

# Matrices unitaires et énumération de cartes

Édouard Maurel-Segala

Université d'Orsay Paris Sud 11

Travail en collaboration avec Benoît Collins et Alice Guionnet

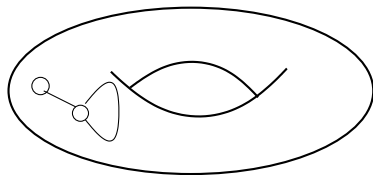
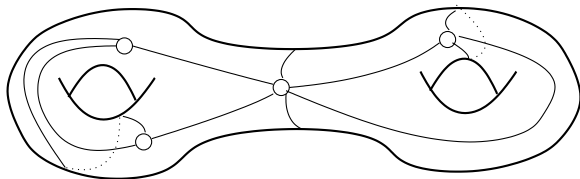
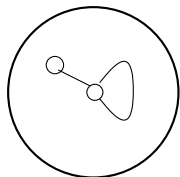
# Cartes

**carte:** découpage d'une surface en faces  $\simeq$  disques.

# Cartes

**carte:** découpage d'une surface en faces  $\simeq$  disques.

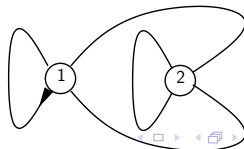
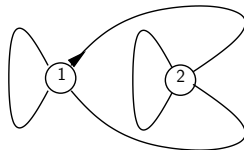
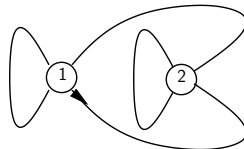
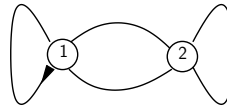
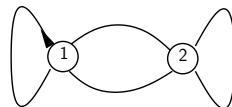
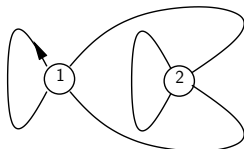
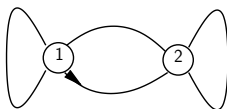
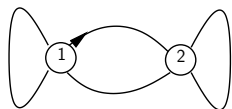
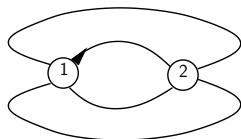
2 exemples et un contre exemple:



○ sommets

# Cartes

## Les 9 cartes planaires à 2 sommets de degré 4



# Problème de l'énumération

**Question:** Peut on énumérer à homéomorphisme près les cartes à sommets de degré 4 d'une surface donnée?

$$Q_g(t) = \sum_{\chi(\gamma)=2-2g} t^{|\mathcal{S}(\gamma)|} \quad ?$$

# Problème de l'énumération

**Question:** Peut on énumérer à homéomorphisme près les cartes à sommets de degré 4 d'une surface donnée?

$$Q_g(t) = \sum_{\chi(\gamma)=2-2g} t^{|\mathcal{S}(\gamma)|} \quad ?$$

**GUE:** loi gaussienne sur  $\mathcal{H}_N(\mathbb{C})$  i.e. matrice de Wigner à entrées gaussiennes:

$$d\mu^N(X) = \frac{1}{Z^N} \exp\left(-\frac{N}{2} \operatorname{tr}(X^2)\right) d^N X$$

# Problème de l'énumération

**Question:** Peut on énumérer à homéomorphisme près les cartes à sommets de degré 4 d'une surface donnée?

$$Q_g(t) = \sum_{\chi(\gamma)=2-2g} t^{|\mathcal{S}(\gamma)|} \quad ?$$

**GUE:** loi gaussienne sur  $\mathcal{H}_N(\mathbb{C})$  i.e. matrice de Wigner à entrées gaussiennes:

$$d\mu^N(X) = \frac{1}{Z^N} \exp\left(-\frac{N}{2} \operatorname{tr}(X^2)\right) d^N X$$

**Théorème (Brézin-Itzykson-Parisi-Zuber)**

Dans  $\mathbb{C}[[t]]$ , sous  $\mu^N$ ,

$$\frac{1}{N^2} \log \mathbb{E}[\exp(tN \operatorname{tr} X_N^4)] = Q_0(t) + \frac{1}{N^2} Q_1(t) + \dots$$

# Réduction en une intégrale sur les valeurs propres

Dans  $\mathbb{C}[[t]]$ , sous  $\mu^N$ ,

Théorème (Brézin-Itzykson-Parisi-Zuber)

$$\frac{1}{N^2} \log \mathbb{E}[\exp(tN \operatorname{tr} X_N^4)] = Q_0(t) + \frac{1}{N^2} Q_1(t) + \dots$$



# Réduction en une intégrale sur les valeurs propres

Dans  $\mathbb{C}[[t]]$ , sous  $\mu^N$ ,

Théorème (Brézin-Itzykson-Parisi-Zuber)

$$\frac{1}{N^2} \log \mathbb{E}[\exp(tN \operatorname{tr} X_N^4)] = Q_0(t) + \frac{1}{N^2} Q_1(t) + \dots$$

Réduction en une intégrale sur les valeurs propres:

$$\mathbb{E}[\exp(tN \operatorname{tr} X_N^4)] = c_N \int_{\mathbb{R}^N} (V(x))^2 \prod_{i=1}^N e^{tNx_i^4} d\nu^N(x)$$

## Variante

Dans  $\mathbb{C}[[t]]$ , sous  $\mu^N$ ,

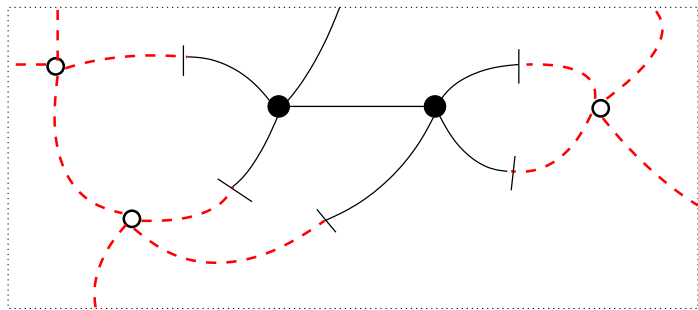
Théorème (Brézin-Itzykson-Parisi-Zuber)

$$\frac{1}{N^2} \log \mathbb{E}[\exp(tN \operatorname{tr} X_N^3)] = T_0(t) + \frac{1}{N^2} T_1(t) + \dots$$

Réduction en une intégrale sur les valeurs propres:


$$\mathbb{E}[\exp(tN \operatorname{tr} X_N^3)] = c_N \int_{\mathbb{R}^N} (V(x))^2 \prod_{i=1}^N e^{tNx_i^3} e^{-N\frac{x_i^2}{2}} d\nu^N(x)$$


# Configuration d'Ising sur une partie de graphe planaire.




—  $X$

- - -  $Y$

  $X^4$

  $Y^4$

  $XY \rightarrow c$

# Réduction en une intégrale sur les valeurs propres

Dans  $\mathbb{C}[[t]]$ , sous  $\mu^N$ ,

Théorème (Brézin-Itzykson-Parisi-Zuber)

$$\frac{1}{N^2} \log \mathbb{E}[\exp(tN \operatorname{tr} X_N^4)] = Q_0(t) + \frac{1}{N^2} Q_1(t) + \dots$$

Réduction en une intégrale sur les valeurs propres:

$$\mathbb{E}[\exp(tN \operatorname{tr} X_N^4)] = c_N \int_{\mathbb{R}^N} (V(x))^2 \prod_{i=1}^N e^{tNx_i^4} d\nu^N(x)$$

## Variante colorée

Dans  $\mathbb{C}[[t]]$ , sous  $\mu^N$ ,

Théorème (Brézin-Itzykson-Parisi-Zuber)

$$\frac{1}{N^2} \log \mathbb{E}[\exp(N \operatorname{tr} t X_N^4 + t Y_N^4 + c X_N Y_N)] = I_0(t, c) + \frac{1}{N^2} I_1(t, c) + \dots$$

avec

$$I_g(t) = \sum_{\chi(\gamma)=2-2g} \sum_{\sigma: S(\gamma) \rightarrow \{-1, +1\}} t^{|\mathcal{S}(\gamma)|} \tilde{c}^{|\mathcal{A}_{+-}|}$$

## Variante colorée

Dans  $\mathbb{C}[[t]]$ , sous  $\mu^N$ ,

Théorème (Brézin-Itzykson-Parisi-Zuber)

$$\frac{1}{N^2} \log \mathbb{E}[\exp(N \operatorname{tr} t X_N^4 + t Y_N^4 + c X_N Y_N)] = I_0(t, c) + \frac{1}{N^2} I_1(t, c) + \dots$$

avec

$$I_g(t) = \sum_{\chi(\gamma)=2-2g} \sum_{\sigma: S(\gamma) \rightarrow \{-1, +1\}} t^{|\mathcal{S}(\gamma)|} \tilde{c}^{|\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-|}$$

Réduction en une intégrale sur les valeurs propres:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\exp(N \operatorname{tr} t X_N^4 + t Y_N^4 + c X_N Y_N)] \\ &= c_N \int_{(\mathbb{R}^N)^2} \text{HCIZ}_c(x, y) (V(x))^2 \prod_{i=1}^N e^{tN x_i^4} d\nu^N(x) (V(y))^2 \prod_{i=1}^N e^{tN y_i^4} d\nu^N(y) \end{aligned}$$

# Intégrale de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber

$A_N, B_N$  matrices diagonales réelles.

# Intégrale de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber

$A_N, B_N$  matrices diagonales réelles.  $U_N \sim \text{Haar}(\mathcal{U}_N(\mathbb{C}))$

$A_N$

$U_N B_N U_N^*$



# Intégrale de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber

$A_N, B_N$  matrices diagonales réelles.  $U_N \sim \text{Haar}(\mathcal{U}_N(\mathbb{C}))$

$$\text{tr}(A_N U_N B_N U_N^*)$$

# Intégrale de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber

$A_N, B_N$  matrices diagonales réelles.  $U_N \sim \text{Haar}(\mathcal{U}_N(\mathbb{C}))$

$$\int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \operatorname{tr}(A_N U_N B_N U_N^*))$$

# Intégrale de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber

$A_N, B_N$  matrices diagonales réelles.  $U_N \sim \text{Haar}(\mathcal{U}_N(\mathbb{C}))$

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \text{tr}(A_N U_N B_N U_N^*))$$

# Intégrale de Harish-Chandra-Itzykson-Zuber

$A_N, B_N$  matrices diagonales réelles.  $U_N \sim \text{Haar}(\mathcal{U}_N(\mathbb{C}))$

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \text{tr}(A_N U_N B_N U_N^*))$$

Formule exacte:

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = c_N \frac{\det(e^{NA_N(i)B_N(j)})}{z^{\frac{N(N-1)}{2}} V(A_N) V(B_N)}$$

## Comportement en grande dimension

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \text{tr}(A_N U_N^* B_N U_N))$$

Que dire de

$$F^N(z) = \lim_N \frac{1}{N^2} \log \text{HCIZ}_z(A_N, B_N)$$

sous les hypothèses

- ▶  $\sup_N \|A_N\| < +\infty, \sup_N \|B_N\| < +\infty$
- ▶  $\frac{1}{N} \sum_i \delta_{A_N(i)} \rightarrow \mu_A, \frac{1}{N} \sum_i \delta_{B_N(i)} \rightarrow \mu_B$

## Comportement en grande dimension

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \text{tr}(A_N U_N^* B_N U_N))$$

Que dire de

$$F^N(z) = \lim_N \frac{1}{N^2} \log \text{HCIZ}_z(A_N, B_N)$$

sous les hypothèses

- ▶  $\sup_N \|A_N\| < +\infty, \sup_N \|B_N\| < +\infty$
- ▶  $\frac{1}{N} \sum_i \delta_{A_N(i)} \rightarrow \mu_A, \frac{1}{N} \sum_i \delta_{B_N(i)} \rightarrow \mu_B$

**Théorème[Guionnet-Zeitouni]**  $F^N(z)$  converge et la limite  $F$  ne dépend que de  $\mu_A$  et  $\mu_B$ .

# Comportement en grande dimension

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \text{tr}(A_N U_N^* B_N U_N))$$

Que dire de

$$F^N(z) = \lim_N \frac{1}{N^2} \log \text{HCIZ}_z(A_N, B_N)$$

sous les hypothèses

- ▶  $\sup_N \|A_N\| < +\infty, \sup_N \|B_N\| < +\infty$
- ▶  $\frac{1}{N} \sum_i \delta_{A_N(i)} \rightarrow \mu_A, \frac{1}{N} \sum_i \delta_{B_N(i)} \rightarrow \mu_B$

**Théorème[Guionnet-Zeitouni]**  $F^N(z)$  converge et la limite  $F$  ne dépend que de  $\mu_A$  et  $\mu_B$ .

**Théorème[Collins]**  $F_k = \lim_N \frac{\partial^k}{\partial z^k} F^N(z)$  existe

# Comportement en grande dimension

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \text{tr}(A_N U_N^* B_N U_N))$$

Que dire de

$$F^N(z) = \lim_N \frac{1}{N^2} \log \text{HCIZ}_z(A_N, B_N)$$

sous les hypothèses

- ▶  $\sup_N \|A_N\| < +\infty, \sup_N \|B_N\| < +\infty$
- ▶  $\frac{1}{N} \sum_i \delta_{A_N(i)} \rightarrow \mu_A, \frac{1}{N} \sum_i \delta_{B_N(i)} \rightarrow \mu_B$

**Théorème[Guionnet-Zeitouni]**  $F^N(z)$  converge et la limite  $F$  ne dépend que de  $\mu_A$  et  $\mu_B$ .

**Théorème[Collins]**  $F_k = \lim_N \frac{\partial^k}{\partial z^k} F^N(z)$  existe

$$\hat{F} := \sum_k F_k \frac{z^k}{k!} = F \quad ?$$



# Combinatoire du mouvement brownien unitaire (T. Levy)

- ▶  $U_t$  mouvement brownien unitaire sur  $\mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ :

$$\begin{cases} dU_N(t) = (idH_N(t) - I_N dt)U_N(t) \\ U_N(0) = I_N \end{cases}$$

- ▶  $A_1, \dots, A_n$  matrices  $N \times N$ .
- ▶  $\sigma$  permutation de  $\{1, \dots, n\}$  (Ex:  $\sigma = (1)(325)(46)$ )

Que dire de:

$$S_t^N(\sigma) = E[\text{tr}_N(U_t A_1) \text{tr}_N(U_t A_3 U_t A_2 U_t A_5) \text{tr}_N(U_t A_4 U_t A_6)]?$$

## Un peu de calcul d'Itô

$$dU_N(t) = (idH_N(t) - I_N dt)U_N(t)$$

$$\begin{aligned}\partial_t \operatorname{tr}(U_t A_1 \dots U_t A_n) &= \sum_i \operatorname{tr}_N(U_t A_1 \dots (idH_N(t) - \frac{I_N}{2} dt) U_t A_i \dots U_t A_n) \\ &\quad - \sum_{i < j} \operatorname{tr}_N(U_t A_1 \dots U_t A_{i-1} U_t A_j \dots U_t A_n) \operatorname{tr}_N(U_t A_i \dots U_t A_{j-1})\end{aligned}$$

Conséquence pour  $\sigma = (1 \dots n)$  (ou toute autre permutation circulaire)

$$\begin{aligned}\partial_t S_t^N(\sigma) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} S_t^N((1 \dots (i-1)j \dots n)(i \dots j)) - \frac{n}{2} S_t^N(\sigma) \\ &= - \sum_{1 \leq i < j \leq n} S_t^N((ij) \circ \sigma) - \frac{n}{2} S_t^N(\sigma)\end{aligned}$$

# Notations

- ▶  $\sigma \rightarrow \sigma'$  si  $\sigma' = (ij) \circ \sigma$
- ▶ (split)  $\sigma$  monte vers  $\sigma'$  si  $\sigma'$  a un cycle de plus  $\sigma \nearrow \sigma'$
- ▶ (merge)  $\sigma$  descend vers  $\sigma'$  si  $\sigma'$  a un cycle de moins  $\sigma \searrow \sigma'$
- ▶ Si  $\gamma : \sigma_0 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_k$ , on note  $|\gamma| = k$  et  $g(\gamma)$  son nombre de descente.
- ▶  $g(\gamma) = d(\sigma_k, id) - d(\sigma_0, id)$  ( $d$  distance dans  $(S_n, \rightarrow)$ )

$$\partial_t S_t^N(\sigma) = - \sum_{\sigma \nearrow \sigma'} S_t^N((ij) \circ \sigma) - \frac{n}{2} S_t^N(\sigma) - \frac{1}{N^2} \sum_{\sigma \searrow \sigma'} S_t^N((ij) \circ \sigma)$$

# Un peu de calcul d'Itô

Système fini d'EDO:

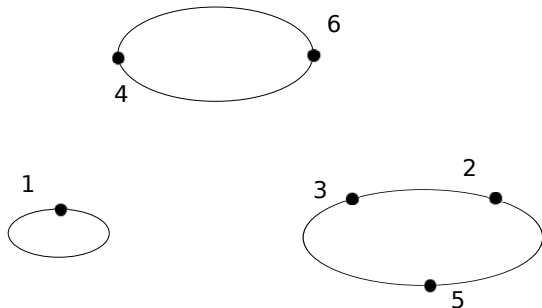
$$S_t^N(\sigma) = e^{-\frac{nt}{2}} \sum_{\gamma} \frac{(-t)^k}{k! N^{2g(\gamma)}} S_0^N(\sigma)$$

où

- ▶  $\gamma : \sigma \rightarrow \sigma_1 \cdots \rightarrow \sigma_k$  chemin fini dans le groupe symétrique partant de  $\sigma$  dont chaque pas est la composition par une transposition
- ▶  $S_0^N((1)(325)(46)) = \text{tr}_N(A_1) \text{tr}_N(A_3 A_2 A_5) \text{tr}_N(A_4 A_6)$

# Des permutations aux cartes

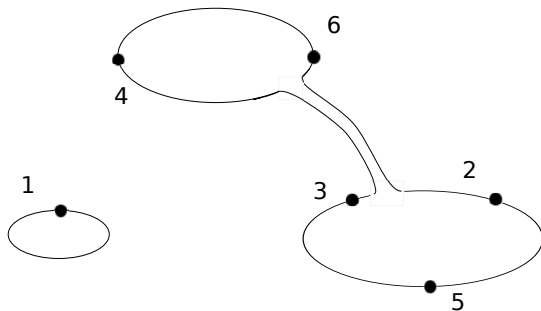
$(1)(235)(46)$



cycles  $\rightarrow$  faces

# Des permutations aux cartes

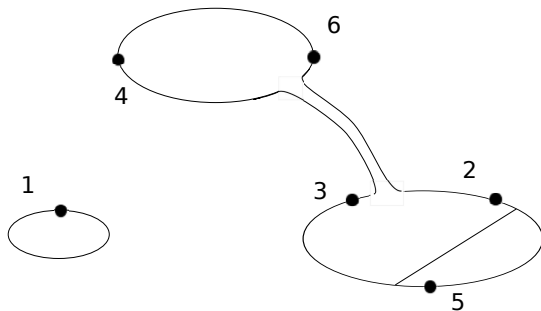
$$(1)(235)(46) \xrightarrow{(36)} (1)(26435)$$



merge  $\rightarrow$  réunion de faces

# Des permutations aux cartes

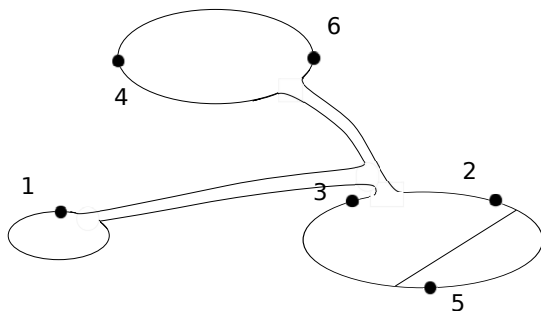
$$(1)(235)(46) \xrightarrow{(36)} (1)(26435) \xrightarrow{(25)} (1)(2643)(5)$$



split  $\rightarrow$  découpage de faces

## Des permutations aux cartes

$(1)(235)(46) \xrightarrow{(36)} (1)(26435) \xrightarrow{(25)} (1)(2643)(5) \xrightarrow{(13)}$   
 $(26413)(5)$



Carte connexe minimale (connectée avec le moins de descentes possible)



## Carte connexes minimales

$$S_t^N(\sigma) = e^{-\frac{nt}{2}} \sum_{\gamma} \frac{(-t)^k}{k! N^{2g(\gamma)}} S_0^N(\sigma)$$

Définissons la série pour les chemins correspondants aux cartes connexes minimales et où tous les  $A_i$  valent  $A$ .

**Remarque:** Tous ces chemins ont le même nombre de descentes.

$$C_A(\sigma) = \sum_{\gamma} \frac{(-1)^k}{k!} \prod_{c \in \sigma_k} \text{tr}_N(A^{|c|})$$

$\gamma : \sigma \rightarrow \sigma_1 \cdots \rightarrow \sigma_k$  chemin fini dans le groupe symétrique partant de  $\sigma$  dont chaque pas est la composition par une transposition et qui rend la carte connexe en effectuant un nombre minimal de descente.

## Retour à HCIZ

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \text{tr}(A_N U_N B_N U_N^*))$$

## Retour à HCIZ

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \operatorname{tr}(A_N U_N B_N U_N^*))$$

$$\partial_z \frac{1}{N^2} \log \text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = E\left[\frac{1}{N} \operatorname{tr}(A_N U_N B_N U_N^*)\right]$$

où  $U_N$  est choisie selon la mesure

$$d\mu^N(U) = \exp(zN \operatorname{tr}(A_N U_N^* B_N U_N)) d\text{Haar}(U_N)$$

## Retour à HCIZ

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \operatorname{tr}(A_N U_N B_N U_N^*))$$

$$\partial_z \frac{1}{N^2} \log \text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = E\left[\frac{1}{N} \operatorname{tr}(A_N U_N B_N U_N^*)\right]$$

où  $U_N$  est choisie selon la mesure

$$d\mu^N(U) = \exp(zN \operatorname{tr}(A_N U_N^* B_N U_N)) d\text{Haar}(U_N)$$

Sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $e^{-V(x)} dx$ : mesure invariante de  $dX_t = dB_t - \nabla V(X_t) dt$

## Retour à HCIZ

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \operatorname{tr}(A_N U_N B_N U_N^*))$$

$$\partial_z \frac{1}{N^2} \log \text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = E\left[\frac{1}{N} \operatorname{tr}(A_N U_N B_N U_N^*)\right]$$

où  $U_N$  est choisie selon la mesure

$$d\mu^N(U) = \exp(zN \operatorname{tr}(A_N U_N^* B_N U_N)) d\text{Haar}(U_N)$$

Sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $e^{-V(x)} dx$ : mesure invariante de  $dX_t = dB_t - \nabla V(X_t) dt$

Ici,  $\mu^N$  est la mesure invariante de la diffusion sur  $\mathcal{U}_N(\mathbb{C})$

$$dU_N(t) = (idH_N(t) - I_N dt) U_N(t) + (U_N A_N U_N^* B_N - U_N^* B_N U_N A_N) dt$$

# Équation de boucles

Pour  $P$  mot non-commutatif en  $A$  et  $B$  l'invariance de  $P(A_N, U_N B_N U_N^*)$  sous l'action de la diffusion donne avec  $\tilde{B}_N = U_N B_N U_N^*$

$$\begin{aligned} & \sum_{P=RBS} E[\mathrm{tr}_N(R(A_N, \tilde{B}_N)) \mathrm{tr}_N(\tilde{B}_N S(A_N, \tilde{B}_N))] \\ & - \sum_{P=RBS} E[\mathrm{tr}_N(R(A_N, \tilde{B}_N) \tilde{B}_N) \mathrm{tr}_N(S(A_N, \tilde{B}_N))] \\ & + z E[\mathrm{tr}_N((\tilde{B}_N A_N - A_N \tilde{B}_N) P(A_N, \tilde{B}_N))] = 0 \end{aligned}$$

# Équation de boucles

Pour  $P$  mot non-commutatif en  $A$  et  $B$  l'invariance de  $P(A_N, U_N B_N U_N^*)$  sous l'action de la diffusion donne avec  $\tilde{B}_N = U_N B_N U_N^*$

$$\begin{aligned} & \sum_{P=RBS} E[\mathrm{tr}_N(R(A_N, \tilde{B}_N)) \mathrm{tr}_N(\tilde{B}_N S(A_N, \tilde{B}_N))] \\ & - \sum_{P=RBS} E[\mathrm{tr}_N(R(A_N, \tilde{B}_N) \tilde{B}_N) \mathrm{tr}_N(S(A_N, \tilde{B}_N))] \\ & + z E[\mathrm{tr}_N((\tilde{B}_N A_N - A_N \tilde{B}_N) P(A_N, \tilde{B}_N))] = 0 \end{aligned}$$

Les points d'accumulations  $\tau$  de la distribution de moments non-commutatifs  $P \rightarrow E[\mathrm{tr}_N(P(A_N, \tilde{B}_N))]$  satisfont:

$$\sum_{P=RBS} \tau(R)\tau(BS) - \tau(RB)\tau(S) + z\tau((BA - AB)P) = 0$$

# Théorème [Collins Guionnet M.-S.]

$$\text{HCIZ}_z(A_N, B_N) = \int_{\mathcal{U}_N(\mathbb{C})} \exp(zN \text{tr}(A_N U_N^* B_N U_N))$$

- ▶  $\sup_N \|A_N\| < +\infty, \sup_N \|B_N\| < +\infty$
- ▶  $\frac{1}{N} \sum_i \delta_{A_N(i)} \rightarrow \mu_A, \frac{1}{N} \sum_i \delta_{B_N(i)} \rightarrow \mu_B$

Alors  $|z| < z_0$ ,

- ▶ Unicité du  $\tau$  satisfaisant pour tout  $P$

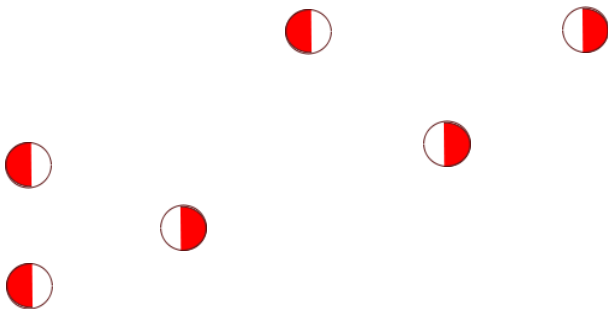
$$\sum_{P=RS} \tau(R)\tau(S) - \tau(RS) + z\tau((BA - AB)P) = 0$$

- ▶  $\tau$  est analytique en  $z$
- ▶ Pour tout  $P$ , sous la loi de densité  $\exp(zN \text{tr}(A_N U_N^* B_N U_N))$ ,  $\text{tr}_N(P(A_N, \tilde{B}_N))$  converge vers  $\tau(P)$
- ▶  $F^N(z) = \lim_N \frac{1}{N^2} \log \text{HCIZ}_z(A_N, B_N)$  converge vers  $\hat{F}$



# $F^N(z)$ comme comptage de cartes

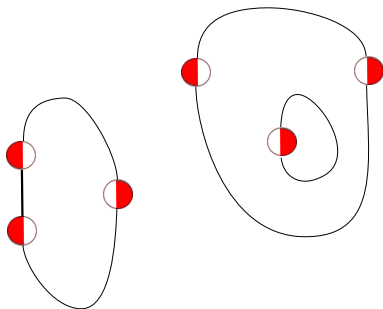
Construisons une carte à 6 sommets:



A blanc B rouge

# $F^N(z)$ comme comptage de cartes

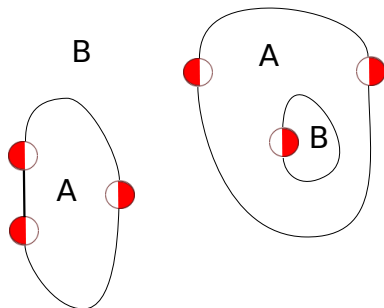
Construisons une carte à 6 sommets:



on relie de manière compatible les sommets

# $F^N(z)$ comme comptage de cartes

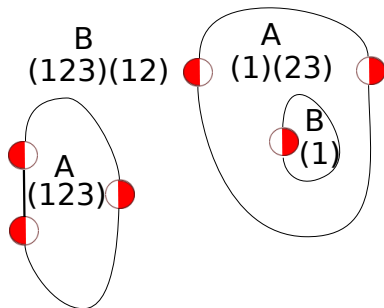
Construisons une carte à 6 sommets:



on identifie les faces  $A$  et les faces  $B$

# $F^N(z)$ comme comptage de cartes

Construisons une carte à 6 sommets:



on identifie les permutations associées

## $F^N(z)$ comme comptage de cartes

$$F^N(z) = \sum_{\gamma} z^{|\gamma|} \prod_{F \in \gamma} \theta(F)$$

où

- ▶  $\gamma$  carte à  $|\gamma|$  sommets
- ▶  $\theta(A, \sigma) = C_A(\sigma)$
- ▶  $\theta(B, \sigma) = C_B(\sigma)$

Rappel:

$$C_A(\sigma) = \sum_{\gamma} \frac{(-1)^k}{k!} \prod_{c \in \sigma_k} \text{tr}_N(A^{|c|})$$

$\gamma : \sigma \rightarrow \sigma_1 \cdots \rightarrow \sigma_k$  chemin fini dans le groupe symétrique partant de  $\sigma$  dont chaque pas est la composition par une transposition et qui rend la carte connexe en effectuant un nombre minimal de descente.