

# Comptage d'ASMs selon le nombre de $-1$

Florent Le Gac, LaBRI

27 Janvier 2011

## 1 Introduction

- Matrices à signes alternants
- Résultats dans le domaine

## 2 ASMs contractés

- Contraction d'ASM
- Nombre d'ASMs associés à un ASM contracté
- Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés

## 3 Asymptotique de $A_{n,k}$

- Comptage des ASMs contractés de taille  $3k$
- Asymptotique en  $n$  du nombre d'ASMs avec  $k - 1$

## 4 Perspectives et résumé

# Outline

- 1 Introduction
  - Matrices à signes alternants
  - Résultats dans le domaine
- 2 ASMs contractés
  - Contraction d'ASM
  - Nombre d'ASMs associés à un ASM contracté
  - Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés
- 3 Asymptotique de  $A_{n,k}$ 
  - Comptage des ASMs contractés de taille  $3k$
  - Asymptotique en  $n$  du nombre d'ASMs avec  $k-1$
- 4 Perspectives et résumé

# Matrices à signes alternants

## Définition

Une matrice à signes alternants (ASM) de taille  $n$  est une matrice  $n \times n$  telle que :

- ses entrées sont dans  $\{-1, 0, 1\}$ .
- ses entrées non nulles alternent en signe sur chaque ligne et colonne.
- la somme des entrées de chaque ligne (et colonne) vaut 1.

Cas particulier d'ASM : les permutations, qui n'ont pas de  $-1$ .

# Matrices à signes alternants

$$\begin{array}{cccccccc}
 \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 + & \cdot & - & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + \\
 \cdot & + & - & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\
 \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

Un ASM de taille 8 avec 3 entrées négatives

# Matrices à signes alternants

- $A_n$  est l'ensemble des ASMs de taille  $n$
- $A_{n,k}$  est l'ensemble des ASMs de taille  $n$  avec  $k$  entrées négatives.

Le nombre de matrices à signes alternants est donné par :

Théorème (Zeilberger 96)

$$|A_n| = \prod_{0 \leq i < n} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!}$$

# Résultats de comptage selon le nombre de $-1$

$$|A_{n,0}| = n!$$

## Théorème (Aval)

$$|A_{n,1}| = n!f_{n,3}$$

$$|A_{n,2}| = n!(2.f_{n,4} + 44.f_{n,5} + 200.f_{n,6})$$

$$\text{avec } f_{n,t} = \frac{n!}{t!t!(n-t)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{t!t!}$$

# Résultats de comptage selon le nombre de $-1$

Nous avons obtenus la formule suivante (méthode utilisant un programme) :

## Théorème

$$|A_{n,3}| = n!(14.f_{n,5} + 780.f_{n,6} + 15590.f_{n,7} + 137984.f_{n,8} + 470400.f_{n,9})$$

avec  $f_{n,t} = \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{t!t!}$

# Résultats

Nous présentons :

- une formule générale :

$$|A_{n,k}| = \sum_{t=1}^? |C_{t,k}| \frac{n(n-1)\cdots(n-t+1)}{t!t!}$$

- une interprétation des coefficients  $|C_{t,k}|$
- le calcul, pour  $i$  (très) proche de 0, de  $|C_{3k-i,k}|$
- l'asymptotique de  $|A_{n,k}|$

# Outline

- 1 Introduction
  - Matrices à signes alternants
  - Résultats dans le domaine
- 2 ASMs contractés
  - Contraction d'ASM
  - Nombre d'ASMs associés à un ASM contracté
  - Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés
- 3 Asymptotique de  $A_{n,k}$ 
  - Comptage des ASMs contractés de taille  $3k$
  - Asymptotique en  $n$  du nombre d'ASMs avec  $k - 1$
- 4 Perspectives et résumé

# Contraction d'ASM

## Definition (entrée isolée)

Une case de matrice est dite *isolée* si à la fois sa ligne et sa colonne ne contiennent aucune autre entrée non nulle.

$$\begin{array}{cccccccc}
 \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 + & \cdot & - & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & + & \cdot & - & \cdot & \cdot & + \\
 \cdot & + & - & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot \\
 \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

# Contraction d'ASM

## Definition (ASM contracté)

Un ASM est dit contracté s'il ne contient aucune entrée isolée.

On associe à chaque ASM  $A$  un unique ASM contracté obtenu en retirant la ligne et la colonne de chaque entrée isolée de  $A$ .

$$\begin{array}{cccccc}
 \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\
 + & \cdot & - & + & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & + & - & \cdot & + \\
 \cdot & + & - & \cdot & + & \cdot \\
 \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & + & \cdot & \cdot
 \end{array}$$

L'ordre dans lequel on retire les 1 isolés n'a pas d'importance.

# Nombre d'ASMs de taille $n$ associés à un ASM contracté

$C_{n,k}$  est l'ensemble des ASMs contractés de taille  $n$  possédant  $k$  entrées négatives.

## Propriété

*Pour tout ASM contracté  $c$  de taille  $t$ , le nombre d'ASMs de taille  $n$  se contractant en  $c$  est donné par :*

$$(n-t)! \binom{n}{t}^2 = n! \frac{n(n-1) \cdots (n-t+1)}{t!t!}$$

Ce nombre ne dépend que de la taille de l'ASM contracté.

# Preuve du nombre d'ASMs associés à un ASM contracté

Soit  $c$  un ASM contracté. L'ensemble des ASMs de taille  $n$  se contractant en  $c$  est en bijection avec l'ensemble des triplets formés de :

- une matrice de permutation de taille  $(n - t)$ ,
- un ensemble d'entiers  $L = \{l_1, \dots, l_{n-t}\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$ ,
- un ensemble d'entiers  $C = \{c_1, \dots, c_{n-t}\}$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .

Le nombre de choix possibles est donné par  $(n - t)! \binom{n}{n - t}^2$ .

# Nombre d'ASMs de taille $n$ associés à un ASM contracté

$$\begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\
 + & 0 & - & + & 0 & 0 \\
 0 & 0 & + & - & 0 & + \\
 0 & + & - & 0 & + & 0 \\
 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 0 & + & 0 \\
 + & 0 & 0 \\
 0 & 0 & +
 \end{array}$$

$$L = \{3, 4, 7\}, C = \{1, 3, 7\}$$

# Nombre d'ASMs de taille $n$ associés à un ASM contracté

0	0	+	0	0	0
+	0	-	+	0	0
0	0	+	-	0	+
0	+	-	0	+	0
0	0	+	0	0	0
0	0	0	+	0	0

0	+	0
+	0	0
0	0	+

$$L = \{3, 4, 7\}, C = \{1, 3, 7\}$$

.	0	.	0	+	0	.	0	0
.	+	.	0	-	+	.	0	0
0	.	+	.	.	.	0	.	.
+	.	0	.	.	.	0	.	.
.	0	.	0	+	-	.	0	+
.	0	.	+	-	0	.	+	0
0	.	0	.	.	.	+	.	.
.	0	.	0	+	0	.	0	0
.	0	.	0	0	+	.	0	0

# Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés

Dès lors, nous pouvons écrire :

Formule de comptage

$$|A_{n,k}| = n! \sum_{t=1}^{??} |C_{t,k}| \frac{n!}{t!t!(n-t)!}$$

# Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés

## Taille maximale

La taille maximale d'un ASM contracté comptant  $k$  entrées négatives est  $3k$ .

- $\text{taille}(\text{ASM}) = \#(1) - \#(-1)$
- pour un contracté,  $\#(1)$  est plus petit que 4 fois  $\#(-1)$ .

# Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés

## Taille minimale

La taille minimale d'un ASM contracté ayant  $k$  entrées négative est donnée par :

$$low(k) = \begin{cases} 2i & \text{si } (i-1)^2 < k \leq (i-1)i, \\ 2i+1 & \text{si } (i-1)i < k \leq i^2 \end{cases}$$

La taille minimale est de l'ordre de  $2\sqrt{k}$ .

# Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés

Le nombre maximal de  $-1$  dans un ASM contracté est donné par :

- $i^2$  pour la taille  $2i + 1$ ,
- $(i - 1)i$  pour la taille  $2i$
- Le nombre maximal de  $-1$  est une fonction croissante de  $n$ .

.	.	+	.	.
.	+	-	+	.
+	-	+	-	+
.	+	-	+	.
.	.	+	.	.

.	.	+	.	.	.
.	+	-	+	.	.
+	-	+	-	+	.
.	+	-	+	-	+
.	.	+	-	+	.
.	.	.	+	.	.

# Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés

## Théorème

$$|A_{n,k}| = n! \sum_{t=\text{low}(k)}^{3k} |C_{t,k}| \frac{n!}{t!t!(n-t)!}$$

Malheureusement, le comptage des  $C_{t,k}$  est presque aussi dur que celui des  $A_{n,k}$  ...

Mais dans certains cas particuliers nous savons le faire :  $C_{3k-a,k}$  quand  $a$  est petit.

# Outline

- 1 Introduction
  - Matrices à signes alternants
  - Résultats dans le domaine
- 2 ASMs contractés
  - Contraction d'ASM
  - Nombre d'ASMs associés à un ASM contracté
  - Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés
- 3 Asymptotique de  $A_{n,k}$ 
  - Comptage des ASMs contractés de taille  $3k$
  - Asymptotique en  $n$  du nombre d'ASMs avec  $k - 1$
- 4 Perspectives et résumé

## Asymptotique pour $|A_{n,k}|$

La formule de comptage s'écrit aussi :

$$|A_{n,k}| = n! \sum_{t=\text{low}(k)}^{3k} |C_{t,k}| \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{t!t!}$$

où

- $\frac{|A_{n,k}|}{n!}$  est un polynôme en  $n$  de degré  $3k$ .
- Son coefficient dominant est donné par  $\frac{|C_{3k,k}|}{(3k)!(3k)!}$ .

# Comptage des ASMs contractés de taille $3k$

Nous allons montrer que :

Propriété

$$|C_{3k,k}| = \frac{(3k)!(3k)!}{k!6^k6^k}$$

## Remarques sur les ASMs dans $C_{3k,k}$

Dans la preuve de la taille maximale des ASMs contractés nous avons vu que de tels ASMs contenaient exactement :

- $k$  entrées négatives
- $4k$  entrées positives

et de plus, ces ASMs possèdent exactement :

- $k$  lignes (colonnes) ayant 3 valeurs non nulles  $(1, -1, 1)$ ,
- $2k$  lignes (colonnes) avec 1 unique valeur non nulle  $(1)$ .

## Preuve du nombre d'ASMs dans $C_{3k,k}$

Nous donnons une bijection entre  $C_{3k,k}$  et les couples  $(C, L)$

- $C$  étant une partition (ordonnée) en  $k$  triplets de  $[3k]$ .
- $L$  étant une partition (non ordonnée) en  $k$  triplets de  $[3k]$ .

Le nombre de couples  $(C, L)$  possibles est donné par  $\frac{(3k)!(3k)!}{k!6^k6^k}$ .

## Bijection $C_{3k,k}$ vers $(C, L)$

Etant donné une ASM  $c$  dans  $C_{3k,k}$ , on lui associe le couple  $(C, L)$   
où

- $C = \{c_1, \dots, c_k\}$  avec  $c_i$  le triplet formé des indices de colonnes de la  $i^{\text{eme}}$  ligne de  $c$  contenant un  $-1$ .
- $L$  est l'ensemble des  $k$  triplets obtenus en lisant sur les  $k$  colonnes contenant un  $-1$  les trois indices de ligne des valeurs non nulles.

## Bijection $(C, L)$ vers $C_{3k,k}$

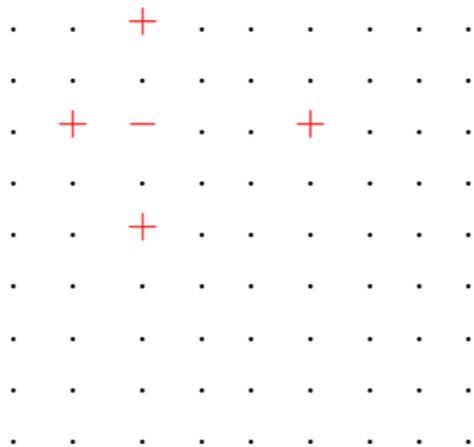
Etant donné  $(C, L)$  nous construisons un ASM contracté dans  $C_{3k,k}$  :

- On ordonne  $L$  en fonction des valeurs médianes de ses triplets.
- Pour chaque couple de triplets  $(g, c, d) \in C$  et  $(h, l, b) \in L$  (pris dans l'ordre) :
  - On place un  $-1$  en position  $(c, l)$
  - On place quatre  $1$  en positions  $(g, l)$ ,  $(d, l)$ ,  $(c, h)$  et  $(c, b)$ .

## Bijection sur un exemple

$$C = \{(2, 3, 6), (5, 7, 9), (1, 4, 8)\},$$

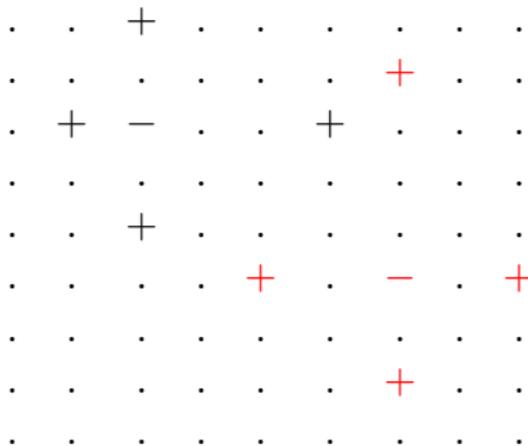
$$L = \{(1, 3, 5), (2, 6, 8), (4, 7, 9)\}$$



## Bijection sur un exemple

$$C = \{(2, 3, 6), (5, 7, 9), (1, 4, 8)\},$$

$$L = \{(1, 3, 5), (2, 6, 8), (4, 7, 9)\}$$



## Bijection sur un exemple

$$C = \{(2, 3, 6), (5, 7, 9), (1, 4, 8)\},$$

$$L = \{(1, 3, 5), (2, 6, 8), (4, 7, 9)\}$$

.	.	+	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	+	.	.
.	+	-	.	.	+	.	.	.
.	.	.	+	.	.	.	.	.
.	.	+	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	+	.	-	.	+
+	.	.	-	.	.	.	+	.
.	.	.	.	.	.	+	.	.
.	.	.	+	.	.	.	.	.

Asymptotique de  $|A_{n,k}|$ 

## Formule de comptage

$$|A_{n,k}| = n! \sum_{t=\text{low}(k)}^{3k} |C_{t,k}| \frac{n(n-1)\dots(n-t+1)}{t!t!}$$

Avec  $C_{3k,k} = \frac{(3k)!(3k)!}{k!6^k6^k}$  on obtient

## Théorème

$$|A_{n,k}| = n! \frac{n^{3k}}{36^k k!} (1 + O(1/n))$$

# Outline

- 1 Introduction
  - Matrices à signes alternants
  - Résultats dans le domaine
- 2 ASMs contractés
  - Contraction d'ASM
  - Nombre d'ASMs associés à un ASM contracté
  - Formule de comptage des ASMs par les ASMs contractés
- 3 Asymptotique de  $A_{n,k}$ 
  - Comptage des ASMs contractés de taille  $3k$
  - Asymptotique en  $n$  du nombre d'ASMs avec  $k - 1$
- 4 Perspectives et résumé

## Perspectives et résumé

Ce travail fournit un outil :

- une formule (non explicite) pour  $|A_{n,k}|$

qui nous a permis de trouver

- l'asymptotique en  $n$  de  $|A_{n,k}|$
- la formule exacte pour  $|A_{n,3}|$
- le coefficient  $|C_{3k,k}|$  de la formule générale

Avec un nouvel outil, consistant à définir le mélange d'ASMs, nous obtenons quelques coefficients supplémentaires de la forme  $|C_{3k-a,k}|$ , au prix d'une étude de cas de plus en plus difficile lorsque  $a$  augmente.