Une équation différentielle de Riccati et des nombres de sous-groupes libres pour $PSL_2(\mathbb{Z})$ modulo des puissances de premier

Christian Krattenthaler et Thomas W. Müller

Universität Wien; Queen Mary, University of London

$\longrightarrow$ Combinatoire énumerative modulaire

Compter des sous-groupes

Compter des sous-groupes

Nous nous occuperons du denombrement des sous-groupes libres dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.
Soit f_n le nombre des sous-groupes libres d'indice $6n$ dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Compter des sous-groupes

Nous nous occuperons du denombrement des sous-groupes libres dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.
Soit f_n le nombre des sous-groupes libres d'indice $6n$ dans $PSL_2(\mathbb{Z})$. Les f_n's satisfont à la récurrence

$$f_n = 6nf_{n-1} + \sum_{m=1}^{n-2} f_m f_{n-m-1}, \quad f_1 = 5.$$

```
f[n_] := f[n] = 6 n f[n - 1] +
    Sum[f[m] f[n - m - 1], {m, 1, n - 2}]; f[1] = 5;

Table[f[n], {n, 1, 20}]

{5, 60, 1105, 27 120, 828 250, 30 220 800, 1 282 031 525,
 61 999 046 400, 3 366 961 243 750, 202 903 221 120 000,
 13 437 880 555 850 250, 970 217 083 619 328 000,
 75 849 500 508 999 712 500, 6 383 483 988 812 390 400 000,
 575 440 151 532 675 686 278 125,
 55 318 762 960 656 722 780 160 000,
 5 649 301 494 178 851 172 304 968 750,
 610 768 380 520 654 474 629 120 000 000,
 69 692 599 846 542 054 607 811 528 918 750,
 8 370 071 726 919 812 448 859 648 819 200 000}
```

Compter des sous-groupes

Nous nous occuperons du denombrement des sous-groupes libres dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.
Soit f_n le nombre des sous-groupes libres d'indice $6n$ dans $PSL_2(\mathbb{Z})$. Les f_n's satisfont à la récurrence

$$f_n = 6nf_{n-1} + \sum_{m=1}^{n-2} f_m f_{n-m-1}, \quad f_1 = 5.$$

Compter des sous-groupes

Nous nous occuperons du denombrement des sous-groupes libres dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.
Soit f_n le nombre des sous-groupes libres d'indice $6n$ dans $PSL_2(\mathbb{Z})$. Les f_n's satisfont à la récurrence

$$f_n = 6nf_{n-1} + \sum_{m=1}^{n-2} f_m f_{n-m-1}, \quad f_1 = 5.$$

La récurrence équivaut à l'équation differentielle

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0$$

pour la série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$.

Compter des sous-groupes

La série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ satisfait à

$$(1 - 4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0.$$

Compter des sous-groupes

La série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ satisfait à

$$(1 - 4z)F(z) - 6z^2 F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0.$$

Nous analyserons la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ modulo des puissances de premier p^α.

```
f[n_] := f[n] = 6 n f[n - 1] +
    Sum[f[m] f[n - m - 1], {m, 1, n - 2}]; f[1] = 5;

Table[f[n], {n, 1, 20}]

{5, 60, 1105, 27 120, 828 250, 30 220 800, 1 282 031 525,
 61 999 046 400, 3 366 961 243 750, 202 903 221 120 000,
 13 437 880 555 850 250, 970 217 083 619 328 000,
 75 849 500 508 999 712 500, 6 383 483 988 812 390 400 000,
 575 440 151 532 675 686 278 125,
 55 318 762 960 656 722 780 160 000,
 5 649 301 494 178 851 172 304 968 750,
 610 768 380 520 654 474 629 120 000 000,
 69 692 599 846 542 054 607 811 528 918 750,
 8 370 071 726 919 812 448 859 648 819 200 000}
```

Compter des sous-groupes

La série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$ satisfies

$$(1 - 4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0.$$

Nous analyserons la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ modulo des puissances de premier p^α.
Pour les premiers $p = 2$ et $p = 3$ il y a une méthode basée sur un calcul de fonctions génératrices qui est capable de résoudre le problème modulo une puissance quelconque de 2 respectivement de 3.

f_n modulo 2 et 3

Théorème

Le nombre f_n est impair si et seulement si n a la forme $n = 2^k - 1$ pour un entier strictement positif k.

Théorème

On a :

1. $f_n \equiv -1 \pmod 3$ *si et seulement si le développement 3-adique de n est un élément de* $\{0,2\}^*1$;
2. $f_n \equiv 1 \pmod 3$ *si et seulement si le développement 3-adique de n est un élément de*

$$\{0,2\}^*100^* \cup \{0,2\}^*122^*;$$

3. *pour tous les autres n, on a* $f_n \equiv 0 \pmod 3$.

f_n modulo des puissances de 5

```
f[n_] := f[n] = 6 n f[n - 1] +
    Sum[f[m] f[n - m - 1], {m, 1, n - 2}]; f[1] = 5;

Table[f[n], {n, 1, 20}]

{5, 60, 1105, 27 120, 828 250, 30 220 800, 1 282 031 525,
 61 999 046 400, 3 366 961 243 750, 202 903 221 120 000,
 13 437 880 555 850 250, 970 217 083 619 328 000,
 75 849 500 508 999 712 500, 6 383 483 988 812 390 400 000,
 575 440 151 532 675 686 278 125,
 55 318 762 960 656 722 780 160 000,
 5 649 301 494 178 851 172 304 968 750,
 610 768 380 520 654 474 629 120 000 000,
 69 692 599 846 542 054 607 811 528 918 750,
 8 370 071 726 919 812 448 859 648 819 200 000}
```

f_n modulo des puissances de 5

Il est facile de se convaincre que, pour α fixé, on a $f_n \equiv 0 \pmod{5^\alpha}$ pour n suffisamment large.

f_n modulo des puissances de 7

```
f[n_] := f[n] =
  6 n f[n - 1] + Sum[f[m] f[n - m - 1],
    {m, 1, n - 2}]; f[1] = 5;
Table[Mod[f[n], 7], {n, 1, 40}]
{5, 4, 6, 2, 3, 1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5, 4,
 6, 2, 3, 1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5, 4, 6,
 2, 3, 1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5, 4, 6, 2}
(1 + 5 z + 4 z^2 + 6 z^3 + 2 z^4 + 3 z^5) /
 (1 - z^6)
```

$$\frac{1 + 5\,z + 4\,z^2 + 6\,z^3 + 2\,z^4 + 3\,z^5}{1 - z^6}$$

```
Factor[%, Modulus → 7]
```

$$\frac{1}{2\,(4 + z)}$$

```
f[n_] := f[n] = 6 n f[n - 1] +
    Sum[f[m] f[n - m - 1], {m, 1, n - 2}]; f[1] = 5;

Table[Mod[f[n], 49], {n, 1, 100}]

{5, 11, 27, 23, 3, 1, 33, 11, 20, 23, 24, 8, 19, 39, 13,
 37, 45, 15, 5, 18, 6, 2, 17, 22, 40, 46, 48, 16, 38,
 29, 26, 25, 41, 30, 10, 36, 12, 4, 34, 44, 31, 43, 47,
 32, 27, 9, 3, 1, 33, 11, 20, 23, 24, 8, 19, 39, 13, 37,
 45, 15, 5, 18, 6, 2, 17, 22, 40, 46, 48, 16, 38, 29,
 26, 25, 41, 30, 10, 36, 12, 4, 34, 44, 31, 43, 47, 32,
 27, 9, 3, 1, 33, 11, 20, 23, 24, 8, 19, 39, 13, 37}

1 + 5 z + 11 z^2 + 27 z^3 + 23 z^4 + z^4
   (3 z + z^2 + 33 z^3 + 11 z^4 + 20 z^5 + 23 z^6 + 24 z^7 + 8 z^8 + 19 z^9 +
      39 z^10 + 13 z^11 + 37 z^12 + 45 z^13 + 15 z^14 + 5 z^15 + 18 z^16 +
      6 z^17 + 2 z^18 + 17 z^19 + 22 z^20 + 40 z^21 + 46 z^22 + 48 z^23 +
      16 z^24 + 38 z^25 + 29 z^26 + 26 z^27 + 25 z^28 + 41 z^29 + 30 z^30 +
      10 z^31 + 36 z^32 + 12 z^33 + 4 z^34 + 34 z^35 + 44 z^36 + 31 z^37 +
```

$$39\,z^{10} + 13\,z^{11} + 37\,z^{12} + 45\,z^{13} + 15\,z^{14} + 5\,z^{15} + 18\,z^{16} +$$
$$6\,z^{17} + 2\,z^{18} + 17\,z^{19} + 22\,z^{20} + 40\,z^{21} + 46\,z^{22} + 48\,z^{23} +$$
$$16\,z^{24} + 38\,z^{25} + 29\,z^{26} + 26\,z^{27} + 25\,z^{28} + 41\,z^{29} + 30\,z^{30} +$$
$$10\,z^{31} + 36\,z^{32} + 12\,z^{33} + 4\,z^{34} + 34\,z^{35} + 44\,z^{36} + 31\,z^{37} +$$
$$43\,z^{38} + 47\,z^{39} + 32\,z^{40} + 27\,z^{41} + 9\,z^{42}) \,/\, (1 - z\,\hat{}\,42)$$

$$1 + 5\,z + 11\,z^2 + 27\,z^3 + 23\,z^4 +$$
$$\frac{1}{1 - z^{42}}\, z^4 \,(3\,z + z^2 + 33\,z^3 + 11\,z^4 + 20\,z^5 + 23\,z^6 + 24\,z^7 + 8\,z^8 +$$
$$19\,z^9 + 39\,z^{10} + 13\,z^{11} + 37\,z^{12} + 45\,z^{13} + 15\,z^{14} + 5\,z^{15} +$$
$$18\,z^{16} + 6\,z^{17} + 2\,z^{18} + 17\,z^{19} + 22\,z^{20} + 40\,z^{21} + 46\,z^{22} +$$
$$48\,z^{23} + 16\,z^{24} + 38\,z^{25} + 29\,z^{26} + 26\,z^{27} + 25\,z^{28} +$$
$$41\,z^{29} + 30\,z^{30} + 10\,z^{31} + 36\,z^{32} + 12\,z^{33} + 4\,z^{34} + 34\,z^{35} +$$
$$44\,z^{36} + 31\,z^{37} + 43\,z^{38} + 47\,z^{39} + 32\,z^{40} + 27\,z^{41} + 9\,z^{42})$$

$$(1 + 9\,z + 35\,z^2 + 42\,z^3 + 28\,z^4 + 7\,z^5 + 7\,z^6) \,/\, (1 + 2\,z)^2$$

f_n modulo des puissances de 7

Conjecture

Soit α un entier strictement positif. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$, considerée modulo 7^α, est périodique à partir d'un certain rang, avec période $6 \cdot 7^{\alpha-1}$.

De plus, la série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n z^n$, lorsque les coefficients sont réduits modulo 7^α, est égale à

$$\frac{P_\alpha(z)}{(1+2z)^\alpha},$$

où $P_\alpha(z)$ est un polynôme en z à coefficients entiers.

f_n modulo des puissances de 11

```
f[n_] := f[n] = 6 n f[n - 1] +
    Sum[f[m] f[n - m - 1], {m, 1, n - 2}]; f[1] = 5;
Table[Mod[f[n], 11], {n, 1, 40}]
{5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5,
 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5}
Table[Mod[f[n], 11^2], {n, 1, 40}]
{5, 60, 16, 16, 5, 82, 104, 27, 49, 82, 115, 27, 60, 93,
 5, 38, 71, 104, 16, 49, 82, 115, 27, 60, 93, 5, 38,
 71, 104, 16, 49, 82, 115, 27, 60, 93, 5, 38, 71, 104}
```

$$7 + 99\,z + 44\,z^3 + 11\,z^4 + 88\,z^5 + 11\,z^6 + 11\,z^8 + \frac{99}{(-1+12\,z)^2} + \frac{105}{-1+12\,z}$$

f_n modulo des puissances de 11

Conjecture

Soit α un entier strictement positif. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$, considerée modulo 11^α, est périodique à partir d'un certain rang, avec période $11^{\alpha-1}$.

De plus, la série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n z^n$, lorsque les coefficients sont réduits modulo 11^α, est égale à

$$\frac{P_\alpha(z)}{(1-z)^\alpha},$$

où $P_\alpha(z)$ est un polynôme en z à coefficients entiers.

f_n modulo des puissances de 13

```
f[n_] := f[n] = 6 n f[n - 1] +
    Sum[f[m] f[n - m - 1], {m, 1, n - 2}]; f[1] = 5;
Table[Mod[f[n], 13], {n, 1, 50}]
{5, 8, 0, 2, 7, 12, 8, 5, 0, 11, 6, 1, 5, 8, 0, 2, 7,
 12, 8, 5, 0, 11, 6, 1, 5, 8, 0, 2, 7, 12, 8, 5, 0,
 11, 6, 1, 5, 8, 0, 2, 7, 12, 8, 5, 0, 11, 6, 1, 5, 8}
```

$$\text{Factor}\left[1 + \frac{1}{1 - z^{12}}\left(5z + 8z^2 + 2z^4 + 7z^5 + 12z^6 + 8z^7 + 5z^8 + 11z^{10} + 6z^{11} + z^{12}\right), \text{Modulus} \to 13\right]$$

$$\frac{7(5 + z)}{(6 + z)(8 + z)}$$

f_n modulo des puissances de 13

Conjecture

Soit α un entier strictement positif. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$, considérée modulo 13^α, est périodique à partir d'un certain rang, avec période $12 \cdot 13^{\alpha-1}$.

De plus, la série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n z^n$, lorsque les coefficients sont réduits modulo 13^α, est égale à

$$\frac{P_\alpha(z)}{\big((1-2z)(1+5z)\big)^\alpha},$$

où $P_\alpha(z)$ est un polynôme en z à coefficients entiers.

f_n modulo des puissances de 17

```
f[n_] := f[n] = 6 n f[n - 1] +
    Sum[f[m] f[n - m - 1], {m, 1, n - 2}]; f[1] = 5;

Table[Mod[f[n], 17], {n, 1, 200}]

{5, 9, 0, 5, 10, 2, 2, 7, 0, 2, 4, 11, 11, 13, 0, 11,
 5, 1, 1, 12, 0, 1, 2, 14, 14, 15, 0, 14, 11, 9, 9,
 6, 0, 9, 1, 7, 7, 16, 0, 7, 14, 13, 13, 3, 0, 13, 9,
 12, 12, 8, 0, 12, 7, 15, 15, 10, 0, 15, 13, 6, 6, 4,
 0, 6, 12, 16, 16, 5, 0, 16, 15, 3, 3, 2, 0, 3, 6, 8,
 8, 11, 0, 8, 16, 10, 10, 1, 0, 10, 3, 4, 4, 14, 0,
 4, 8, 5, 5, 9, 0, 5, 10, 2, 2, 7, 0, 2, 4, 11, 11,
 13, 0, 11, 5, 1, 1, 12, 0, 1, 2, 14, 14, 15, 0, 14,
 11, 9, 9, 6, 0, 9, 1, 7, 7, 16, 0, 7, 14, 13, 13, 3,
 0, 13, 9, 12, 12, 8, 0, 12, 7, 15, 15, 10, 0, 15,
 13, 6, 6, 4, 0, 6, 12, 16, 16, 5, 0, 16, 15, 3, 3,
 2, 0, 3, 6, 8, 8, 11, 0, 8, 16, 10, 10, 1, 0, 10,
 3, 4, 4, 14, 0, 4, 8, 5, 5, 9, 0, 5, 10, 2, 2, 7}
```

f_n modulo des puissances de 17

En utilisant des séries génératrices, c'est équivalent à

$$F(z) = 13 + \frac{5 + 12z}{1 + 15z + 7z^2} \quad \text{modulo } 17.$$

f_n modulo des puissances de 17

En utilisant des séries génératrices, c'est équivalent à

$$F(z) = 13 + \frac{5 + 12z}{1 + 15z + 7z^2} \quad \text{modulo } 17.$$

Plus généralement, il semble que :

Conjecture

Soit α un entier strictement positif. la série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} f_n z^n$, lorsque les coefficients sont réduits modulo 17^α, est égale à

$$\frac{P_\alpha(z)}{(1 + 15z + 7z^2)^\alpha},$$

où $P_\alpha(z)$ est un polynôme en z à coefficients entiers.

Comment démontrer ces conjectures?

Comment démontrer ces conjectures?

Conjecture

La série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} f_n z^n$ *satisfait à*

$$F(z) = \frac{P_\alpha(z)}{(1+2z)^\alpha} \quad \text{modulo } 7^\alpha,$$

où $P_\alpha(z)$ *est un polynôme en* z *à coefficients entiers.*

Comment démontrer ces conjectures?

Conjecture

La série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} f_n z^n$ *satisfait à*

$$F(z) = \frac{P_\alpha(z)}{(1+2z)^\alpha} \quad \text{modulo } 7^\alpha,$$

où $P_\alpha(z)$ *est un polynôme en* z *à coefficients entiers.*

Peut-être il faut faire l'Ansatz $F(z) = P_\alpha(z)/(1+2z)^\alpha$, substituer dans l'équation differentielle

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0,$$

et alors il devient clair que $P_\alpha(z)$ doit être un polynôme, et de quel polynôme il s'agit.

Comment démontrer ces conjectures?

Conjecture

La série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} f_n z^n$ *satisfait à*

$$F(z) = \frac{P_\alpha(z)}{(1+2z)^\alpha} \quad \text{modulo } 7^\alpha,$$

où $P_\alpha(z)$ *est un polynôme en* z *à coefficients entiers.*

Peut-être il faut faire l'Ansatz $F(z) = P_\alpha(z)/(1+2z)^\alpha$, substituer dans l'équation differentielle

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0,$$

et alors il devient clair que $P_\alpha(z)$ doit être un polynôme, et de quel polynôme il s'agit.

Comment démontrer ces conjectures?

Conjecture

La série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} f_n z^n$ *satisfait à*

$$F(z) = \frac{P_\alpha(z)}{(1+2z)^\alpha} \quad \text{modulo } 7^\alpha,$$

où $P_\alpha(z)$ *est un polynôme en* z *à coefficients entiers.*

Si cela ne marche pas . . . ,

Comment démontrer ces conjectures?

Conjecture

La série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} f_n z^n$ *satisfait à*

$$F(z) = \frac{P_\alpha(z)}{(1+2z)^\alpha} \quad \text{modulo } 7^\alpha,$$

où $P_\alpha(z)$ *est un polynôme en* z *à coefficients entiers.*

Si cela ne marche pas . . . , alors peut-être nous essayons une approche récursive : supposons que $F_\alpha(z) = P_\alpha(z)/(1+2z)^\alpha$ est solution de

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0,$$

modulo 7^α. Ensuite nous faisons l'Ansatz $F_{\alpha+1}(z) = F_\alpha(z) + 7^\alpha G_{\alpha+1}(z)$, nous substituons dans l'équation differentielle, et nous résolvons par rapport à $G_{\alpha+1}(z)$.

Comment démontrer ces conjectures?

Conjecture

La série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n z^n$ *satisfait à*

$$F(z) = \frac{P_\alpha(z)}{(1+2z)^\alpha} \quad \text{modulo } 7^\alpha,$$

où $P_\alpha(z)$ *est un polynôme en* z *à coefficients entiers.*

Si cela ne marche pas . . . , alors peut-être nous essayons une approche récursive : supposons que $F_\alpha(z) = P_\alpha(z)/(1+2z)^\alpha$ est solution de

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0,$$

modulo 7^α. Ensuite nous faisons l'Ansatz $F_{\alpha+1}(z) = F_\alpha(z) + 7^\alpha G_{\alpha+1}(z)$, nous substituons dans l'équation differentielle, et nous résolvons par rapport à $G_{\alpha+1}(z)$.
Cela mène relativement loin : de cette façon on peut démontrer que $F(z) = \bar{P}_\alpha(z)/(1+2z)^{e_\alpha}$ modulo 7^α, pour quelqu'entier e_α.

Comment démontrer ces conjectures?

Comment démontrer ces conjectures?

Nouvelle approche : Approximants de Padé !!

Comment démontrer ces conjectures?

Nouvelle approche : Approximants de Padé !!
Apparemment, la série génératrice $F(z)$ est toujours rationnelle si elle est réduite modulo $7, 11, 13, 17, \ldots$
À l'autre coté, sur $\mathbb{Z}$, la solution de

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0$$

n'est certainement pas rationnelle. Or, on peut approximer $F(z)$ par une fonction rationnelle, disons

$$F(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} + O(z^{2n+1}),$$

où $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont des polynômes de degré au plus n.

Comment démontrer ces conjectures?

Alors :

Comment démontrer ces conjectures?

Alors :

Substituer $F(z) = P_n(z)/Q_n(z) + O(z^{2n+1})$ dans

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0,$$

ce qui, après simplifications, devient

$$(1-4z)P_n(z)Q_n(z) - 6z^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - zP_n^2(z) - Q_n^2(z) = O(z^{2n+1}),$$

Comment démontrer ces conjectures?

Alors :

Substituer $F(z) = P_n(z)/Q_n(z) + O(z^{2n+1})$ dans

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0,$$

ce qui, après simplifications, devient

$$(1-4z)P_n(z)Q_n(z) - 6z^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - zP_n^2(z) - Q_n^2(z) = \text{const}(n) \times z^{2n+1},$$

Comment démontrer ces conjectures?

Alors :
Substituer $F(z) = P_n(z)/Q_n(z) + O(z^{2n+1})$ dans

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0,$$

ce qui, après simplifications, devient

$$(1-4z)P_n(z)Q_n(z) - 6z^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - zP_n^2(z) - Q_n^2(z) = \text{const}(n) \times z^{2n+1},$$

et calculer les polynômes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Par la suite, fixer ses yeux sur ces polynômes et essayer de deviner une formule pour const(n), $P_n(z)$, $Q_n(z)$.

```
SolPQ[n_] := Module[{Erg},
  P = (Sum[p[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Q = (Sum[q[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Erg = Expand[(1 - 4 z) P Q -
     6 z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) - z P^2 - Q^2];
  Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
  Erg =
   Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
     Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7z}{1-12z}, -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

```
SolPQ[n_] := Module[{Erg},
  P = (Sum[p[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Q = (Sum[q[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Erg = Expand[(1 - 4 z) P Q -
     6 z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) - z P^2 - Q^2];
  Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
  Erg =
   Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
     Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
```

```
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7z}{1-12z}, -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

$$\left\{\frac{1-31z+91z^2}{}, 85\,085\right\}$$

```
  P = (Sum[p[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Q = (Sum[q[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Erg = Expand[(1 - 4 z) P Q -
      6 z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) - z P^2 - Q^2];
  Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
  Erg =
   Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
     Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7z}{1-12z}, -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

$$\left\{\frac{1-31z+91z^2}{1-36z+211z^2}, -85\,085\right\}$$

```
  Q = (Sum[q[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Erg = Expand[(1 - 4 z) P Q -
      6 z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) - z P^2 - Q^2];
  Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
  Erg =
   Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
     Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7z}{1-12z}, -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

$$\left\{\frac{1-31z+91z^2}{1-36z+211z^2}, -85\,085\right\}$$

```
SolPQ[3]
```

```
  Erg = Expand[(1 - 4 z) P Q -
      6 z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) - z P^2 - Q^2];
  Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
  Erg =
   Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
      Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7z}{1-12z}, -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

$$\left\{\frac{1-31z+91z^2}{1-36z+211z^2}, -85\,085\right\}$$

```
SolPQ[3]
```

```
    6 z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) - z P^2 - Q^2];
  Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
  Erg =
   Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
     Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7z}{1-12z}, -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

$$\left\{\frac{1-31z+91z^2}{1-36z+211z^2}, -85\,085\right\}$$

```
SolPQ[3]
```

$$\left\{\frac{1-67z+986z^2-1729z^3}{\quad}, -37\,182\,145\right\}$$

```
  Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
  Erg =
   Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
     Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7z}{1-12z}, -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

$$\left\{\frac{1-31z+91z^2}{1-36z+211z^2}, -85\,085\right\}$$

```
SolPQ[3]
```

$$\left\{\frac{1-67z+986z^2-1729z^3}{1-72z+1286z^2-4944z^3}, -37\,182\,145\right\}$$

```
  Erg =
   Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
     Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
```

```
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7z}{1-12z}, -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

$$\left\{\frac{1-31z+91z^2}{1-36z+211z^2}, -85\,085\right\}$$

```
SolPQ[3]
```

$$\left\{\frac{1-67z+986z^2-1729z^3}{1-72z+1286z^2-4944z^3}, -37\,182\,145\right\}$$

```
FactorInteger[37 182 145]
```

```
  Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
 Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
    Table[q[i], {i, 1, n}]]];
 {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
]
```

```
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7z}{1-12z}, -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

$$\left\{\frac{1-31z+91z^2}{1-36z+211z^2}, -85\,085\right\}$$

```
SolPQ[3]
```

$$\left\{\frac{1-67z+986z^2-1729z^3}{1-72z+1286z^2-4944z^3}, -37\,182\,145\right\}$$

```
FactorInteger[37 182 145]
```

$$\{\{5, 1\}, \{7, 1\}, \{11, 1\}$$

```
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
      Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
```

```
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7\,z}{1-12\,z},\ -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

$$\left\{\frac{1-31\,z+91\,z^2}{1-36\,z+211\,z^2},\ -85\,085\right\}$$

```
SolPQ[3]
```

$$\left\{\frac{1-67\,z+986\,z^2-1729\,z^3}{1-72\,z+1286\,z^2-4944\,z^3},\ -37\,182\,145\right\}$$

```
FactorInteger[37 182 145]
{{5, 1}, {7, 1}, {11, 1},
 {13, 1}, {17, 1}, {19, 1}, {23, 1}}
```

```
      Table[q[i], {i, 1, n}]]];
   {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
  ]
```

```
SolPQ[1]
```

$$\left\{\frac{1-7\,z}{1-12\,z},\ -385\right\}$$

```
SolPQ[2]
```

$$\left\{\frac{1-31\,z+91\,z^2}{1-36\,z+211\,z^2},\ -85\,085\right\}$$

```
SolPQ[3]
```

$$\left\{\frac{1-67\,z+986\,z^2-1729\,z^3}{1-72\,z+1286\,z^2-4944\,z^3},\ -37\,182\,145\right\}$$

```
FactorInteger[37 182 145]
{{5, 1}, {7, 1}, {11, 1},
 {13, 1}, {17, 1}, {19, 1}, {23, 1}}
```

Alors, apparemment, il existe des polynômes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ de degré n tels que

$$(1-4z)P_n(z)Q_n(z) - 6z^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - zP_n^2(z) - Q_n^2(z) = -5z^{2n+1}\prod_{\ell=1}^{n}(6\ell+1)(6\ell+5),$$

ou, d'une manière équivalente, $R_n(z) = P_n(z)/Q_n(z)$ satisfait à

$$(1-4z)R_n(z) - 6z^2R_n'(z) - zR_n^2(z) - 1 \\ = -\frac{5z^{2n+1}}{Q_n^2(z)}\prod_{\ell=1}^{n}(6\ell+1)(6\ell+5).$$

Arretons-nous pour un instant à ce point !

Arretons-nous pour un instant à ce point !

Apparemment, il existe des polynômes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ de degré n tels que $R_n(z) = P_n(z)/Q_n(z)$ satisfasse à

$$(1-4z)R_n(z) - 6z^2 R_n'(z) - zR_n^2(z) - 1 = -\frac{5z^{2n+1}}{Q_n^2(z)} \prod_{\ell=1}^{n} (6\ell+1)(6\ell+5).$$

Arretons-nous pour un instant à ce point !

Apparemment, il existe des polynômes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ de degré n tels que $R_n(z) = P_n(z)/Q_n(z)$ satisfasse à

$$(1-4z)R_n(z) - 6z^2 R_n'(z) - zR_n^2(z) - 1 = -\frac{5z^{2n+1}}{Q_n^2(z)} \prod_{\ell=1}^{n} (6\ell+1)(6\ell+5).$$

Cela démontrerais immédiatement que, modulo une puissance de premier quelconque p^α avec $p \geq 5$, notre fonction génératrice $F(z)$ est rationnelle. En particulier, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ serait périodique à partir d'un certain rang, si elle est considérée modulo une puissance de premier p^α avec $p \geq 5$!

C'est-à-dire, nous savons ce qu'il faut faire :

C'est-à-dire, nous savons ce qu'il faut faire :

Après avoir deviné const(n), nous devons maintenant deviner des formules pour des polynômes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ de degré n telles que

$$(1-4z)P_n(z)Q_n(z) - 6z^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - zP_n^2(z) - Q_n^2(z) = -5z^{2n+1}\prod_{\ell=1}^{n}(6\ell+1)(6\ell+5).$$

C'est-à-dire, nous savons ce qu'il faut faire :

Après avoir deviné const(n), nous devons maintenant deviner des formules pour des polynômes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ de degré n telles que

$$(1-4z)P_n(z)Q_n(z) - 6z^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - zP_n^2(z) - Q_n^2(z) = -5z^{2n+1}\prod_{\ell=1}^{n}(6\ell+1)(6\ell+5).$$

Alors : *„Knapp daneben ist auch vorbei!“*

C'est-à-dire, nous savons ce qu'il faut faire :

Après avoir deviné const(n), nous devons maintenant deviner des formules pour des polynômes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ de degré n telles que

$$(1-4z)P_n(z)Q_n(z) - 6z^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - zP_n^2(z) - Q_n^2(z) = -5z^{2n+1}\prod_{\ell=1}^{n}(6\ell+1)(6\ell+5).$$

Alors : *„Knapp daneben ist auch vorbei!“*
(*“Loupé de peu mais loupé quand même !”*)

Généraliser !

Généraliser !

On avait :

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0.$$

Généraliser !

On avait :

$$(1-4z)F(z)-6z^2F'(z)-zF^2(z)-1=0.$$

Considérons

$$(1-Az)F(z)-Bz^2F'(z)-CzF^2(z)-1-Dz=0.$$

Généraliser !

On avait :

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0.$$

Considérons

$$(1-Az)F(z) - Bz^2F'(z) - CzF^2(z) - 1 - Dz = 0.$$

Pour l'approximant de Padé $F(z) = P_n(z)/Q_n(z) + O(z^{2n+1})$, on a alors

$$\begin{aligned}(1-Az)P_n(z)Q_n(z) - Bz^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - CzP_n^2(z) - (1+Dz)Q_n^2(z) = \text{const}(n) \times z^{2n+1}.\end{aligned}$$

```
SolABCD[n_] := SolABCD[n] = Module[{Erg},
   P = (Sum[p[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
   Q = (Sum[q[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
   Erg = Expand[(1 - A z) P Q -
      B z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) -
      CC z P^2 - Q^2 - DD z Q^2];
   Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
   Erg =
    Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
   Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
      Table[q[i], {i, 1, n}]]];
   {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
  ]
SolABCD[1]
```

$$\left\{\frac{1 + (-B - CC + DD)\, z}{1 + (-A - B - 2\,CC)\, z},\right.$$

```
SolABCD[n_] := SolABCD[n] = Module[{Erg},
   P = (Sum[p[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
   Q = (Sum[q[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
   Erg = Expand[(1 - A z) P Q -
      B z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) -
      CC z P^2 - Q^2 - DD z Q^2];
   Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
   Erg =
    Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
   Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
      Table[q[i], {i, 1, n}]]];
   {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
  ]
SolABCD[1]
```

$$\left\{\frac{1+(-B-CC+DD)\,z}{1+(-A-B-2\,CC)\,z},\right.$$

$$\left.-(A+CC+DD)\left(A\,B+B^2+A\,CC+2\,B\,CC+CC^2+CC\,DD\right)\right\}$$

```
SolABCD[n_] := Module[{Erg},
  P = (Sum[p[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Q = (Sum[q[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Erg = Expand[(1 - A z) P Q -
      B z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) -
      CC z P^2 - Q^2 - DD z Q^2];
  Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
  Erg =
   Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
      Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
```

```
SolABCD[1]
```

$$\left\{\frac{1+(-B-CC+DD)\,z}{1+(-A-B-2\,CC)\,z},\ -(A+CC+DD)\left(A\,B+B^2+A\,CC+2\,B\,CC+CC^2+CC\,DD\right)\right\}$$

```
  P = (Sum[p[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Q = (Sum[q[i] z^i, {i, 1, n}] + 1);
  Erg = Expand[(1 - A z) P Q -
      B z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) -
      CC z P^2 - Q^2 - DD z Q^2];
  Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
  Erg =
   Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
  Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
      Table[q[i], {i, 1, n}]]];
  {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
 ]
SolABCD[1]
```

$$\left\{\frac{1+(-B-CC+DD)\,z}{1+(-A-B-2\,CC)\,z},\ -(A+CC+DD)\left(A\,B+B^2+A\,CC+2\,B\,CC+CC^2+CC\,DD\right)\right\}$$

```
    Erg = Expand[(1 - A z) P Q -
        B z^2 (D[P, z] Q - P D[Q, z]) -
        CC z P^2 - Q^2 - DD z Q^2];
    Var = Coefficient[Erg, z, 2 n + 1];
    Erg =
     Table[Coefficient[Erg, z, ii] == 0, {ii, 0, 2 n}];
    Erg = Solve[Erg, Join[Table[p[i], {i, 1, n}],
        Table[q[i], {i, 1, n}]]];
    {(P / Q) /. Erg[[1]], Factor[Var /. Erg[[1]]]}
  ]
SolABCD[1]
```

$$\left\{\frac{1+(-B-CC+DD)\,z}{1+(-A-B-2\,CC)\,z},\ -(A+CC+DD)\left(A\,B+B^2+A\,CC+2\,B\,CC+CC^2+CC\,DD\right)\right\}$$

```
SolABCD[2]
{(1 + (-A - 4 B - 3 CC + DD) z +
      (2 B^2 + 3 B CC + CC^2 - A DD - 3 B DD - 3 CC DD) z^2) /
   (1 - 2 (A + 2 B + 2 CC) z +
      (A^2 + 3 A B + 2 B^2 + 3 A CC + 6 B CC + 3 CC^2 - CC DD) z^2),
  -(A + CC + DD) (A B + B^2 + A CC + 2 B CC + CC^2 + CC DD)
   (2 A B + 4 B^2 + A CC + 4 B CC + CC^2 + CC DD)}
SolABCD[3]
{(1 + (-2 A - 9 B - 5 CC + DD) z + (A^2 + 7 A B + 18 B^2 + 4 A CC +
         22 B CC + 6 CC^2 - 2 A DD - 8 B DD - 6 CC DD) z^2 +
      (-6 B^3 - 11 B^2 CC - 6 B CC^2 - CC^3 + A^2 DD + 6 A B DD + 11 B^2
         DD + 4 A CC DD + 18 B CC DD + 6 CC^2 DD - CC DD^2) z^3) /
   (1 - 3 (A + 3 B + 2 CC) z + (3 A^2 + 15 A B + 18 B^2 +
```

```
SolABCD[2]
{(1 + (-A - 4 B - 3 CC + DD) z +
      (2 B^2 + 3 B CC + CC^2 - A DD - 3 B DD - 3 CC DD) z^2) /
   (1 - 2 (A + 2 B + 2 CC) z +
      (A^2 + 3 A B + 2 B^2 + 3 A CC + 6 B CC + 3 CC^2 - CC DD) z^2),
  -(A + CC + DD) (A B + B^2 + A CC + 2 B CC + CC^2 + CC DD)
   (2 A B + 4 B^2 + A CC + 4 B CC + CC^2 + CC DD)}
SolABCD[3]
{(1 + (-2 A - 9 B - 5 CC + DD) z + (A^2 + 7 A B + 18 B^2 + 4 A CC +
         22 B CC + 6 CC^2 - 2 A DD - 8 B DD - 6 CC DD) z^2 +
      (-6 B^3 - 11 B^2 CC - 6 B CC^2 - CC^3 + A^2 DD + 6 A B DD + 11 B^2
         DD + 4 A CC DD + 18 B CC DD + 6 CC^2 DD - CC DD^2) z^3) /
   (1 - 3 (A + 3 B + 2 CC) z + (3 A^2 + 15 A B + 18 B^2 +
         10 A CC + 30 B CC + 10 CC^2 - 2 CC DD) z^2 +
```

```
SolABCD[2]
{(1 + (-A - 4 B - 3 CC + DD) z +
      (2 B^2 + 3 B CC + CC^2 - A DD - 3 B DD - 3 CC DD) z^2) /
   (1 - 2 (A + 2 B + 2 CC) z +
      (A^2 + 3 A B + 2 B^2 + 3 A CC + 6 B CC + 3 CC^2 - CC DD) z^2),
  -(A + CC + DD) (A B + B^2 + A CC + 2 B CC + CC^2 + CC DD)
   (2 A B + 4 B^2 + A CC + 4 B CC + CC^2 + CC DD)}

SolABCD[3]
{(1 + (-2 A - 9 B - 5 CC + DD) z + (A^2 + 7 A B + 18 B^2 + 4 A CC +
        22 B CC + 6 CC^2 - 2 A DD - 8 B DD - 6 CC DD) z^2 +
      (-6 B^3 - 11 B^2 CC - 6 B CC^2 - CC^3 + A^2 DD + 6 A B DD + 11 B^2
        DD + 4 A CC DD + 18 B CC DD + 6 CC^2 DD - CC DD^2) z^3) /
   (1 - 3 (A + 3 B + 2 CC) z + (3 A^2 + 15 A B + 18 B^2 +
        10 A CC + 30 B CC + 10 CC^2 - 2 CC DD) z^2 +
      (-A^3 - 6 A^2 B - 11 A B^2 - 6 B^3 - 4 A^2 CC - 18 A B CC -
```

$$\Big\{\Big(1+(-A-4B-3CC+DD)\,z+\Big(2B^2+3B\,CC+CC^2-A\,DD-3B\,DD-3CC\,DD\Big)\,z^2\Big)\Big/\Big(1-2\,(A+2B+2CC)\,z+\Big(A^2+3AB+2B^2+3A\,CC+6B\,CC+3CC^2-CC\,DD\Big)\,z^2\Big),$$

$$-(A+CC+DD)\,\Big(AB+B^2+A\,CC+2B\,CC+CC^2+CC\,DD\Big)\Big(2AB+4B^2+A\,CC+4B\,CC+CC^2+CC\,DD\Big)\Big\}$$

```
SolABCD[3]
```

$$\Big\{\Big(1+(-2A-9B-5CC+DD)\,z+\Big(A^2+7AB+18B^2+4A\,CC+22B\,CC+6CC^2-2A\,DD-8B\,DD-6CC\,DD\Big)\,z^2+\Big(-6B^3-11B^2\,CC-6B\,CC^2-CC^3+A^2\,DD+6AB\,DD+11B^2\,DD+4A\,CC\,DD+18B\,CC\,DD+6CC^2\,DD-CC\,DD^2\Big)\,z^3\Big)\Big/\Big(1-3\,(A+3B+2CC)\,z+\Big(3A^2+15AB+18B^2+10A\,CC+30B\,CC+10CC^2-2CC\,DD\Big)\,z^2+\Big(-A^3-6A^2B-11AB^2-6B^3-4A^2\,CC-18AB\,CC-$$

$$\left(2\,B^2 + 3\,B\,CC + CC^2 - A\,DD - 3\,B\,DD - 3\,CC\,DD\right)\,z^2\Big) \Big/$$
$$\left(1 - 2\,(A + 2\,B + 2\,CC)\,z + \right.$$
$$\left.\left(A^2 + 3\,A\,B + 2\,B^2 + 3\,A\,CC + 6\,B\,CC + 3\,CC^2 - CC\,DD\right)\,z^2\right),$$
$$-(A + CC + DD)\,\left(A\,B + B^2 + A\,CC + 2\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)$$
$$\left(2\,A\,B + 4\,B^2 + A\,CC + 4\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)\}$$

```
SolABCD[3]
```

$$\{\left(1 + (-2\,A - 9\,B - 5\,CC + DD)\,z + \left(A^2 + 7\,A\,B + 18\,B^2 + 4\,A\,CC + \right.\right.$$
$$\left.22\,B\,CC + 6\,CC^2 - 2\,A\,DD - 8\,B\,DD - 6\,CC\,DD\right)\,z^2 +$$
$$\left(-6\,B^3 - 11\,B^2\,CC - 6\,B\,CC^2 - CC^3 + A^2\,DD + 6\,A\,B\,DD + 11\,B^2\right.$$
$$\left.\left.DD + 4\,A\,CC\,DD + 18\,B\,CC\,DD + 6\,CC^2\,DD - CC\,DD^2\right)\,z^3\right) \Big/$$
$$\left(1 - 3\,(A + 3\,B + 2\,CC)\,z + \left(3\,A^2 + 15\,A\,B + 18\,B^2 + \right.\right.$$
$$\left.10\,A\,CC + 30\,B\,CC + 10\,CC^2 - 2\,CC\,DD\right)\,z^2 +$$
$$\left(-A^3 - 6\,A^2\,B - 11\,A\,B^2 - 6\,B^3 - 4\,A^2\,CC - 18\,A\,B\,CC - \right.$$
$$\left.22\,B^2\,CC - 6\,A\,CC^2 - 18\,B\,CC^2 - 4\,CC^3 + \right.$$

$$\left(1 - 2\,(A + 2\,B + 2\,CC)\,z + \left(A^2 + 3\,A\,B + 2\,B^2 + 3\,A\,CC + 6\,B\,CC + 3\,CC^2 - CC\,DD\right)\,z^2\right),$$
$$-(A + CC + DD)\,\left(A\,B + B^2 + A\,CC + 2\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)$$
$$\left(2\,A\,B + 4\,B^2 + A\,CC + 4\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)\}$$

```
SolABCD[3]
```

$$\{\left(1 + (-2\,A - 9\,B - 5\,CC + DD)\,z + \left(A^2 + 7\,A\,B + 18\,B^2 + 4\,A\,CC + 22\,B\,CC + 6\,CC^2 - 2\,A\,DD - 8\,B\,DD - 6\,CC\,DD\right)\,z^2 + \left(-6\,B^3 - 11\,B^2\,CC - 6\,B\,CC^2 - CC^3 + A^2\,DD + 6\,A\,B\,DD + 11\,B^2\,DD + 4\,A\,CC\,DD + 18\,B\,CC\,DD + 6\,CC^2\,DD - CC\,DD^2\right)\,z^3\right) /$$
$$\left(1 - 3\,(A + 3\,B + 2\,CC)\,z + \left(3\,A^2 + 15\,A\,B + 18\,B^2 + 10\,A\,CC + 30\,B\,CC + 10\,CC^2 - 2\,CC\,DD\right)\,z^2 + \left(-A^3 - 6\,A^2\,B - 11\,A\,B^2 - 6\,B^3 - 4\,A^2\,CC - 18\,A\,B\,CC - 22\,B^2\,CC - 6\,A\,CC^2 - 18\,B\,CC^2 - 4\,CC^3 + 2\,A\,CC\,DD + 6\,B\,CC\,DD + 4\,CC^2\,DD\right)\,z^3\right),$$

$$\left(A^2 + 3\,A\,B + 2\,B^2 + 3\,A\,CC + 6\,B\,CC + 3\,CC^2 - CC\,DD\right)\,z^2\Big),$$
$$-(A + CC + DD)\,\left(A\,B + B^2 + A\,CC + 2\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)$$
$$\left(2\,A\,B + 4\,B^2 + A\,CC + 4\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)\Big\}$$

```
SolABCD[3]
```

$$\Big\{\Big(1 + (-2\,A - 9\,B - 5\,CC + DD)\,z + \left(A^2 + 7\,A\,B + 18\,B^2 + 4\,A\,CC +$$
$$22\,B\,CC + 6\,CC^2 - 2\,A\,DD - 8\,B\,DD - 6\,CC\,DD\right)\,z^2 +$$
$$\left(-6\,B^3 - 11\,B^2\,CC - 6\,B\,CC^2 - CC^3 + A^2\,DD + 6\,A\,B\,DD + 11\,B^2\right.$$
$$\left.DD + 4\,A\,CC\,DD + 18\,B\,CC\,DD + 6\,CC^2\,DD - CC\,DD^2\right)\,z^3\Big)\,/$$
$$\Big(1 - 3\,(A + 3\,B + 2\,CC)\,z + \left(3\,A^2 + 15\,A\,B + 18\,B^2 +\right.$$
$$\left.10\,A\,CC + 30\,B\,CC + 10\,CC^2 - 2\,CC\,DD\right)\,z^2 +$$
$$\left(-A^3 - 6\,A^2\,B - 11\,A\,B^2 - 6\,B^3 - 4\,A^2\,CC - 18\,A\,B\,CC -\right.$$
$$22\,B^2\,CC - 6\,A\,CC^2 - 18\,B\,CC^2 - 4\,CC^3 +$$
$$\left.2\,A\,CC\,DD + 6\,B\,CC\,DD + 4\,CC^2\,DD\right)\,z^3\Big),$$
$$-(A + CC + DD)\,\left(A\,B + B^2 + A\,CC + 2\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)$$

$$\left(A^2 + 3\,A\,B + 2\,B^2 + 3\,A\,CC + 6\,B\,CC + 3\,CC^2 - CC\,DD\right) z^2\Big),$$

$$-(A + CC + DD)\left(A\,B + B^2 + A\,CC + 2\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)$$

$$\left(2\,A\,B + 4\,B^2 + A\,CC + 4\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)\Big\}$$

```
SolABCD[3]
```

$$\Big\{\Big(1 + (-2\,A - 9\,B - 5\,CC + DD)\,z + \left(A^2 + 7\,A\,B + 18\,B^2 + 4\,A\,CC + 22\,B\,CC + 6\,CC^2 - 2\,A\,DD - 8\,B\,DD - 6\,CC\,DD\right) z^2 + \left(-6\,B^3 - 11\,B^2\,CC - 6\,B\,CC^2 - CC^3 + A^2\,DD + 6\,A\,B\,DD + 11\,B^2\,DD + 4\,A\,CC\,DD + 18\,B\,CC\,DD + 6\,CC^2\,DD - CC\,DD^2\right) z^3\Big) \Big/$$

$$\Big(1 - 3\,(A + 3\,B + 2\,CC)\,z + \left(3\,A^2 + 15\,A\,B + 18\,B^2 + 10\,A\,CC + 30\,B\,CC + 10\,CC^2 - 2\,CC\,DD\right) z^2 + \left(-A^3 - 6\,A^2\,B - 11\,A\,B^2 - 6\,B^3 - 4\,A^2\,CC - 18\,A\,B\,CC - 22\,B^2\,CC - 6\,A\,CC^2 - 18\,B\,CC^2 - 4\,CC^3 + 2\,A\,CC\,DD + 6\,B\,CC\,DD + 4\,CC^2\,DD\right) z^3\Big),$$

$$-(A + CC + DD)\left(A\,B + B^2 + A\,CC + 2\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)$$

$$\left(2\,A\,B + 4\,B^2 + A\,CC + 4\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)$$

$$-(A+CC+DD)\left(A\,B+B^2+A\,CC+2\,B\,CC+CC^2+CC\,DD\right)$$
$$\left(2\,A\,B+4\,B^2+A\,CC+4\,B\,CC+CC^2+CC\,DD\right)\Big\}$$

```
SolABCD[3]
```

$$\Big\{\Big(1+(-2\,A-9\,B-5\,CC+DD)\,z+\Big(A^2+7\,A\,B+18\,B^2+4\,A\,CC+$$
$$22\,B\,CC+6\,CC^2-2\,A\,DD-8\,B\,DD-6\,CC\,DD\Big)\,z^2+$$
$$\Big(-6\,B^3-11\,B^2\,CC-6\,B\,CC^2-CC^3+A^2\,DD+6\,A\,B\,DD+11\,B^2$$
$$DD+4\,A\,CC\,DD+18\,B\,CC\,DD+6\,CC^2\,DD-CC\,DD^2\Big)\,z^3\Big)\Big/$$
$$\Big(1-3\,(A+3\,B+2\,CC)\,z+\Big(3\,A^2+15\,A\,B+18\,B^2+$$
$$10\,A\,CC+30\,B\,CC+10\,CC^2-2\,CC\,DD\Big)\,z^2+$$
$$\Big(-A^3-6\,A^2\,B-11\,A\,B^2-6\,B^3-4\,A^2\,CC-18\,A\,B\,CC-$$
$$22\,B^2\,CC-6\,A\,CC^2-18\,B\,CC^2-4\,CC^3+$$
$$2\,A\,CC\,DD+6\,B\,CC\,DD+4\,CC^2\,DD\Big)\,z^3\Big),$$
$$-(A+CC+DD)\left(A\,B+B^2+A\,CC+2\,B\,CC+CC^2+CC\,DD\right)$$
$$\left(2\,A\,B+4\,B^2+A\,CC+4\,B\,CC+CC^2+CC\,DD\right)$$

$$\left(2\,A\,B + 4\,B^2 + A\,CC + 4\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\right)\Big\}$$

```
SolABCD[3]
```

$$\Big\{\Big(1 + (-2\,A - 9\,B - 5\,CC + DD)\,z + \Big(A^2 + 7\,A\,B + 18\,B^2 + 4\,A\,CC + 22\,B\,CC + 6\,CC^2 - 2\,A\,DD - 8\,B\,DD - 6\,CC\,DD\Big)\,z^2 + \Big(-6\,B^3 - 11\,B^2\,CC - 6\,B\,CC^2 - CC^3 + A^2\,DD + 6\,A\,B\,DD + 11\,B^2\,DD + 4\,A\,CC\,DD + 18\,B\,CC\,DD + 6\,CC^2\,DD - CC\,DD^2\Big)\,z^3\Big) \Big/ \Big(1 - 3\,(A + 3\,B + 2\,CC)\,z + \Big(3\,A^2 + 15\,A\,B + 18\,B^2 + 10\,A\,CC + 30\,B\,CC + 10\,CC^2 - 2\,CC\,DD\Big)\,z^2 + \Big(-A^3 - 6\,A^2\,B - 11\,A\,B^2 - 6\,B^3 - 4\,A^2\,CC - 18\,A\,B\,CC - 22\,B^2\,CC - 6\,A\,CC^2 - 18\,B\,CC^2 - 4\,CC^3 + 2\,A\,CC\,DD + 6\,B\,CC\,DD + 4\,CC^2\,DD\Big)\,z^3\Big),$$

$$-(A + CC + DD)\,\Big(A\,B + B^2 + A\,CC + 2\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\Big)\Big(2\,A\,B + 4\,B^2 + A\,CC + 4\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\Big)\Big(3\,A\,B + 9\,B^2 + A\,CC + 6\,B\,CC + CC^2 + CC\,DD\Big)\Big\}$$

```
SolABCD[3]
```

$$\Big\{\Big(1+(-2A-9B-5CC+DD)\,z+\Big(A^2+7AB+18B^2+4A\,CC+22B\,CC+6CC^2-2A\,DD-8B\,DD-6CC\,DD\Big)\,z^2+\Big(-6B^3-11B^2\,CC-6B\,CC^2-CC^3+A^2\,DD+6A\,B\,DD+11B^2\,DD+4A\,CC\,DD+18B\,CC\,DD+6CC^2\,DD-CC\,DD^2\Big)\,z^3\Big)\Big/\Big(1-3\,(A+3B+2CC)\,z+\Big(3A^2+15AB+18B^2+10A\,CC+30B\,CC+10CC^2-2CC\,DD\Big)\,z^2+\Big(-A^3-6A^2B-11AB^2-6B^3-4A^2\,CC-18A\,B\,CC-22B^2\,CC-6A\,CC^2-18B\,CC^2-4CC^3+2A\,CC\,DD+6B\,CC\,DD+4CC^2\,DD\Big)\,z^3\Big),$$

$$-(A+CC+DD)\,\Big(AB+B^2+A\,CC+2B\,CC+CC^2+CC\,DD\Big)\Big(2AB+4B^2+A\,CC+4B\,CC+CC^2+CC\,DD\Big)\Big(3AB+9B^2+A\,CC+6B\,CC+CC^2+CC\,DD\Big)\Big\}$$

Alors, apparemment,

Alors, apparemment, pour tous les entiers strictement positifs n, il existe des polynômes $P_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} z^k$ et $Q_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} q_{n,k} z^k$, tels que

$$\begin{aligned}(1 - Az)P_n(z)Q_n(z) - Bz^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - CzP_n^2(z) - (1 + Dz)Q_n^2(z) \\ = -z^{2n+1}(A + C + D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB + AC + CD + \ell^2 B^2 + 2\ell BC + C^2).\end{aligned}$$

Soit $P_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} z^k$ et $Q_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} q_{n,k} z^k$.

Soit $P_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} z^k$ et $Q_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} q_{n,k} z^k$.

En fixant ses yeux sur les premiers polynômes, on est mené à la conjecture :

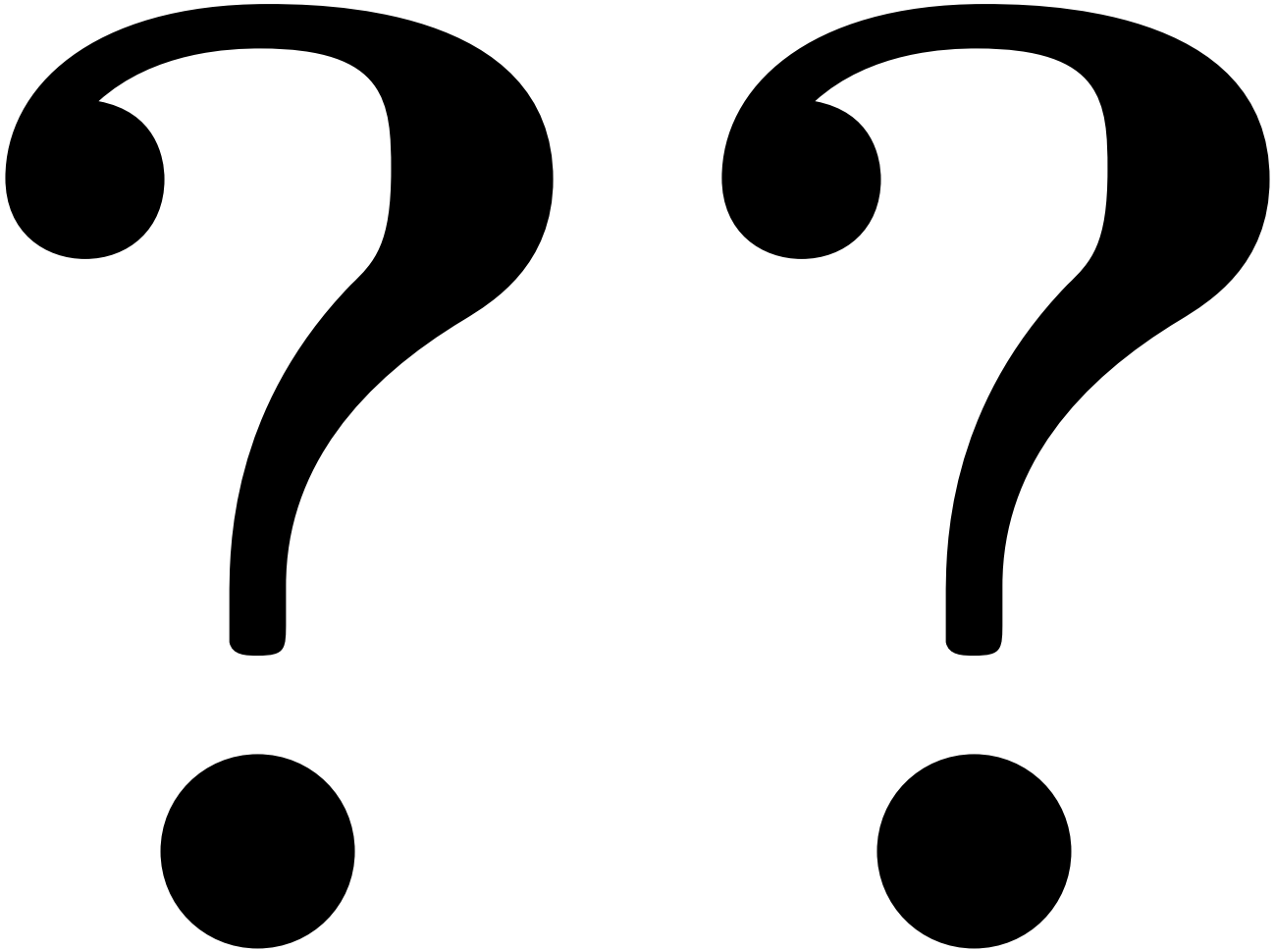
Soit $P_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} z^k$ et $Q_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} q_{n,k} z^k$.

En fixant ses yeux sur les premiers polynômes, on est mené à la conjecture :

$$
\begin{aligned}
p_{n,1} &= -(n-1)A - n^2 B - (2n-1)C + D, \\
q_{n,1} &= -nA - n^2 B - 2nC, \\
p_{n,2} &= \tfrac{1}{2}(n-2)(n-1)A^2 + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-1)(2n+1)AB \\
&\quad + 2(n-2)(n-1)AC - (n-1)AD + \tfrac{1}{2}(n-1)^2 n^2 B^2 \\
&\quad + (n-1)\left(2n^2 - 2n - 1\right) BC \\
&\quad - (n-1)(n+1)BD + (n-1)(2n-3)C^2 - 3(n-1)CD, \\
q_{n,2} &= \tfrac{1}{2}(n-1)nA^2 + \tfrac{1}{2}(n-1)n(2n-1)AB + (n-1)(2n-1)AC \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(n-1)^2 n^2 B^2 + (n-1)n(2n-1)BC \\
&\quad + (n-1)(2n-1)C^2 - (n-1)CD,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{n,3} = &-\tfrac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)A^3 - \tfrac{1}{2}(n-3)(n-2)\left(n^2-n-1\right)A^2B \\
&- \tfrac{1}{2}(n-3)(n-2)(2n-3)A^2C + \tfrac{1}{2}(n-2)(n-1)A^2D \\
&- \tfrac{1}{6}(n-3)(n-2)\left(3n^3-3n^2-n-2\right)AB^2 \\
&- \tfrac{1}{2}(n-3)(n-2)(2n-3)(2n+1)ABC \\
&+ \tfrac{1}{2}(n-2)(n+1)(2n-3)ABD \\
&- (n-3)(n-2)(2n-3)AC^2 + (n-2)(3n-5)ACD \\
&- \tfrac{1}{6}(n-2)^2(n-1)^2n^2B^3 \\
&- \tfrac{1}{6}(n-2)(2n-3)\left(3n^3-6n^2-n-2\right)B^2C \\
&+ \tfrac{1}{2}(n-2)\left(n^3-n-2\right)B^2D \\
&- (n-2)(2n-3)\left(n^2-2n-1\right)BC^2 \\
&+ (n-2)\left(3n^2-2n-3\right)BCD - \tfrac{1}{3}(n-2)(2n-5)(2n-3)C^3 \\
&+ 2(n-2)(2n-3)DC^2 - (n-2)CD^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{n,3} = &-\tfrac{1}{6}(n-2)(n-1)nA^3 - \tfrac{1}{2}(n-2)(n-1)^2nA^2B \\
&- (n-2)(n-1)^2A^2C \\
&- \tfrac{1}{6}(n-2)(n-1)n\left(3n^2-6n+2\right)AB^2 \\
&- (n-2)(n-1)n(2n-3)ABC \\
&- (n-2)(n-1)(2n-3)AC^2 + (n-2)(n-1)ACD \\
&- \tfrac{1}{6}(n-2)^2(n-1)^2n^2B^3 \\
&- \tfrac{1}{3}(n-2)(n-1)n\left(3n^2-6n+2\right)B^2C \\
&- (n-2)(n-1)n(2n-3)BC^2 + (n-2)(n-1)nBCD \\
&- \tfrac{2}{3}(n-2)(n-1)(2n-3)C^3 + 2(n-2)(n-1)C^2D.
\end{aligned}
$$



Une pensée intermédiaire

Une pensée intermédiaire

Si on serait jamais capable de deviner des formules pour $P_n(z)$ et $Q_n(z)$, comment pourrait-on jamais démontrer que ces formules devinées soient correctes ?

Une pensée intermédiaire

Si on serait jamais capable de deviner des formules pour $P_n(z)$ et $Q_n(z)$, comment pourrait-on jamais démontrer que ces formules devinées soient correctes ?

Si l'on voudrait être capable de démontrer la moindre chose, alors cette preuve doit venir de la hypergéométrie !

Une pensée intermédiaire

Hypergéométrie ?

Une pensée intermédiaire

Hypergéométrie ?

Nous regardons l'équation differentielle

$$(1-Az)P_n(z)Q_n(z) - Bz^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - CzP_n^2(z) - (1+Dz)Q_n^2(z)$$

$$= -z^{2n+1}(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB + AC + CD + \ell^2 B^2 + 2\ell BC + C^2).$$

Une pensée intermédiaire

Hypergéométrie ?

Nous regardons l'équation differentielle

$$(1-Az)P_n(z)Q_n(z) - Bz^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - CzP_n^2(z) - (1+Dz)Q_n^2(z)$$

$$= -z^{2n+1}(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB + AC + CD + \ell^2 B^2 + 2\ell BC + C^2).$$

Si celle-ci voudrait être partie du monde hypergéométrique, alors il vaut mieux de factoriser le produit au membre droite en facteurs linéaires.

Une pensée intermédiaire

Voici le produit :

$$(A + C + D) \prod_{\ell=1}^{n} (\ell AB + AC + CD + \ell^2 B^2 + 2\ell BC + C^2).$$

Une pensée intermédiaire

Voici le produit :

$$(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB+AC+CD+\ell^2B^2+2\ell BC+C^2).$$

Si l'on fait la substitution $E^2=A^2-4CD$, alors cela se transforme à

$$(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}\left(\ell B+\tfrac{A+2C+E}{2}\right)\left(\ell B+\tfrac{A+2C-E}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{C}\prod_{\ell=0}^{n}\left(\ell B+\tfrac{A+2C+E}{2}\right)\left(\ell B+\tfrac{A+2C-E}{2}\right).$$

Une pensée intermédiaire

Voici le produit :

$$(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB+AC+CD+\ell^2B^2+2\ell BC+C^2).$$

Si l'on fait la substitution $E^2=A^2-4CD$, alors cela se transforme à

$$(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}\left(\ell B+\tfrac{A+2C+E}{2}\right)\left(\ell B+\tfrac{A+2C-E}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{C}\prod_{\ell=0}^{n}\left(\ell B+\tfrac{A+2C+E}{2}\right)\left(\ell B+\tfrac{A+2C-E}{2}\right).$$

Écrivons

$$\Pi_+=\prod_{\ell=0}^{n}\left(\ell B+\tfrac{A+2C+E}{2}\right)\quad\text{et}\quad\Pi_-=\prod_{\ell=0}^{n}\left(\ell B+\tfrac{A+2C-E}{2}\right).$$

Notre nouvel problème : trouver des polynômes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ de degré n avec

$$(1 - Az)P_n(z)Q_n(z) - Bz^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - CzP_n^2(z) - (1 + Dz)Q_n^2(z) = -\frac{1}{C}\Pi_+\Pi_- z^{2n+1}.$$

Notre nouvel problème : trouver des polynômes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ de degré n avec

$$(1 - Az)P_n(z)Q_n(z) - Bz^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - CzP_n^2(z) - (1 + Dz)Q_n^2(z) = -\frac{1}{C}\Pi_+\Pi_- z^{2n+1}.$$

Peut-être il vaut mieux de "commencer à l'autre coté" ?!

Autrement dit : essayons de deviner des formules pour $p_{n,n}$, $q_{n,n}$, $p_{n,n-1}$, $q_{n,n-1}$, etc.

Notre nouvel problème : trouver des polynômes $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ de degré n avec

$$(1 - Az)P_n(z)Q_n(z) - Bz^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - CzP_n^2(z) - (1 + Dz)Q_n^2(z) = -\frac{1}{C}\Pi_+\Pi_- z^{2n+1}.$$

Peut-être il vaut mieux de "commencer à l'autre coté" ?!

Autrement dit : essayons de deviner des formules pour $p_{n,n}$, $q_{n,n}$, $p_{n,n-1}$, $q_{n,n-1}$, etc.

En comparant les coefficients de z^{2n+1} dans notre équation differentielle ci-dessus, on obtient

$$-Ap_{n,n}q_{n,n} - Cp_{n,n}^2 - Dq_{n,n}^2 = -\frac{1}{C}\Pi_+\Pi_-.$$

L'équation encore :

$$-Ap_{n,n}q_{n,n} - Cp_{n,n}^2 - Dq_{n,n}^2 = -\frac{1}{C}\Pi_+\Pi_-.$$

En appliquant la substitution $E^2 = A^2 - 4CD$, le membre gauche se factorise :

$$\left(Cp_{n,n} + \tfrac{1}{2}(A-E)q_{n,n}\right)\left(Cp_{n,n} + \tfrac{1}{2}(A+E)q_{n,n}\right) = \Pi_+\Pi_-.$$

L'équation encore :

$$-Ap_{n,n}q_{n,n} - Cp_{n,n}^2 - Dq_{n,n}^2 = -\frac{1}{C}\Pi_+\Pi_-.$$

En appliquant la substitution $E^2 = A^2 - 4CD$, le membre gauche se factorise :

$$\left(Cp_{n,n} + \tfrac{1}{2}(A-E)q_{n,n}\right)\left(Cp_{n,n} + \tfrac{1}{2}(A+E)q_{n,n}\right) = \Pi_+\Pi_-.$$

En effet, l'ordinateur dit :

$$Cp_{n,n} + \tfrac{1}{2}(A-E)q_{n,n} = \Pi_-,$$
$$Cp_{n,n} + \tfrac{1}{2}(A+E)q_{n,n} = \Pi_+.$$

En effet, l'ordinateur dit :

$$Cp_{n,n} + \tfrac{1}{2}(A - E)q_{n,n} = \Pi_-,$$
$$Cp_{n,n} + \tfrac{1}{2}(A + E)q_{n,n} = \Pi_+.$$

En effet, l'ordinateur dit :

$$Cp_{n,n} + \tfrac{1}{2}(A - E)q_{n,n} = \Pi_-,$$
$$Cp_{n,n} + \tfrac{1}{2}(A + E)q_{n,n} = \Pi_+.$$

On résoud par rapport à $p_{n,n}$ et $q_{n,n}$:

$$p_{n,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2CE}\big((A - E)\Pi_+ - (A + E)\Pi_-\big),$$
$$q_{n,n} = \frac{(-1)^n}{E}\big(\Pi_+ - \Pi_-\big),$$

où $\Pi_+ = B^{n+1}\left(\frac{A+2C+E}{2B}\right)_{n+1}$ et $\Pi_- = B^{n+1}\left(\frac{A+2C-E}{2B}\right)_{n+1}$.

On continue :

En comparant les coefficients de z^{2n} dans notre équation differentielle, on obtient

$$p_{n,n}q_{n,n} - Ap_{n,n}q_{n,n-1} - Ap_{n,n-1}q_{n,n} - Bp_{n,n}q_{n,n-1} + Bp_{n,n-1}q_{n,n} \\ - 2Cp_{n,n-1}p_{n,n} - q_{n,n}^2 - 2Dq_{n,n-1}q_{n,n} = 0.$$

On considère cette équation modulo $\Pi_+ - \Pi_-$, et modulo $\Pi_+ + \Pi_-$. Ceci fait émerger deux congruences linéaires :

$$C_1 p_{n,n-1} + C_2 q_{n,n-1} + C_3 \equiv 0 \ (\text{mod } \Pi_+ - \Pi_-),$$
$$C_4 p_{n,n-1} + C_5 q_{n,n-1} + C_6 \equiv 0 \ (\text{mod } \Pi_+ + \Pi_-),$$

avec $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ explicitement connus. En d'autres termes,

$$C_1 p_{n,n-1} + C_2 q_{n,n-1} + C_3 = D_1(\Pi_+ - \Pi_-),$$
$$C_4 p_{n,n-1} + C_5 q_{n,n-1} + C_6 = D_2(\Pi_+ + \Pi_-),$$

pour quelques D_1 et D_2 (inconnus).

$$p_{n,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2CE}\big((A-E)\Pi_+ - (A+E)\Pi_-\big),$$

$$q_{n,n} = \frac{(-1)^{n}}{E}\big(\Pi_+ - \Pi_-\big),$$

$$\begin{aligned} p_{n,n-1} = {} & \frac{(-1)^{n+1}}{2C\,(E-B)E(E+B)} \\ & \times \Big(\Pi_+\big(n\,(-E+B)\,(A-E) + (A+2C-E)\,(A+B)\big) \\ & \quad - \Pi_-\big(\,(E+B)\,(A+E) + (A+2C+E)\,(A+B)\big)\Big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{n,n-1} = {} & \frac{(-1)^{n}}{(E-B)E(E+B)} \\ & \times \Big(\Pi_+\big(n\,(-E+B) + (A+2C-E)\,\big) \\ & \quad - \Pi_-\big(n\,(E+B) + (A+2C+E)\,\big)\Big), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_{n,n-2} = \frac{(-1)^{n+1}}{2C\,(E-2B)(E-B)E(E+B)(E+2B)} \\
\times \Bigg(\Pi_+ \Bigg(& \tfrac{1}{2} n(n-1)\,(-E+B)\,(-E+2B)\,(A-E) \\
& + \tfrac{3}{2}(n-1)\,(-E+2B)\,(A+2C-E)\,\left(A+\tfrac{4}{3}B-\tfrac{1}{3}E\right) \\
& + \tfrac{3}{2}\,(A+2C-E)\,(A+2C-E+2B)\,(A+2B) \Bigg) \Bigg) \\
- \Pi_- \Bigg(& \tfrac{1}{2} n(n-1)\,(E+B)\,(E+2B)\,(A+E) \\
& + \tfrac{3}{2}(n-1)\,(E+2B)\,(A+2C+E)\,\left(A+\tfrac{4}{3}B+\tfrac{1}{3}E\right) \\
& + \tfrac{3}{2}\,(A+2C+E)\,(A+2C+E+2B)\,(A+2B) \Bigg) \Bigg),
\end{aligned}
$$

$$q_{n,n-2} = \frac{(-1)^n}{(E-2B)(E-B)E(E+B)(E+2B)}$$
$$\times \Bigg(\Pi_+ \Bigg(\tfrac{1}{2} n(n-1)\,(-E+B)\,(-E+2B)$$
$$\tfrac{3}{2}(n-1)\,(-E+2B)\,(A+2C-E)$$
$$\tfrac{3}{2}\,(A+2C-E)\,(A+2C-E+2B) \Bigg)$$
$$- \Pi_- \Bigg(\tfrac{1}{2} n(n-1)\,(E+B)\,(E+2B)$$
$$\tfrac{3}{2}(n-1)\,(E+2B)\,(A+2C+E)$$
$$\tfrac{3}{2}\,(A+2C+E)\,(A+2C+E+2B) \Bigg) \Bigg),$$

$$q_{n,n-k} = \frac{(-1)^n B^{n-k}}{(\frac{E}{B} - k)_{2k+1}}$$
$$\times \left(\left(\tfrac{A+2C+E}{2B}\right)_{n+1} \sum_{j=0}^{k} q_{n,k,j} (n-k+1)_{k-j} \left(-\tfrac{E}{B} + j + 1\right)_{k-j} \left(\tfrac{A+2C-E}{2B}\right)_j \right.$$
$$\left. - \left(\tfrac{A+2C-E}{2B}\right)_{n+1} \sum_{j=0}^{k} q_{n,k,j} (n-k+1)_{k-j} \left(\tfrac{E}{B} + j + 1\right)_{k-j} \left(\tfrac{A+2C+E}{2B}\right)_j \right).$$

$$q_{n,n-k} = \frac{(-1)^n B^{n-k}}{(\frac{E}{B} - k)_{2k+1}}$$

$$\times \left(\left(\tfrac{A+2C+E}{2B}\right)_{n+1} \sum_{j=0}^{k} q_{n,k,j} (n-k+1)_{k-j} \left(-\tfrac{E}{B} + j + 1\right)_{k-j} \left(\tfrac{A+2C-E}{2B}\right)_j \right.$$

$$\left. - \left(\tfrac{A+2C-E}{2B}\right)_{n+1} \sum_{j=0}^{k} q_{n,k,j} (n-k+1)_{k-j} \left(\tfrac{E}{B} + j + 1\right)_{k-j} \left(\tfrac{A+2C+E}{2B}\right)_j \right).$$

Comment deviner les coefficients $q_{n,k,j}$?

Comment deviner les coefficients $q_{n,k,j}$?

Supposons la forme de $q_{n,k}$ de la page précédente, et la polynômialité de $q_{n,k}$ en A, B, C, D remarquée antérieurement, et, par conséquent, également en A, B, C, E.

$(\frac{E}{B} - k)_{2k+1}$ divise forcément l'expression entre parenthèses, c'est-à-dire, cette expression s'annule forcément pour $E = Bs$, $s = -k, -k+1, \ldots, k$. Faisons la substitution $E = Bs$ dans cette expression, et supposons que $s > 0$.

Comment deviner les coefficients $q_{n,k,j}$?

Supposons la forme de $q_{n,k}$ de la page précédente, et la polynômialité de $q_{n,k}$ en A, B, C, D remarquée antérieurement, et, par conséquent, également en A, B, C, E.

$(\frac{E}{B} - k)_{2k+1}$ divise forcément l'expression entre parenthèses, c'est-à-dire, cette expression s'annule forcément pour $E = Bs$, $s = -k, -k+1, \ldots, k$. Faisons la substitution $E = Bs$ dans cette expression, et supposons que $s > 0$.
Alors, on a

$$\left(\tfrac{A+2C+E}{2B}\right)_{n+1} = \left(\tfrac{A+2C+Bs}{2B}\right)_{n+1} = \left(\tfrac{A+2C+Bs}{2B}\right)_{n+1-s} \left(\tfrac{A+2C-Bs}{2B} + n + 1\right)_s$$

En comparant avec

$$\left(\tfrac{A+2C-E}{2B}\right)_{n+1} = \left(\tfrac{A+2C-Bs}{2B}\right)_{n+1},$$

on en tire que $\left(\frac{A+2C-Bs}{2B} + n + 1\right)_s$ divise la deuxième somme sur j *comme polynôme en* n! Cette remarque donne beaucoup de conditions d'annulation non-triviales pour cette somme sur j, considérée comme polynôme en n, et ceci est suffisant pour calculer les coefficients $q_{n,k,j}$ pour un grand nombre de k's et de j's correspondants.

Voilà! Voici notre formule devinée pour $q_{n,n-k}$:

$$q_{n,n-k} = \frac{(-1)^n B^{n-k}}{(\frac{E}{B} - k)_{2k+1}}$$
$$\times \left((\tfrac{A+2C+E}{2B})_{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+j}{k} \binom{n-j}{k-j} (-\tfrac{E}{B} + j + 1)_{k-j} (\tfrac{A+2C-E}{2B})_j \right.$$
$$\left. - (\tfrac{A+2C-E}{2B})_{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+j}{k} \binom{n-j}{k-j} (\tfrac{E}{B} + j + 1)_{k-j} (\tfrac{A+2C+E}{2B})_j \right).$$

De façon similaire, voici notre formule devinée pour $p_{n,n-k}$:

$$p_{n,n-k} = \frac{(-1)^{n+1} B^{n-k}}{2C\,(\frac{E}{B}-k)_{2k+1}} \times \Bigg(\big(\tfrac{A+2C+E}{2B}\big)_{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+j}{k} \binom{n-j}{k-j} \big(-\tfrac{E}{B}+j+1\big)_{k-j} \cdot \big(\tfrac{A+2C-E}{2B}\big)_j \big(A + \tfrac{2kj}{k+j}B - \tfrac{k-j}{k+j}E\big) - \big(\tfrac{A+2C-E}{2B}\big)_{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+j}{k} \binom{n-j}{k-j} \big(\tfrac{E}{B}+j+1\big)_{k-j} \cdot \big(\tfrac{A+2C+E}{2B}\big)_j \big(A + \tfrac{2kj}{k+j}B + \tfrac{k-j}{k+j}E\big) \Bigg),$$

Nous avons alors une formule (devinée, bien sur . . .) complète :

Conjecture

Pour tous les entiers strictement positifs n, il existe des polynômes uniquement déterminés $P_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} z^k$ et $Q_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} q_{n,k} z^k$, où $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ sont des polynômes homogènes en A, B, C, D de degré k à coefficients entiers tels que la fonction rationnelle $R_n(z) = P_n(z)/Q_n(z)$ satisfasse à

$$(1 - Az)R_n(z) - Bz^2 R_n'(z) - CzR_n^2(z) - 1 - Dz$$
$$= -\frac{z^{2n+1}}{Q_n^2(z)}(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB + AC + CD + \ell^2 B^2 + 2\ell BC + C^2).$$

De plus, les coefficients $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ sont donnés par les formules données aux pages précédentes.

Nous avons alors une formule (devinée, bien sur . . .) complète :

Conjecture

Pour tous les entiers strictement positifs n, il existe des polynômes uniquement déterminés $P_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} z^k$ et $Q_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} q_{n,k} z^k$, où $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ sont des polynômes homogènes en A, B, C, D de degré k à coefficients entiers tels que la fonction rationnelle $R_n(z) = P_n(z)/Q_n(z)$ satisfasse à

$$(1 - Az)R_n(z) - Bz^2 R_n'(z) - CzR_n^2(z) - 1 - Dz$$
$$= -\frac{z^{2n+1}}{Q_n^2(z)}(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB + AC + CD + \ell^2 B^2 + 2\ell BC + C^2).$$

De plus, les coefficients $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ sont donnés par les formules données aux pages précédentes.

Jusqu'à maintenant nous n'avons rien démontré !!

Voici ce que nous voudrions démontrer :

Théorème?

Pour tous les entiers strictement positifs n, il existe des polynômes uniquement déterminés $P_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} z^k$ et $Q_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} q_{n,k} z^k$, où $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ sont des polynômes homogènes en A, B, C, D de degré k à coefficients entiers tels que la fonction rationnelle $R_n(z) = P_n(z)/Q_n(z)$ satisfasse à

$$(1 - Az)R_n(z) - Bz^2 R_n'(z) - CzR_n^2(z) - 1 - Dz$$
$$= -\frac{z^{2n+1}}{Q_n^2(z)}(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB + AC + CD + \ell^2 B^2 + 2\ell BC + C^2).$$

De plus, les coefficients $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ sont donnés par les formules données aux pages précédentes.

Jusqu'à maintenant nous ne démontrions rien !!

Cependant, en principe, dès qu'une formule devinée est écrite pour les polynômes $P_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} z^k$ et $Q_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} q_{n,k} z^k$, elle est déjà prouvée !

Jusqu'à maintenant nous ne démontrions rien !!

Cependant, **en principe**, dès qu'une formule devinée est écrite pour les polynômes $P_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k} z^k$ et $Q_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} q_{n,k} z^k$, elle est déjà prouvée !

Ésquisse de la preuve que $P_n(z)/Q_n(z)$ satisfait à l'équation differentielle

L'équation differentielle :

$$(1-Az)P_n(z)Q_n(z) - Bz^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - CzP_n^2(z) - (1+Dz)Q_n^2(z)$$

$$= -z^{2n+1}(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB + AC + CD + \ell^2 B^2 + 2\ell BC + C^2).$$

Nous avons en fait déjà vérifié que les coefficients de z^{2n+1} aux deux cotés sont les mêmes. (C'est comment nous avons trouvé les formules pour $p_{n,n}$ et $q_{n,n}$.)

Ésquisse de la preuve que $P_n(z)/Q_n(z)$ satisfait à l'équation differentielle

L'équation differentielle :

$$(1-Az)P_n(z)Q_n(z) - Bz^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - CzP_n^2(z) - (1+Dz)Q_n^2(z)$$

$$= -z^{2n+1}(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB + AC + CD + \ell^2 B^2 + 2\ell BC + C^2).$$

Ésquisse de la preuve que $P_n(z)/Q_n(z)$ satisfait à l'équation differentielle

L'équation differentielle :

$$(1-Az)P_n(z)Q_n(z) - Bz^2(P_n'(z)Q_n(z) - P_n(z)Q_n'(z)) \\ - CzP_n^2(z) - (1+Dz)Q_n^2(z)$$

$$= -z^{2n+1}(A+C+D)\prod_{\ell=1}^{n}(\ell AB + AC + CD + \ell^2 B^2 + 2\ell BC + C^2).$$

On divise les deux membres de l'équation par z^{2n+1}, ensuite on applique la dérivée par rapport à z, et finalement on multiplie les deux membres de l'équation que l'on a obtenu par z^{2n+2}. De cette façon, on obtient

$$P_n(z)\big(2CnzP_n(z) - 2Cz^2P_n'(z) - (2n+1)Q_n(z) + zQ_n'(z) \\ - z^2(A+2Bn-B)Q_n'(z) + 2AnzQ_n(z) + Bz^3Q_n''(z)\big) \\ +Q_n(z)\big(zP_n'(z) - z^2(A-2Bn+B)P_n'(z) - Bz^3P_n''(z) \\ + (2n+1)Q_n(z) + 2DnzQ_n(z) - 2Dz^2Q_n'(z) - 2zQ_n'(z)\big) = 0.$$

Celle-ci est complètement équivalente à l'équation originelle !

Nous prétendons qu'en fait

$$2CnzP_n(z)-2Cz^2P_n'(z)-(2n+1)Q_n(z)+zQ_n'(z)-z^2(A+2Bn-B)Q_n'(z)$$
$$+2AnzQ_n(z)+Bz^3Q_n''(z)=-(2n+1-nAz+n^2Bz)Q_n(z)$$

et

$$zP_n'(z)-z^2(A-2Bn+B)P_n'(z)-Bz^3P_n''(z)+(2n+1)Q_n(z)+2DnzQ_n(z)$$
$$-2Dz^2Q_n'(z)-2zQ_n'(z)=(2n+1-nAz+n^2Bz)P_n(z).$$

Nous prétendons qu'en fait

$$2CnzP_n(z)-2Cz^2P_n'(z)-(2n+1)Q_n(z)+zQ_n'(z)-z^2(A+2Bn-B)Q_n'(z)$$
$$+2AnzQ_n(z)+Bz^3Q_n''(z)=-(2n+1-nAz+n^2Bz)Q_n(z)$$

et

$$zP_n'(z)-z^2(A-2Bn+B)P_n'(z)-Bz^3P_n''(z)+(2n+1)Q_n(z)+2DnzQ_n(z)$$
$$-2Dz^2Q_n'(z)-2zQ_n'(z)=(2n+1-nAz+n^2Bz)P_n(z).$$

Ceci n'est pas trop difficile à prouver en comparant les coefficients des puissances de z. L'algorithme de Gosper est utilisé pour démontrer une des identités qui apparaissent.

Ésquisse de la preuve de la polynômialité de $p_{n,k}$ et de $q_{n,k}$

Ésquisse de la preuve de la polynômialité de $p_{n,k}$ et de $q_{n,k}$

Rappel :

$$q_{n,n-k} = \frac{(-1)^n B^{n-k}}{(\frac{E}{B} - k)_{2k+1}}$$
$$\times \left((\tfrac{A+2C+E}{2B})_{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+j}{k} \binom{n-j}{k-j} (-\tfrac{E}{B} + j + 1)_{k-j} (\tfrac{A+2C-E}{2B})_j \right.$$
$$\left. - (\tfrac{A+2C-E}{2B})_{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+j}{k} \binom{n-j}{k-j} (\tfrac{E}{B} + j + 1)_{k-j} (\tfrac{A+2C+E}{2B})_j \right).$$

Ésquisse de la preuve de la polynômialité de $p_{n,k}$ et de $q_{n,k}$

Rappel :

$$q_{n,n-k} = \frac{(-1)^n B^{n-k}}{(\frac{E}{B}-k)_{2k+1}}$$
$$\times \left((\tfrac{A+2C+E}{2B})_{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+j}{k} \binom{n-j}{k-j} (-\tfrac{E}{B}+j+1)_{k-j} (\tfrac{A+2C-E}{2B})_j \right.$$
$$\left. - (\tfrac{A+2C-E}{2B})_{n+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+j}{k} \binom{n-j}{k-j} (\tfrac{E}{B}+j+1)_{k-j} (\tfrac{A+2C+E}{2B})_j \right).$$

$(\frac{E}{B}-k)_{2k+1}$ doit diviser le terme entre parenthèses. C'est-à-dire, si l'on pose $E = Bs$ pour $s \in \{-k, -k+1, \ldots, k\}$, alors le terme entre parenthèses doit s'annuler.

Ce que nous devons alors prouver est l'identité

$$\left(\tfrac{A+2C+Bs}{2B}\right)_{n+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+j}{k}\binom{n-j}{k-j}(-s+j+1)_{k-j}\left(\tfrac{A+2C-Bs}{2B}\right)_j$$

$$-\left(\tfrac{A+2C-Bs}{2B}\right)_{n+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+j}{k}\binom{n-j}{k-j}(s+j+1)_{k-j}\left(\tfrac{A+2C+Bs}{2B}\right)_j=0,$$

pour $s\in\{-k,-k+1,\ldots,k\}$.

Ce que nous devons alors prouver est l'identité

$$\left(\tfrac{A+2C+Bs}{2B}\right)_{n+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+j}{k}\binom{n-j}{k-j}(-s+j+1)_{k-j}\left(\tfrac{A+2C-Bs}{2B}\right)_j$$

$$-\left(\tfrac{A+2C-Bs}{2B}\right)_{n+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+j}{k}\binom{n-j}{k-j}(s+j+1)_{k-j}\left(\tfrac{A+2C+Bs}{2B}\right)_j=0,$$

pour $s\in\{-k,-k+1,\dots,k\}$.
La transformation hypergéométrique ancienne (Thomae (1879))

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}a,b,c\\d,e\end{matrix};1\right]=\frac{\Gamma(e)\,\Gamma(d+e-a-b-c)}{\Gamma(e-a)\,\Gamma(d+e-b-c)}{}_3F_2\left[\begin{matrix}a,d-b,d-c\\d,d+e-b-c\end{matrix};1\right]$$

fait ce que nous avons besoin ici.

De retour à $p = 7$:

Conjecture

Soit α un entier strictement positif. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$, considerée modulo 7^α, est périodique à partir d'un certain rang, avec période $6 \cdot 7^{\alpha-1}$.

De plus, la série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n z^n$, lorsque les coefficients sont réduits modulo 7^α, est égale à

$$\frac{P_\alpha(z)}{(1+2z)^\alpha},$$

où $P_\alpha(z)$ est un polynôme en z à coefficients entiers.

Pour le reste de cet exposé, nous discuterons toujours le cas spécial $A = 4,\ B = 6,\ C = 1,\ D = 0,\ E = 4$, qui correspond a l'équation differentielle pour les nombres de sous-groupes libres dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Pour le reste de cet exposé, nous discuterons toujours le cas spécial $A = 4,\ B = 6,\ C = 1,\ D = 0,\ E = 4$, qui correspond a l'équation differentielle pour les nombres de sous-groupes libres dans $PSL_2(\mathbb{Z})$.

Lemme

Soit p un nombre premier avec $p \equiv 1 \pmod 6$. Pour $n \equiv \frac{p-1}{6} \pmod p$, on a

$$Q_n(z) = Q_{(p-1)/6}(z) \quad \text{modulo } p.$$

De plus, le polynôme $Q_{(p-1)/6}(z)$ est de degré $(p-1)/6$ en z.

Lemme

Soit p un nombre premier avec $p \equiv 1 \pmod 6$. Pour $n \equiv \frac{p-1}{6} \pmod p$, on a

$$Q_n(z) = Q_{(p-1)/6}(z) \quad \text{modulo } p.$$

De plus, le polynôme $Q_{(p-1)/6}(z)$ est de degré $(p-1)/6$ en z.

Lemme

Soit p un nombre premier avec $p \equiv 1 \pmod 6$. Pour $n \equiv \frac{p-1}{6} \pmod p$, on a

$$Q_n(z) = Q_{(p-1)/6}(z) \quad \text{modulo } p.$$

De plus, le polynôme $Q_{(p-1)/6}(z)$ est de degré $(p-1)/6$ en z.

Ésquisse de la preuve. On applique la même ${}_3F_2$-transformation aux sommes sur j dans la définition de $q_{n,n-k}$, pour obtenir

$$q_{n,n-k} = (-1)^n 6^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k+j}}{k!} \binom{k}{j} \frac{\left(\frac{5}{6} - j\right)_{n+k+1}}{\left(\frac{2}{3} - j\right)_{k+1}} + \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^{k+j}}{k!} \binom{k}{j} \frac{\left(\frac{1}{6} - j\right)_{n+k+1}}{\left(-\frac{2}{3} - j\right)_{k+1}} \right).$$

Ensuite, une analyse p-adique élémentaire (si quand même excessive) démontre que chaque somme est divisible par p pour $n \geq k + \frac{p-1}{6} + 1$.

Théorème

Soit α un entier strictement positif. Si p est un nombre premier avec $p \equiv 1 \pmod 6$, alors la série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} f_n z^n$, lorsque les coefficients sont reduits modulo p^α, est égale à $A_\alpha(z)/Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)$, où $A_\alpha(z)$ est un polynôme en z à coefficients entiers.

Il y a un énoncé similaire pour $p \equiv 5 \pmod 6$.

PREUVE. Nous nous concentrons sur le cas où $p \equiv 1 \pmod 6$, et nous procédons par récurrence par rapport à α.

PREUVE. Nous nous concentrons sur le cas où $p \equiv 1 \pmod 6$, et nous procédons par récurrence par rapport à α.
Initialisation de la récurrence :

$$F(z) = \frac{P_{(p-1)/6}(z)}{Q_{(p-1)/6}(z)} \quad \text{modulo } p,$$

PREUVE. Nous nous concentrons sur le cas où $p \equiv 1 \pmod 6$, et nous procédons par récurrence par rapport à α.
Initialisation de la récurrence :

$$F(z) = \frac{P_{(p-1)/6}(z)}{Q_{(p-1)/6}(z)} \quad \text{modulo } p,$$

Hypothèse de la récurrence : Supposons que $A_\alpha(z)/Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)$ est solution de l'équation differentielle modulo p^α pour un polynôme $A_\alpha(z)$ à coefficients entiers.

PREUVE. Nous nous concentrons sur le cas où $p \equiv 1 \pmod 6$, et nous procédons par récurrence par rapport à α.
Initialisation de la récurrence :

$$F(z) = \frac{P_{(p-1)/6}(z)}{Q_{(p-1)/6}(z)} \quad \text{modulo } p,$$

Hypothèse de la récurrence : Supposons que $A_\alpha(z)/Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)$ est solution de l'équation differentielle modulo p^α pour un polynôme $A_\alpha(z)$ à coefficients entiers.

Hérédité de la récurrence : On choisit $n \equiv \frac{p-1}{6} \pmod p$ suffisamment large tel que le produit sur ℓ au membre droite de l'équation differentielle "Padé-approximée" s'annule modulo $p^{\alpha+1}$, et tel que par conséquent $P_n(z)/Q_n(z)$ soit solution de l'équation differentielle modulo $p^{\alpha+1}$. Alors

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A_\alpha(z)}{Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)} \quad \text{modulo } p^\alpha.$$

Preuve (suite).

Alors

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A_\alpha(z)}{Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)} \quad \text{modulo } p^\alpha.$$

Preuve (suite).

Alors

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A_\alpha(z)}{Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)} \quad \text{modulo } p^\alpha.$$

Par conséquent, dans la différence

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} - \frac{A_\alpha(z)}{Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)} = \frac{P_n(z)Q^\alpha_{(p-1)/6}(z) - A_\alpha(z)Q_n(z)}{Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)Q_n(z)},$$

tous les coefficients du polynôme à coefficients entiers dans le numerateur de la dernière fraction sont forcément divisibles par p^α. Autrement dit, il y a un polynôme $B_\alpha(z)$ à coefficients entiers tel que

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A_\alpha(z)}{Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)} + p^\alpha \frac{B_\alpha(z)}{Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)Q_n(z)}.$$

Par le lemme précédent, ceci mène à

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{A_\alpha(z)}{Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)} + p^\alpha \frac{B_\alpha(z)}{Q^{\alpha+1}_{(p-1)/6}(z)} \quad \text{modulo } p^{\alpha+1}. \qquad \square$$

Notre équation differentielle pour la série génératrice pour les nombres de sous-groupes libres dans $PSL_2(\mathbb{Z})$:

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0.$$

Théorème

Soit α un entier strictement positif. Si p est un nombre premier avec $p \equiv 1 \pmod 6$, alors la série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n z^n$, lorsque les coefficients sont reduits modulo p^α, est égale à $A_\alpha(z)/Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)$, où $A_\alpha(z)$ est un polynôme en z à coefficients entiers.

Il y a un énoncé similaire pour $p \equiv 5 \pmod 6$.

Notre équation differentielle pour la série génératrice pour les nombres de sous-groupes libres dans $PSL_2(\mathbb{Z})$:

$$(1-4z)F(z) - 6z^2F'(z) - zF^2(z) - 1 = 0.$$

Théorème

Soit α un entier strictement positif. Si p est un nombre premier avec $p \equiv 1 \pmod 6$, alors la série génératrice $F(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} f_n z^n$, lorsque les coefficients sont reduits modulo p^α, est égale à $A_\alpha(z)/Q^\alpha_{(p-1)/6}(z)$, où $A_\alpha(z)$ est un polynôme en z à coefficients entiers.

Il y a un énoncé similaire pour $p \equiv 5 \pmod 6$.

Un programme en *Mathematica* de l'algorithme expliqué ci-dessus qui démontre ce théorème est disponible.