

# Automates cellulaires probabilistes à loi invariante markovienne

Jérôme Casse  
Jean-François Marckert

CNRS, LaBRI, Université de Bordeaux

Journées de Combinatoire de Bordeaux  
4 février 2015

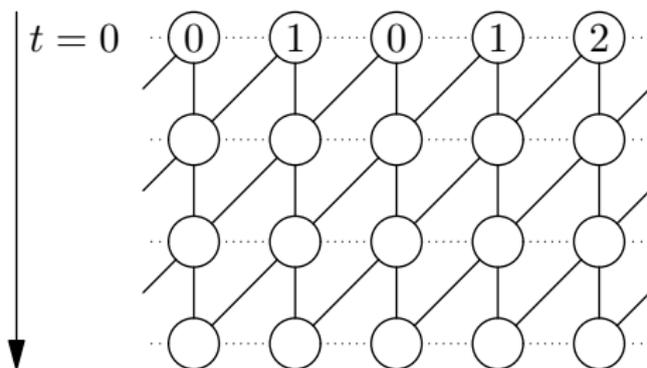
## Automate cellulaire déterministe

## Définition

$E_\kappa = \{0, \dots, \kappa\}$  un *alphabet*.

$f : E_\kappa^2 \rightarrow E_\kappa$  une *règle locale*.  
 $(a, b) \mapsto c$

L'*automate cellulaire*  $A : E_\kappa^{\mathbb{Z}} \rightarrow E_\kappa^{\mathbb{Z}}$  avec  $w'_i = f(w_i, w_{i+1})$ .



- $\kappa = 2$
- $f(a, b) = a + b \pmod{3}$ .

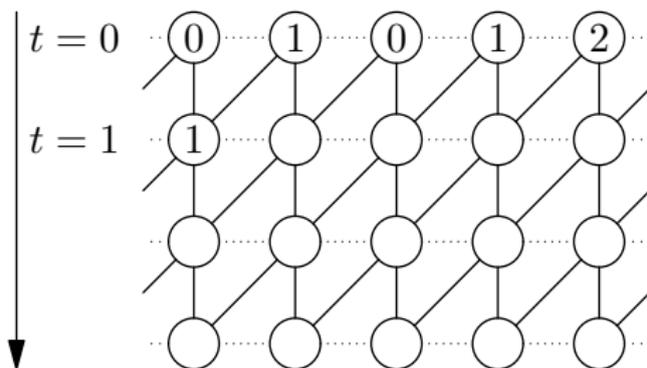
## Automate cellulaire déterministe

## Définition

$E_\kappa = \{0, \dots, \kappa\}$  un *alphabet*.

$f : E_\kappa^2 \rightarrow E_\kappa$  une *règle locale*.  
 $(a, b) \mapsto c$

L'*automate cellulaire*  $A : E_\kappa^{\mathbb{Z}} \rightarrow E_\kappa^{\mathbb{Z}}$  avec  $w'_i = f(w_i, w_{i+1})$ .



- $\kappa = 2$
- $f(a, b) = a + b \pmod{3}$ .

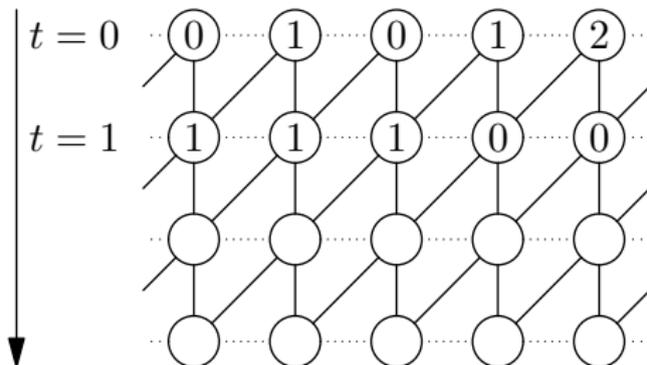
## Automate cellulaire déterministe

## Définition

$E_\kappa = \{0, \dots, \kappa\}$  un *alphabet*.

$f : E_\kappa^2 \rightarrow E_\kappa$  une *règle locale*.  
 $(a, b) \mapsto c$

L'*automate cellulaire*  $A : E_\kappa^{\mathbb{Z}} \rightarrow E_\kappa^{\mathbb{Z}}$  avec  $w'_i = f(w_i, w_{i+1})$ .



- $\kappa = 2$
- $f(a, b) = a + b \pmod{3}$ .

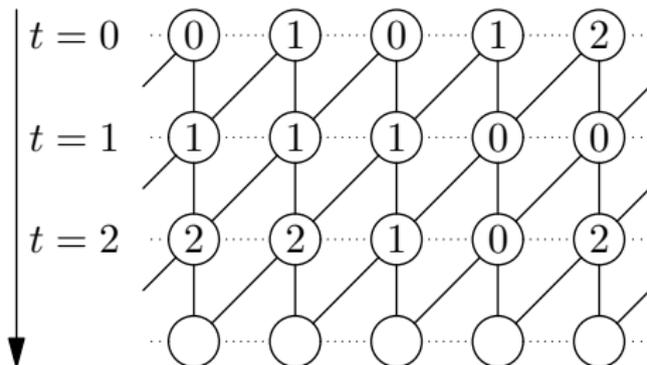
## Automate cellulaire déterministe

## Définition

$E_\kappa = \{0, \dots, \kappa\}$  un *alphabet*.

$f : E_\kappa^2 \rightarrow E_\kappa$  une *règle locale*.  
 $(a, b) \mapsto c$

L'*automate cellulaire*  $A : E_\kappa^{\mathbb{Z}} \rightarrow E_\kappa^{\mathbb{Z}}$  avec  $w'_i = f(w_i, w_{i+1})$ .



- $\kappa = 2$
- $f(a, b) = a + b \pmod 3$ .

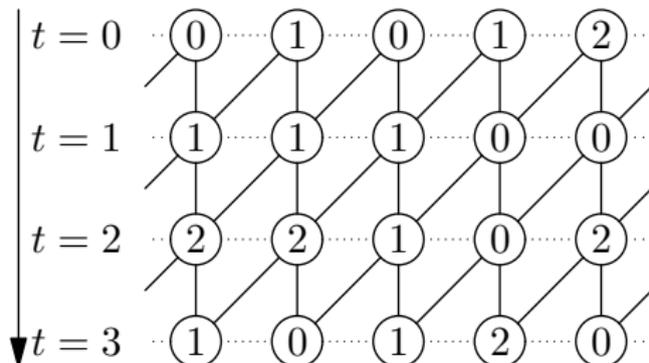
## Automate cellulaire déterministe

## Définition

$E_\kappa = \{0, \dots, \kappa\}$  un *alphabet*.

$f : E_\kappa^2 \rightarrow E_\kappa$  une *règle locale*.  
 $(a, b) \mapsto c$

L'*automate cellulaire*  $A : E_\kappa^{\mathbb{Z}} \rightarrow E_\kappa^{\mathbb{Z}}$  avec  $w'_i = f(w_i, w_{i+1})$ .

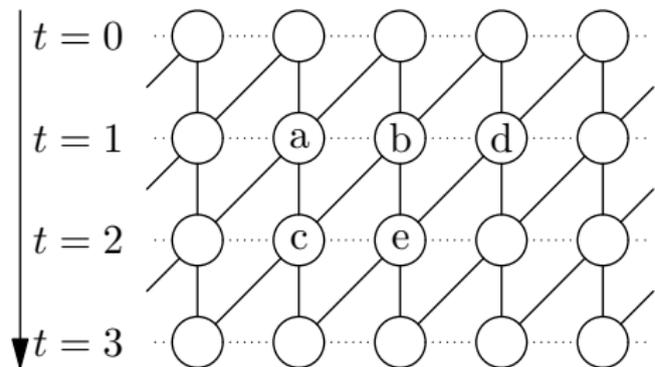


- $\kappa = 2$
- $f(a, b) = a + b \pmod{3}$ .

# Automate cellulaire probabiliste (ACP)

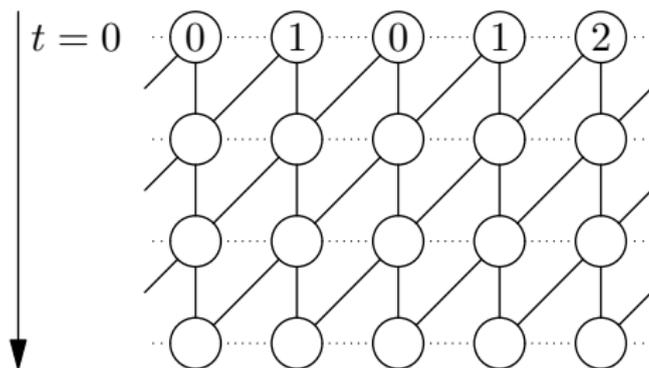
$f$  est remplacée par une *dynamique locale aléatoire*  $T$  où

$$T_{a,b}^c = P \left( \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} a \\ \circ \\ c \end{array} & \begin{array}{c} b \\ \circ \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} a \\ \circ \\ \circ \end{array} & \begin{array}{c} b \\ \circ \end{array} \end{array} \right).$$



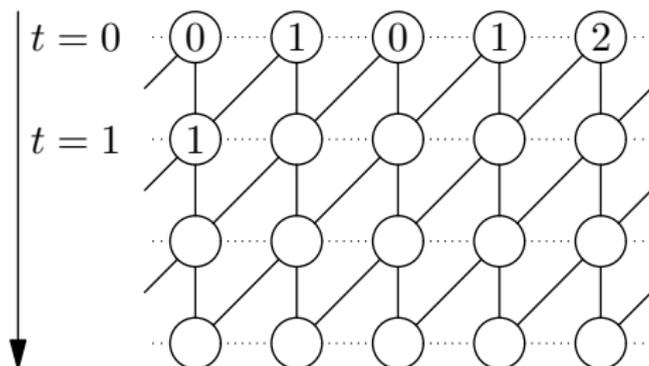
## Exemple d'un ACP

- $\kappa = 2$ .
- $T_{a,b}^c = \begin{cases} 1/2 & \text{si } c = a + b \pmod{3} \\ 1/4 & \text{sinon} \end{cases}$



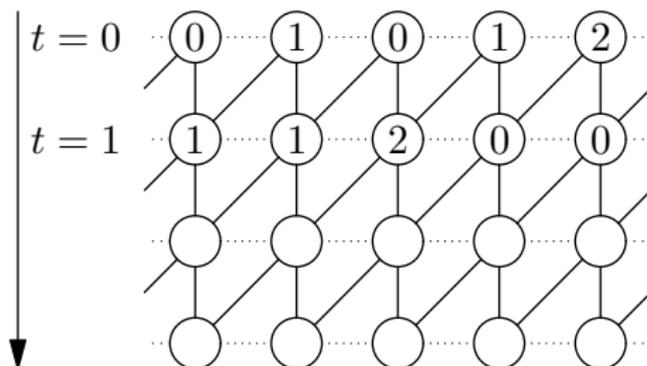
## Exemple d'un ACP

- $\kappa = 2$ .
- $T_{a,b}^c = \begin{cases} 1/2 & \text{si } c = a + b \pmod 3 \\ 1/4 & \text{sinon} \end{cases}$



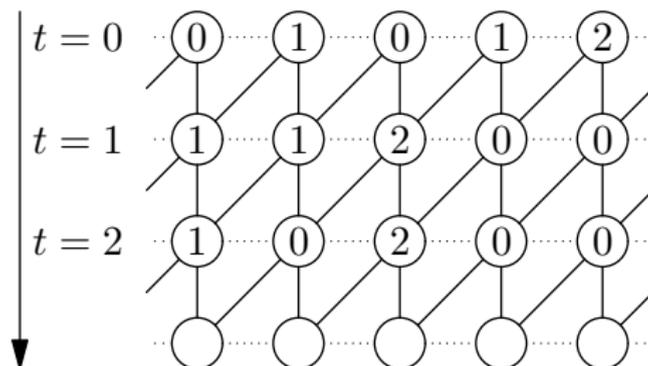
## Exemple d'un ACP

- $\kappa = 2$ .
- $T_{a,b}^c = \begin{cases} 1/2 & \text{si } c = a + b \pmod{3} \\ 1/4 & \text{sinon} \end{cases}$



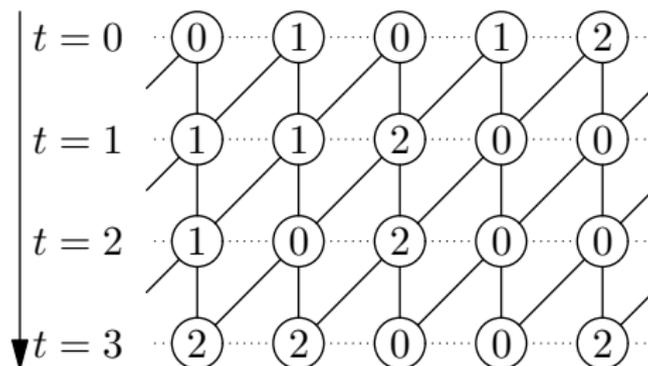
## Exemple d'un ACP

- $\kappa = 2$ .
- $T_{a,b}^c = \begin{cases} 1/2 & \text{si } c = a + b \pmod{3} \\ 1/4 & \text{sinon} \end{cases}$



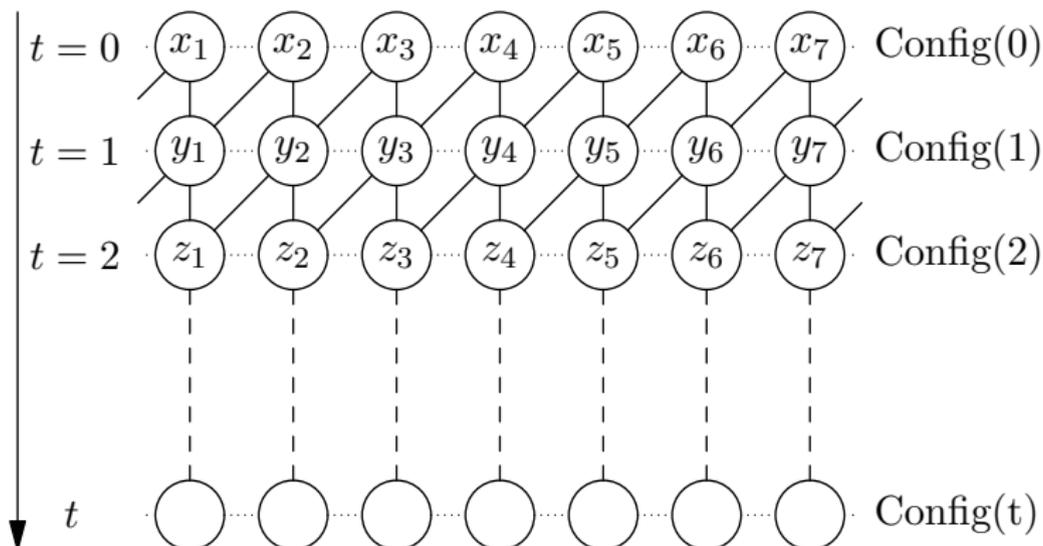
## Exemple d'un ACP

- $\kappa = 2$ .
- $T_{a,b}^c = \begin{cases} 1/2 & \text{si } c = a + b \pmod 3 \\ 1/4 & \text{sinon} \end{cases}$



## Automates cellulaires probabilistes (ACP)

ACP induit une chaîne de Markov (temporelle) sur  $E_{\kappa}^{\mathbb{Z}}$ .



Le tout forme un diagramme espace-temps.

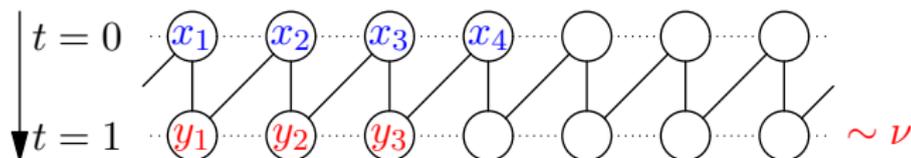
# Automate cellulaire probabiliste (ACP)

Formellement,

ACP agit sur  $\mathcal{M}(E_{\kappa}^{\mathbb{Z}})$ .

- Transforme une configuration  $x$  en une configuration aléatoire  $y$  (qui a une mesure  $\nu$ ).

$$\nu(y_1, \dots, y_k) = \prod_{i=1}^k T_{x_i, x_{i+1}}^{y_i}.$$



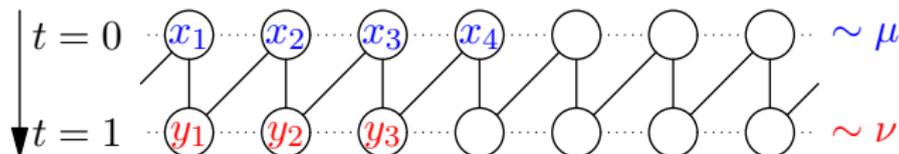
# Automate cellulaire probabiliste (ACP)

Formellement,

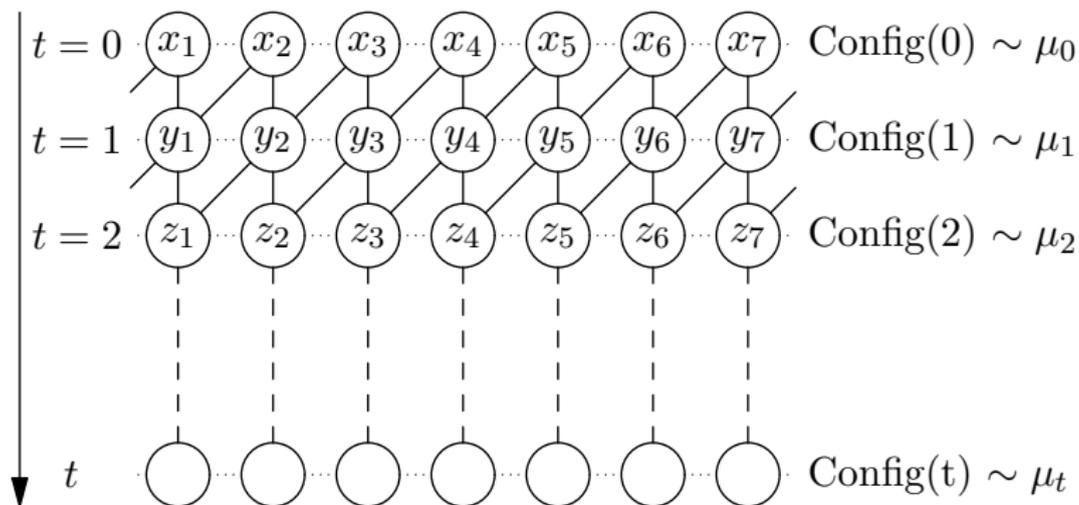
ACP agit sur  $\mathcal{M}(E_{\kappa}^{\mathbb{Z}})$ .

- Transforme une configuration  $x$  en une configuration aléatoire  $y$  (qui a une mesure  $\nu$ ).
- Si, sur la ligne  $t$ , on a la loi  $\mu$ , alors, sur la ligne  $t + 1$ , on a la loi  $\nu$ ,

$$\nu(y_1, \dots, y_k) = \sum_x \mu(x_1, \dots, x_{k+1}) \prod_{i=1}^k T_{y_i}^{x_i, x_{i+1}}.$$



## Automates Cellulaires Probabilistes (ACP)



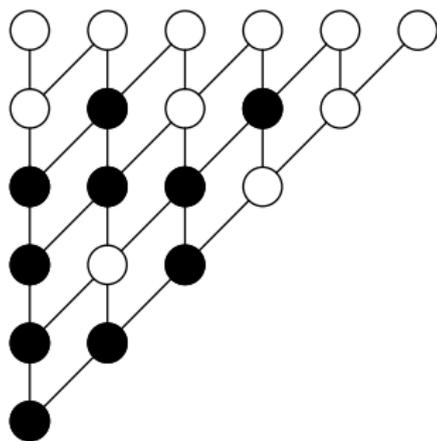
# Applications des ACP en combinatoire

- Combinatoire : dénombrement des animaux dirigés (Dhar 1982).
- Physique statistique : percolation, modèles de gaz à particules dures, Ising.

# Applications des ACP en combinatoire

- Combinatoire : dénombrement des animaux dirigés (Dhar 1982).
- Physique statistique : modèles de gaz à particules dures.

Un animal dirigé : une composante connexe "dirigée" de  $\mathbb{N}^2$ .



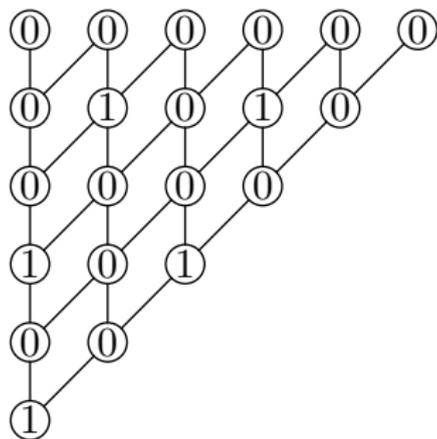
Un animal d'aire 10.

$$\begin{aligned}
 SG_{\text{Aire}}(x) &= \sum_A x^{\text{Aire}(A)} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \left( 1 - \frac{4x}{1+x} \right)^{-1/2} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

# Applications des ACP en combinatoire

- Combinatoire : dénombrement des animaux dirigés (Dhar 1982).
- Physique statistique : modèles de gaz à particules dures.

Le modèle de gaz à particules dures :



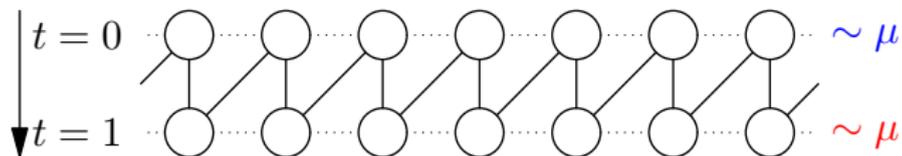
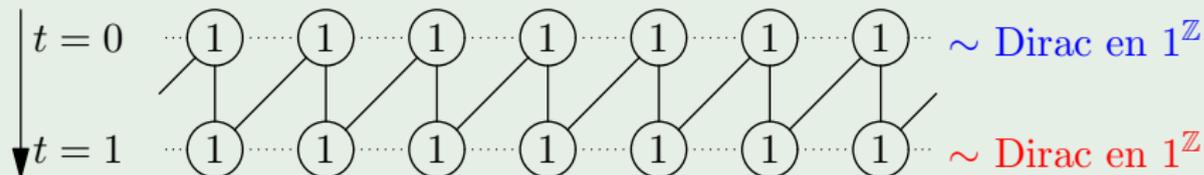
$$T_{1,0}^{0,0} = p \text{ et } T_{1,1}^{0,1} = T_{1,0}^{1,0} = T_{1,1}^{1,1} = 0$$

$$\begin{aligned} P(\text{Config}(0,0) = 1) \\ &= \sum_A (-p)^{\text{Aire}(A)} \\ &= SG_{\text{Aire}}(-p) \end{aligned}$$

## Loi invariante par un ACP

## Définition

$\mu$  est invariante par  $A$  si l'image de  $\mu$  est  $\mu$ .

Exemple ( $T_{1,1} = 1$ )

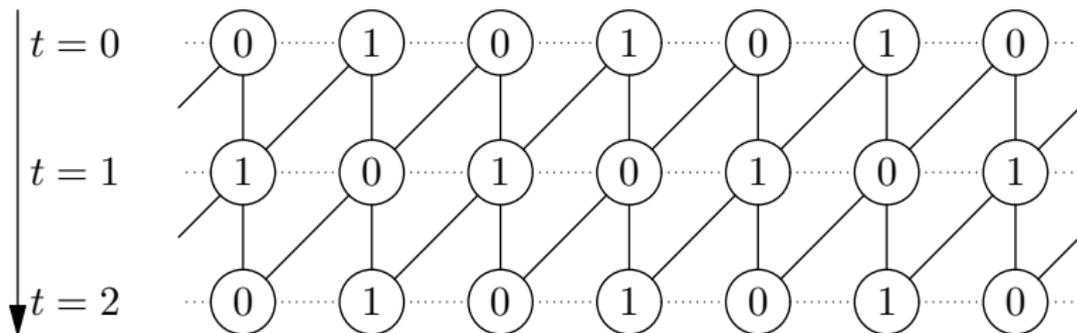
# ACP à taux strictement positifs

## Définition

Un ACP est dit à taux strictement positifs si : pour tous  $a, b, c$ ,

$$T_{a,b}^c > 0.$$

- Passer de n'importe quelle configuration à une autre.
- Pas de configurations "pièges" : un "piège"  $T_{0,1}^1 = T_{1,0}^0 = 1$



# Questions ouvertes sur les ACP à taux strictement positifs

- L'unicité de la loi stationnaire.
-

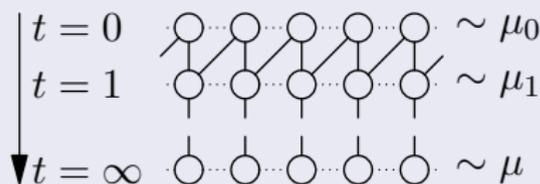
# Questions ouvertes sur les ACP à taux strictement positifs

- L'unicité de la loi stationnaire.

## Définition

Un ACP est ergodique :

- si  $\forall \mu_0$ , la suite  $(\mu_t)$  converge.
- cette limite ne dépend pas de  $\mu_0$ .



-

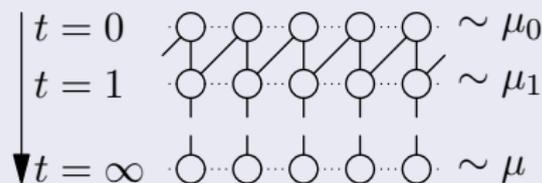
# Questions ouvertes sur les ACP à taux strictement positifs

- L'unicité de la loi stationnaire.

## Définition

Un ACP est ergodique :

- si  $\forall \mu_0$ , la suite  $(\mu_t)$  converge.
- cette limite ne dépend pas de  $\mu_0$ .



- Existence ou non d'un ACP non ergodique à 2 couleurs ?  
Un exemple non ergodique est connu pour  $2^{100}$  couleurs (Gacs 1998).

# Littérature sur les ACP et leurs lois invariantes

- Étude des ACP à loi invariante markovienne :  
Belyaev & al. (1969); Toom & al. (1990); Bousquet-Mélou (1998).
- Aussi connus sous le nom de modèles de gaz en combinatoire :  
Dhar (1982); Viennot (1986); Bétréma et Penaud (1993);  
Bousquet-Mélou (1998); Le Borgne et Marckert (2007); Albenque  
(2009); Marckert (2012).
- Étude des ACP à loi invariante gibbsienne :  
Vasilyev (1978), Dai-Pra, Louis et Roelly (2001).
- Étude des ACP à loi invariante iid (mesure produit) :  
Mairesse et Marcovici (2014).
- Survey :  
Mairesse et Marcovici (2014).

# Objectif de l'exposé

- Étant donné un ACP avec  $T$ , comment calculer l'ensemble de ses mesures invariantes ?

# Objectif de l'exposé

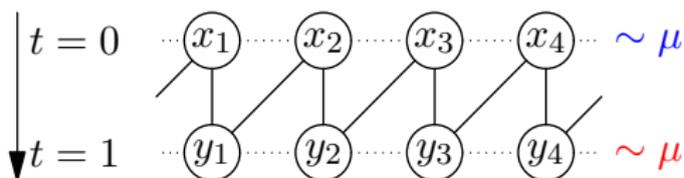
- Étant donné un ACP avec  $T$ , comment calculer l'ensemble de ses mesures invariantes ?  
On ne sait presque jamais trouver la (ou les) loi(s) invariante(s) !

# Objectif de l'exposé

- Étant donné un ACP avec  $T$ , comment calculer l'ensemble de ses mesures invariantes ?  
On ne sait presque jamais trouver la (ou les) loi(s) invariante(s) !
- Quand on sait, la loi invariante est
  - triviale (un "piège").
  - 
  -

# Objectif de l'exposé

- Étant donné un ACP avec  $T$ , comment calculer l'ensemble de ses mesures invariantes ?  
On ne sait presque jamais trouver la (ou les) loi(s) invariante(s) !
- Quand on sait, la loi invariante est
  - triviale (un "piège").
  - une mesure produit :
  -



$$\mu(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k p_{x_i}$$

# Objectif de l'exposé

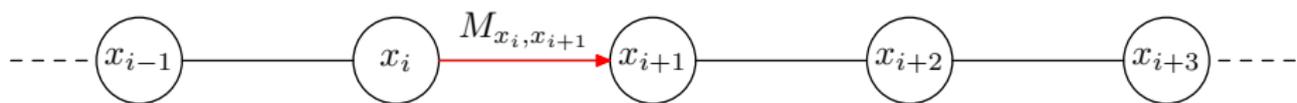
- Étant donné un ACP avec  $T$ , comment calculer l'ensemble de ses mesures invariantes ?  
On ne sait presque jamais trouver la (ou les) loi(s) invariante(s) !
- Quand on sait, la loi invariante est
  - triviale (un "piège").
  - une mesure produit :
  - une chaîne de Markov spatiale : ...

## Chaîne de Markov (spatiale)

## Définition

Soit  $(M_{a,b})_{a,b \in E_\kappa}$  une matrice de probabilité. La chaîne de Markov  $(X_i)$  de noyau  $M$  est une mesure qui vérifie

$$P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i, X_{i-1} = x_{i-1}, \dots) \\ = P(X_{i+1} = x_{i+1} | X_i = x_i) = M_{x_i, x_{i+1}}.$$



$$\mu(x_1, \dots, x_k) = P\left(\left(X_i = x_i\right)_{1 \leq i \leq k}\right) = \rho_{x_1} \prod_{i=1}^{k-1} M_{x_i, x_{i+1}}.$$

# Objectif de l'exposé

- On va décrire l'ensemble des ACP sur  $E_K$  qui possèdent une chaîne de Markov comme loi invariante.
- L'avancée : la plupart des résultats sont pour 2 couleurs, les nôtres pour un nombre fini de couleurs.

# Problème algébrique

La loi d'une chaîne de Markov  $(\rho, M)$  est invariante par l'ACP ssi : **pour tout**  $n$ ,

$$\rho_{y_1} M_{y_1, y_2} \cdots M_{y_{n-1}, y_n} = \sum_x \rho_{x_1} M_{x_1, x_2} \cdots M_{x_n, x_{n+1}} \prod_{i=1}^n T_{y_i}^{x_i, x_{i+1}}.$$

On voit la nature algébrique du problème.

## Première simplification algébrique

La loi d'une chaîne de Markov  $(\rho, M)$  est invariante par l'ACP ssi : **pour tout**  $n$ ,

$$\rho_{y_1} M_{y_1, y_2} \cdots M_{y_{n-1}, y_n} = \sum_x \rho_{x_1} M_{x_1, x_2} \cdots M_{x_n, x_{n+1}} \prod_{i=1}^n T_{x_i, x_{i+1}}^{y_i}.$$

## Théorème (Piatetski-Shapiro, Vasilyev (1971))

La loi d'une chaîne de Markov  $(\rho, M)$  est invariante par l'ACP ssi : **pour tout**  $n \leq \kappa + 2$ ,

$$\rho_{y_1} M_{y_1, y_2} \cdots M_{y_{n-1}, y_n} = \sum_x \rho_{x_1} M_{x_1, x_2} \cdots M_{x_n, x_{n+1}} \prod_{i=1}^n T_{x_i, x_{i+1}}^{y_i}.$$

## Pour 2 lettres

## Théorème (Belyaev &amp; al. (1969))

Soit  $A = (\mathbb{Z}, E_1, T)$  un ACP.  $A$  admet une chaîne de Markov invariante ssi :

$$(i) \quad T_{0,0} \underset{0}{T_{1,1}} \underset{0}{T_{1,0}} \underset{1}{T_{0,1}} = T_{1,1} \underset{1}{T_{0,0}} \underset{1}{T_{0,1}} \underset{0}{T_{1,0}} \text{ ou}$$

$$(ii) \quad T_{0,0} \underset{0}{+} T_{1,1} \underset{0}{=} T_{0,1} \underset{0}{+} T_{1,0} \underset{0}{=} 1 \text{ ou}$$

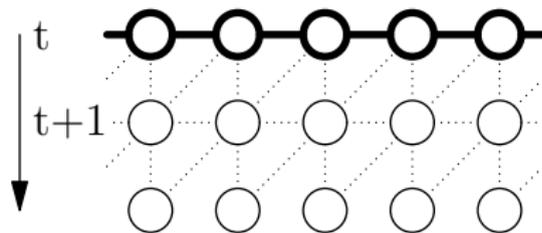
$$(iii) \quad T_{0,1} \underset{1}{T_{1,0}} = T_{1,1} \underset{0}{T_{0,0}} \text{ ou } T_{1,0} \underset{1}{T_{0,1}} = T_{1,1} \underset{0}{T_{0,0}}.$$

- Avec 3 lettres ou plus, trop complexe pour éliminer les  $M$  à l'aide d'un ordinateur.

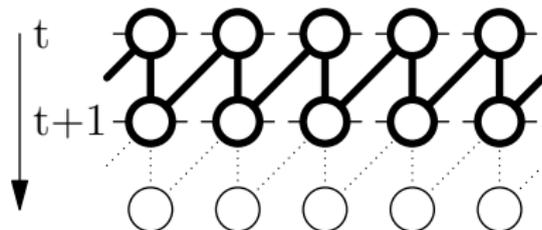
# Structures

Deux structures :

- la ligne horizontale (H),



- le zigzag horizontal (HZ).

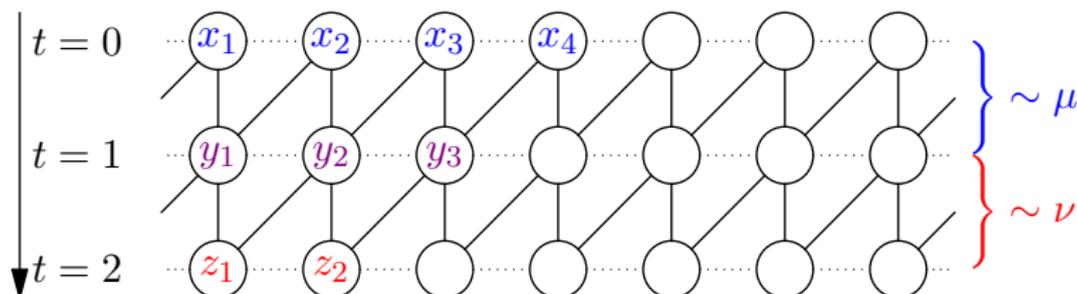


# ACP agissant sur HZ

Dans ce cas, on considère que un

ACP agit sur  $\mathcal{M}(E_{\kappa}^{\text{HZ}})$ .

$$\nu(y_1, z_1, \dots, z_k, y_{k+1}) = \sum_x \mu(x_1, y_1, \dots, y_{k+1}, x_{k+2}) \prod_{i=1}^k T_{y_i, y_{i+1}}^{z_i}.$$



## Chaîne de Markov sur HZ

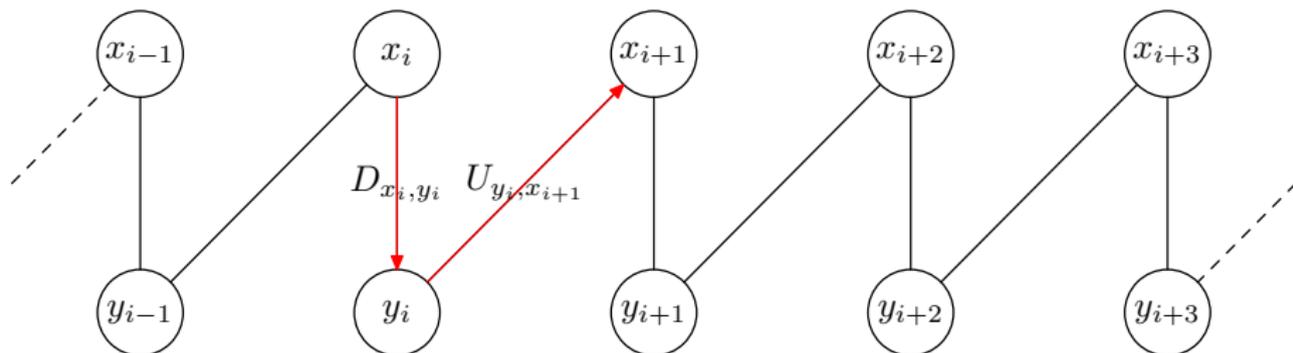
## Définition

Soient  $(D_{a,c})_{a,c \in E_\kappa}$  et  $(U_{c,b})_{c,b \in E_\kappa}$  deux matrices de probabilité. La chaîne de Markov de noyaux  $(D, U)$  sur HZ est une mesure sur HZ qui vérifie

$$P(Y_i = y_i | X_i = x_i, Y_{i-1} = y_{i-1}, \dots) = D_{x_i, y_i}$$

et

$$P(X_{i+1} = x_{i+1} | Y_i = y_i, X_i = x_i, \dots) = U_{y_i, x_{i+1}}.$$



# Objectif de l'exposé : problème algébrique

- On va décrire l'ensemble des ACP qui possèdent une chaîne de Markov sur  $\mathbb{H}\mathbb{Z}$  comme loi invariante.
- Très formellement, on va chercher  $T$  tel qu'il existe  $(D, U)$  tel que, pour tout  $n$  :

$$\underbrace{\rho_{y_1} D_{y_1, z_1} U_{z_1, y_2} \cdots D_{y_n, z_n} U_{z_n, y_{n+1}}}_{\mu}$$

$$= \sum_x \underbrace{\rho_{x_1} D_{x_1, y_1} U_{y_1, x_2} \cdots D_{x_{n+1}, y_{n+1}} U_{y_{n+1}, x_{n+2}}}_{\mu} \prod_{i=1}^n T_{z_{i+1}}^{y_i, y_{i+1}}.$$

# Pour 2 lettres

## Théorème (Belyaev & al. (1969))

Soit  $A = (\mathbb{Z}, E_1, T)$  un ACP.  $A$  admet une chaîne de Markov invariante sur  $HZ$  ssi :

$$(i) \quad T_{0,0} T_{1,1} T_{1,0} T_{0,1} = T_{1,1} T_{0,0} T_{0,1} T_{1,0}.$$

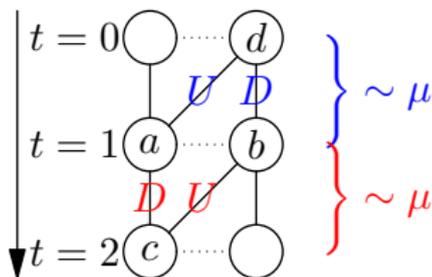
- On va voir un critère pour une taille d'alphabet quelconque.

## Un premier critère

Lemme (Vasilyev (1978), Toom (1990))

Soit  $A = (\mathbb{Z}, E_{\kappa}, T)$ . La chaîne de Markov sur  $HZ$  de noyaux  $(D, U)$  est invariante par  $A$  ssi :

- (i)  $T_{a,b} = \frac{D_{a,c} U_{c,b}}{(DU)_{a,b}}$  pour tous  $a, b, c$  et
- (ii)  $DU = UD$ .



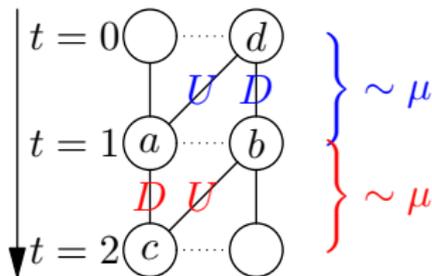
# Un premier critère

Lemme (Vasilyev (1978), Toom (1990))

Soit  $A = (\mathbb{Z}, E_{\kappa}, T)$ . La chaîne de Markov sur  $HZ$  de noyaux  $(D, U)$  est invariante par  $A$  ssi :

(i)  $T_{a,b} = \frac{D_{a,c} U_{c,b}}{(DU)_{a,b}}$  pour tous  $a, b, c$  et

(ii)  $DU = UD$ .



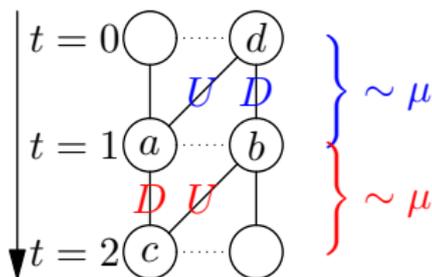
$$\begin{aligned}
 & P(Y_0 = a, Y_1 = b) \\
 &= \rho_a \sum_c D_{a,c} U_{c,b} = \rho_a (DU)_{a,b} \\
 &= \rho_a \sum_d U_{a,d} D_{d,b} = \rho_a (UD)_{a,b}
 \end{aligned}$$

## Un premier critère

Lemme (Vasilyev (1978), Toom (1990))

Soit  $A = (\mathbb{Z}, E_{\kappa}, T)$ . La chaîne de Markov sur  $HZ$  de noyaux  $(D, U)$  est invariante par  $A$  ssi :

- (i)  $T_{a,b}^c = \frac{D_{a,c} U_{c,b}}{(DU)_{a,b}}$  pour tous  $a, b, c$  et
- (ii)  $DU = UD$ .



$$\begin{aligned}
 &P(Y_0 = a, Z_0 = c, Y_1 = b) \\
 &= \rho_a D_{a,c} U_{c,b} \\
 &= \rho_a (DU)_{a,b} T_{a,b}^c
 \end{aligned}$$

# Le résultat pour tout alphabet fini

## Théorème (C. et Marckert (2014))

Soit  $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, T)$  un ACP. Alors  $A$  admet une chaîne de Markov invariante sur  $HZ$  ssi

- (i)  $T_{0,0}^0 T_{a,b}^0 T_{a,0}^c T_{0,b}^c = T_{a,b}^c T_{0,0}^c T_{0,b}^0 T_{a,0}^0$  pour tous  $a, b, c$  et
- (ii)  $D^\gamma U^\gamma = U^\gamma D^\gamma$ .

Dans ce cas, la chaîne de Markov invariante sur  $HZ$  a pour noyaux  $(D^\gamma, U^\gamma)$ .

où  $D^\gamma$  et  $U^\gamma$  sont données par ...

# Que sont $D^\gamma$ et $U^\gamma$ ? Une solution algébrique

1.  $A_1 = \left( T_{i,j} \right)_{i,j \in E_\kappa}$  :  $\nu$  le vecteur propre à gauche avec  $\sum_x \nu_x = 1$ .
2.  $A_2 = \left( \begin{array}{c} T_{a,a} \nu_a \\ 0 \\ T_{a,d} \end{array} \right)_{d,a \in E_\kappa}$  :  $\gamma$  le vecteur propre à gauche.
3. Les deux noyaux de Markov ( $D^\gamma, U^\gamma$ ) :

$$D_{a,c}^\gamma = \frac{\sum_k \frac{\gamma_k}{T_{a,k}} T_{a,k}}{\sum_k \frac{\gamma_k}{T_{a,k}}} \text{ et } U_{c,b}^\gamma = \frac{\frac{\gamma_b}{T_{0,b}} T_{0,b}}{\sum_k \frac{\gamma_k}{T_{0,k}} T_{0,k}}.$$

## Rappel : le résultat

## Théorème

Soit  $A = (\mathbb{Z}, E_{\kappa}, T)$ . Alors  $A$  admet une chaîne de Markov invariante sur  $HZ$  ssi

- (i)  $T_{0,0} T_{a,b} T_{a,0} T_{0,b} = T_{a,b} T_{0,0} T_{0,b} T_{a,0}$  pour tous  $a, b, c$  et
- (ii)  $D^{\gamma} U^{\gamma} = U^{\gamma} D^{\gamma}$ .

$$\text{où } D_{a,c}^{\gamma} = \frac{\sum_k \frac{\gamma_k}{T_{a,k}^{\gamma}} T_{a,k}^{\gamma}}{\sum_k \frac{\gamma_k}{T_{a,k}^{\gamma}}} \text{ et } U_{c,b}^{\gamma} = \frac{\frac{\gamma_b}{T_{0,b}^{\gamma}} T_{0,b}^{\gamma}}{\sum_k \frac{\gamma_k}{T_{0,k}^{\gamma}} T_{0,k}^{\gamma}}.$$

## Lemme (Vasilyev (1978), Toom (1990))

Soit  $A = (\mathbb{Z}, E_{\kappa}, T)$ . La chaîne de Markov sur HZ de noyaux  $(D, U)$  est invariante par  $A$  ssi :

- (i)  $T_{a,b}^c = \frac{D_{a,c} U_{c,b}}{(DU)_{a,b}}$  pour tous  $a, b, c$  et
- (ii)  $DU = UD$ .

## Théorème (C. et Marckert (2014))

Soit  $A = (\mathbb{Z}, E_{\kappa}, T)$ . Alors  $A$  admet une chaîne de Markov invariante sur HZ ssi

- (i)  $T_{0,0}^0 T_{a,b}^0 T_{a,0}^c T_{0,b}^c = T_{a,b}^c T_{0,0}^c T_{0,b}^0 T_{a,0}^0$  pour tous  $a, b, c$  et
- (ii)  $D^\gamma U^\gamma = U^\gamma D^\gamma$ .

## Le coeur de la preuve

## Lemme

Soit  $A = (\mathbb{Z}, E_\kappa, T)$ . Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(a) il existe  $D$  et  $U$  matrices stochastiques tel que, pour tous  $a, b, c$ ,

$$T_{a,b} = \frac{D_{a,c} U_{c,b}}{(DU)_{a,b}},$$

(b) pour tous  $a, b, c \in E_\kappa$ ,  $T_{0,0} T_{a,b} T_{a,0} T_{0,b} = T_{a,b} T_{0,0} T_{0,b} T_{a,0}$ ,

(c) pour tous  $a, a', b, b', c, c' \in E_\kappa$ ,

$$T_{a',b'} T_{a,b} T_{a,b'} T_{a',c} = T_{a,b} T_{a',b'} T_{a',c} T_{a,b'}.$$

Preuve de  $(b) \Rightarrow (a)$ 

$$(b) \text{ pour tous } a, b, c \in E_{\kappa}, T_{a,b} = \begin{pmatrix} T_{a,0} & T_{0,b} \\ \frac{c}{T_{0,0}} & \frac{c}{T_{0,0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{0,0} & T_{a,b} \\ T_{a,0} & T_{0,b} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si  $(D, U)$  t.q.  $D_{a,c} U_{c,b} = \frac{T_{a,0} T_{0,b}}{T_{0,0}^c} F[a, b]$ , alors

$$(a) \forall a, b, c \frac{D_{a,c} U_{c,b}}{(DU)_{a,b}} = T_{a,b}.$$

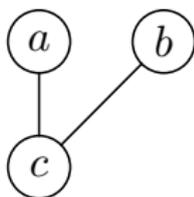
- Posons  $D_{a,c} = \frac{T_{a,0}}{T_{0,0}^c} \alpha_a \zeta_c$  et  $U_{c,b} = T_{0,b} \frac{1}{\zeta_c} \beta_b$ .

# Markov sur HZ et Markov sur H

- Markov sur HZ  $\Rightarrow$  Markov sur H ( $M = DU$ ).
- Markov sur H : Piatetski-Shapiro et Vasilyev (1971).  
Besoin de connaître  $T$  et  $M$  pour conclure.

# Un ACP avec un alphabet infini

- Qu'est ce que cela change si on travaille avec un alphabet infini ?
- Un exemple avec  $E = \mathbb{N}$  :



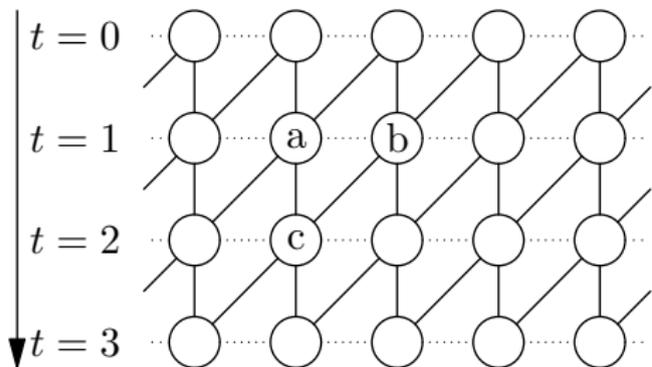
$$c = \begin{cases} 0 & \text{a.p. } p \\ \max(a, b) + 1 & \text{a.p. } 1 - p \end{cases}$$

- $E = \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{R}$ .

# Un ACP sur un alphabet fini ou infini

La *dynamique locale aléatoire*  $T$  est remplacée par un *noyau de transition*  $K$  : pour tout  $a \in E$ ,  $b \in E$ ,  $C \in \mathcal{B}(E)$ ,

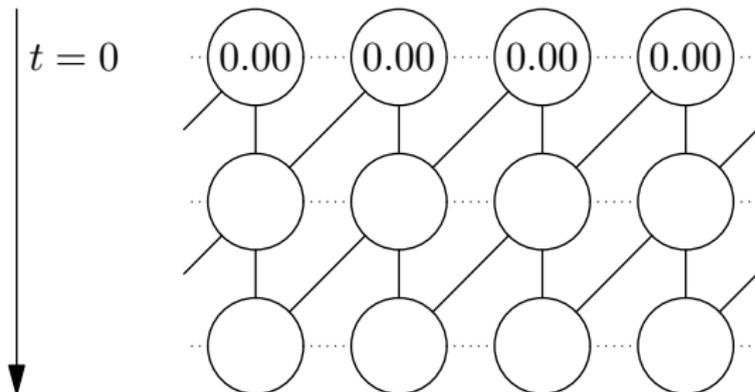
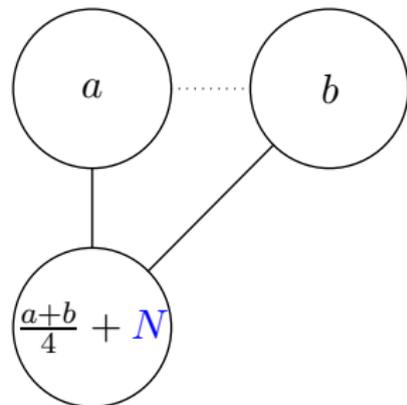
$$K(a, b; C) = P \left( \begin{array}{c} \textcircled{a} \quad \textcircled{b} \\ | \quad / \\ \textcircled{c} \end{array} \text{ avec } c \in C \mid \begin{array}{c} \textcircled{a} \quad \textcircled{b} \\ | \quad / \\ \textcircled{\phantom{c}} \end{array} \right).$$



## Exemple : ACP gaussien

- $K(a, b; C) =$

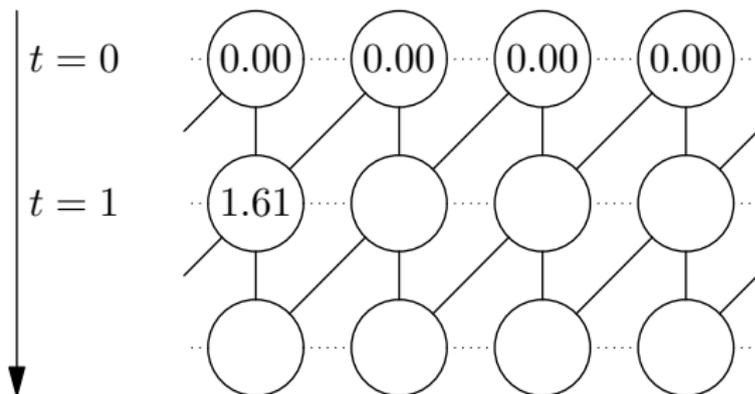
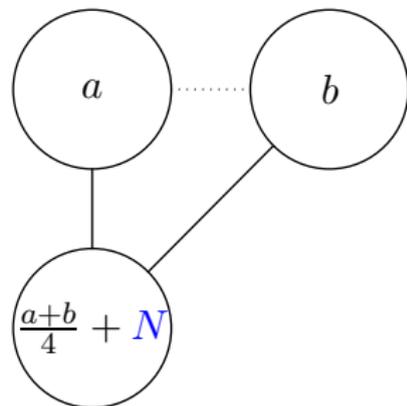
$$P \left( \frac{1}{2} \frac{a+b}{2} + \underbrace{\mathcal{N}(0,1)}_{\text{bruit gaussien}} \in C \right)$$



## Exemple : ACP gaussien

- $K(a, b; C) =$

$$P \left( \frac{1}{2} \frac{a+b}{2} + \underbrace{\mathcal{N}(0,1)}_{\text{bruit gaussien}} \in C \right)$$

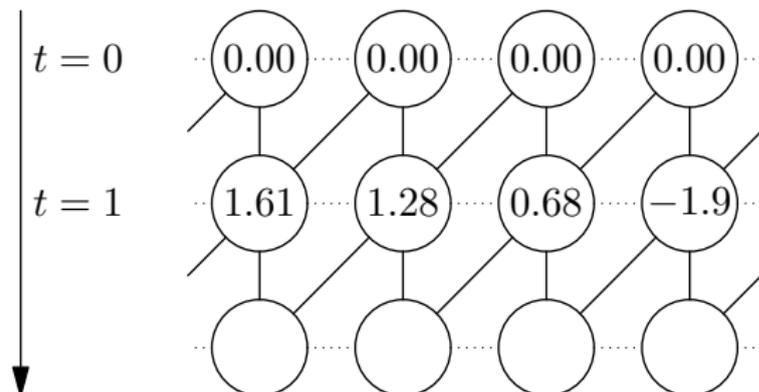
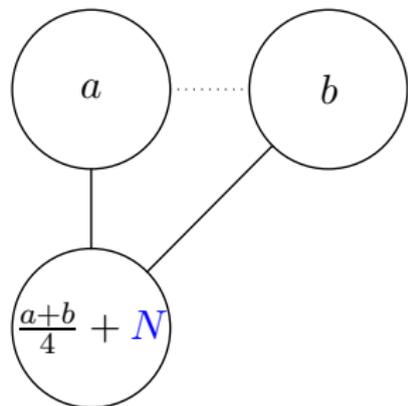


1.6146...

## Exemple : ACP gaussien

- $K(a, b; C) =$

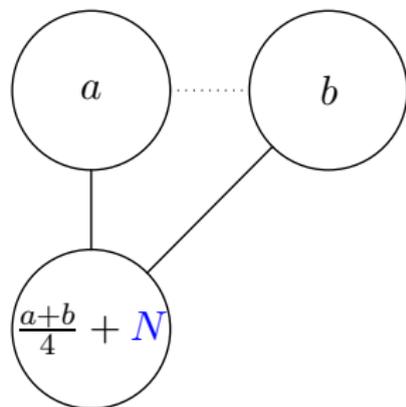
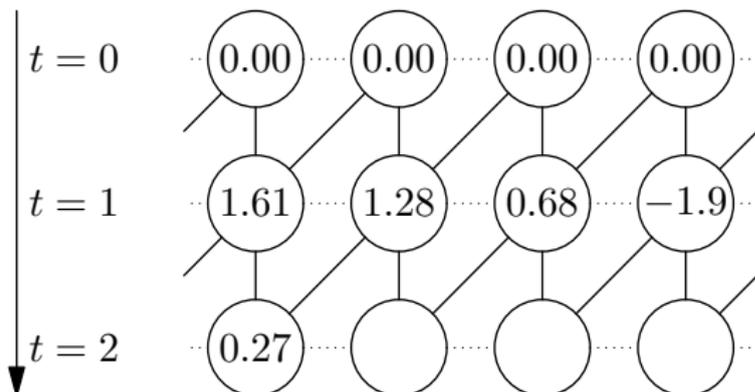
$$P \left( \frac{1}{2} \frac{a+b}{2} + \underbrace{\mathcal{N}(0,1)}_{\text{bruit gaussien}} \in C \right)$$



## Exemple : ACP gaussien

- $K(a, b; C) =$

$$P\left(\frac{1}{2} \frac{a+b}{2} + \underbrace{\mathcal{N}(0,1)}_{\text{bruit gaussien}} \in C\right)$$



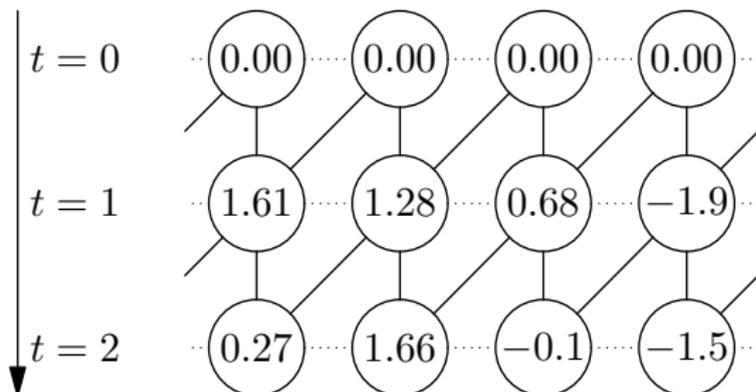
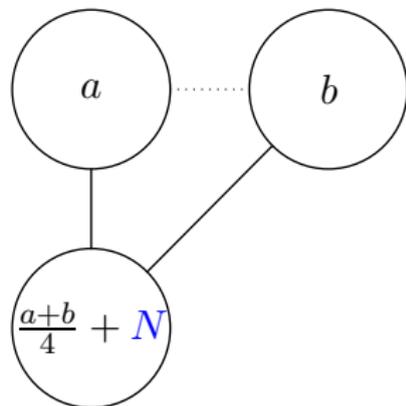
-0.4517...

$$\frac{1.614 + 1.281}{4} + (-0.451)$$

## Exemple : ACP gaussien

- $K(a, b; C) =$

$$P \left( \frac{1}{2} \frac{a+b}{2} + \underbrace{\mathcal{N}(0,1)}_{\text{bruit gaussien}} \in C \right)$$



# ACP avec alphabets infinis

- Très peu étudié en tant que tel.

# ACP avec alphabets infinis

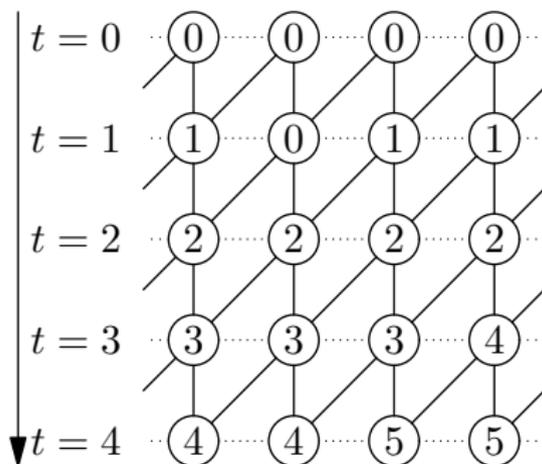
- Très peu étudié en tant que tel.
- Physique statistique :  
la percolation de premier passage,  
une variante du TASEP.

# ACP avec alphabets infinis

- Très peu étudié en tant que tel.
- Physique statistique :  
la percolation de premier passage,  
une variante du TASEP.
- Ici, caractériser les ACP qui ont une loi invariante (markovienne).

# Différences par rapport aux cas alphabet fini : infinité de l'alphabet

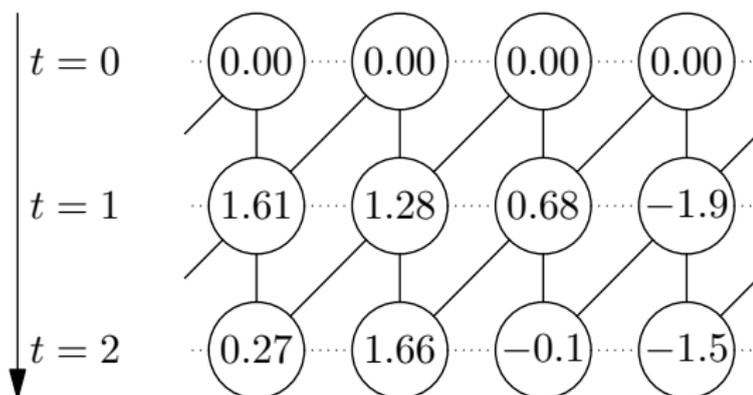
- Pas nécessairement une probabilité invariante.
- 



$$c = \begin{cases} a + b & \text{a.p. } 1/6 \\ \max(a, b) + 1 & \text{a.p. } 5/6 \end{cases}$$

# Différences par rapport aux cas alphabet fini : problème lié aux ensemble négligeables

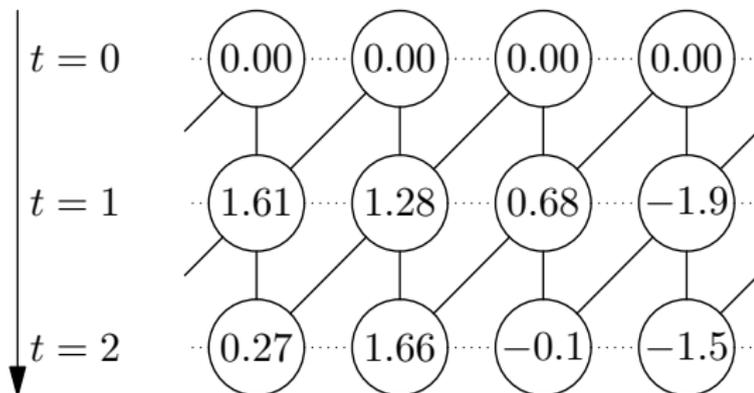
- Pas nécessairement une probabilité invariante.
- Certaines transitions ne sont pas utiles.  
Par exemple :  $K(1, 1; \cdot)$  ne sert jamais dans un ACP gaussien.



Changeons-le en  $\bar{K}(1, 1; 1) = 1$

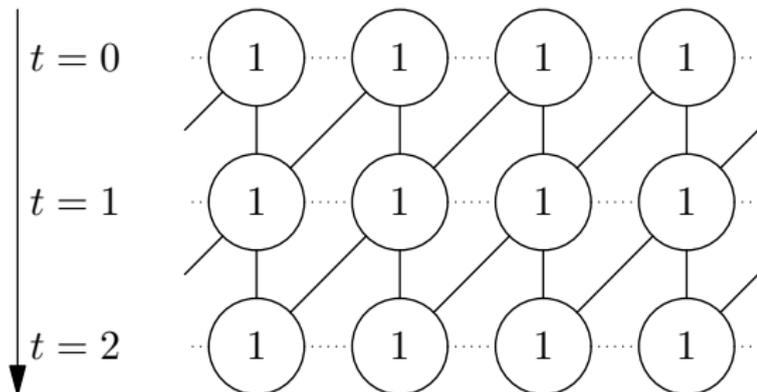
# Différences par rapport aux cas alphabet fini : problème lié aux ensemble négligeables

- Pas nécessairement une probabilité invariante.
- Certaines transitions ne sont pas utiles.  
Par exemple :  $K(1, 1; \cdot)$  ne sert jamais dans un ACP gaussien.  
Changeons-le en  $\bar{K}(1, 1; 1) = 1$



# Différences par rapport aux cas alphabet fini : problème lié aux ensemble négligeables

- Pas nécessairement une probabilité invariante.
- Certaines transitions ne sont pas utiles.  
Par exemple :  $K(1, 1; \cdot)$  ne sert jamais dans un ACP gaussien.  
Changeons-le en  $\bar{K}(1, 1; 1) = 1$   
Sauf sous certaines lois initiales (le retour des “pièges”).



# La solution : une mesure de référence

- Choisir une mesure  $\mu$ , dite de référence, pour étudier l'ACP.

## Définition ( $\mu$ -positivité)

Un ACP est  $\mu$ -positif si, pour  $\mu$ -presque tout  $a, b \in E$ ,  $\forall C \in \mathcal{B}(E)$ ,  
 $K(a, b; C) > 0 \Leftrightarrow \mu(C) > 0$ .

## Définition ( $\mu$ -densité)

Dans ce cas, pour  $\mu$ -presque tout  $a, b \in E$ ,  
$$K(a, b; C) = \int_C k(a, b; c) d\mu(c).$$

- Travailler sur les  $\mu$ -densités.

## Exemples :

- Pour ACP à taux strictement positif sur  $E_\kappa$ , la mesure de référence est la mesure de comptage sur  $E_\kappa$ .
- 
- 
-

## Exemples :

- Pour ACP à taux strictement positif sur  $E_{\kappa}$ , la mesure de référence est la mesure de comptage sur  $E_{\kappa}$ .
- Pour  $c = \begin{cases} 0 & \text{a.p. } 1/6 \\ \max(a, b) + 1 & \text{a.p. } 5/6 \end{cases}$  : mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$
- 
-

## Exemples :

- Pour ACP à taux strictement positif sur  $E_{\kappa}$ , la mesure de référence est la mesure de comptage sur  $E_{\kappa}$ .
- Pour  $c = \begin{cases} 0 & \text{a.p. } 1/6 \\ \max(a, b) + 1 & \text{a.p. } 5/6 \end{cases}$  : mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$
- ACP gaussien : la mesure de Lebesgue.
-

## Exemples :

- Pour ACP à taux strictement positif sur  $E_\kappa$ , la mesure de référence est la mesure de comptage sur  $E_\kappa$ .
- Pour  $c = \begin{cases} 0 & \text{a.p. } 1/6 \\ \max(a, b) + 1 & \text{a.p. } 5/6 \end{cases}$  : mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$
- ACP gaussien : la mesure de Lebesgue.
- ACP gaussien modifié avec  $\bar{K}(1, 1; 1) = 1$  : 2 mesures de références possibles :
  - la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ ,
  - la mesure de Dirac en 1.

## Le résultat sur les ACP à alphabet infini

## Théorème (C. (2014))

$\mu$ , une mesure  $\sigma$ -finie sur  $E$ .  $A = (\mathbb{Z}, E, K)$   $\mu$ -positif. Alors  $A$  admet une chaîne de Markov invariante sur  $HZ$  ssi

- (i) il existe  $(a_0, b_0, c_0) \in E^3$  tel que  $k(a_0, b_0; \cdot)$  et  $\mu$  sont positivement équivalente et pour  $\mu^3$ -presque tout  $(a, b, c)$ ,

$$\begin{aligned} & k(a_0, b_0; c_0)k(a, b; c_0)k(a, b_0; c)k(a_0, b; c) \\ &= k(a, b; c)k(a_0, b_0; c)k(a_0, b; c_0)k(a, b_0; c_0), \end{aligned}$$

- (ii) il existe  $\eta > 0 \in L^1(\mu)$ , solution de : pour  $\mu^2$ -presque tout  $(a, b)$ ,

$$\int_E d^\eta(a; c)u^\eta(c; b)d\mu(c) = \int_E u^\eta(a; c)d^\eta(c; b)d\mu(c).$$

- (iii) la chaîne de Markov de noyau  $D^\eta$  admet une probabilité invariante.

Les  $\mu$ -densités de  $D^\eta$  et  $U^\eta$ 

$$d^\eta(a; c) = \frac{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} t(a, x; c) d\mu(x)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a, x; c_0)} d\mu(x)} \text{ et}$$

$$u^\eta(c; b) = \frac{\frac{\eta(b)}{t(a_0, b; c_0)} t(a_0, b; c)}{\int_E \frac{\eta(x)}{t(a_0, x; c_0)} t(a_0, x; c) d\mu(x)}.$$

Merci