

# Nombres de Genocchi et tableaux alternatifs

Matthieu Josuat-Vergès

Université Paris-sud 11

Journées de Combinatoire de Bordeaux  
29 Janvier 2010

## Introduction

Les nombres de Genocchi sont :  $G_2 = 1$ ,  $G_4 = 1$ ,  $G_6 = 3$ ,  $G_8 = 17$ ,  
 ... et  $\sum_{n=1}^{\infty} G_{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ .

Considérons la récurrence  $F_1 = 1$ , et :

$$F_n(x, y, z) = (x + y)(x + z)F_{n-1}(x + 1, y, z) - xF_{n-1}(x, y, z).$$

### Proposition (Dumont, Foata)

$F_n(x, y, z)$  est symétrique en  $x, y$ , et  $z$ , à coefficients positifs, et  
 $F_n(1, 1, 1) = G_{2n+2}$ .

- Polynômes de Gandhi  $F_n(x, 1, 1)$  :
  - [Carlitz 1972] [Riordan et Stein 1973].
  
- Interprétations combinatoires de  $F_n$  :
  - Applications excédantes surjectives [Dumont et Foata 1976]
  - Triangles colorés surjectifs [Viennot 1981]
  - Applications excédantes surjectives [Han 1993]
  
- Formule explicite pour  $F_n(x, y, z)$  :
  - [Carlitz 1980] [Han 1993] [Zeng 1995]
  
- J-fraction pour  $\sum t^n F_n$  :
  - [Dumont, Randrianarivony, Zeng 1995] [Gessel et Zeng]

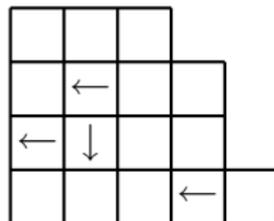
# Plan

- Tableaux alternatifs
  - Définition
  - Interprétation combinatoire de  $F_n$
- «Matrix Ansatz» pour les tableaux alternatifs
  - Cas général
  - Cas de  $F_n(x, y, z)$
- J-fraction pour  $\sum t^n F_n$ 
  - Chemins de Motzkin pondérés
  - Cas de  $F_n(x, y, z)$

Soit  $\lambda$  un diagramme de Young. Un *tableau alternatif* est un remplissage (partiel) de  $\lambda$  avec des flèches  $\leftarrow$  et  $\downarrow$  tel que :

- toute les cases sous un  $\downarrow$  (resp. à gauche d'un  $\leftarrow$ ) sont vides.

## Example

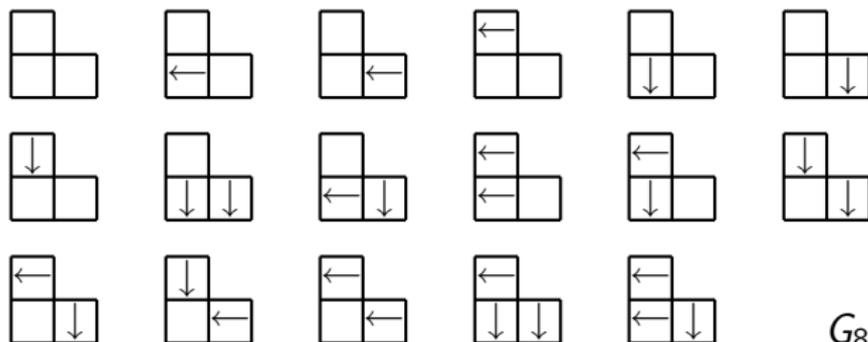


Tableaux de permutation [Steigrímsson, Corteel, Williams],  
tableaux alternatifs [Viennot, Nadeau], liens avec la combinatoire  
des permutations et le PASEP [Corteel-Williams, Viennot]

On peut montrer que  $G_{2n+4}$  est le nombre de tableau alternatif en escalier à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.

( $G_{2n}$  compte certaines permutations appelés permutations de Dumont, qui correspondent aux tableaux en escalier via des bijections dues à Steingrímsson et Williams, Corteel et Nadeau, Viennot).

## Example



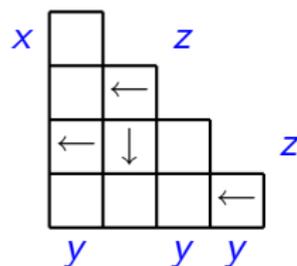
$$G_8 = 17$$

## Example

Soit les trois statistiques :

- $\alpha(T)$  = nombre de lignes sans  $\leftarrow$ ,
- $\beta(T)$  = nombre de colonnes sans  $\downarrow$ ,
- $\gamma(T)$  = nombre de coins avec  $\leftarrow$  ou  $\downarrow$ ,

et  $w(T) = x^{\alpha(T)} y^{\beta(T)} z^{\gamma(T)}$



$$w(T) = xy^3z^2$$

## Théorème

Soit  $\text{Esc}(n-1)$  l'ensemble des tableaux alternatifs en escalier à  $n-1$  lignes et  $n-1$  colonnes. Alors :

$$F_n(x, y, z) = \sum_{T \in \text{Esc}(n-1)} w(T)$$

## Proposition

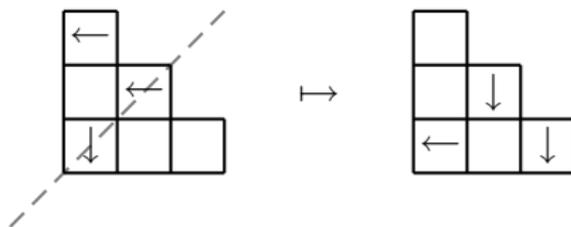
$F_n$  est symétrique en  $x, y$  et  $z$ .

## Démonstration.

$F_n$  est symétrique en  $y$  et  $z$  par la récurrence :

$$F_n(x, y, z) = (x + y)(x + z)F_{n-1}(x + 1, y, z) - x^2 F_{n-1}(x, y, z).$$

$F_n$  est symétrique en  $x$  et  $y$  par l'interprétation combinatoire (on peut *conjuguer* les tableaux alternatifs).



## Preuve du théorème

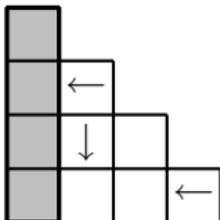
On suppose le résultat vrai pour  $F_{n-1}$ . On a alors :

### Lemme

$$\sum_{T \in \text{Esc}(n-1), \text{ sans } \downarrow \text{ dans la 1ère colonne}} w(T) = y(x+z)F_{n-1}(x+1, y, z)$$

### Démonstration.

On construit  $T \in \text{Esc}(n-1)$  à partir de  $T' \in \text{Esc}(n-2)$  en rajoutant une colonne.



La case supérieure peut être vide ou contenir  $\leftarrow$ , d'où un facteur  $(x+z)$ .

Pour chaque ligne de  $T'$  sans  $\leftarrow$ , on ajoute soit une case vide, soit une case contenant  $\leftarrow$ , d'où la substitution de  $x$  à  $x+1$ .

## Lemme

$$\sum_{T \in \text{Esc}(n-1)}$$
*sans*  $\downarrow$  *dans la 1ère colonne*  
*au moins un*  $\leftarrow$  *dans la 1ère colonne*

$$w(T) = y(x+z)F_{n-1}(x+1, y, z) - yxF_{n-1}(x, y, z)$$

## Lemme

$$\sum_{T \in \text{Esc}(n-1)}$$
*avec un*  $\downarrow$  *dans la 1ère colonne*

$$w(T) = x(x+z)F_{n-1}(x+1, y, z) - x^2F_{n-1}(x, y, z)$$

En additionnant les premier et troisième lemmes on obtient :

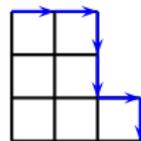
$$\begin{aligned} \sum_{T \in \text{Esc}(n-1)} w(T) &= (x+y)(x+z)F_{n-1}(x+1, y, z) \\ &\quad - x^2 F_{n-1}(x, y, z) \\ &= F_n(x, y, z) \end{aligned}$$

d'où le résultat par récurrence.

II.

Énumération des tableaux alternatifs par «Matrix Ansatz»

Soit  $\lambda$  un diagramme de Young. Il correspond à un mot  $m$  en  $D$  et  $E$ .  
( $\rightarrow$  devient  $D$ ,  $\downarrow$  devient  $E$ )



$$m = DDEEDE$$

### Proposition (Corteel-Williams)

Étant donné  $D, E, \langle W|$  et  $|V\rangle$  tels que :

$$DE - ED = D + E, \quad \langle W|E = x\langle W|, \quad D|V\rangle = y|V\rangle,$$

on a :

$$\langle W|m|V\rangle = \sum x^{\alpha(T)} y^{\beta(T)}$$

où on somme sur les tableaux alternatifs  $T$  de forme  $\lambda$ .

$$DE - ED = D + E, \quad \langle W|E = x\langle W|, \quad D|V\rangle = y|V\rangle,$$

Explication : en utilisant  $DE = ED + D + E$ , on peut mettre  $m$  sous la forme :

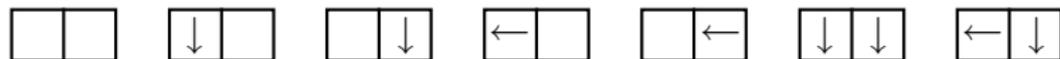
$$m = \sum_{i,j \geq 0} c_{i,j} E^i D^j$$

avec  $c_{i,j} \geq 0$ . Alors on a  $\langle W|m|V\rangle = \sum_{i,j \geq 0} c_{i,j} x^i y^j$ .

## Example

$$\begin{aligned} DDE &= DED + DE + DD = DED + ED + D + E + DD \\ &= EDD + 2ED + 2DD + E + D, \end{aligned}$$

$$\langle W|m|V\rangle = xy^2 + 2xy + 2y^2 + x + y.$$



## Démonstration.

On fait une récurrence sur  $|\lambda|$ .

Le cas initial est celui où le mot est  $m = E^i D^j$  (diagramme  $\lambda$  avec  $i$  lignes vides et  $j$  colonnes vides). Alors :

$$\langle W | E^i D^j | V \rangle = x^i y^j$$

car  $\langle W | E = x \langle W |$  et  $F | V \rangle = y | V \rangle$ .

$$\lambda = \begin{array}{|c|} \hline \phantom{\lambda} \\ \hline \end{array}$$

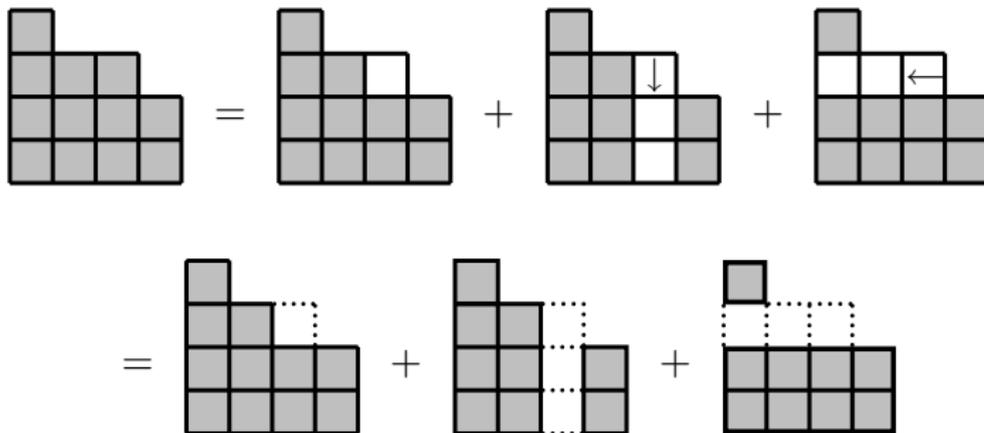


## Démonstration.

Récurrence sur les opérateurs :

$$DED(DE)DEE = DED(ED)DEE + DED(E)DEE + DED(D)DEE$$

Récurrence sur les tableaux :

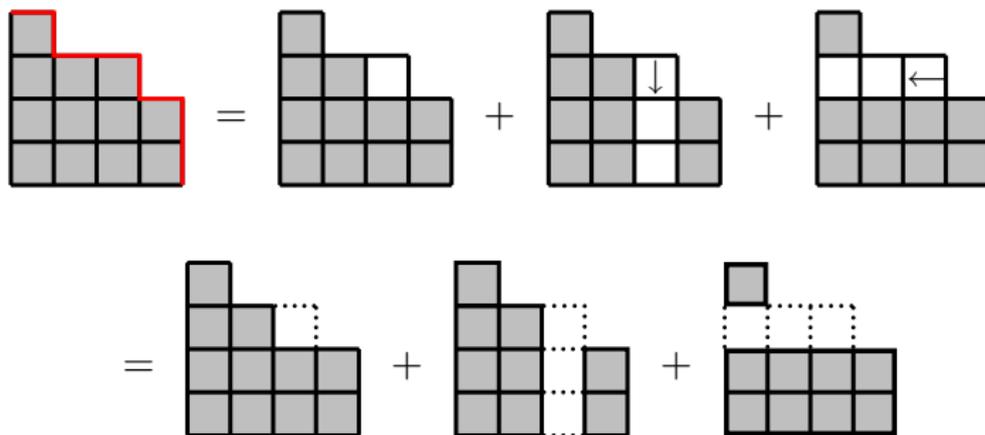


## Démonstration.

Récurrence sur les opérateurs :

$$DED(DE)DEE = DED(ED)DEE + DED(E)DEE + DED(D)DEE$$

Récurrence sur les tableaux :

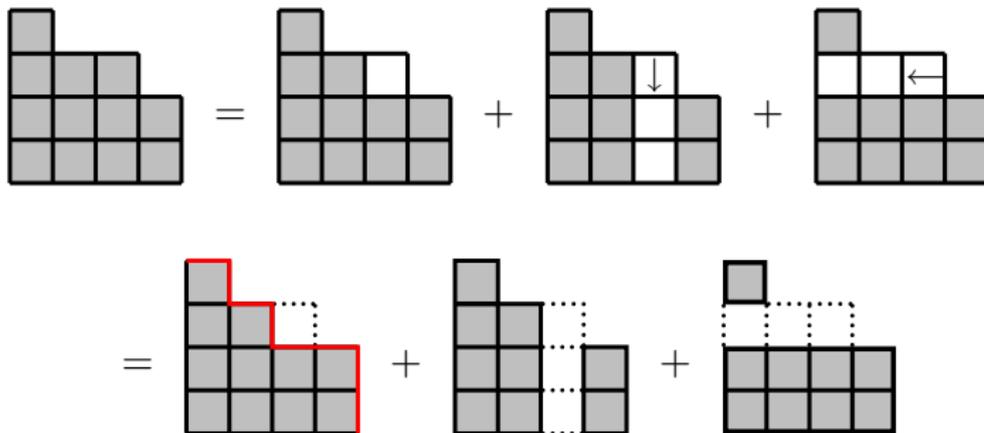


## Démonstration.

Récurrence sur les opérateurs :

$$DED(DE)DEE = \color{red}{DED(ED)DEE} + DED(E)DEE + DED(D)DEE$$

Récurrence sur les tableaux :

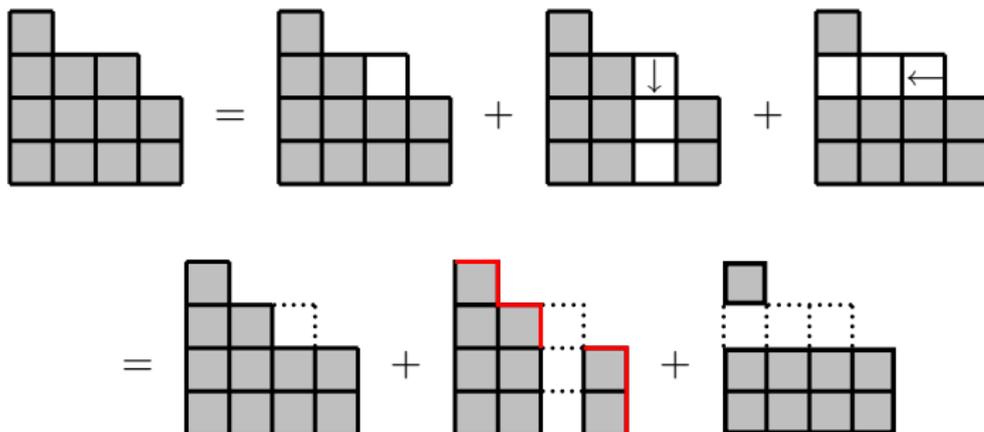


## Démonstration.

Récurrence sur les opérateurs :

$$DED(DE)DEE = DED(ED)DEE + \text{DED}(E)DEE + DED(D)DEE$$

Récurrence sur les tableaux :

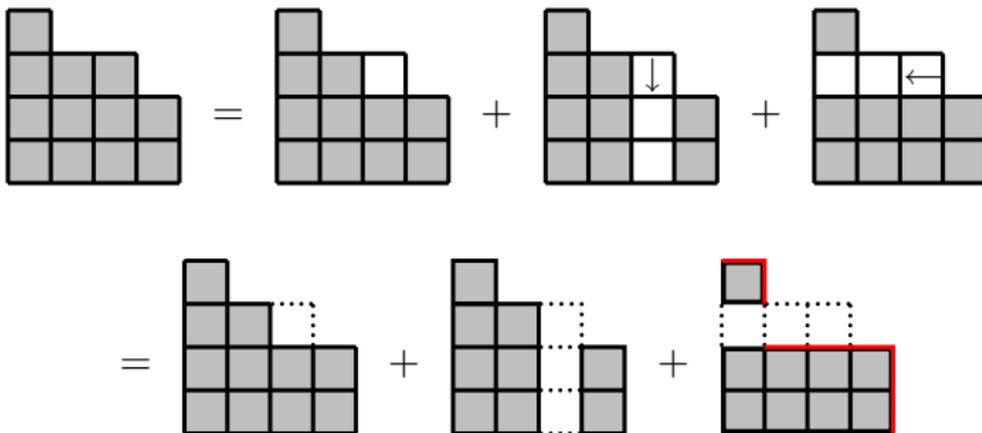


## Démonstration.

Récurrence sur les opérateurs :

$$DED(DE)DEE = DED(ED)DEE + DED(E)DEE + \text{DED}(D)DEE$$

Récurrence sur les tableaux :

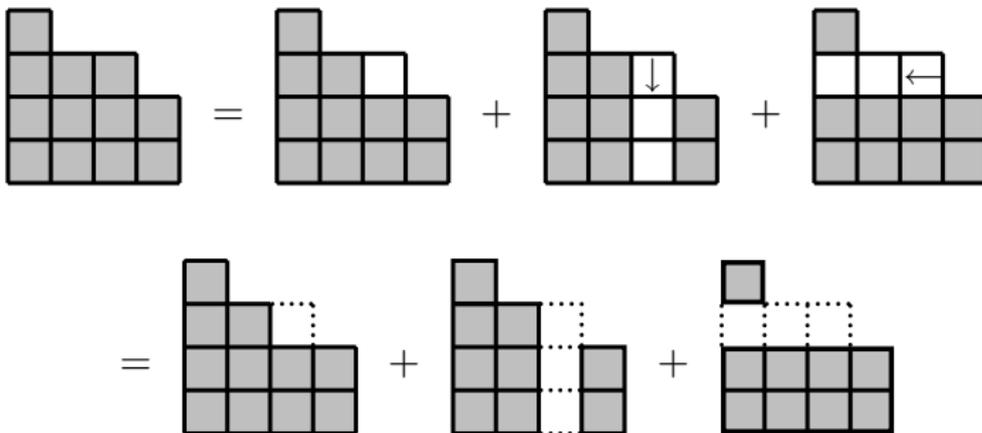


## Démonstration.

Récurrence sur les opérateurs :

$$DED(DE)DEE = DED(ED)DEE + DED(E)DEE + DED(D)DEE$$

Récurrence sur les tableaux :



Les relations de récurrence sont identiques.



Le diagramme en escalier correspond au mot  $(DE)^{n-1}$ , donc :

### Proposition

$$F_n(x, y, 1) = \sum_{T \in \text{Esc}(n-1)} w(T)|_{z=1} = \langle W|(DE)^{n-1}|V \rangle.$$

Pour compter les coins contenant  $\leftarrow$  ou  $\downarrow$ , on écrit  $DE = ED + D + E$  et on marque  $D$  et  $E$  avec  $z$  :

### Proposition

$$F_n(x, y, z) = \sum_{T \in \text{Esc}(n-1)} w(T) = \langle W|(ED + zD + zE)^{n-1}|V \rangle.$$

III.

J-fraction pour  $\sum t^n F_n$

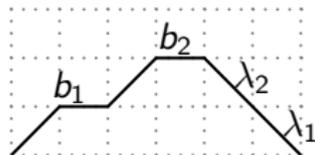
## Lemme (Flajolet)

$$[t^n] \frac{1}{1 - b_0 t - \frac{\lambda_1 t^2}{1 - b_1 t - \frac{\lambda_2 t^2}{\ddots}}} = \sum_{\substack{\text{chemin de Motzkin} \\ P \text{ de longueur } n}} w(P),$$

où le poids  $w(P)$  est le produit de :

- $b_i$  pour chaque pas  $\rightarrow$  à hauteur  $i$ ,
- $\lambda_i$  pour chaque pas  $\searrow$  partant à hauteur  $i$ .

### Exemple



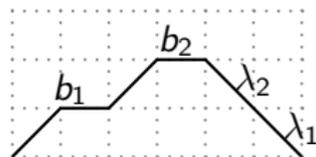
## Lemme (Flajolet)

$$[t^n] \frac{1}{1 - b_0 t - \frac{\lambda_1 t^2}{1 - b_1 t - \frac{\lambda_2 t^2}{\ddots}}} = \sum_{\substack{\text{chemin de Motzkin} \\ P \text{ de longueur } n}} w(P),$$

où le poids  $w(P)$  est le produit de :

- $b_i$  pour chaque pas  $\rightarrow$  à hauteur  $i$ ,
- $\lambda_i$  pour chaque pas  $\searrow$  partant à hauteur  $i$ .

## Example



(Le coefficient de  $t^n$  dans la fraction continue est aussi le  $n$ ème moment d'une suite de polynômes orthogonaux  $\{P_i(t)\}$  telle que  $tP_i = P_{i+1} + b_i P_i + \lambda_i P_{i-1}$ )

## Théorème (Dumont, Randrianarivony, Zeng)

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x, y, z) t^{n-1} = \frac{1}{1 - b_0 t - \frac{\lambda_1 t^2}{1 - b_1 t - \frac{\lambda_2 t^2}{\ddots}}}$$

avec

$$b_i = (x + i)(y + i) + (x + i)(z + i) + (y + i)(z + i) - i(i + 1),$$

$$\lambda_i = i(x + y + i - 1)(x + z + i - 1)(y + z + i - 1).$$

## Théorème (Dumont, Randrianarivony, Zeng)

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x, y, z) t^{n-1} = \frac{1}{1 - b_0 t - \frac{\lambda_1 t^2}{1 - b_1 t - \frac{\lambda_2 t^2}{\ddots}}}$$

avec

$$b_i = (x + i)(y + i) + (x + i)(z + i) + (y + i)(z + i) - i(i + 1),$$

$$\lambda_i = i(x + y + i - 1)(x + z + i - 1)(y + z + i - 1).$$

(conséquence :  $F_{n+1}$  est le  $n$ ème moment de la suite des polynômes de Hahn duaux continus [Gessel-Zeng])

## Lemme

Soit  $M = (m_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$  une matrice tridiagonale,  $|V\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ , et

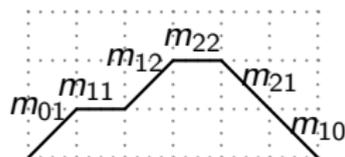
$\langle W| = (1, 0, \dots)$ . Alors

$$\langle W|M^n|V\rangle = \sum_{\substack{\text{chemin de Motzkin} \\ P \text{ de longueur } n}} w(P),$$

où le poids  $w(P)$  est le produit de :

- $m_{ii}$  pour chaque pas  $\rightarrow$  à hauteur  $i$ ,
- $m_{i,i+1}$  pour chaque pas  $\nearrow$  partant à hauteur  $i$ ,
- $m_{i,i-1}$  pour chaque pas  $\searrow$  partant à hauteur  $i$ .

## Exemple



## Démonstration.

$\langle W|C^n|V \rangle$  est le coefficient  $(C^n)_{0,0}$  de  $C^n$ . Nous avons donc :

$$\langle W|C^n|V \rangle = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1} \geq 0} c_{0i_1} c_{i_1 i_2} \cdots c_{i_{n-2} i_{n-1}} c_{i_{n-1} 0}.$$

$C$  étant tridiagonale, on peut supposer  $|i_j - i_{j+1}| \leq 1$ , de sorte que  $0, i_1, i_2, \dots$  définit un chemin de Motzkin avec poids

$$c_{0i_1} c_{i_1 i_2} \cdots c_{i_{n-2} i_{n-1}} c_{i_{n-1} 0}.$$



Comme  $F_n(x, y, z) = \langle W | (ED + zD + zE)^{n-1} | V \rangle$ , si  $M = ED + zD + zE$  est tridiagonale on peut déduire le développement en fraction continue, avec :

$$b_i = m_{i,i}, \quad \lambda_i = m_{i-1,i} m_{i,i-1}.$$

Problème : trouver  $D$  et  $E$  telles que

$$DE - ED = D + E, \quad \langle W | E = x \langle W |, \quad D | V \rangle = y | V \rangle,$$

et  $DE + zD + zE$  soit tridiagonale.

## Solution 1

cf. Derrida & al, [Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation]

$$D_1 = \begin{pmatrix} y & a_0 & & & (0) \\ & y+1 & a_1 & & \\ & & y+2 & a_2 & \\ & & & y+3 & \ddots \\ (0) & & & & \ddots \end{pmatrix}, E_1 = \begin{pmatrix} x & & & & (0) \\ a_0 & x+1 & & & \\ & a_1 & x+2 & & \\ & & a_2 & x+3 & \\ (0) & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

avec  $a_i = \sqrt{(i+1)(x+y+i)}$ , satisfont :

$$D_1 E_1 - E_1 D_1 = D_1 + E_1, \quad \langle W | E_1 = x \langle W |, \quad D_1 | V \rangle = y | V \rangle,$$

Avec  $M = E_1 D_1 + zE_1 + zD_1$ , on calcule explicitement :

$$\begin{aligned} m_{i,i} &= e_{i,i-1}d_{i-1,i} + e_{i,i}d_{i,i} + ze_{i,i} + zd_{i,i} \\ &= a_{i-1}^2 + (x+i)(y+i) + z(x+i) + z(y+i) \\ &= i(x+y+i-1) + (x+i)(y+i) + z(x+y+2i) \\ &= (x+i)(y+i) + (x+i)(z+i) + (y+i)(z+i) - i(i+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{i-1,i} &= e_{i-1,i-1}d_{i-1,i} + zd_{i-1,i} \\ &= (x+i-1)a_{i-1} + za_{i-1} = a_{i-1}(x+z+i-1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{i,i-1} &= e_{i,i-1}d_{i-1,i-1} + ze_{i,i-1} \\ &= a_{i-1}(y+i-1) + za_{i-1} = a_{i-1}(y+z+i-1), \end{aligned}$$

$$m_{i-1,i}m_{i,i-1} = i(x+y+i-1)(x+z+i-1)(y+z+i-1),$$

ainsi on a bien  $m_{i,i} = b_i$  et  $m_{i,i-1}m_{i-1,i} = \lambda_i$ , avec  $b_i$  et  $\lambda_i$  comme annoncés. D'où la J-fraction.

## Solution 2

Soit  $G, U : \mathbb{Z}[t] \rightarrow \mathbb{Z}[t]$

$$G : f \mapsto f', \quad U : f \mapsto t \cdot f.$$

Alors  $GU - UG = I$  car  $(t \cdot f)' = f + t \cdot f'$ .

Heuristique : à partir de  $G$  et  $U$ , on peut construire des opérateurs satisfaisant d'autres relation de commutation.

Exemple :  $G$  et  $GU$  satisfont  $G(GU) - (GU)G = G$ .

Remarque : On a toujours  $XY - YX = (X - Y)Y - Y(X - Y)$ .

De  $G(GU) - (GU)G = G$ , on déduit

$$(G - GU)(GU) - (GU)(G - GU) = G,$$

donc  $DE - ED = D + E$  avec  $D = G - GU$  et  $E = GU$ .

Il faut encore assurer que  $\langle W|E = x\langle W|$  et  $D|V\rangle = y|V\rangle$ .

Remarque : si  $XY - YX = X + Y$ , alors

$$(X + aI)(Y - aI) - (Y - aI)(X + aI) = (X + aI) + (Y - aI)$$

Finalement, avec un peu plus de travail on montre que

$$D_2 = (I + U)G + yI \quad \text{et} \quad E_2 = (I + U)(GU + (x + y - 1)I) - yI,$$

satisfont :

$$D_2 E_2 - E_2 D_2 = D_2 + E_2, \quad \langle W | E_2 = x \langle W |, \quad D_2 | V \rangle = y | V \rangle.$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} y & 1 & & & (0) \\ & y+1 & 2 & & \\ & & y+2 & 3 & \\ & & & y+3 & \ddots \\ (0) & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} x & & & & (0) \\ y+x & x+1 & & & \\ & y+x+1 & x+2 & & \\ & & y+x+2 & x+3 & \\ (0) & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Avec  $M = E_2 D_2 + z E_2 + z D_2$ , on calcule explicitement :

$$\begin{aligned} m_{i,i} &= e_{i,i-1} d_{i-1,i} + e_{i,i} d_{i,i} + z e_{i,i} + z d_{i,i} \\ &= (x + y + i - 1)i + (x + i)(y + i) + z(x + i) + z(y + i) \\ &= (x + i)(y + i) + (x + i)(z + i) + (y + i)(z + i) - i(i + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{i-1,i} &= e_{i-1,i-1} d_{i-1,i} + z d_{i-1,i} \\ &= (x + i - 1)i + zi = i(x + z + i - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{i,i-1} &= e_{i,i-1} d_{i-1,i-1} + z e_{i,i-1} \\ &= (x + y + i - 1)(y + i - 1) + z(x + y + i - 1) \\ &= (x + y + i - 1)(y + z + i - 1), \end{aligned}$$

$$m_{i-1,i} m_{i,i-1} = i(x + y + i - 1)(x + z + i - 1)(y + z + i - 1),$$

ainsi on a bien  $m_{i,i} = b_i$  et  $m_{i,i-1} m_{i-1,i} = \lambda_i$ , avec  $b_i$  et  $\lambda_i$  comme annoncés. D'où la J-fraction.

## Conclusion

Dumont a défini une généralisation  $\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , qui admet une récurrence :

$$\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x + \bar{z})(y + \bar{x})\Gamma_{n-1}(x + 1, y, z, \bar{x} + 1, \bar{y}, \bar{z}) \\ + (x(\bar{y} - y) - \bar{x}(\bar{z} - z) - x\bar{x})\Gamma_{n-1}(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),$$

et une fraction continue avec paramètres :

$$b_i = (x + i)(\bar{y} + i) + (y + i)(\bar{z} + i) + (z + i)(\bar{x} + i) - i(i + 1), \\ \lambda_i = i(\bar{x} + y + i - 1)(\bar{y} + z + i - 1)(\bar{z} + x + i - 1).$$

On peut aussi la voir dans les tableaux alternatifs : on distingue les lignes sans  $\leftarrow$  (resp. colonnes sans  $\downarrow$ ) selon qu'elles sont vides ou non vides, on distingue les coins contenant  $\leftarrow$  et ceux contenant  $\downarrow$ .

## Conclusion

- Plus généralement, la méthode du Matrix Ansatz permet de relier diverses classes de tableaux avec les J-fraction ou moments de polynômes orthogonaux :
  - placements de tour et polynômes de  $q$ -Hermite et  $q$ -Charlier,
  - tableaux 0-1 [Leroux] et polynômes  $q$ -Charlier,
  - tableaux alternatifs et polynômes de  $q$ -Laguerre et Al-Salam-Chihara
- Les suites de polynômes orthogonaux classiques donnent d'autres généralisations de  $F_n(x, y, z)$  dont on ne connaît pas encore bien les propriétés combinatoires :
  - moments de polynômes de Wilson,
  - moments de polynômes  $q$ -Hahn duaux continus...