

# Fonctions de parking rectangulaires

Jean-Christophe Aval

JCB - 5 février 2015

# Objectif

# Objectif

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

# Objectif

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

①  $\mathcal{P}_{ad,bd}$  ?

# Objectif

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

- 1  $\mathcal{P}_{ad,bd}$  ?
- 2  $h_{bk}[ak \mathbf{x}]$  ?

# Objectif

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

- 1  $\mathcal{P}_{ad,bd}$  ?
- 2  $h_{bk}[ak \mathbf{x}]$  ?
- 3 Frob ?

# Plan

- 1 Objectif
- 2 Fonctions de parking rectangulaires
- 3 Fonctions symétriques
- 4 Caractéristique de Frobenius
- 5 Preuve
- 6 Conséquences et généralisations
- 7 Travaux en cours

# Plan

- 1 Objectif
- 2 Fonctions de parking rectangulaires**
- 3 Fonctions symétriques
- 4 Caractéristique de Frobenius
- 5 Preuve
- 6 Conséquences et généralisations
- 7 Travaux en cours



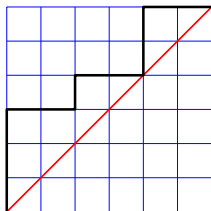
# Chemins de Dyck

# Chemins de Dyck

Chemins de Dyck  
(carrés  $n \times n$ )

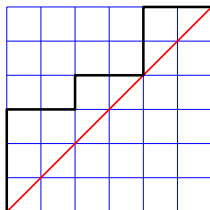
# Chemins de Dyck

Chemins de Dyck  
(carrés  $n \times n$ )



## Chemins de Dyck

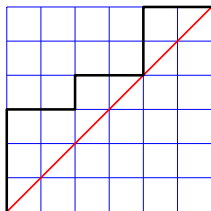
Chemins de Dyck  
(carrés  $n \times n$ )



Nombres de Catalan  
 $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

## Chemins de Dyck

Chemins de Dyck  
(carrés  $n \times n$ )

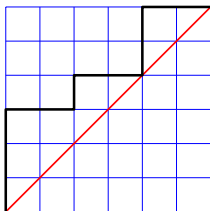


Nombres de Catalan  
 $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Chemins de Dyck  
(rationnels  $a \times b$ )  
( $a \wedge b = 1$ )

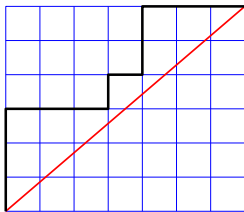
## Chemins de Dyck

Chemins de Dyck  
(carrés  $n \times n$ )



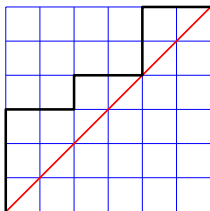
Nombres de Catalan  
 $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Chemins de Dyck  
(rationnels  $a \times b$ )  
( $a \wedge b = 1$ )



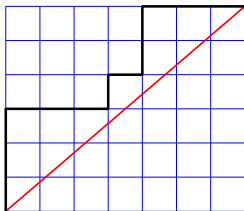
## Chemins de Dyck

Chemins de Dyck  
(carrés  $n \times n$ )



Nombres de Catalan  
 $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$

Chemins de Dyck  
(rationnels  $a \times b$ )  
( $a \wedge b = 1$ )



Nombres de Catalan  
rationnels  
 $\frac{1}{a+b} \binom{a+b}{a}$

# Chemins de Dyck rectangulaires

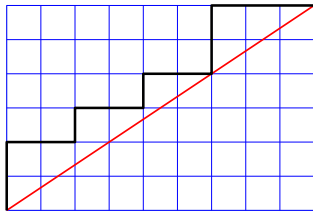


# Chemins de Dyck rectangulaires

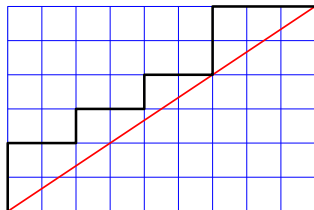
Chemins de Dyck  
(rectangulaires  $m \times n$ )

# Chemins de Dyck rectangulaires

Chemins de Dyck  
(rectangulaires  $m \times n$ )



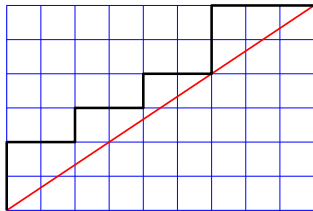
## Chemins de Dyck rectangulaires



Chemins de Dyck  
(rectangulaires  $m \times n$ )

$$(m, n) = (ad, bd), a \wedge b = 1$$

## Chemins de Dyck rectangulaires



Chemins de Dyck  
(rectangulaires  $m \times n$ )

$$(m, n) = (ad, bd), a \wedge b = 1$$

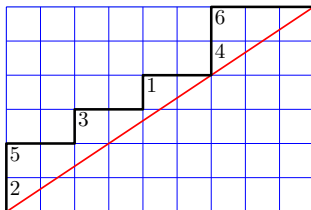
$\mathcal{D}_{m,n}$  ensemble des chemins de Dyck  $m \times n$ .

# Fonctions de parking rectangulaires

# Fonctions de parking rectangulaires

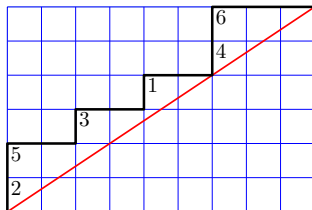
Fonctions de parking  
(rectangulaires  $m \times n$ )

# Fonctions de parking rectangulaires



Fonctions de parking  
(rectangulaires  $m \times n$ )

## Fonctions de parking rectangulaires

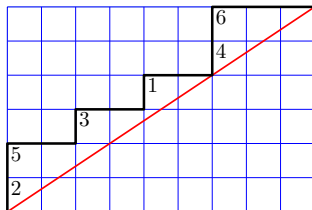


Fonctions de parking  
(rectangulaires  $m \times n$ )

$\mathcal{P}_{m,n}$  l'ensemble des fonctions de parking  $m \times n$



## Fonctions de parking rectangulaires

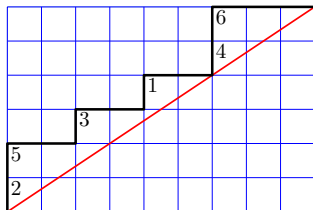


Fonctions de parking  
(rectangulaires  $m \times n$ )

$\mathcal{P}_{m,n}$  l'ensemble des fonctions de parking  $m \times n$

$$|\mathcal{P}_{a,b}| = b^{a-1} \quad (a \wedge b = 1)$$

## Fonctions de parking rectangulaires



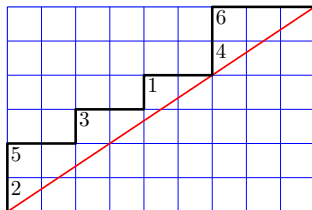
Fonctions de parking  
(rectangulaires  $m \times n$ )

$\mathcal{P}_{m,n}$  l'ensemble des fonctions de parking  $m \times n$

$$|\mathcal{P}_{a,b}| = b^{a-1} \quad (a \wedge b = 1)$$

$$|\mathcal{P}_{n+1,n}| = (n+1)^{n-1}$$

## Fonctions de parking rectangulaires



Fonctions de parking  
(rectangulaires  $m \times n$ )

$\mathcal{P}_{m,n}$  l'ensemble des fonctions de parking  $m \times n$

$\mathcal{L}_\alpha$  l'ensemble des fonctions de parking de chemin (de Dyck)  $\alpha$

$$|\mathcal{P}_{a,b}| = b^{a-1} \quad (a \wedge b = 1)$$

$$|\mathcal{P}_{n+1,n}| = (n+1)^{n-1}$$

# Plan

- 1 Objectif
- 2 Fonctions de parking rectangulaires
- 3 Fonctions symétriques**
- 4 Caractéristique de Frobenius
- 5 Preuve
- 6 Conséquences et généralisations
- 7 Travaux en cours

# Fonctions symétriques

# Fonctions symétriques

$$\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots$$

# Fonctions symétriques

$$\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots$$

$$p_k(\mathbf{x}) = \sum_{i \geq 1} x_i^k$$

# Fonctions symétriques

$$\mathbf{x} = x_1, x_2, \dots$$

$$p_k(\mathbf{x}) = \sum_{i \geq 1} x_i^k$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$$

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_\ell}$$



# Fonctions symétriques complètes

# Fonctions symétriques complètes

$h_k$  fonction symétrique complète de degré  $k$

# Fonctions symétriques complètes

$h_k$  fonction symétrique complète de degré  $k$

$$\sum_{k \geq 0} h_k t^k = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)}$$

# Fonctions symétriques complètes

$h_k$  fonction symétrique complète de degré  $k$

$$\sum_{k \geq 0} h_k t^k = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)}$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots$$

# Fonctions symétriques complètes

$h_k$  fonction symétrique complète de degré  $k$

$$\sum_{k \geq 0} h_k t^k = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)}$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_\ell}$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots$$

# Fonctions symétriques complètes

$h_k$  fonction symétrique complète de degré  $k$

$$\sum_{k \geq 0} h_k t^k = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)}$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_\ell}$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots$$

$$h_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) =$$

## Fonctions symétriques complètes

$h_k$  fonction symétrique complète de degré  $k$

$$\sum_{k \geq 0} h_k t^k = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)}$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_\ell}$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots$$

$$h_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = h_2(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{y}) + h_1(\mathbf{x}) h_1(\mathbf{y})$$

## Fonctions symétriques complètes

$h_k$  fonction symétrique complète de degré  $k$

$$\sum_{k \geq 0} h_k t^k = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)}$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_\ell}$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots$$

$$h_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = h_2(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{y}) + h_1(\mathbf{x}) h_1(\mathbf{y})$$

$$h_2[2\mathbf{x}] =$$



## Fonctions symétriques complètes

$h_k$  fonction symétrique complète de degré  $k$

$$\sum_{k \geq 0} h_k t^k = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)}$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_\ell}$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots$$

$$h_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = h_2(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{y}) + h_1(\mathbf{x}) h_1(\mathbf{y})$$

$$h_2[2\mathbf{x}] = h_2(\mathbf{x} + \mathbf{x}) = 2 h_2(\mathbf{x}) + h_{11}(\mathbf{x})$$

## Fonctions symétriques complètes

$h_k$  fonction symétrique complète de degré  $k$

$$\sum_{k \geq 0} h_k t^k = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{(1 - x_i t)}$$

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_\ell}$$

$$h_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \cdots$$

$$h_2(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = h_2(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{y}) + h_1(\mathbf{x}) h_1(\mathbf{y})$$

$$h_2[2\mathbf{x}] = h_2(\mathbf{x} + \mathbf{x}) = 2 h_2(\mathbf{x}) + h_{11}(\mathbf{x})$$

$$h_2[m\mathbf{x}] = m h_2(\mathbf{x}) + \binom{m}{2} h_{11}(\mathbf{x})$$

# Fonctions symétriques complètes

# Fonctions symétriques complètes

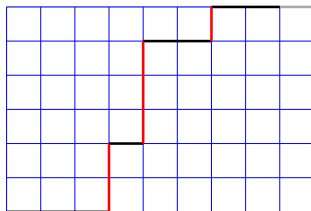
$$h_n[m \mathbf{x}] =$$

## Fonctions symétriques complètes

$$h_n[m \mathbf{x}] = \sum_{u_1 + u_2 + \dots + u_m = n} h_{u_1}(\mathbf{x}) h_{u_2}(\mathbf{x}) \cdots h_{u_m}(\mathbf{x})$$

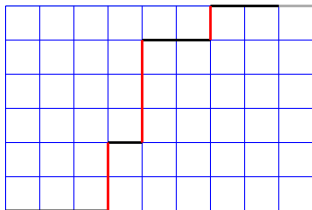
## Fonctions symétriques complètes

$$h_n[m \mathbf{x}] = \sum_{u_1 + u_2 + \dots + u_m = n} h_{u_1}(\mathbf{x}) h_{u_2}(\mathbf{x}) \cdots h_{u_m}(\mathbf{x})$$



## Fonctions symétriques complètes

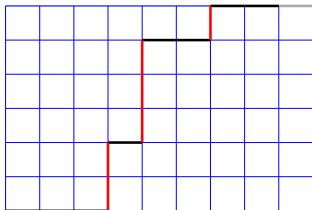
$$h_n[m \mathbf{x}] = \sum_{u_1 + u_2 + \dots + u_m = n} h_{u_1}(\mathbf{x}) h_{u_2}(\mathbf{x}) \cdots h_{u_m}(\mathbf{x})$$



$\mathcal{B}_{m,n}$  ensemble des chemins rectangulaires  $m \times n$  (avec dernier pas Est)

## Fonctions symétriques complètes

$$h_n[m \mathbf{x}] = \sum_{u_1 + u_2 + \dots + u_m = n} h_{u_1}(\mathbf{x}) h_{u_2}(\mathbf{x}) \cdots h_{u_m}(\mathbf{x})$$



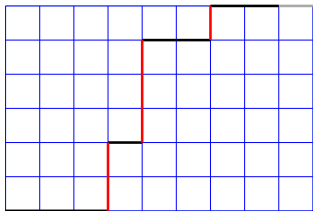
$\mathcal{B}_{m,n}$  ensemble des chemins rectangulaires  $m \times n$  (avec dernier pas Est)

$$|\mathcal{B}_{m,n}| = \binom{m+n-1}{n}$$



## Fonctions symétriques complètes

$$h_n[m \mathbf{x}] = \sum_{u_1 + u_2 + \dots + u_m = n} h_{u_1}(\mathbf{x}) h_{u_2}(\mathbf{x}) \cdots h_{u_m}(\mathbf{x})$$

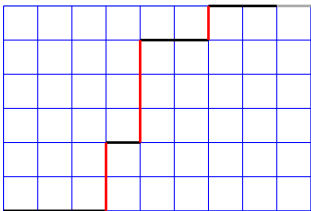
 $\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$ 

 $\rho(\gamma) = (3, 2, 1)$ 

$\mathcal{B}_{m,n}$  ensemble des chemins rectangulaires  $m \times n$  (avec dernier pas Est)

$$|\mathcal{B}_{m,n}| = \binom{m+n-1}{n}$$

## Fonctions symétriques complètes

$$\begin{aligned}
 h_n[m \mathbf{x}] &= \sum_{u_1+u_2+\dots+u_m=n} h_{u_1}(\mathbf{x}) h_{u_2}(\mathbf{x}) \cdots h_{u_m}(\mathbf{x}) \\
 &= \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}} h_{\rho(\gamma)}(\mathbf{x}) \quad (h_0 = 1)
 \end{aligned}$$


 $\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$ 
 $\rho(\gamma) = (3, 2, 1)$ 

$\mathcal{B}_{m,n}$  ensemble des chemins rectangulaires  $m \times n$  (avec dernier pas Est)

$$|\mathcal{B}_{m,n}| = \binom{m+n-1}{n}$$

# Plan

- 1 Objectif
- 2 Fonctions de parking rectangulaires
- 3 Fonctions symétriques
- 4 Caractéristique de Frobenius**
- 5 Preuve
- 6 Conséquences et généralisations
- 7 Travaux en cours

# Action du groupe symétrique

# Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  groupe symétrique

# Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  groupe symétrique  
groupe des permutations sur  $n$  lettres

## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  groupe symétrique  
groupe des permutations sur  $n$  lettres

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$$

## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  groupe symétrique  
groupe des permutations sur  $n$  lettres  
 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$



## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  groupe symétrique  
groupe des permutations sur  $n$  lettres  
 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$

$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$

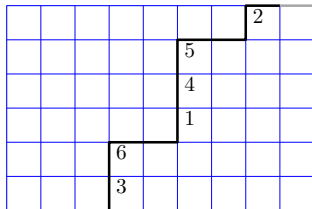


# Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  groupe symétrique  
 groupe des permutations sur  $n$  lettres  
 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$

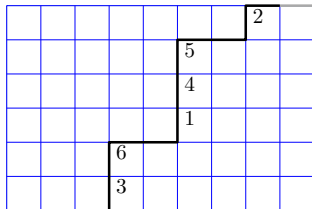
$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$



## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  groupe symétrique  
 groupe des permutations sur  $n$  lettres  
 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$



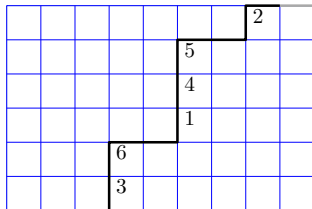
$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$

$\mathcal{L}_\gamma$  étiquetages croissants de  $\gamma$

# Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  groupe symétrique  
 groupe des permutations sur  $n$  lettres  
 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$



$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$

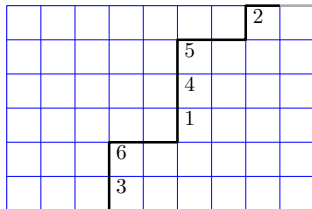
$\mathcal{L}_\gamma$  étiquetages croissants de  $\gamma$

$$|\mathcal{L}_\gamma| =$$

## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  groupe symétrique  
 groupe des permutations sur  $n$  lettres  
 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$



$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$

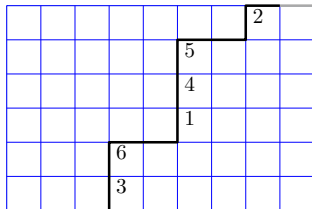
$\mathcal{L}_\gamma$  étiquetages croissants de  $\gamma$

$$|\mathcal{L}_\gamma| = \binom{n}{\rho(\gamma)}$$

# Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  groupe symétrique  
 groupe des permutations sur  $n$  lettres  
 $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$

$$|\mathcal{S}_n| = n!$$



$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$

$\mathcal{L}_\gamma$  étiquetages croissants de  $\gamma$

$$|\mathcal{L}_\gamma| = \binom{n}{\rho(\gamma)} = \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_l!} \text{ pour } \rho(\gamma) = (r_1, r_2, \dots, r_l)$$

# Action du groupe symétrique

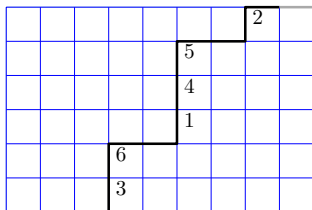


## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{L}_\gamma$  par permutation des étiquettes

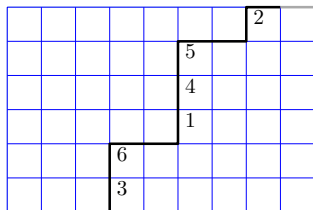
# Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{L}_\gamma$  par permutation des étiquettes



## Action du groupe symétrique

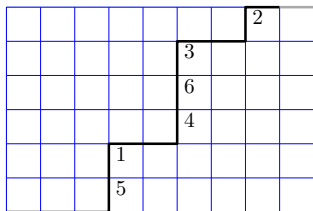
$\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{L}_\gamma$  par permutation des étiquettes



$$\sigma = 425631$$

## Action du groupe symétrique

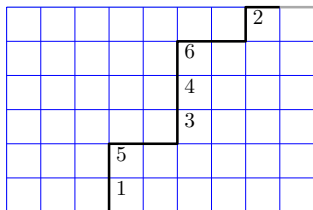
$\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{L}_\gamma$  par permutation des étiquettes



$$\sigma = 425631$$

## Action du groupe symétrique

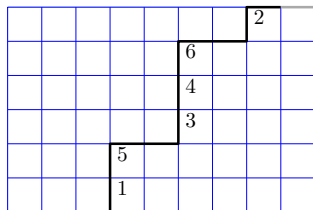
$\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{L}_\gamma$  par permutation des étiquettes



$$\sigma = 425631$$

## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{L}_\gamma$  par permutation des étiquettes

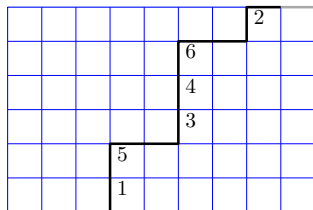


$$\sigma = 425631$$

Action transitive : orbite =  $\mathcal{L}_\gamma$

## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{L}_\gamma$  par permutation des étiquettes



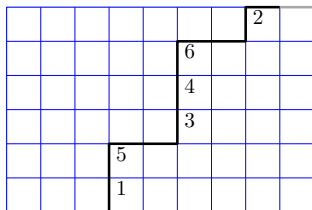
$$\sigma = 425631$$

Action transitive : orbite =  $\mathcal{L}_\gamma$

Stabilisateur de  $\pi \in \mathcal{L}_\gamma$

## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{L}_\gamma$  par permutation des étiquettes



$$\sigma = 425631$$

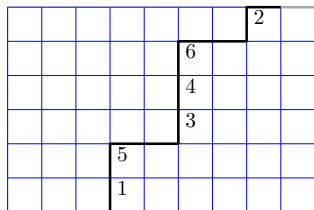
Action transitive : orbite =  $\mathcal{L}_\gamma$

Stabilisateur de  $\pi \in \mathcal{L}_\gamma = \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_1$



## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{L}_\gamma$  par permutation des étiquettes



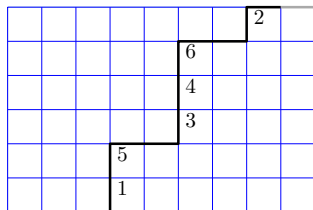
$$\sigma = 425631$$

Action transitive : orbite =  $\mathcal{L}_\gamma$

$$\begin{aligned} \text{Stabilisateur de } \pi \in \mathcal{L}_\gamma &= \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_1 \\ &= \mathcal{S}_{r_1} \times \mathcal{S}_{r_2} \times \cdots \times \mathcal{S}_{r_l} \text{ pour } \rho(\gamma) = (r_1, r_2, \dots, r_l) \end{aligned}$$

## Action du groupe symétrique

$\mathcal{S}_n$  agit sur  $\mathcal{L}_\gamma$  par permutation des étiquettes



$$\sigma = 425631$$

Action transitive : orbite =  $\mathcal{L}_\gamma$

$$\begin{aligned} \text{Stabilisateur de } \pi \in \mathcal{L}_\gamma &= \mathcal{S}_2 \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_1 \\ &= \mathcal{S}_{r_1} \times \mathcal{S}_{r_2} \times \cdots \times \mathcal{S}_{r_l} \text{ pour } \rho(\gamma) = (r_1, r_2, \dots, r_l) \end{aligned}$$

→ Action triviale de  $\mathcal{S}_{r_1} \times \mathcal{S}_{r_2} \times \cdots \times \mathcal{S}_{r_l}$  induite sur  $\mathcal{S}_n$

# Caractéristique de Frobenius

# Caractéristique de Frobenius

Action de  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathbf{V}$  = morphisme  $\varphi : \mathcal{S}_n \longrightarrow GL(\mathbf{V})$

# Caractéristique de Frobenius

Action de  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathbf{V}$  = morphisme  $\varphi : \mathcal{S}_n \longrightarrow GL(\mathbf{V})$

Caractère  $\chi(\sigma) = \text{Tr}(\varphi(\sigma))$

# Caractéristique de Frobenius

Action de  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathbf{V}$  = morphisme  $\varphi : \mathcal{S}_n \longrightarrow GL(\mathbf{V})$

Caractère  $\chi(\sigma) = \text{Tr}(\varphi(\sigma))$

Type cyclique

# Caractéristique de Frobenius

Action de  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathbf{V}$  = morphisme  $\varphi : \mathcal{S}_n \longrightarrow GL(\mathbf{V})$

Caractère  $\chi(\sigma) = \text{Tr}(\varphi(\sigma))$

Type cyclique  $\sigma = 425631$

# Caractéristique de Frobenius

Action de  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathbf{V}$  = morphisme  $\varphi : \mathcal{S}_n \longrightarrow GL(\mathbf{V})$

Caractère  $\chi(\sigma) = \text{Tr}(\varphi(\sigma))$

Type cyclique  $\sigma = 4\ 2\ 5\ 6\ 3\ 1 = (1, 4, 6)(2)(3, 5)$



# Caractéristique de Frobenius

Action de  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathbf{V}$  = morphisme  $\varphi : \mathcal{S}_n \longrightarrow GL(\mathbf{V})$

Caractère  $\chi(\sigma) = \text{Tr}(\varphi(\sigma))$

Type cyclique  $\sigma = 4\ 2\ 5\ 6\ 3\ 1 = (1, 4, 6)(2)(3, 5) \quad \lambda(\sigma) = (3, 2, 1)$

# Caractéristique de Frobenius

Action de  $\mathcal{S}_n$  sur  $\mathbf{V}$  = morphisme  $\varphi : \mathcal{S}_n \longrightarrow GL(\mathbf{V})$

Caractère  $\chi(\sigma) = \text{Tr}(\varphi(\sigma))$

Type cyclique  $\sigma = 4\ 2\ 5\ 6\ 3\ 1 = (1, 4, 6)(2)(3, 5) \quad \lambda(\sigma) = (3, 2, 1)$

$$\text{Frob}(\mathbf{V}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{x})$$

# Caractéristique de Frobenius

# Caractéristique de Frobenius

$$\text{Frob}(\mathbf{V}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{x})$$

# Caractéristique de Frobenius

$$\text{Frob}(\mathbf{V}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{x})$$

- Frob est un isomorphisme

# Caractéristique de Frobenius

$$\text{Frob}(\mathbf{V}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{x})$$

- Frob est un isomorphisme
- $\text{Frob}(\chi^\lambda) = s_\lambda$  (Schur)

# Caractéristique de Frobenius

$$\text{Frob}(\mathbf{V}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{x})$$

- Frob est un isomorphisme
- $\text{Frob}(\chi^\lambda) = s_\lambda$  (Schur)
- $\text{Frob}(\eta_n) = h_n$

# Caractéristique de Frobenius

$$\text{Frob}(\mathbf{V}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{x})$$

- Frob est un isomorphisme
- $\text{Frob}(\chi^\lambda) = s_\lambda$  (Schur)
- $\text{Frob}(\eta_n) = h_n$     $\eta_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}}^{\mathcal{S}_n} \eta_{\lambda_1} \times \dots \times \eta_{\lambda_\ell}$



# Caractéristique de Frobenius

$$\text{Frob}(\mathbf{V}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{x})$$

- Frob est un isomorphisme
- $\text{Frob}(\chi^\lambda) = s_\lambda$  (Schur)
- $\text{Frob}(\eta_n) = h_n$     $\eta_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}}^{\mathcal{S}_n} \eta_{\lambda_1} \times \dots \times \eta_{\lambda_\ell}$     $\text{Frob}(\eta_\lambda) = h_\lambda$

# Caractéristique de Frobenius

$$\text{Frob}(\mathbf{V}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{x})$$

- Frob est un isomorphisme
- $\text{Frob}(\chi^\lambda) = s_\lambda$  (Schur)
- $\text{Frob}(\eta_n) = h_n$     $\eta_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{S}_{\lambda_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{\lambda_\ell}}^{\mathcal{S}_n} \eta_{\lambda_1} \times \dots \times \eta_{\lambda_\ell}$     $\text{Frob}(\eta_\lambda) = h_\lambda$

Pour  $\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$

$$\text{Frob}(\mathcal{L}_\gamma) = h_{\rho(\gamma)}$$

## Caractéristique de Frobenius

$$\text{Frob}(\mathbf{V}) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \chi(\sigma) p_{\lambda(\sigma)}(\mathbf{x})$$

- Frob est un isomorphisme
- $\text{Frob}(\chi^\lambda) = s_\lambda$  (Schur)
- $\text{Frob}(\eta_n) = h_n$     $\eta_\lambda = \text{Ind}_{S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_\ell}}^{\mathcal{S}_n} \eta_{\lambda_1} \times \dots \times \eta_{\lambda_\ell}$     $\text{Frob}(\eta_\lambda) = h_\lambda$

Pour  $\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$

$$\text{Frob}(\mathcal{L}_\gamma) = h_{\rho(\gamma)}$$

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}} \text{Frob}(\mathcal{L}_\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}} h_{\rho(\gamma)} = h_n[m \mathbf{x}]$$

# Plan

- 1 Objectif
- 2 Fonctions de parking rectangulaires
- 3 Fonctions symétriques
- 4 Caractéristique de Frobenius
- 5 Preuve**
- 6 Conséquences et généralisations
- 7 Travaux en cours

# La formule

## La formule

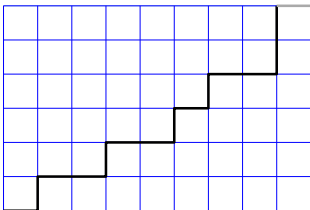
$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k\right)$$

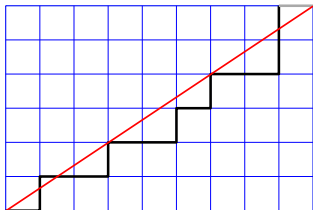


$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$



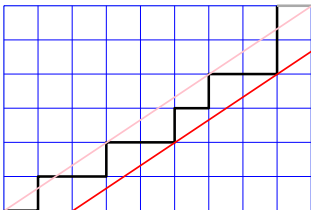
$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$



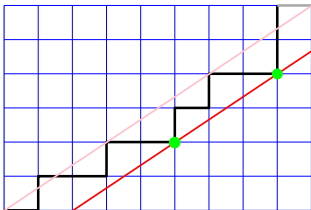


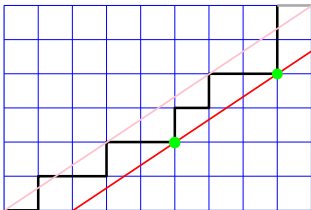
$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$

$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$

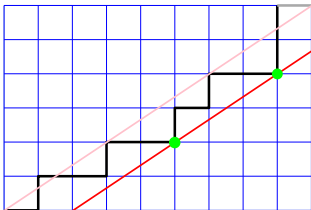


$$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$$



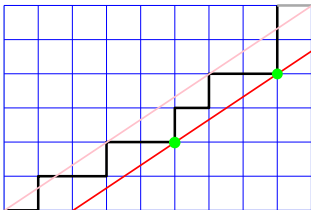
$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$ 


points bas ( $t = 2$ )

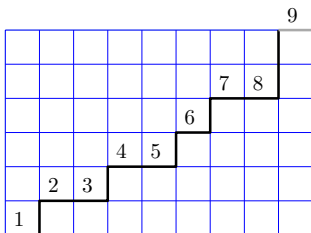
$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$ 


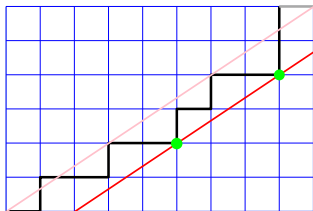
points bas ( $t = 2$ )

Rotation

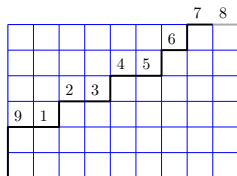
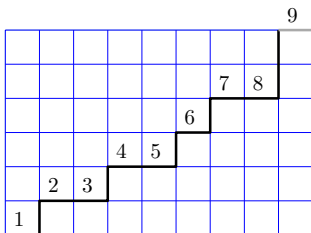
$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$ points bas ( $t = 2$ )

Rotation

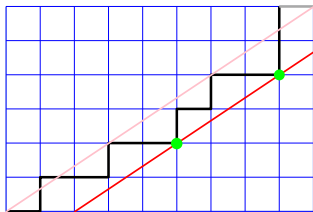


$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$ points bas ( $t = 2$ )

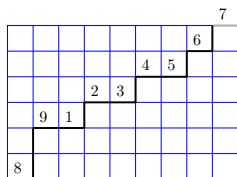
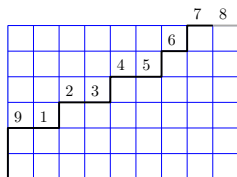
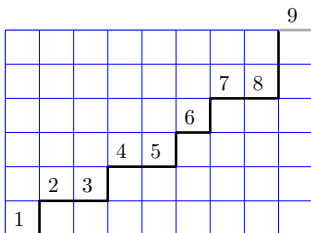
Rotation

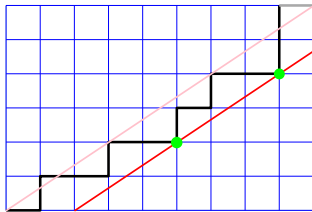




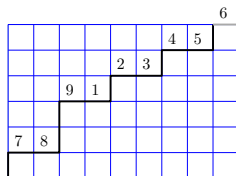
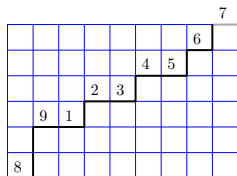
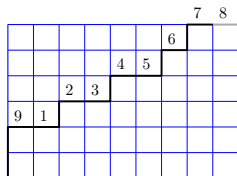
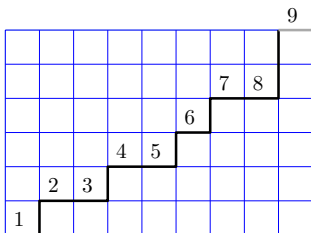
$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$ points bas ( $t = 2$ )

Rotation



$\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}$ points bas ( $t = 2$ )

Rotation





## Propriétés de la rotation

## Propriétés de la rotation

- pour  $\gamma'$  image de  $\gamma$  par rotation :

## Propriétés de la rotation

- pour  $\gamma'$  image de  $\gamma$  par rotation :

$$\rho(\gamma') = \rho(\gamma)$$

## Propriétés de la rotation

- pour  $\gamma'$  image de  $\gamma$  par rotation :

$$\rho(\gamma') = \rho(\gamma) \implies \text{Frob}(\mathcal{L}_{\gamma'}) = \text{Frob}(\mathcal{L}_{\gamma})$$

## Propriétés de la rotation

- pour  $\gamma'$  image de  $\gamma$  par rotation :

$$\rho(\gamma') = \rho(\gamma) \implies \text{Frob}(\mathcal{L}_{\gamma'}) = \text{Frob}(\mathcal{L}_{\gamma})$$

- le nombre  $t$  de points bas est inchangé



## Propriétés de la rotation

- pour  $\gamma'$  image de  $\gamma$  par rotation :

$$\rho(\gamma') = \rho(\gamma) \implies \text{Frob}(\mathcal{L}_{\gamma'}) = \text{Frob}(\mathcal{L}_{\gamma})$$

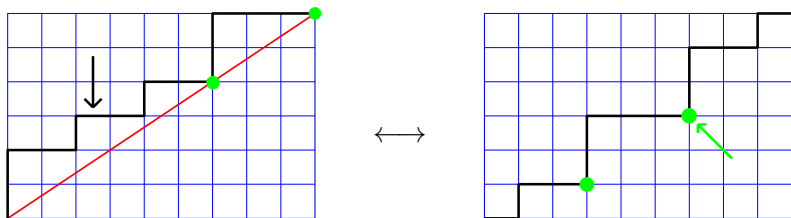
- le nombre  $t$  de points bas est inchangé
- bijection :  $\mathcal{D}_{m,n}^t \times \llbracket 1, m \rrbracket \longrightarrow \mathcal{B}_{m,n}^t \times \llbracket 1, t \rrbracket$

## Propriétés de la rotation

- pour  $\gamma'$  image de  $\gamma$  par rotation :

$$\rho(\gamma') = \rho(\gamma) \implies \text{Frob}(\mathcal{L}_{\gamma'}) = \text{Frob}(\mathcal{L}_{\gamma})$$

- le nombre  $t$  de points bas est inchangé
- bijection :  $\mathcal{D}_{m,n}^t \times \llbracket 1, m \rrbracket \longrightarrow \mathcal{B}_{m,n}^t \times \llbracket 1, t \rrbracket$



$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha) \times m = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\gamma) \times t$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha) \times m = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\gamma) \times t$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) := \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{ad,bd}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha)$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha) \times m = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\gamma) \times t$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) := \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{ad,bd}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha)$$

$$\Psi_d(\mathbf{x}) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{D}_{ad,bd} \\ \text{primitif}}} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha)$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha) \times m = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\gamma) \times t$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) := \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{ad,bd}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha)$$

$$\Psi_d(\mathbf{x}) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{D}_{ad,bd} \\ \text{primitif}}} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha) = \Phi_d^1(\mathbf{x})$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha) \times m = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\gamma) \times t$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) := \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{ad,bd}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha)$$

$$\Psi_d(\mathbf{x}) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{D}_{ad,bd} \\ \text{primitif}}} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha) = \Phi_d^1(\mathbf{x})$$

$$\sum_{t>0} \frac{1}{t} \Phi_d^t(\mathbf{x}) = \frac{1}{ad} \sum_{t>0} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}^t} h_{\rho(\gamma)} = \frac{1}{ad} h_{bd}[ad \mathbf{x}]$$

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha) \times m = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\gamma) \times t$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) := \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_{ad,bd}^t} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha)$$

$$\Psi_d(\mathbf{x}) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{D}_{ad,bd} \\ \text{primitif}}} \text{Frob}(\mathcal{L}_\alpha) = \Phi_d^1(\mathbf{x})$$

$$\sum_{t>0} \frac{1}{t} \Phi_d^t(\mathbf{x}) = \frac{1}{ad} \sum_{t>0} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{m,n}^t} h_{\rho(\gamma)} = \frac{1}{ad} h_{bd}[ad \mathbf{x}]$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{c_1, c_2, \dots, c_t > 0 \\ c_1 + c_2 + \dots + c_t = d}} \Psi_{c_1}(\mathbf{x}) \Psi_{c_2}(\mathbf{x}) \cdots \Psi_{c_t}(\mathbf{x})$$



$$\sum_{t>0} \frac{1}{t} \Phi_d^t(\mathbf{x}) = \frac{1}{ad} h_{bd}[ad \mathbf{x}]$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{c_1, c_2, \dots, c_t > 0 \\ c_1 + c_2 + \dots + c_t = d}} \Psi_{c_1}(\mathbf{x}) \Psi_{c_2}(\mathbf{x}) \cdots \Psi_{c_t}(\mathbf{x})$$

$$\sum_{t>0} \frac{1}{t} \Phi_d^t(\mathbf{x}) = \frac{1}{ad} h_{bd}[ad \mathbf{x}]$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{c_1, c_2, \dots, c_t > 0 \\ c_1 + c_2 + \dots + c_t = d}} \Psi_{c_1}(\mathbf{x}) \Psi_{c_2}(\mathbf{x}) \cdots \Psi_{c_t}(\mathbf{x})$$

$$P(\mathbf{x}; z) := \sum_{j>0} \Psi_j(\mathbf{x}) z^j$$

$$\sum_{t>0} \frac{1}{t} \Phi_d^t(\mathbf{x}) = \frac{1}{ad} h_{bd}[ad \mathbf{x}]$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{c_1, c_2, \dots, c_t > 0 \\ c_1 + c_2 + \dots + c_t = d}} \Psi_{c_1}(\mathbf{x}) \Psi_{c_2}(\mathbf{x}) \cdots \Psi_{c_t}(\mathbf{x})$$

$$P(\mathbf{x}; z) := \sum_{j>0} \Psi_j(\mathbf{x}) z^j$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = (P(\mathbf{x}; z))^t \Big|_{z^d}$$

$$\sum_{t>0} \frac{1}{t} \Phi_d^t(\mathbf{x}) = \frac{1}{ad} h_{bd}[ad \mathbf{x}]$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{c_1, c_2, \dots, c_t > 0 \\ c_1 + c_2 + \dots + c_t = d}} \Psi_{c_1}(\mathbf{x}) \Psi_{c_2}(\mathbf{x}) \cdots \Psi_{c_t}(\mathbf{x})$$

$$P(\mathbf{x}; z) := \sum_{j>0} \Psi_j(\mathbf{x}) z^j$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = (P(\mathbf{x}; z))^t \Big|_{z^d}$$

$$\frac{1}{ad} h_{bd}[ad \mathbf{x}] = (-\log(1 - P(\mathbf{x}; z))) \Big|_{z^d}$$

$$P(\mathbf{x}; z) = 1 - \exp\left(-\sum_{k>0} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k\right)$$

$$P(\mathbf{x}; z) = 1 - \exp\left(-\sum_{k>0} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k\right)$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = (P(\mathbf{x}; z))^t \Big|_{z^d}$$

$$P(\mathbf{x}; z) = 1 - \exp\left(-\sum_{k>0} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k\right)$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = (P(\mathbf{x}; z))^t \Big|_{z^d} \implies \Phi_d(\mathbf{x}) = \sum_{t>0} \Phi_d^t(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{1 - P(\mathbf{x}; z)}\right) \Big|_{z^d}$$

$$P(\mathbf{x}; z) = 1 - \exp\left(-\sum_{k>0} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k\right)$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = (P(\mathbf{x}; z))^t \Big|_{z^d} \implies \Phi_d(\mathbf{x}) = \sum_{t>0} \Phi_d^t(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{1 - P(\mathbf{x}; z)}\right) \Big|_{z^d}$$

$$\sum_{d \geq 0} \Phi_d(\mathbf{x}) z^d = \frac{1}{1 - P(\mathbf{x}; z)} = \exp\left(\sum_{k>0} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k\right)$$



$$P(\mathbf{x}; z) = 1 - \exp\left(-\sum_{k>0} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k\right)$$

$$\Phi_d^t(\mathbf{x}) = (P(\mathbf{x}; z))^t \Big|_{z^d} \implies \Phi_d(\mathbf{x}) = \sum_{t>0} \Phi_d^t(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{1 - P(\mathbf{x}; z)}\right) \Big|_{z^d}$$

$$\sum_{d \geq 0} \Phi_d(\mathbf{x}) z^d = \frac{1}{1 - P(\mathbf{x}; z)} = \exp\left(\sum_{k>0} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k\right)$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad, bd}) z^d = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k\right)$$

# Plan

- 1 Objectif
- 2 Fonctions de parking rectangulaires
- 3 Fonctions symétriques
- 4 Caractéristique de Frobenius
- 5 Preuve
- 6 Conséquences et généralisations**
- 7 Travaux en cours

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\sum_{d \geq 0} |\mathcal{P}_{ad,bd}| z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} (ak)^{bk} z^k \right)$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{d \geq 0} |\mathcal{P}_{ad,bd}| z^d &= \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} (ak)^{bk} z^k \right) \\ &= \exp \left( \sum_{k \geq 1} (ak)^{bk-1} z^k \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{d \geq 0} |\mathcal{P}_{ad,bd}| z^d &= \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} (ak)^{bk} z^k \right) \\ &= \exp \left( \sum_{k \geq 1} (ak)^{bk-1} z^k \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{d \geq 0} |\mathcal{D}_{ad,bd}| z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} \binom{ak + bk - 1}{bk} z^k \right)$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{d \geq 0} |\mathcal{P}_{ad,bd}| z^d &= \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} (ak)^{bk} z^k \right) \\ &= \exp \left( \sum_{k \geq 1} (ak)^{bk-1} z^k \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{d \geq 0} |\mathcal{D}_{ad,bd}| z^d &= \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} \binom{ak + bk - 1}{bk} z^k \right) \\ &= \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak + bk} \binom{ak + bk}{bk} z^k \right) \end{aligned}$$



$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) = \sum_{\mu \vdash d} \frac{1}{m_\mu!} H_\mu^{a/b}(\mathbf{x})$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) = \sum_{\mu \vdash d} \frac{1}{m_\mu!} H_\mu^{a/b}(\mathbf{x})$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$$

$$m_\mu! = \prod_j m_j!$$

$$H_\mu^{a/b}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{a\mu_i} h_{a\mu_i}[b\mu_i \mathbf{x}]$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) = \sum_{\mu \vdash d} \frac{1}{m_\mu!} H_\mu^{a/b}(\mathbf{x})$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$$

$$m_\mu! = \prod_j m_j!$$

$$H_\mu^{a/b}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{a^{\mu_i}} h_{a\mu_i}[b\mu_i \mathbf{x}]$$

$$\text{Frob}(\mathcal{P}_{2a,2b}) = \frac{1}{2a} h_{2b}[2a \mathbf{x}] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} h_b[a \mathbf{x}] \right)^2$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) = \sum_{\mu \vdash d} \frac{1}{m_\mu!} H_\mu^{a/b}(\mathbf{x})$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$$

$$m_\mu! = \prod_j m_j!$$

$$H_\mu^{a/b}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{a^{\mu_i}} h_{a\mu_i}[b\mu_i \mathbf{x}]$$

$$\text{Frob}(\mathcal{P}_{2a,2b}) = \frac{1}{2a} h_{2b}[2a \mathbf{x}] + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a} h_b[a \mathbf{x}] \right)^2$$

$$\text{Frob}(\mathcal{P}_{3a,3b}) = \frac{1}{3a} h_{3b}[3a \mathbf{x}] + \left( \frac{1}{2a} h_{2b}[2a \mathbf{x}] \right) \left( \frac{1}{a} h_b[a \mathbf{x}] \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{a} h_b[a \mathbf{x}] \right)^3$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) = \sum_{\mu \vdash d} \frac{1}{m_\mu!} H_\mu^{a/b}(\mathbf{x})$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$$

$$m_\mu! = \prod_j m_j!$$

$$H_\mu^{a/b}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{a\mu_i} h_{a\mu_i}[b\mu_i \mathbf{x}]$$

$$|\mathcal{D}_{2a,2b}| = \left( \frac{1}{2a+2b} \binom{2a+2b}{2a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a+b} \binom{a+b}{a} \right)^2$$

$$|\mathcal{D}_{3a,3b}| = \left( \frac{1}{3a+3b} \binom{3a+3b}{3a} \right) + \left( \frac{1}{a+b} \binom{a+b}{a} \right) \left( \frac{1}{2a+2b} \binom{2a+2b}{2a} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{a+b} \binom{a+b}{a} \right)^3$$

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} \frac{1}{ak} h_{bk}[ak \mathbf{x}] z^k \right)$$

$$\text{Frob}(\mathcal{P}_{ad,bd}) = \sum_{\mu \vdash d} \frac{1}{m_\mu!} H_\mu^{a/b}(\mathbf{x})$$

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\ell) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots)$$

$$m_\mu! = \prod_j m_j!$$

$$H_\mu^{a/b}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1}{a\mu_i} h_{a\mu_i}[b\mu_i \mathbf{x}]$$

$$|\mathcal{D}_{2a,2b}| = \left( \frac{1}{2a+2b} \binom{2a+2b}{2a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a+b} \binom{a+b}{a} \right)^2$$

$$|\mathcal{D}_{3a,3b}| = \left( \frac{1}{3a+3b} \binom{3a+3b}{3a} \right) + \left( \frac{1}{a+b} \binom{a+b}{a} \right) \left( \frac{1}{2a+2b} \binom{2a+2b}{2a} \right) + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{a+b} \binom{a+b}{a} \right)^3$$

[Bizley 1954]

# Fonctions de parking bi-étiquetées



## Fonctions de parking bi-étiquetées

						2	3	6
						3		
				1	9	2		
		4	7	5				
5	8	1						
6								
4								

## Fonctions de parking bi-étiquetées

						2	3	6
						3		
				1	9	2		
		4	7	5				
5	8	1						
6								
4								

Action de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m$

## Fonctions de parking bi-étiquetées

						2	3	6
						3		
				1	9	2		
		4	7	5				
5	8	1						
6								
4								

Action de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m$ Frobenius en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$

## Fonctions de parking bi-étiquetées

						2	3	6
						3		
				1	9	2		
		4	7	5				
5	8	1						
6								
4								

Action de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m$ Frobenius en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ 

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}^{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathcal{P}_{ad, bd}^{(2)}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} z^k \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \sum_{\rho \models jbk, \tau \models jak} h_\rho(\mathbf{x}) h_\tau(\mathbf{y}) \right)$$

## Fonctions de parking bi-étiquetées

						2	3	6
						3		
				1	9	2		
		4	7	5				
5	8	1						
6								
4								

Action de  $\mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_m$ Frobenius en  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ 

$$\sum_{d \geq 0} \text{Frob}^{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\mathcal{P}_{ad, bd}^{(2)}) z^d = \exp \left( \sum_{k \geq 1} z^k \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} \sum_{\rho \models_j bk, \tau \models_j ak} h_\rho(\mathbf{x}) h_\tau(\mathbf{y}) \right)$$

$\uparrow \quad \uparrow$   
 (compositions en  $j$  parts)

# Plan

- 1 Objectif
- 2 Fonctions de parking rectangulaires
- 3 Fonctions symétriques
- 4 Caractéristique de Frobenius
- 5 Preuve
- 6 Conséquences et généralisations
- 7 Travaux en cours**

# Travaux en cours

# Travaux en cours






- $q, t$ -analogues
  - statistique en  $q$  **aire**
  - statistique en  $t$  **div**
  - lien avec polynômes de Macdonald



# Travaux en cours

- $q, t$ -analogues
  - statistique en  $q$  aire
  - statistique en  $t$  div
  - lien avec polynômes de Macdonald
- chemins de hauteur bornée
  - Frobenius donné par le quotient de deux polynômes vérifiant une récurrence de “type Tchebychev”

# Références

-  D. Armstrong, N. Loehr, G. Warrington, *Rational parking functions and Catalan numbers*, arXiv:14031845 (2014).
-  J.-C. Aval, F. Bergeron, *Rectangular parking functions*, preprint (2015).
-  F. Bergeron, A. Garsia, E. Leven, G. Xin, *Compositional  $(km, kn)$ -Shuffle Conjectures*, arXiv:1404.4616 (2014).
-  T. L. Bizley, *Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths from  $(0, 0)$  to  $(km, kn)$  having just  $t$  contacts with the line and a proof of Grossman's formula for the number of paths which may touch but do not rise above this line*, J. Inst. Actuar. 80, (1954), 55–62.
-  E. Gorsky, A. Negut, *Refined Knot Invariants and Hilbert Schemes*, arXiv:1304.3328 (2013).