

Automates cellulaires probabilistes et champs aléatoires avec directions i.i.d.

Irène Marcovici et Jean Mairesse,
LIAFA, Université Paris Diderot - Paris 7

Journées de combinatoire de Bordeaux
Mercredi 13 février 2013

Plan de l'exposé

- 1 Automates cellulaires probabilistes
 - Définitions et notations
 - Diagrammes espace-temps

Plan de l'exposé

- 1 Automates cellulaires probabilistes
 - Définitions et notations
 - Diagrammes espace-temps
- 2 Champs aléatoires non triviaux à directions i.i.d.
 - Mesures de Bernoulli invariantes
 - Étude du diagramme espace-temps

Plan de l'exposé

- 1 Automates cellulaires probabilistes
 - Définitions et notations
 - Diagrammes espace-temps
- 2 Champs aléatoires non triviaux à directions i.i.d.
 - Mesures de Bernoulli invariantes
 - Étude du diagramme espace-temps
- 3 Extensions
 - Mesures markoviennes invariantes
 - Alphabets plus grands
 - Cas déterministe

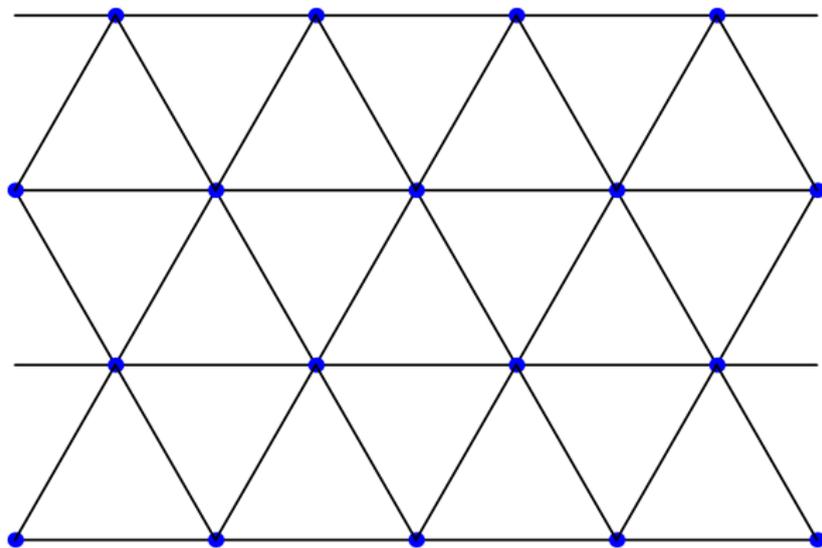
Plan de l'exposé

- 1 Automates cellulaires probabilistes
 - Définitions et notations
 - Diagrammes espace-temps
- 2 Champs aléatoires non triviaux à directions i.i.d.
 - Mesures de Bernoulli invariantes
 - Étude du diagramme espace-temps
- 3 Extensions
 - Mesures markoviennes invariantes
 - Alphabets plus grands
 - Cas déterministe

Automates cellulaires probabilistes “élémentaires”

Réseau triangulaire.

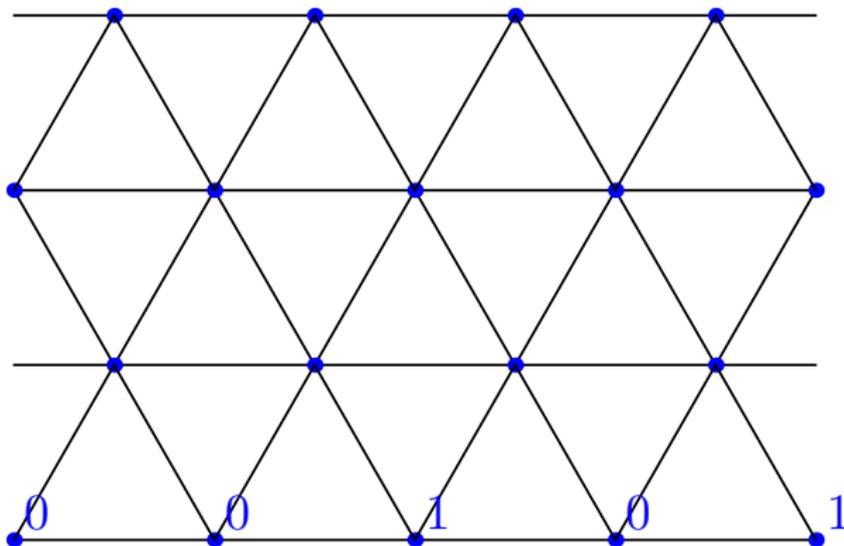
On va attribuer à chaque cellule un état 0 ou 1.



Automates cellulaires probabilistes “élémentaires”

Réseau triangulaire.

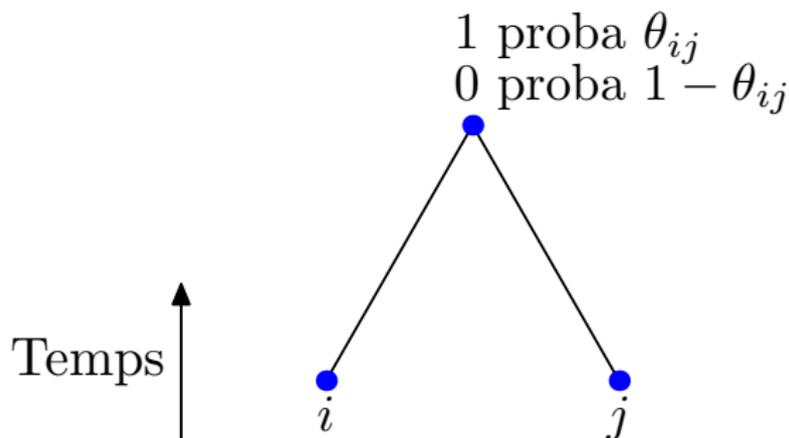
On va attribuer à chaque cellule un état 0 ou 1.



Automates cellulaires probabilistes “élémentaires”

4 paramètres: $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11} \in [0, 1]$.

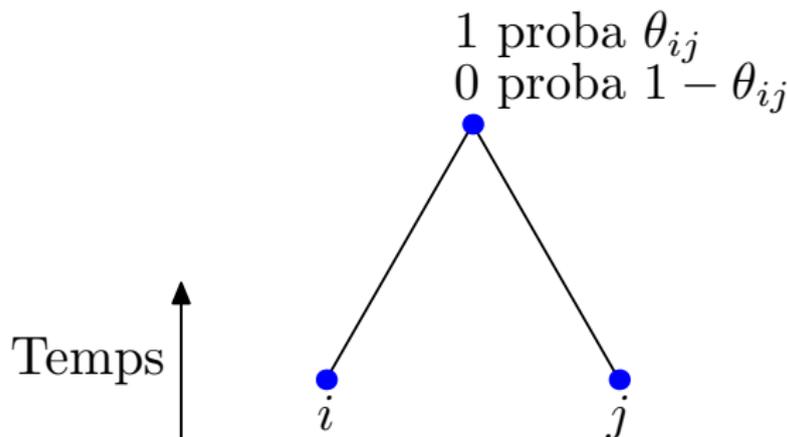
θ_{ij} = proba d'avoir un 1 si les deux voisins sont dans l'état ij



Automates cellulaires probabilistes “élémentaires”

4 paramètres: $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11} \in [0, 1]$.

θ_{ij} = proba d'avoir un 1 si les deux voisins sont dans l'état ij



Ceci définit un ACP sur \mathbb{Z} , d'alphabet $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ et de voisinage de taille 2.

Exemple de diagramme espace-temps

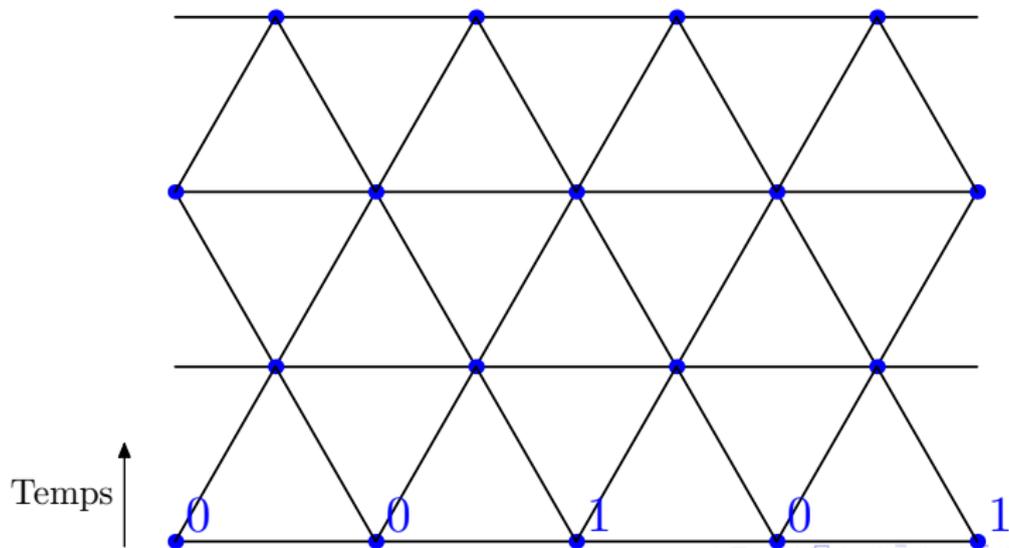
Somme modulo 2 avec proba ε d'erreur.

$$\theta_{ij} = \begin{cases} 1 - \varepsilon & \text{si } i + j = 1 \pmod{2} \\ \varepsilon & \text{si } i + j = 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Exemple de diagramme espace-temps

Somme modulo 2 avec proba ε d'erreur.

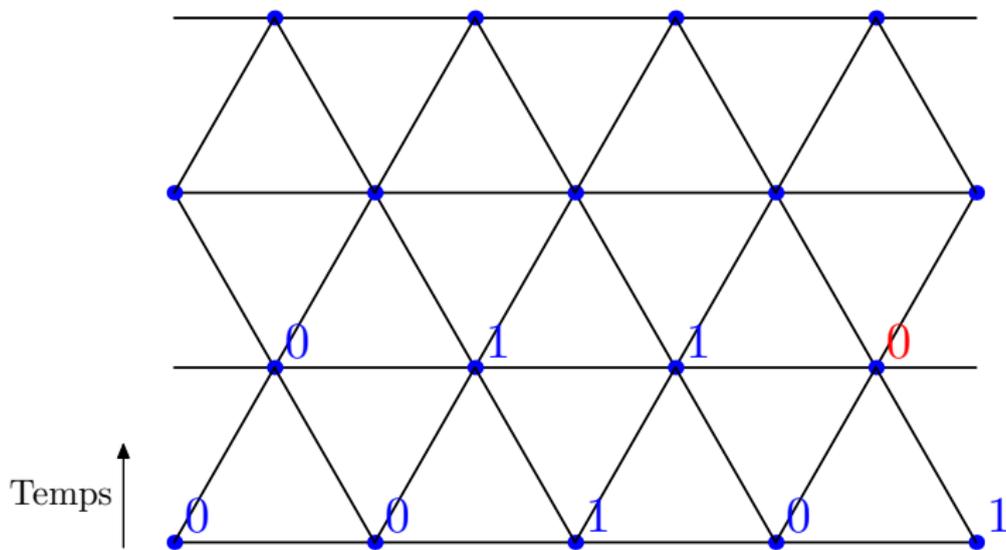
$$\theta_{ij} = \begin{cases} 1 - \varepsilon & \text{si } i + j = 1 \pmod{2} \\ \varepsilon & \text{si } i + j = 0 \pmod{2} \end{cases}$$



Exemple de diagramme espace-temps

Somme modulo 2 avec proba ε d'erreur.

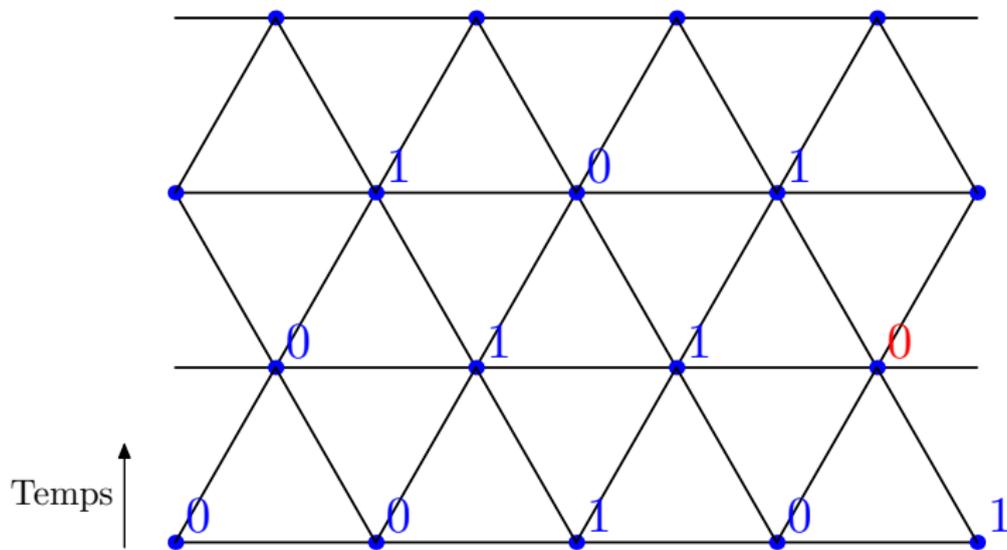
$$\theta_{ij} = \begin{cases} 1 - \varepsilon & \text{si } i + j = 1 \pmod{2} \\ \varepsilon & \text{si } i + j = 0 \pmod{2} \end{cases}$$



Exemple de diagramme espace-temps

Somme modulo 2 avec proba ε d'erreur.

$$\theta_{ij} = \begin{cases} 1 - \varepsilon & \text{si } i + j = 1 \pmod{2} \\ \varepsilon & \text{si } i + j = 0 \pmod{2} \end{cases}$$



Plan de l'exposé

- 1 Automates cellulaires probabilistes
 - Définitions et notations
 - Diagrammes espace-temps
- 2 Champs aléatoires non triviaux à directions i.i.d.
 - Mesures de Bernoulli invariantes
 - Étude du diagramme espace-temps
- 3 Extensions
 - Mesures markoviennes invariantes
 - Alphabets plus grands
 - Cas déterministe

Mesure de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$. On note

$$\mu_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$$

la *mesure de Bernoulli* de paramètre p sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

Mesure de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$. On note

$$\mu_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$$

la *mesure de Bernoulli* de paramètre p sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

A quelle condition sur les paramètres θ_{ij} de l'ACP F a-t-on
 $\mu_p F = \mu_p$?

Mesure de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$. On note

$$\mu_p = \mathcal{B}(p)^{\otimes \mathbb{Z}}$$

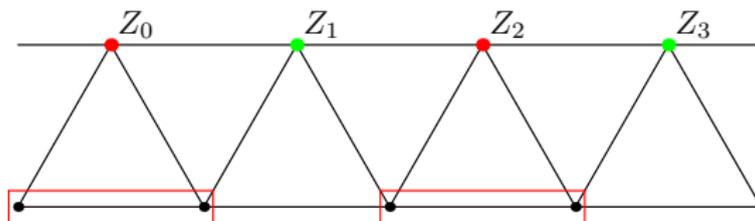
la *mesure de Bernoulli* de paramètre p sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

A quelle condition sur les paramètres θ_{ij} de l'ACP F a-t-on
 $\mu_p F = \mu_p$?

Pour un ACP F donné, on calcule :

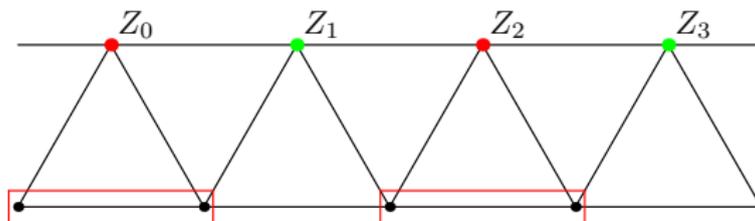
$\mu_p F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) =$ proba d'observer le motif $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ au temps
1, si au temps 0, la configuration initiale est choisie selon μ_p .

Image d'une mesure de Bernoulli



$$Z_0 \perp\!\!\!\perp Z_2$$

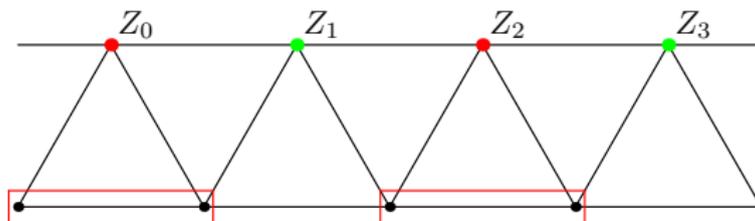
Image d'une mesure de Bernoulli



$$Z_0 \perp\!\!\!\perp Z_2$$

Partant de μ_p , une suite de points à distance ≥ 2 est i.i.d.

Image d'une mesure de Bernoulli

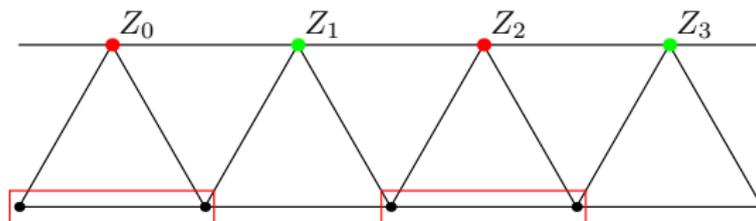


$$Z_0 \perp\!\!\!\perp Z_2$$

Partant de μ_p , une suite de points à distance ≥ 2 est i.i.d.

Mais la mesure $\mu_p F$ n'a pas d'expression simple en général !

Image d'une mesure de Bernoulli



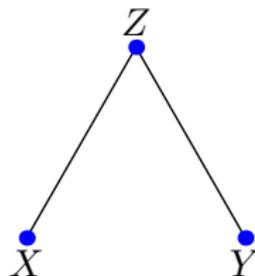
$$Z_0 \perp\!\!\!\perp Z_2$$

Partant de μ_p , une suite de points à distance ≥ 2 est i.i.d.

Mais la mesure $\mu_p F$ n'a pas d'expression simple en général !

Pour un ACP F fixé, on calcule récursivement $\mu_p F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

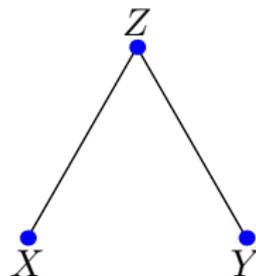
Transition



On fixe $p \in [0, 1]$. Pour $\alpha \in \{0, 1\}$, soit

$$f_{\alpha}^{\text{haut}}(q) = \mathbb{P}_{(X, Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Z = \alpha)$$

Transition



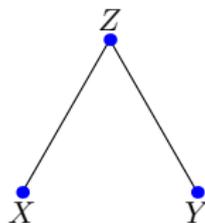
On fixe $p \in [0, 1]$. Pour $\alpha \in \{0, 1\}$, soit

$$f_{\alpha}^{\text{haut}}(q) = \mathbb{P}_{(X, Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Z = \alpha)$$

et

$$f_{\alpha}^{\text{droite}}(q) = \mathbb{P}_{(X, Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Y = 1 | Z = \alpha).$$

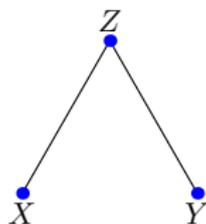
Transition



$$f_{\alpha}^h(q) = \mathbb{P}_{(X,Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Z = \alpha)$$

$$f_1^h(q) = (1-q) \cdot (1-p) \cdot \theta_{00} + (1-q) \cdot p \cdot \theta_{01} + q \cdot (1-p) \cdot \theta_{10} + q \cdot p \cdot \theta_{11}$$

Transition

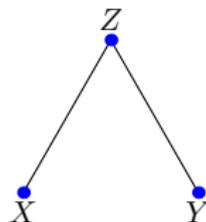


$$f_{\alpha}^h(q) = \mathbb{P}_{(X,Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Z = \alpha)$$

$$f_1^h(q) = (1-q) \cdot (1-p) \cdot \theta_{00} + (1-q) \cdot p \cdot \theta_{01} + q \cdot (1-p) \cdot \theta_{10} + q \cdot p \cdot \theta_{11}$$

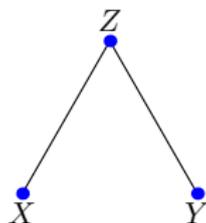
$$f_0^h(q) = 1 - f_1^h(q).$$

Transition



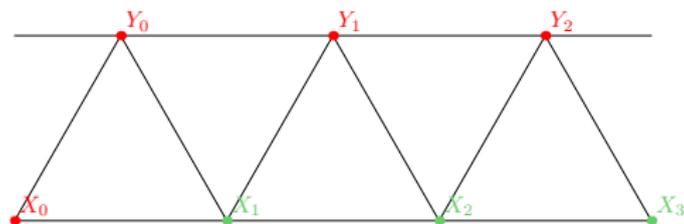
$$\begin{aligned} f_{\alpha}^d(q) &= \mathbb{P}_{(X,Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Y = 1 | Z = \alpha). \\ &= \frac{\mathbb{P}_{(X,Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Y = 1, Z = \alpha)}{\mathbb{P}_{(X,Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Z = \alpha)} \end{aligned}$$

Transition

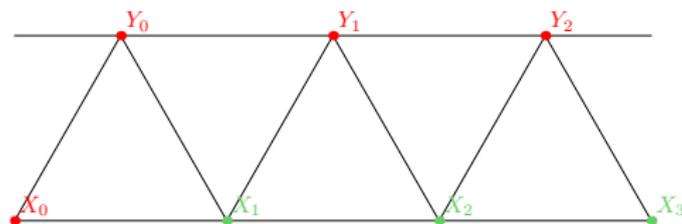


$$\begin{aligned} f_{\alpha}^d(q) &= \mathbb{P}_{(X,Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Y = 1 | Z = \alpha). \\ &= \frac{\mathbb{P}_{(X,Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Y = 1, Z = \alpha)}{\mathbb{P}_{(X,Y) \sim \mathcal{B}(q) \otimes \mathcal{B}(p)}(Z = \alpha)} \end{aligned}$$

$$f_1^d(q) = \frac{(1-q) \cdot p \cdot \theta_{01} + q \cdot p \cdot \theta_{11}}{f_1^h(q)}.$$

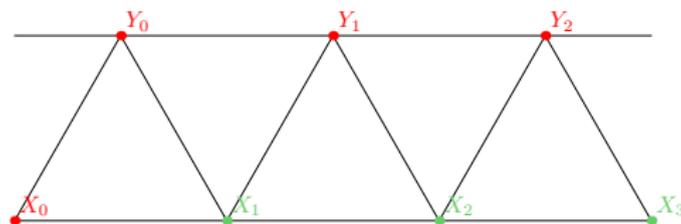


$$\mu_p F(1) = \mathbb{P}(Y_0 = 1) = f_1^h(p)$$



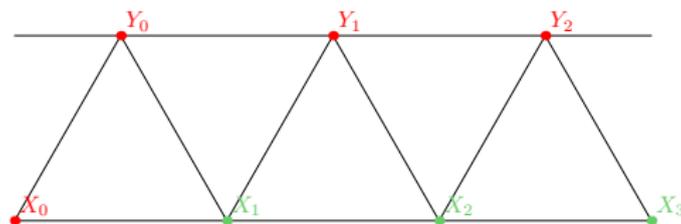
$$\mu_p F(1) = \mathbb{P}(Y_0 = 1) = f_1^h(p)$$

$$\mu_p F(1, 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0)$$



$$\mu_p F(1) = \mathbb{P}(Y_0 = 1) = f_1^h(p)$$

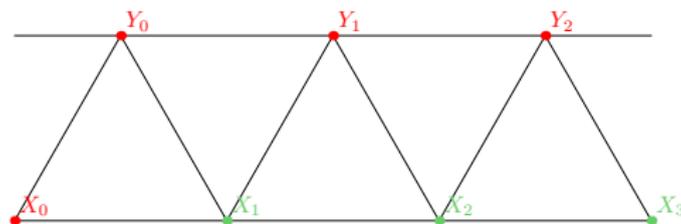
$$\mu_p F(1, 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = 0 | Y_0 = 1) \cdot \mathbb{P}(Y_0 = 1)$$



$$\mu_p F(1) = \mathbb{P}(Y_0 = 1) = f_1^h(p)$$

$$\mu_p F(1, 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = 0 | Y_0 = 1) \cdot \mathbb{P}(Y_0 = 1)$$

$$= f_0^h(f_1^d(p)) \cdot f_1^h(p)$$

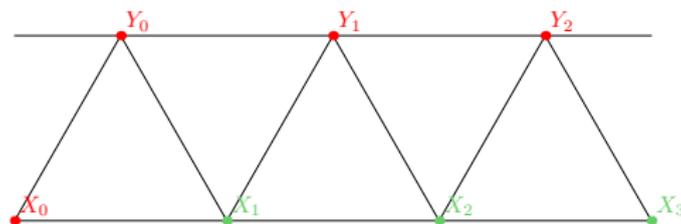


$$\mu_p F(1) = \mathbb{P}(Y_0 = 1) = f_1^h(p)$$

$$\mu_p F(1, 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = 0 | Y_0 = 1) \cdot \mathbb{P}(Y_0 = 1)$$

$$= f_0^h(f_1^d(p)) \cdot f_1^h(p)$$

$$\mu_p F(1, 0, 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = 0)$$

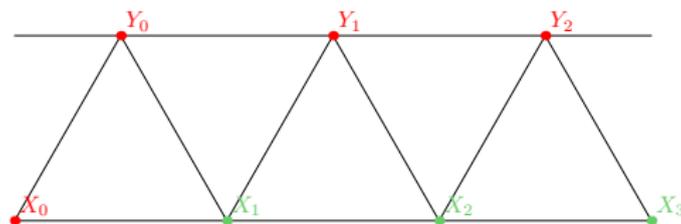


$$\mu_p F(1) = \mathbb{P}(Y_0 = 1) = f_1^h(p)$$

$$\mu_p F(1, 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = 0 | Y_0 = 1) \cdot \mathbb{P}(Y_0 = 1)$$

$$= f_0^h(f_1^d(p)) \cdot f_1^h(p)$$

$$\mu_p F(1, 0, 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = 0) = \mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_0 = 1, Y_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0)$$



$$\mu_p F(1) = \mathbb{P}(Y_0 = 1) = f_1^h(\rho)$$

$$\mu_p F(1, 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = 0 | Y_0 = 1) \cdot \mathbb{P}(Y_0 = 1)$$

$$= f_0^h(f_1^d(\rho)) \cdot f_1^h(\rho)$$

$$\mu_p F(1, 0, 0) = \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0, Y_2 = 0) = \mathbb{P}(Y_2 = 0 | Y_0 = 1, Y_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 0)$$

$$= f_0^h(f_0^d(f_1^d(\rho))) \cdot f_0^h(f_1^d(\rho)) \cdot f_1^h(\rho)$$

Proposition

La valeur $\mu_p F(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ de la mesure image d'un cylindre $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ est donnée par:

$$\mu_p F(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \prod_{i=0}^n f_{\alpha_i}^h(f_{\alpha_{i-1}}^d(f_{\alpha_{i-2}}^d(\dots f_{\alpha_0}^d(p)\dots))).$$

Conséquence: μ_p est une mesure invariante ssi

$$f_1^h(f_{\alpha_{i-1}}^d(f_{\alpha_{i-2}}^d(\dots f_{\alpha_0}^d(p)\dots))) = p \text{ pour tous } \alpha_0, \alpha_1 \dots$$

Comme f_1^h est une fonction affine, 2 possibilités.

- 1 Soit f_1^h est constante égale à p .
- 2 Soit $f_{\alpha_{i-1}}^d(f_{\alpha_{i-2}}^d(\dots f_{\alpha_0}^d(p)\dots))$ ne dépend pas de $\alpha_0, \alpha_1 \dots$

- Cas ①: f_1^h est constante égale à p . Comme on a :

$$f_1^h(q) = q \cdot [-(1-p) \cdot \theta_{00} - p \cdot \theta_{01} + (1-p) \cdot \theta_{10} + p \cdot \theta_{11}] + (1-p) \cdot \theta_{00} + p \cdot \theta_{01},$$

c'est équivalent à :

$$\begin{cases} -(1-p) \cdot \theta_{00} - p \cdot \theta_{01} + (1-p) \cdot \theta_{10} + p \cdot \theta_{11} = 0 \\ (1-p) \cdot \theta_{00} + p \cdot \theta_{01} = p \end{cases}$$

On obtient :

$$(1-p) \cdot \theta_{00} + p \cdot \theta_{01} = (1-p) \cdot \theta_{10} + p \cdot \theta_{11} = p$$

- Cas ②: on obtient la condition symétrique :

$$(1-p) \cdot \theta_{00} + p \cdot \theta_{10} = (1-p) \cdot \theta_{01} + p \cdot \theta_{11} = p$$

Proposition [Toom et al. 1990, Mairesse-M. 2012]

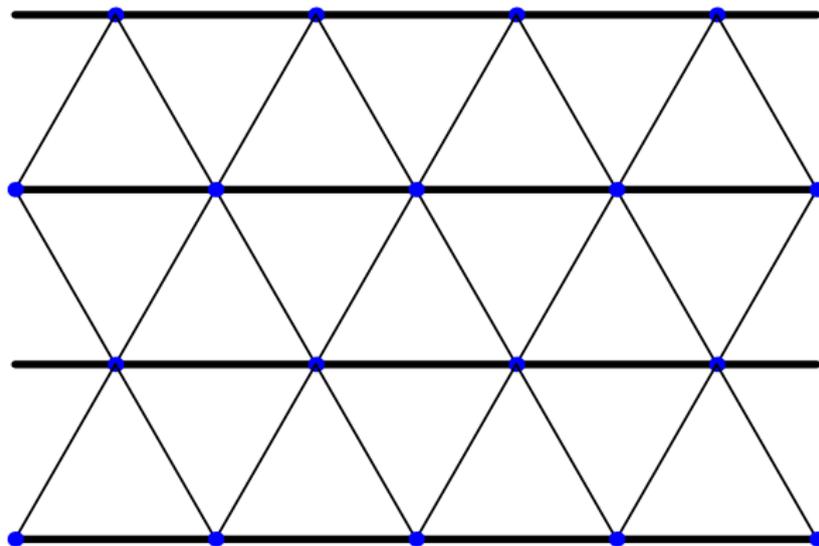
La mesure de Bernoulli μ_p est une mesure invariante de l'ACP ssi ses probabilités de transition satisfont (au moins) l'une des égalités suivantes.

$$\textcircled{1} \quad (1 - p) \cdot \theta_{00} + p \cdot \theta_{01} = (1 - p) \cdot \theta_{10} + p \cdot \theta_{11} = p$$

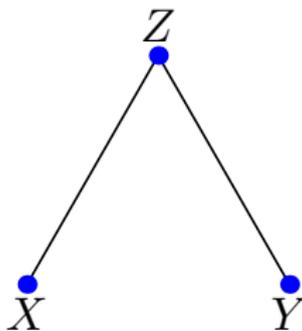
$$\textcircled{2} \quad (1 - p) \cdot \theta_{00} + p \cdot \theta_{10} = (1 - p) \cdot \theta_{01} + p \cdot \theta_{11} = p$$

Par symétrie, on étudie la condition $\textcircled{1}$.

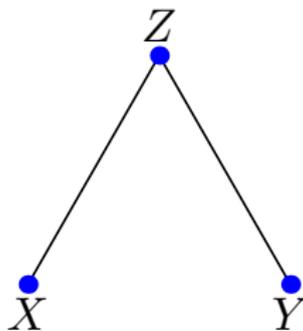
À partir d'une configuration initiale distribuée selon μ_p , chaque ligne horizontale est constituée de variables i.i.d. $\mathcal{B}(p)$.



Condition ①: $(1 - p) \cdot \theta_{00} + p \cdot \theta_{01} = (1 - p) \cdot \theta_{10} + p \cdot \theta_{11} = p$

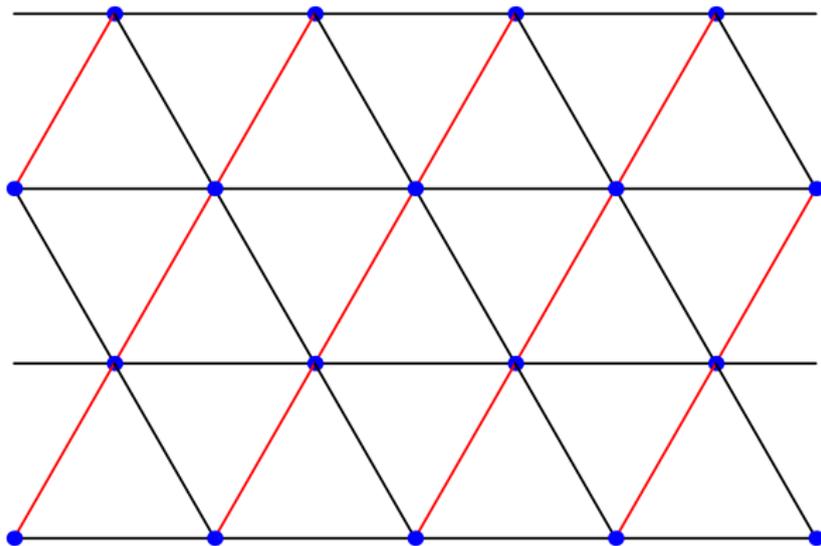


Condition 1: $(1 - p) \cdot \theta_{00} + p \cdot \theta_{01} = (1 - p) \cdot \theta_{10} + p \cdot \theta_{11} = p$

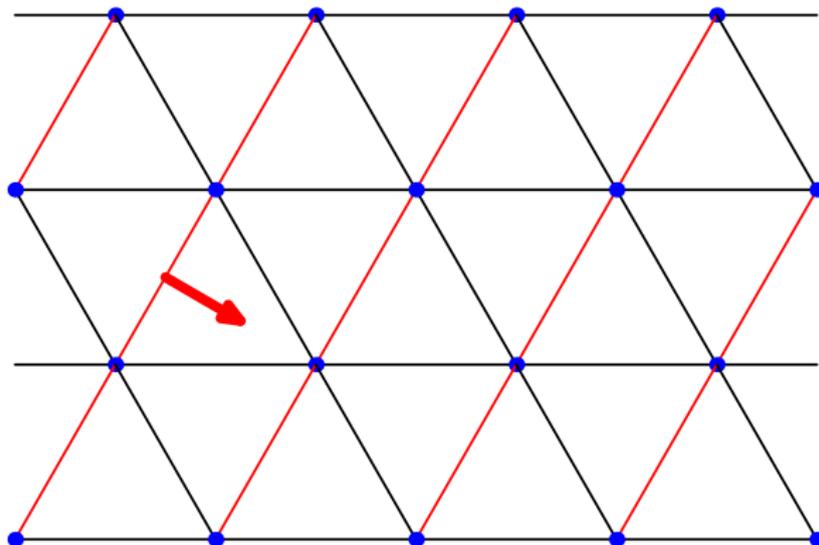


Sous la condition 1, si $(X, Y) \sim \mathcal{B}(p) \otimes \mathcal{B}(p)$, alors $X \perp\!\!\!\perp Z$.

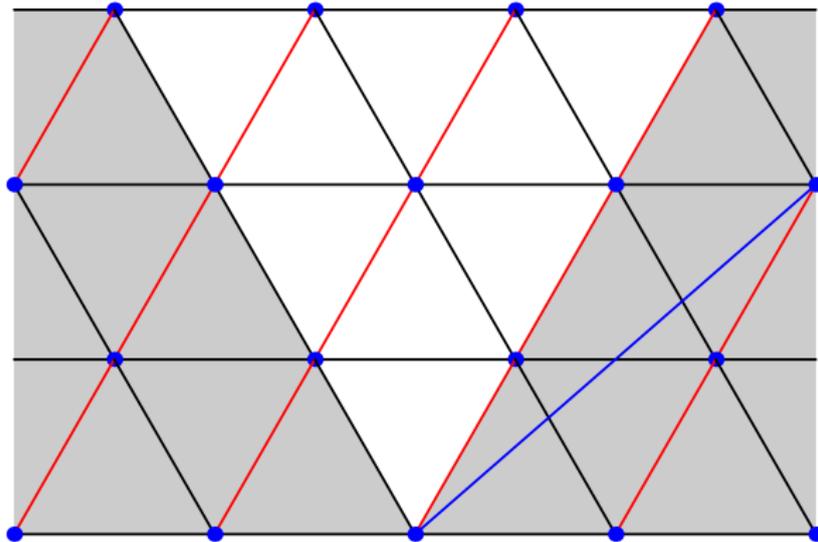
Chaque ligne rouge est constituée de variables i.i.d. $\mathcal{B}(p)$.



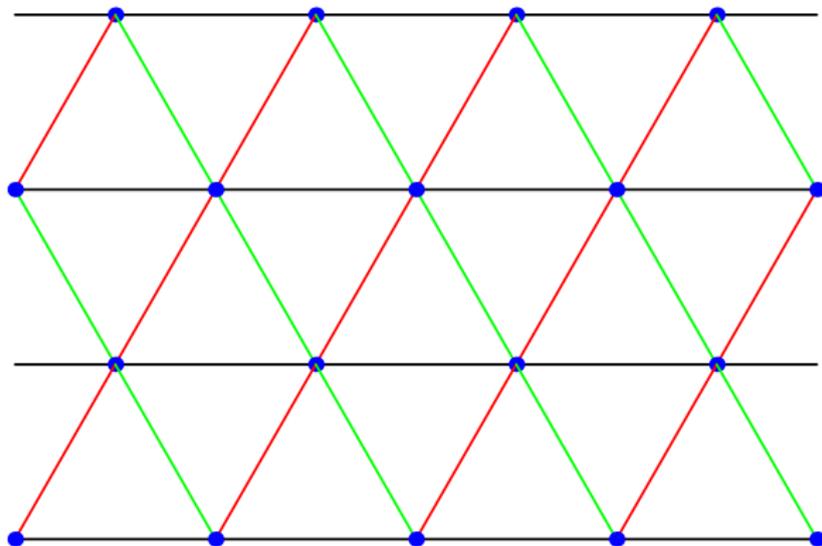
Même distribution que si on itérait l'ACP *conjugué* de paramètres $\vartheta_{ij} = \theta_{ji}$ dans cette direction.



Les lignes en dehors du cône de dépendance sont constituées de variables i.i.d. $\mathcal{B}(p)$.



Chaque ligne du diagramme espace-temps sauf (éventuellement) les lignes vertes forme des variables i.i.d. $\mathcal{B}(p)$.



- 1 $(1 - p) \cdot \theta_{00} + p \cdot \theta_{01} = (1 - p) \cdot \theta_{10} + p \cdot \theta_{11} = p$
- 2 $(1 - p) \cdot \theta_{00} + p \cdot \theta_{10} = (1 - p) \cdot \theta_{01} + p \cdot \theta_{11} = p$

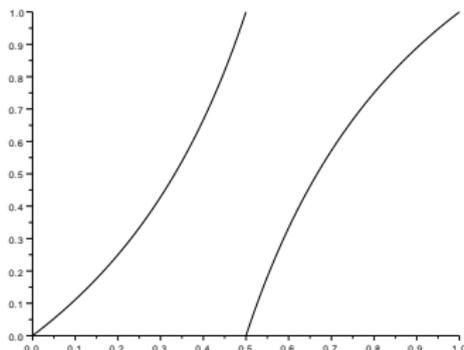
Pour n'importe quel choix de $\theta_{01} = \theta_{10}$ et $\theta_{00} \geq \theta_{01}(1 - \theta_{01})$, il existe un (unique) choix de θ_{11} tel que l'ACP satisfait les conditions 1 et 2 pour un certain p .

Pour un $p \in [0, 1]$ fixé, les conditions ① et ② sont toutes les deux satisfaites ssi :

$$\theta_{01} = \theta_{10} = s \in \left[\frac{(2p-1)}{p}, \frac{p}{(1-p)} \right]$$

$$\text{et } \theta_{00} = \frac{p}{1-p}(1-s), \quad \theta_{11} = 1 - \frac{(1-p)}{p}s.$$

Les valeurs possibles de s en fonction de p sont situées entre les deux courbes ci-dessous.



Exemples

Exemple 1

Pour $p = 1/2$, l'ACP obtenu correspond à la règle locale

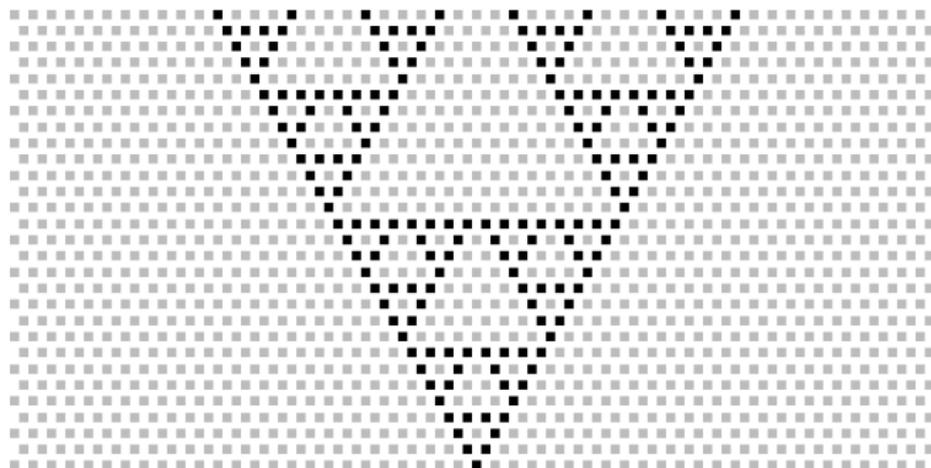
$$f(x, y) = s \cdot \delta_{x+y \pmod 2} + (1 - s) \cdot \delta_{x+y+1 \pmod 2}.$$

Exemples

Exemple 1

Pour $p = 1/2$, l'ACP obtenu correspond à la règle locale

$$f(x, y) = s \cdot \delta_{x+y \pmod 2} + (1 - s) \cdot \delta_{x+y+1 \pmod 2}.$$



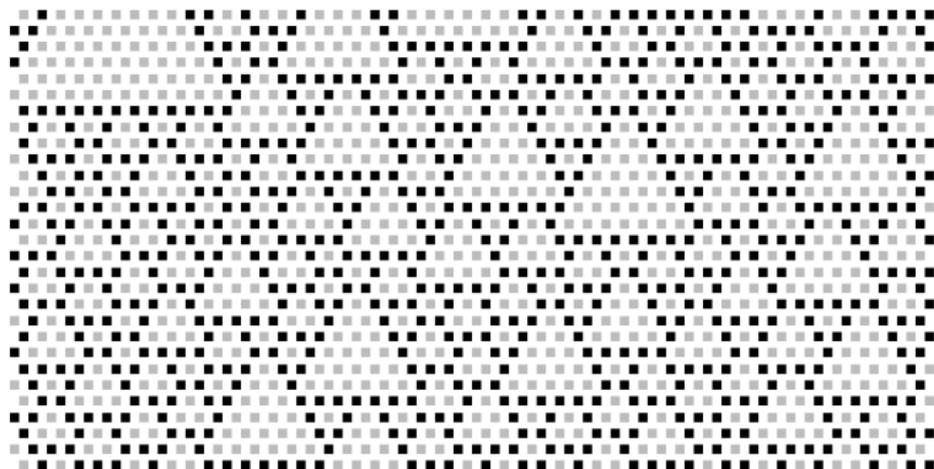
$s = 1$

Exemples

Exemple 1

Pour $p = 1/2$, l'ACP obtenu correspond à la règle locale

$$f(x, y) = s \cdot \delta_{x+y \pmod 2} + (1 - s) \cdot \delta_{x+y+1 \pmod 2}.$$



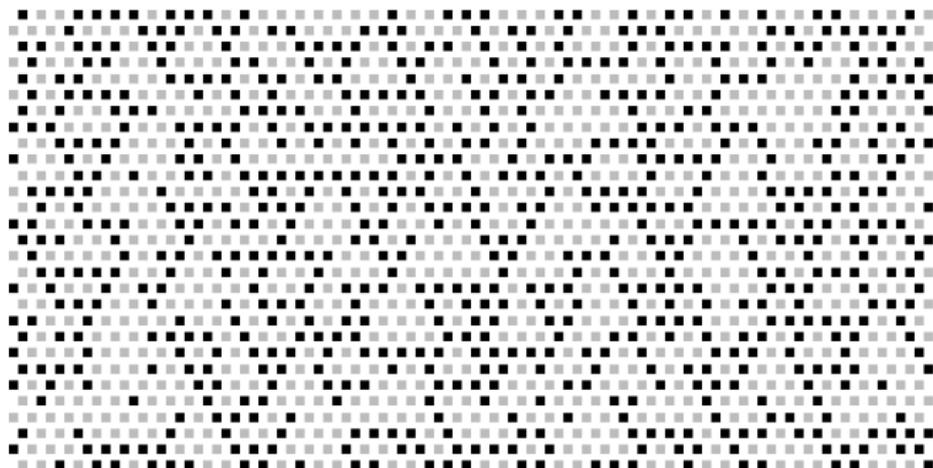
$$p = 1/2, s = 1$$

Exemples

Exemple 1

Pour $p = 1/2$, l'ACP obtenu correspond à la règle locale

$$f(x, y) = s \cdot \delta_{x+y \pmod 2} + (1 - s) \cdot \delta_{x+y+1 \pmod 2}.$$



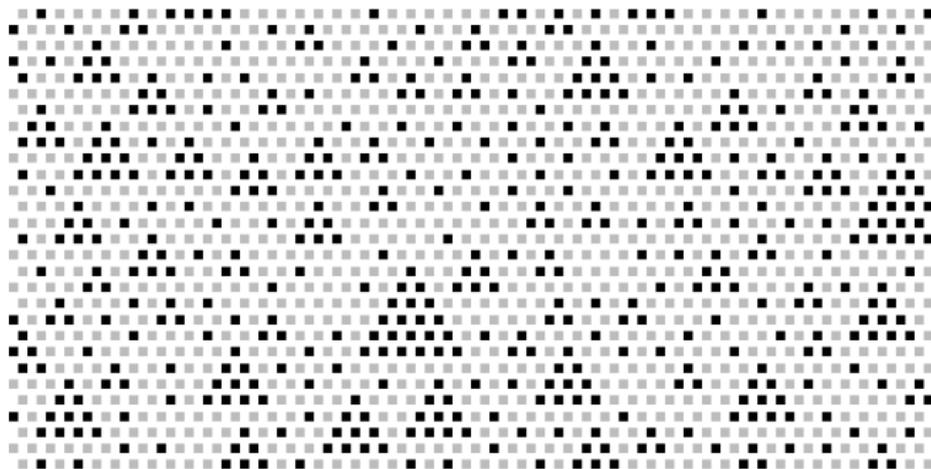
$$p = 1/2, s = 3/4$$

Exemple 2

Pour n'importe quel $p \in [0, 1/2]$, on peut poser $\theta_{01} = \theta_{10} = 0, \theta_{11} = 1$ et $\theta_{00} = p/(1 - p)$. Cet ACP interdit les triangles élémentaires (pointe en haut) avec exactement un 0.

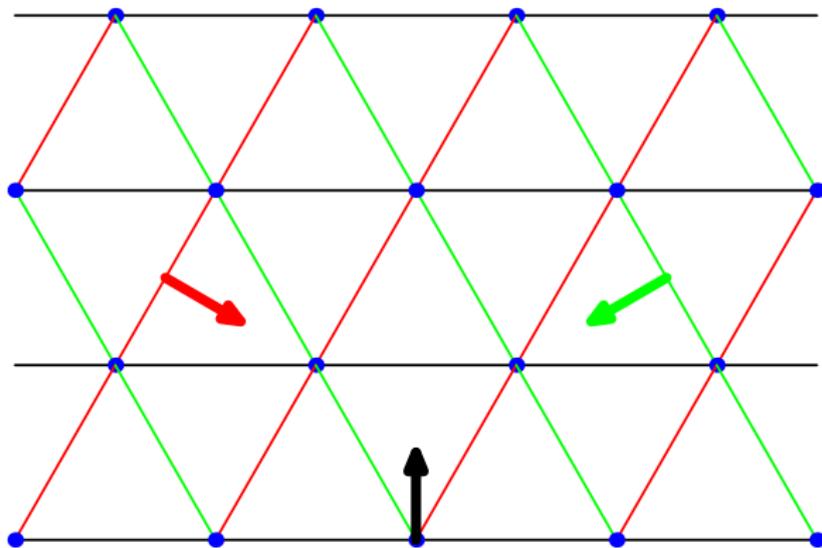
Exemple 2

Pour n'importe quel $p \in [0, 1/2]$, on peut poser $\theta_{01} = \theta_{10} = 0, \theta_{11} = 1$ et $\theta_{00} = p/(1 - p)$. Cet ACP interdit les triangles élémentaires (pointe en haut) avec exactement un 0.



$$p = 1/3, s = 0$$

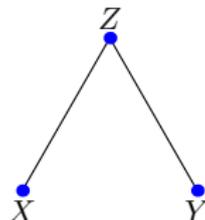
Si les conditions 1 et 2 sont toutes deux satisfaites, alors toutes les lignes du diagramme espace-temps sont i.i.d, et l'ACP apparait dans trois directions !



Triangle élémentaire

Deux points quelconques du diagramme sont i.i.d.

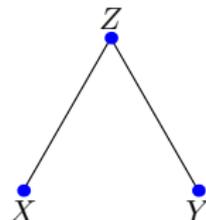
En particulier, si $(X, Y) \sim \mathcal{B}(p) \otimes \mathcal{B}(p)$, alors X, Y, Z sont $\mathcal{B}(p)$
et on a : $X \perp\!\!\!\perp Y$, $Y \perp\!\!\!\perp Z$ et $Z \perp\!\!\!\perp X$.



Triangle élémentaire

Deux points quelconques du diagramme sont i.i.d.

En particulier, si $(X, Y) \sim \mathcal{B}(p) \otimes \mathcal{B}(p)$, alors X, Y, Z sont $\mathcal{B}(p)$
et on a : $X \perp\!\!\!\perp Y$, $Y \perp\!\!\!\perp Z$ et $Z \perp\!\!\!\perp X$.

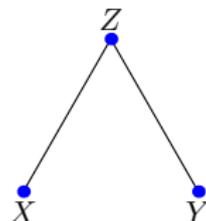


Mais les variables X, Y, Z ne sont pas indépendantes !

Triangle élémentaire

Deux points quelconques du diagramme sont i.i.d.

En particulier, si $(X, Y) \sim \mathcal{B}(p) \otimes \mathcal{B}(p)$, alors X, Y, Z sont $\mathcal{B}(p)$
et on a : $X \perp\!\!\!\perp Y$, $Y \perp\!\!\!\perp Z$ et $Z \perp\!\!\!\perp X$.

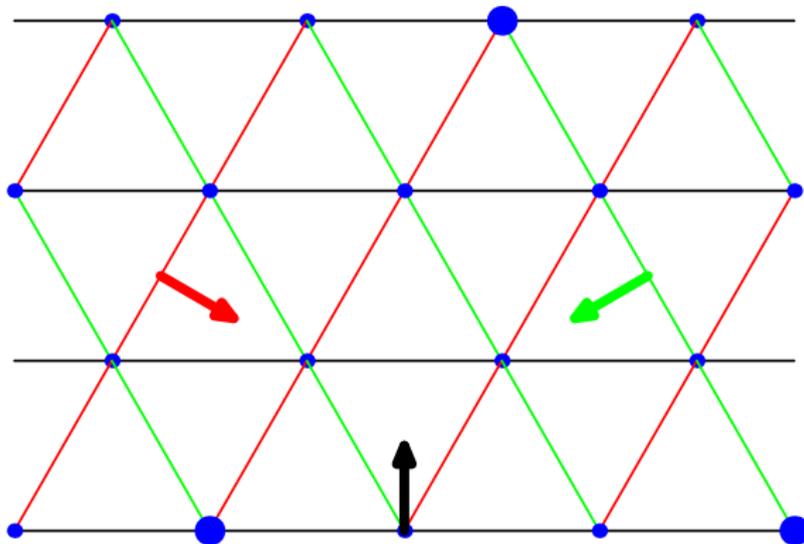


Mais les variables X, Y, Z ne sont pas indépendantes !

Proposition

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires deux à deux indépendantes, de loi $\mathcal{B}(p)$. Il existe un unique ACP qui réalise leur distribution, et cet ACP satisfait les conditions ① et ②.

On peut démontrer que trois variables du diagramme ne sont pas i.i.d ssi elles forment un triangle équilatéral pointe en haut.



Décroissance exponentielle des corrélations pour de tels triangles.

Plan de l'exposé

- 1 Automates cellulaires probabilistes
 - Définitions et notations
 - Diagrammes espace-temps
- 2 Champs aléatoires non triviaux à directions i.i.d.
 - Mesures de Bernoulli invariantes
 - Étude du diagramme espace-temps
- 3 Extensions
 - Mesures markoviennes invariantes
 - Alphabets plus grands
 - Cas déterministe

Mesures markoviennes

Soit $a, b \in (0, 1)$. La *mesure markovienne* sur $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} \\ q_{1,0} & q_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$$

est la mesure ν_Q définie par:

$$\forall x = x_m \cdots x_n, \quad \nu_Q[x] = \pi_{x_m} \prod_{i=m}^{n-1} q_{x_i, x_{i+1}}.$$

où $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ est tel que $\pi Q = \pi$, $\pi_0 + \pi_1 = 1$, c'est-à-dire $\pi_0 = (1-b)/(1-b+a)$ et $\pi_1 = a/(1-b+a)$.

Pour une mesure markovienne fixée ν_Q , on peut calculer récursivement $\nu_Q F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et chercher à quelle condition $\nu_Q F = \nu_Q$.

Pour une mesure markovienne fixée ν_Q , on peut calculer récursivement $\nu_Q F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et chercher à quelle condition $\nu_Q F = \nu_Q$.

Proposition [Toom et al. 1990, Mairesse-M. 2012]

Un ACP (non-dégénéré) a une mesure markovienne invariante si ses paramètres satisfont :

$$\theta_{00} \theta_{11} (1 - \theta_{01}) (1 - \theta_{10}) = \theta_{01} \theta_{10} (1 - \theta_{00}) (1 - \theta_{11}).$$

Pour une mesure markovienne fixée ν_Q , on peut calculer récursivement $\nu_Q F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et chercher à quelle condition $\nu_Q F = \nu_Q$.

Proposition [Toom et al. 1990, Mairesse-M. 2012]

Un ACP (non-dégénéré) a une mesure markovienne invariante si ses paramètres satisfont :

$$\theta_{00} \theta_{11} (1 - \theta_{01}) (1 - \theta_{10}) = \theta_{01} \theta_{10} (1 - \theta_{00}) (1 - \theta_{11}).$$

Pas de description simple des mesures dans d'autres directions.

Pour une mesure markovienne fixée ν_Q , on peut calculer récursivement $\nu_Q F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et chercher à quelle condition $\nu_Q F = \nu_Q$.

Proposition [Toom et al. 1990, Mairesse-M. 2012]

Un ACP (non-dégénéré) a une mesure markovienne invariante si ses paramètres satisfont :

$$\theta_{00} \theta_{11} (1 - \theta_{01}) (1 - \theta_{10}) = \theta_{01} \theta_{10} (1 - \theta_{00}) (1 - \theta_{11}).$$

Pas de description simple des mesures dans d'autres directions.
Mais réversibilité en temps !

Alphabet $\mathcal{A} = \{0, \dots, n\}$.

θ_{ij}^k = proba d'avoir k si voisinage dans l'état i, j .

Alphabet $\mathcal{A} = \{0, \dots, n\}$.

θ_{ij}^k = proba d'avoir k si voisinage dans l'état i, j .

Les conditions 1 et 2 se généralisent : pour $p = (p_0, \dots, p_n)$, la mesure de Bernoulli μ_p est invariante si une des conditions suivantes est satisfaite.

$$\forall i \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{A}, \sum_{j \in \mathcal{A}} p_j \theta_{ij}^k = p_k$$

$$\forall j \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{A}, \sum_{i \in \mathcal{A}} p_i \theta_{ij}^k = p_k$$

Alphabet $\mathcal{A} = \{0, \dots, n\}$.

θ_{ij}^k = proba d'avoir k si voisinage dans l'état i, j .

Les conditions 1 et 2 se généralisent : pour $p = (p_0, \dots, p_n)$, la mesure de Bernoulli μ_p est invariante si une des conditions suivantes est satisfaite.

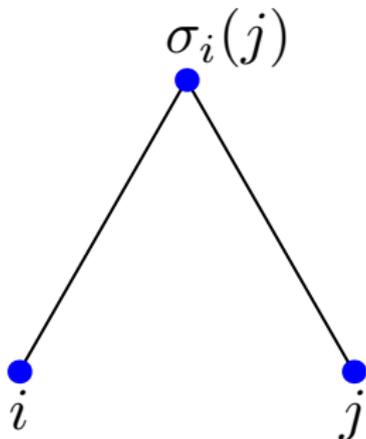
$$\forall i \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{A}, \sum_{j \in \mathcal{A}} p_j \theta_{ij}^k = p_k$$

$$\forall j \in \mathcal{A}, \forall k \in \mathcal{A}, \sum_{i \in \mathcal{A}} p_i \theta_{ij}^k = p_k$$

Mêmes propriétés d'indépendance spatiale. En particulier, si les deux conditions sont satisfaites, toutes les lignes sont i.i.d.

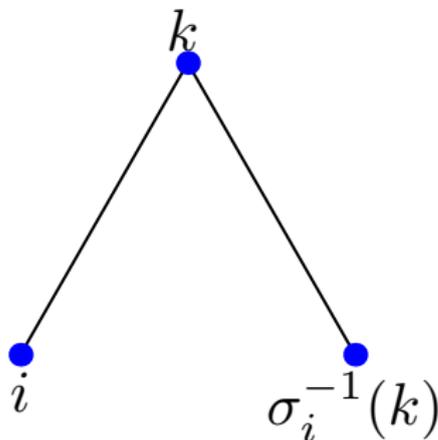
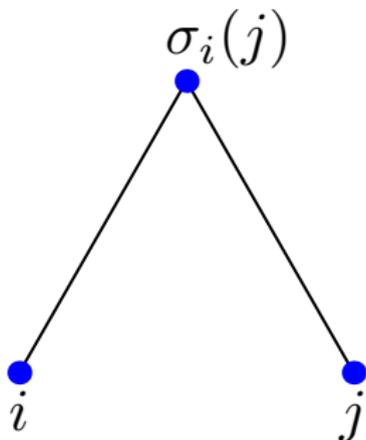
Dans le cas déterministe, on retrouve les automates cellulaires **permutatifs** !

Un automate cellulaire déterministe de fonction de transition $f : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$, est **permutatif à droite** si pour tout $i \in \mathcal{A}$, l'application de \mathcal{A} vers \mathcal{A} définie par : $\sigma_i : j \mapsto f(ij)$ est bijective.



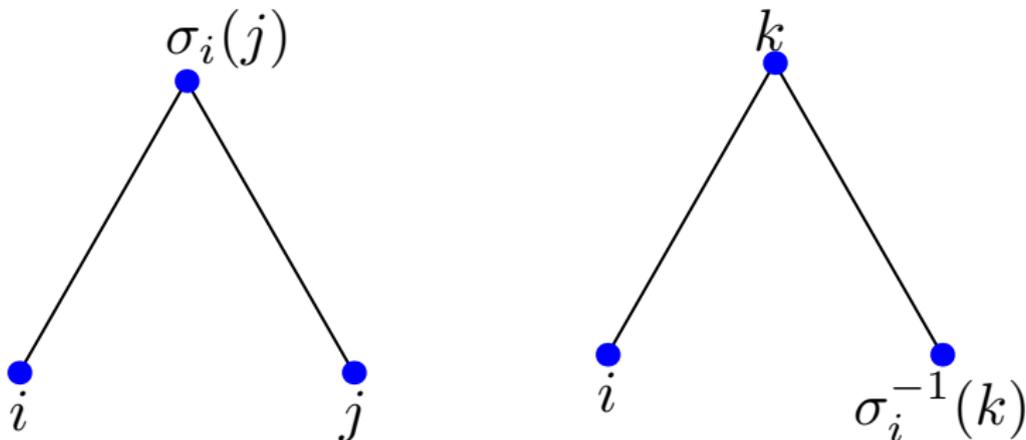
Dans le cas déterministe, on retrouve les automates cellulaires **permutatifs** !

Un automate cellulaire déterministe de fonction de transition $f : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$, est **permutatif à droite** si pour tout $i \in \mathcal{A}$, l'application de \mathcal{A} vers \mathcal{A} définie par : $\sigma_i : j \mapsto f(ij)$ est bijective.



Dans le cas déterministe, on retrouve les automates cellulaires **permutatifs** !

Un automate cellulaire déterministe de fonction de transition $f : \mathcal{A}^2 \rightarrow \mathcal{A}$, est **permutatif à droite** si pour tout $i \in \mathcal{A}$, l'application de \mathcal{A} vers \mathcal{A} définie par : $\sigma_i : j \mapsto f(ij)$ est bijective.



Un AC est **permutatif** s'il est permutatif à gauche ou à droite.

Théorème [Hedlund 1969]

Soit $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un automate cellulaire,

F est surjectif \iff la mesure de Bernoulli uniforme est invariante.

Théorème [Hedlund 1969]

Soit $F : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ un automate cellulaire,

F est surjectif \iff la mesure de Bernoulli uniforme est invariante.

Remarque : il existe des automates cellulaires surjectifs non permutatifs...

Soit $u \in \mathcal{A}^+$. On a $F(\dots uuu \dots) = \dots vvv \dots$
On note $F(u) = v$, avec $|u| = |v|$.

Soit $u \in \mathcal{A}^+$. On a $F(\dots uuu \dots) = \dots vvv \dots$
On note $F(u) = v$, avec $|u| = |v|$.

Théorème [Kari-Taati, 2012]

La mesure μ_p , $p = (p_i)_{i \in \mathcal{A}}$, $p_i > 0$ pour tout i , est invariante pour F ssi :

(i) F est surjectif

$$\text{et (ii) } \forall u \in \mathcal{A}^+, \sum_{i \in \mathcal{A}} |u|_i \log(p_i) = \sum_{i \in \mathcal{A}} |F(u)|_i \log(p_i).$$

Perspectives

Perspectives

- Pour des paramètres $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11}$ donnés, on ne connaît pas d'expression de la (ou des) mesure(s) invariante(s).

Perspectives

- Pour des paramètres $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11}$ donnés, on ne connaît pas d'expression de la (ou des) mesure(s) invariante(s).
- Question ouverte: si $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11} \in (0, 1)$, est-ce que la mesure invariante est unique ?

Perspectives

- Pour des paramètres $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11}$ donnés, on ne connaît pas d'expression de la (ou des) mesure(s) invariante(s).
- Question ouverte: si $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11} \in (0, 1)$, est-ce que la mesure invariante est unique ?
- Certains ACP sont liés à des modèles d'animaux dirigés ou de percolation.

Perspectives

- Pour des paramètres $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11}$ donnés, on ne connaît pas d'expression de la (ou des) mesure(s) invariante(s).
- Question ouverte: si $\theta_{00}, \theta_{01}, \theta_{10}, \theta_{11} \in (0, 1)$, est-ce que la mesure invariante est unique ?
- Certains ACP sont liés à des modèles d'animaux dirigés ou de percolation.
- Aussi des questions du côté des automates cellulaires déterministes, par exemple : caractérisation des AC surjectifs et conservatifs ?

Références

- A. Toom, N. Vasilyev, O. Stavskaya, L. Mityushin, G. Kurdyumov, and S. Pirogov. *Stochastic cellular systems: ergodicity, memory, morphogenesis*, 1990.
- M. Bousquet-Mélou. *New enumerative results on two-dimensional directed animals*, 1998.
- P. Gács. *Reliable cellular automata with self-organization*, 2001.

Références

- A. Toom, N. Vasilyev, O. Stavskaya, L. Mityushin, G. Kurdyumov, and S. Pirogov. *Stochastic cellular systems: ergodicity, memory, morphogenesis*, 1990.
- M. Bousquet-Mélou. *New enumerative results on two-dimensional directed animals*, 1998.
- P. Gács. *Reliable cellular automata with self-organization*, 2001.
- J. Mairesse, I. M. *Probabilistic cellular automata and random fields with i.i.d. directions*, 2012.
A paraître aux Annales de l'Institut Henri Poincaré.