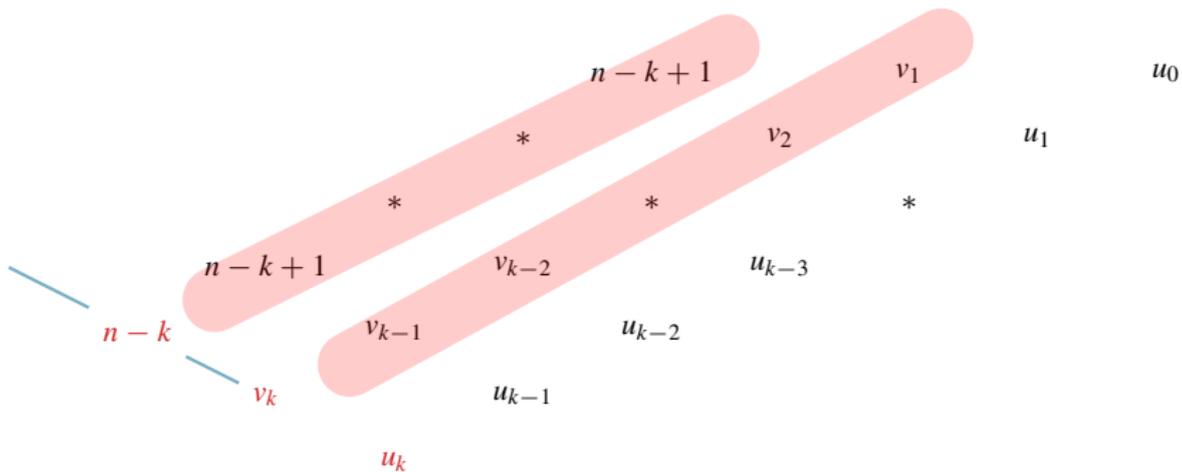
1^{er} cas : $n - k = v_k = u_k$



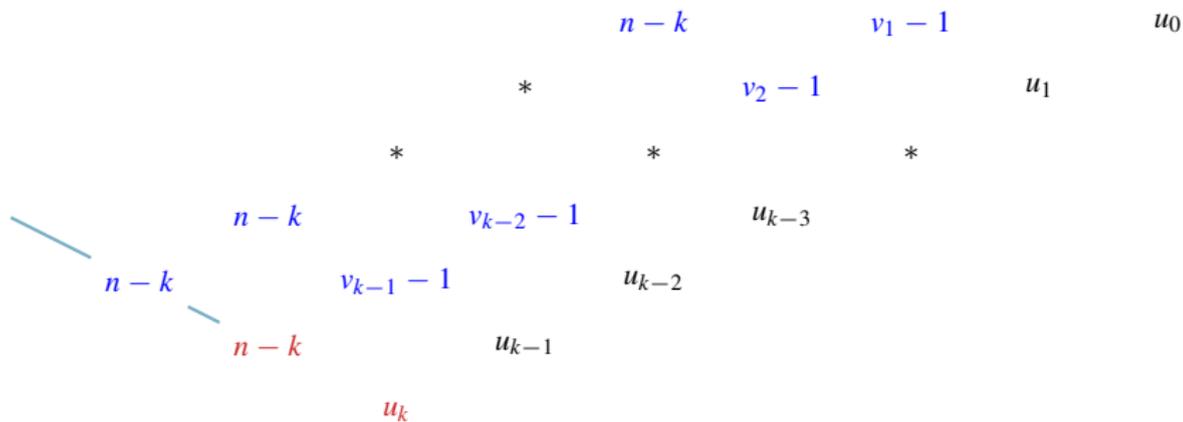
2^e cas : $v_k = n - k < u_k$



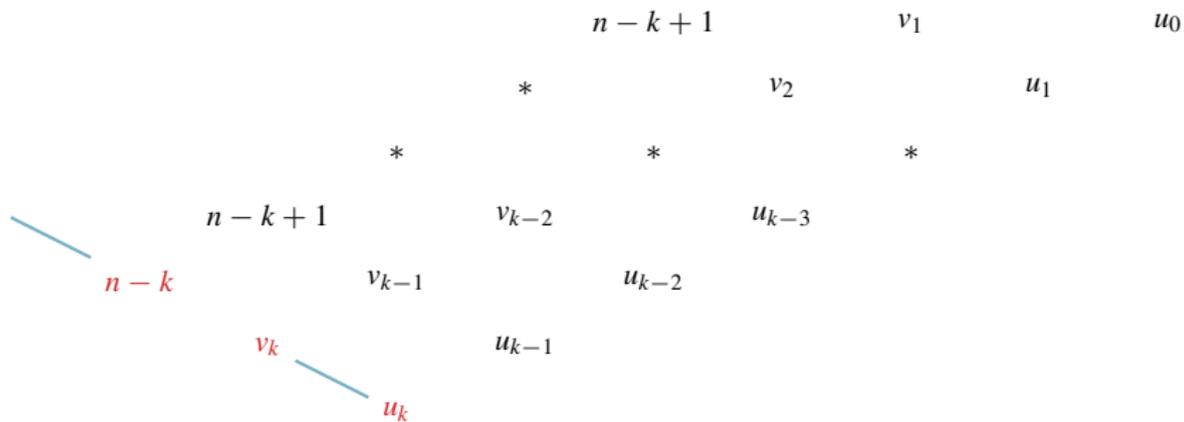
2^e cas : $v_k = n - k < u_k$



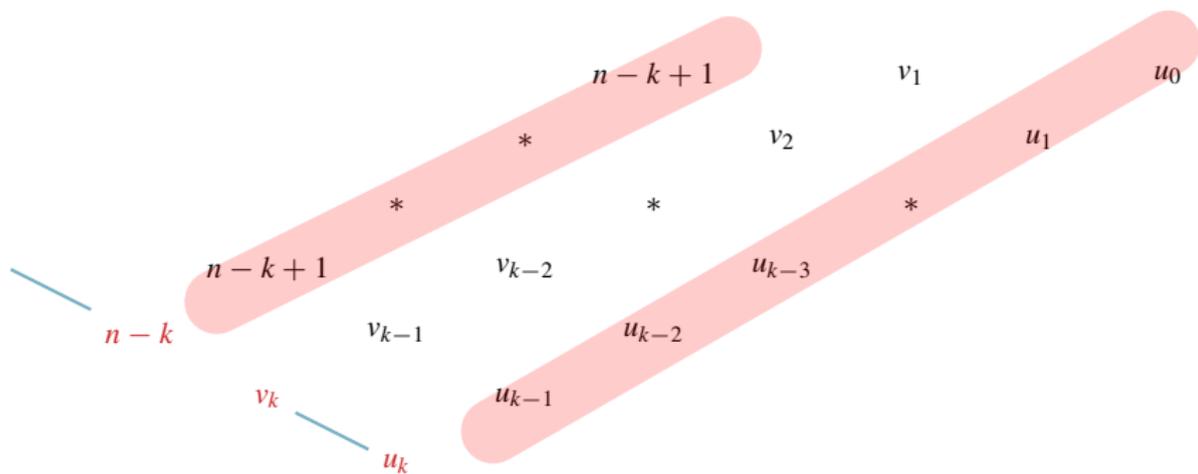
2^e cas : $v_k = n - k < u_k$



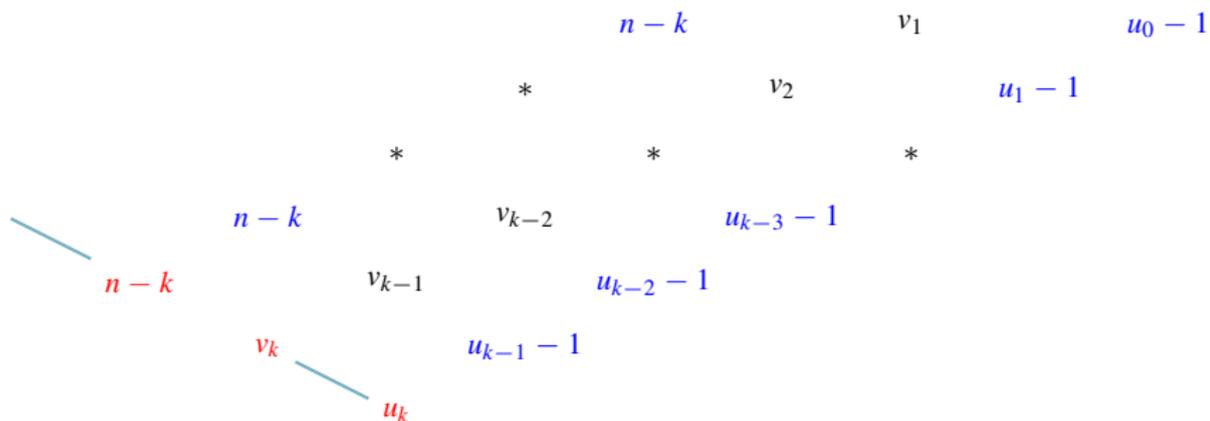
3^e cas : $n - k < v_k = u_k$



3^e cas : $n - k < v_k = u_k$



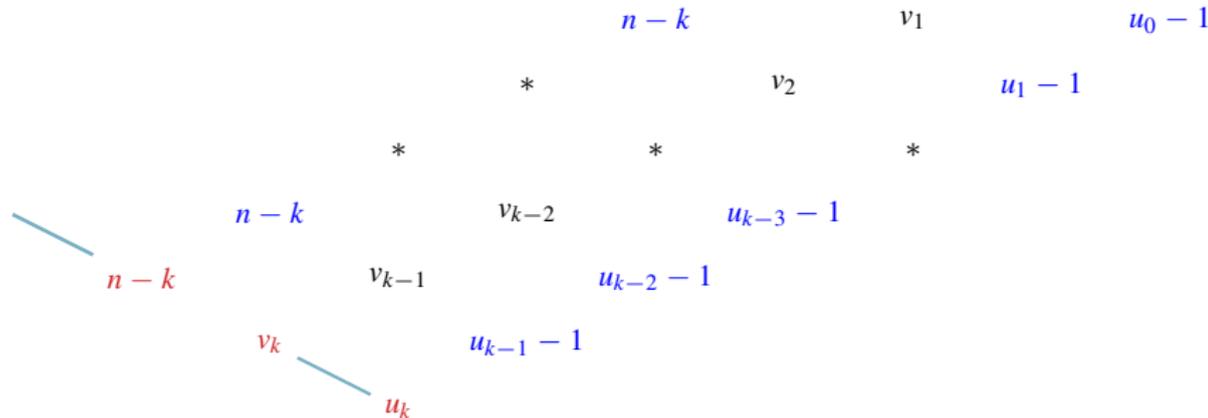
3^e cas : $n - k < v_k = u_k$



3^e cas : $n - k < v_k = u_k$

2 cas possibles :

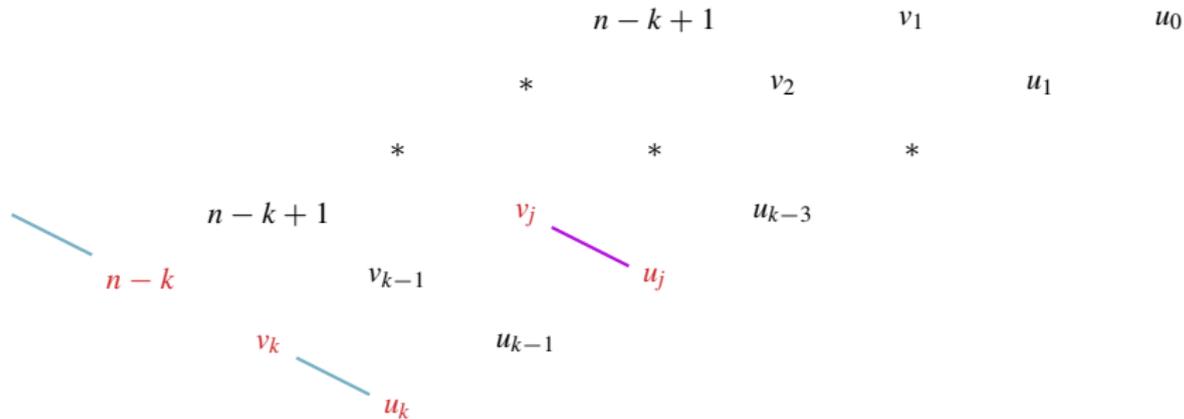
(a) $X^{(k+1)}$ est un triangle de Gelfand-Tsetlin



3^e cas : $n - k < v_k = u_k$

2 cas possibles :

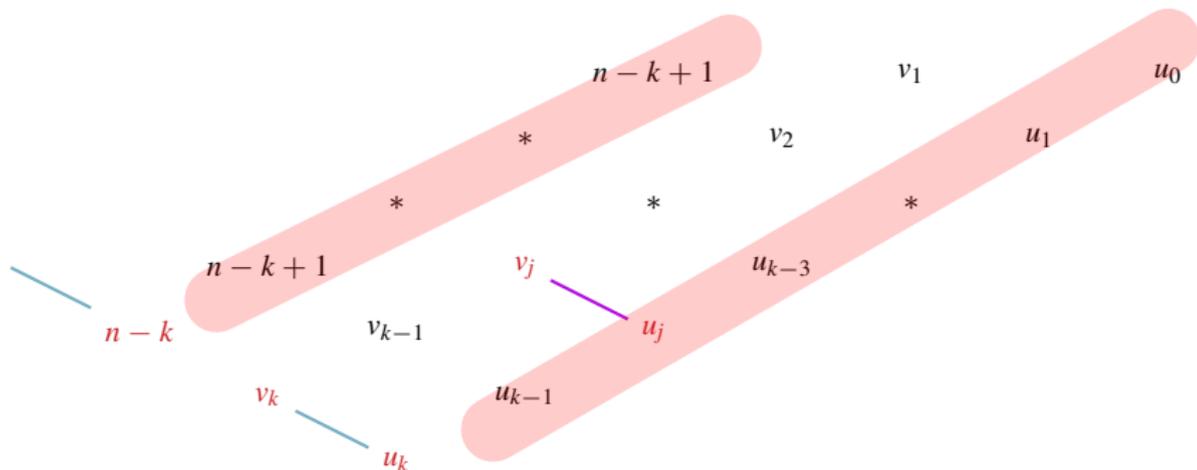
- (b) $X^{(k+1)}$ n'est pas un triangle de Gelfand-Tsetlin
 $\Rightarrow \exists j \leq k - 1$ tel que $u_j = v_j$



3^e cas : $n - k < v_k = u_k$

2 cas possibles :

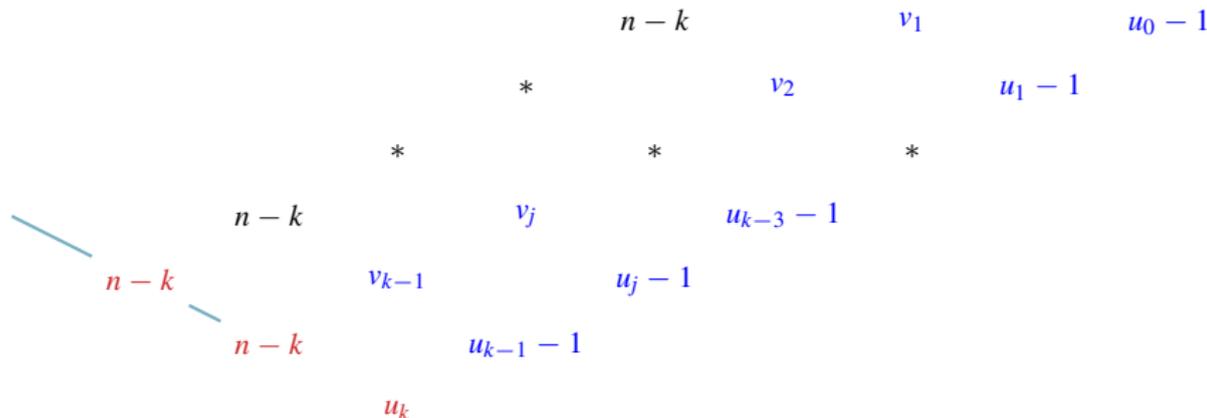
- (b) $X^{(k+1)}$ n'est pas un triangle de Gelfand-Tsetlin
 $\Rightarrow \exists j \leq k - 1$ tel que $u_j = v_j$



3^e cas : $n - k < v_k = u_k$

2 cas possibles :

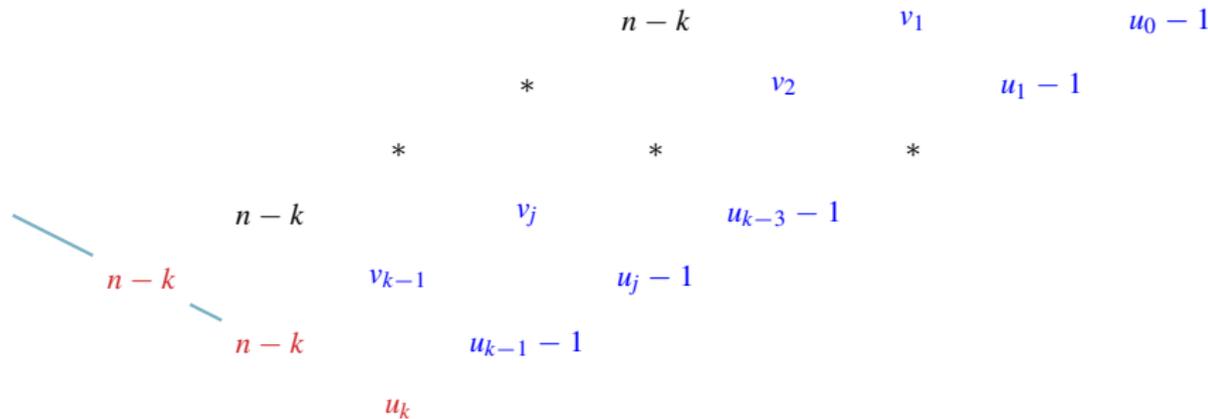
- (b) $X^{(k+1)}$ n'est pas un triangle de Gelfand-Tsetlin
 $\Rightarrow \exists j \leq k - 1$ tel que $u_j = v_j$



3^e cas : $n - k < v_k = u_k$

2 cas possibles :

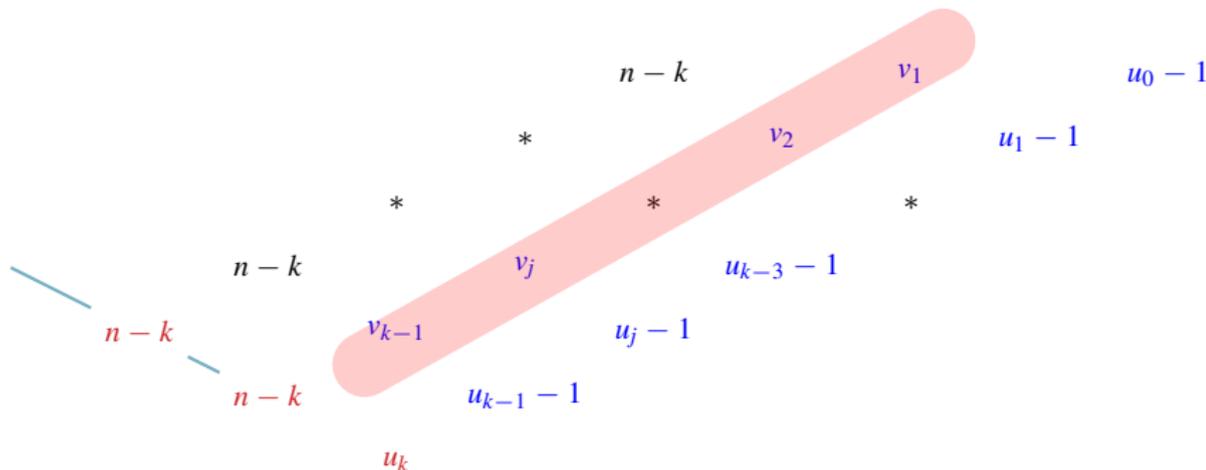
- (b) $X^{(k+1)}$ n'est pas un triangle de Gelfand-Tsetlin
 $\Rightarrow \exists j \leq k - 1$ tel que $u_j = v_j$



3^e cas : $n - k < v_k = u_k$

2 cas possibles :

- (b) $X^{(k+1)}$ n'est pas un triangle de Gelfand-Tsetlin
 $\Rightarrow \exists j \leq k - 1$ tel que $u_j = v_j$

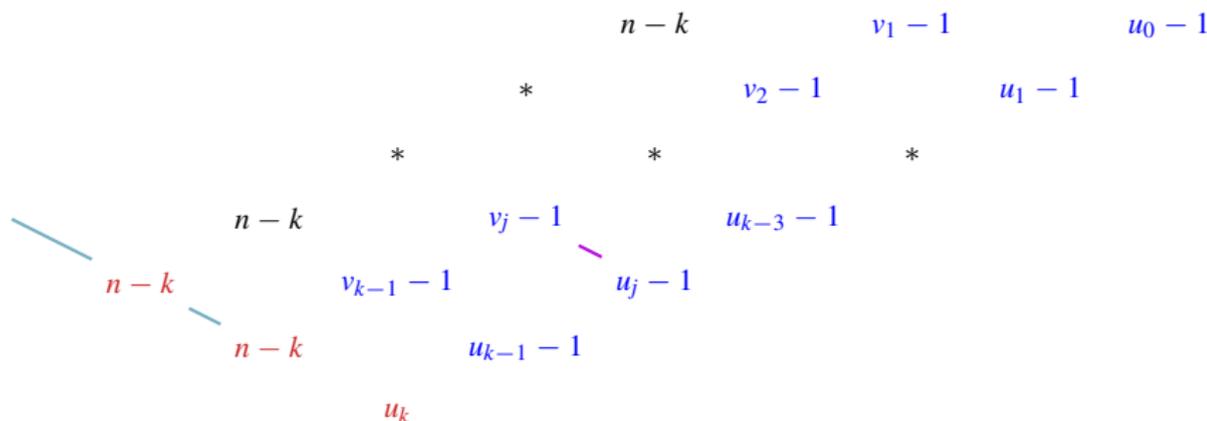


3^e cas : $n - k < v_k = u_k$

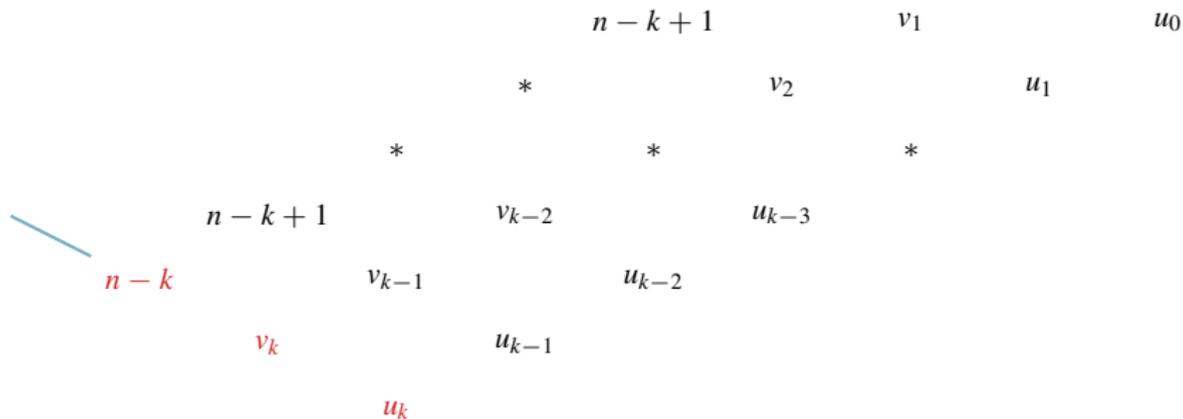
2 cas possibles :

(b) $X^{(k+1)}$ n'est pas un triangle de Gelfand-Tsetlin

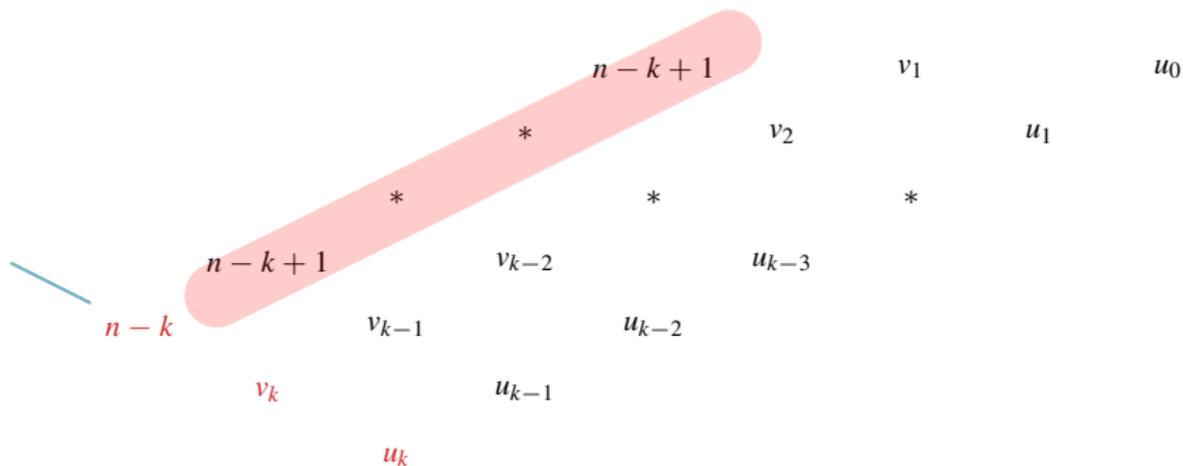
$\Rightarrow \exists j \leq k - 1$ tel que $u_j = v_j$



4^e cas : $n - k < v_k < u_k$



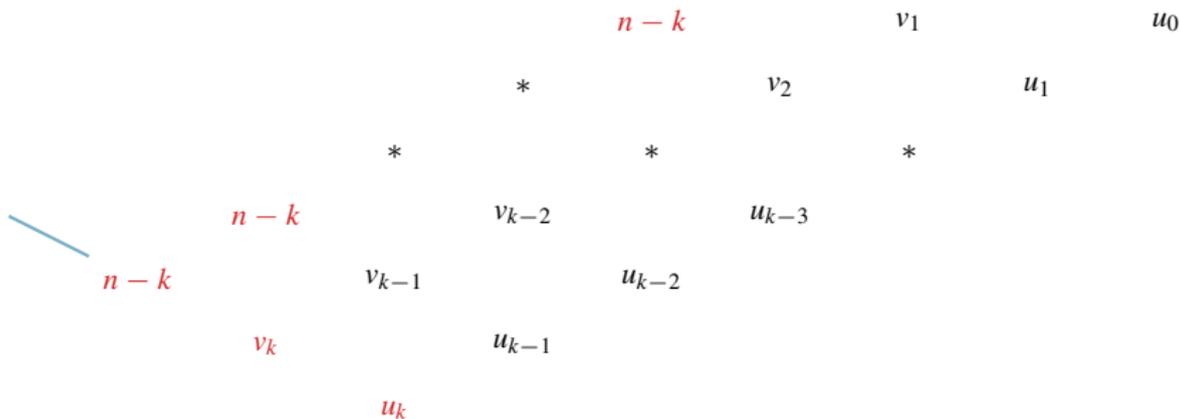
4^e cas : $n - k < v_k < u_k$



4^e cas : $n - k < v_k < u_k$

2 cas possibles :

(a) $v_k \leq v_{k-1} \Rightarrow X^{(k+1)}$ est un triangle de Gelfand-Tsetlin

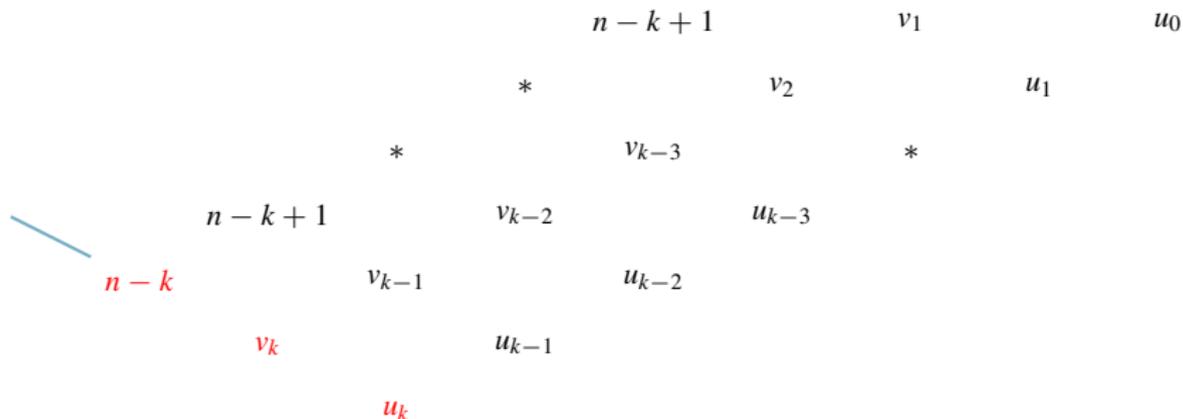


4^e cas : $n - k < v_k < u_k$

2 cas possibles :

(b) $v_k > v_{k-1} \Rightarrow X^{(k+1)}$ n'est pas un GT

■ Soit $l = \max\{i | v_{k-i} \leq v_k - i\}$

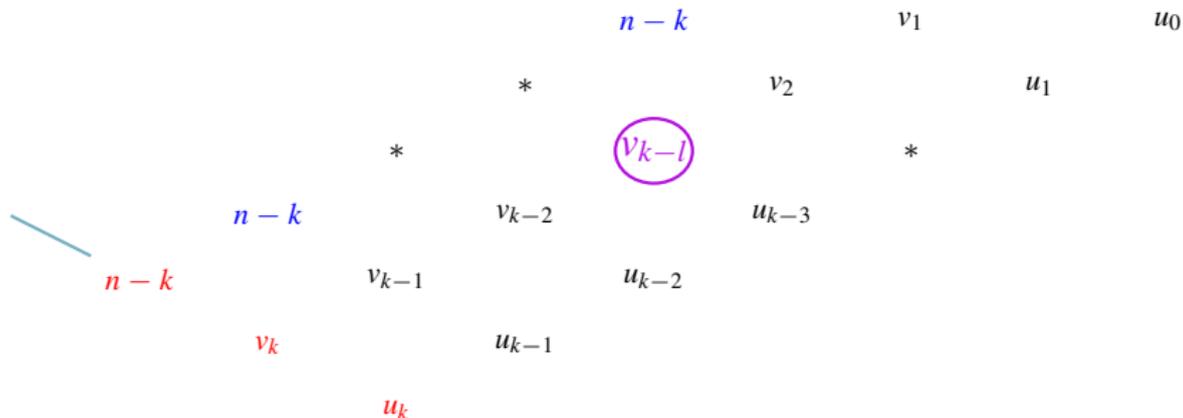


4^e cas : $n - k < v_k < u_k$

2 cas possibles :

(b) $v_k > v_{k-1} \Rightarrow X^{(k+1)}$ n'est pas un GT

■ Soit $l = \max\{i | v_{k-i} \leq v_k - i\}$

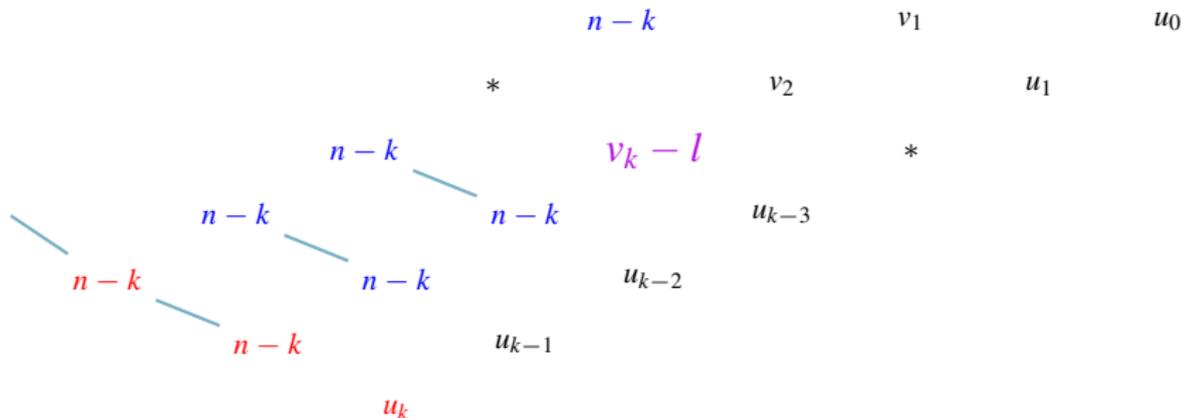


4^e cas : $n - k < v_k < u_k$

2 cas possibles :

(b) $v_k > v_{k-1} \Rightarrow X^{(k+1)}$ n'est pas un GT

■ Soit $l = \max\{i \mid v_{k-i} \leq v_k - i\}$



Sommaire

1 Les triangles de Gelfand-Tsetlin

2 Les trapézoïdes

3 Une construction

4 L'algorithme

5 Raffinement : Statistiques

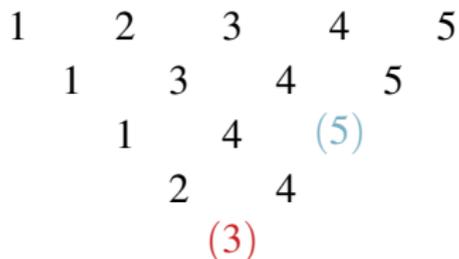
■ Triangles Gog

■ Triangles Magog

Bistatistique : triangles Gog

Soit X un triangle Gog de taille n .

- $l(X) : x_{1,1}$
- $r(X) : \#k \text{ tel que } x_{k,k} = n$



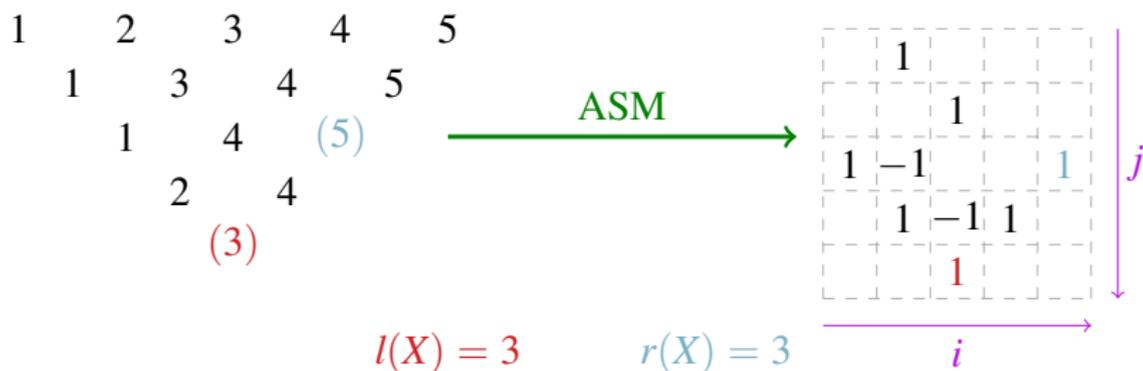
$$l(X) = 3$$

$$r(X) = 3$$

Bistatistique : triangles Gog

Soit X un triangle Gog de taille n .

- $l(X) : x_{1,1}$
- $r(X) : \#k$ tel que $x_{k,k} = n$



Bistatistique : triangles Magog

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^n x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j} \right)$
- $r(X)$: Coordonnée de sortie du chemin dans X

1	1	2	3	4	5
	1	1	3	3	4
		1	1	3	4
			1	2	3
				1	2
					1

Bistatistique : triangles Magog

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^n x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j} \right)$
- $r(X)$: Coordonnée de sortie du chemin dans X

1	1	2	3	4	5
	1	1	3	3	4
		1	1	3	4 ← x_{kk}
			1	2	3
				1	2
					1

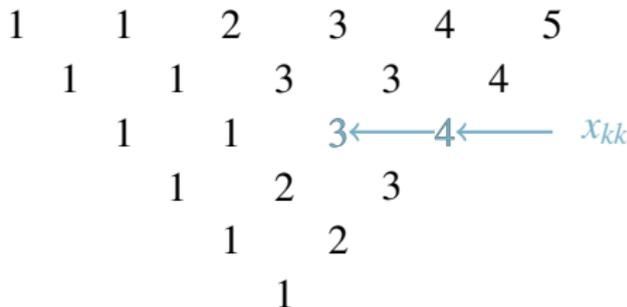
$$l(X) = 4$$

$$k = \max\{j/x_{jj} = j\}$$

Bistatistique : triangles Magog

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^n x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j} \right)$
- $r(X)$: Coordonnée de sortie du chemin dans X



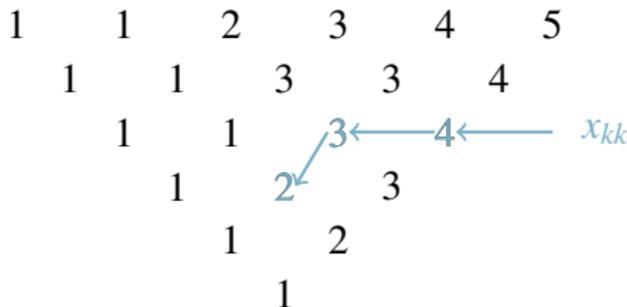
$l(X) = 4$

$$k = \max\{j/x_{jj} = j\}$$

Bistatistique : triangles Magog

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^n x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j} \right)$
- $r(X)$: Coordonnée de sortie du chemin dans X



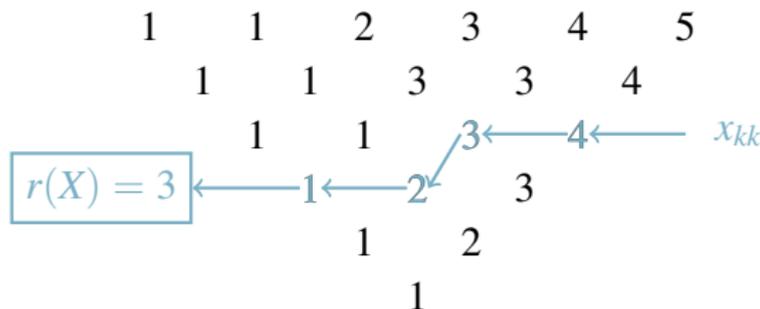
$l(X) = 4$

$k = \max\{j/x_{jj} = j\}$

Bistatistique : triangles Magog

X un triangle Magog de taille n

- $l(X) = \left(\sum_{j=1}^n x_{n,j} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-1,j} \right)$
- $r(X)$: Coordonnée de sortie du chemin dans X



$$l(X) = 4$$

$$k = \max\{j/x_{jj} = j\}$$

Conjecture sur les triangles

$$|Gog|_{n,r,l} = |Magog|_{n,r,l}$$

$r \backslash l$	1	2		3	
1	1 2 3 1 2 1	1 2 3 1 3 1		0	
2	1 2 3 1 2 2	1 2 3 2 3 2	1 2 3 1 3 2	0	
3	0	0		1 2 3 1 3 3	1 2 3 2 3 3

Triangles Gog de taille 3

$r \backslash l$	1	2		3	
1	1 1 1 1 1 1	1 1 2 1 1 1		0	
2	1 1 2 1 2 1	1 2 2 1 2 1	1 1 3 1 2 1	0	
3	0	0		1 1 3 1 1 1	1 2 3 1 2 1

Triangles Magog de taille 3

Conjecture sur les trapézoïdes

$$|Gog|_{n,k,r,l} = |Magog|_{n,k,r,l}$$

$r \backslash l$	1	2	3
1	1 2 3 1 2 1	1 2 3 1 3 1	0
2	1 2 3 1 2 2	1 2 3 1 3 2	0
3	0	0	1 2 3 1 3 3

(3, 1)Gog trapézoïdes

$r \backslash l$	1	2	3
1	1 1 1 1 1 1	1 1 2 1 1 1	0
2	1 1 2 1 2 1	1 1 3 1 2 1	0
3	0	0	1 1 3 1 1 1

(3, 1)Magog trapézoïdes