



Une application des algèbres de Hopf combinatoires

Journées de Combinatoire de Bordeaux, janvier 2010

Jean-Christophe Novelli

Institut Gaspard Monge / Université Paris-Est Marne-la-Vallée

Travail en commun avec J.-Y. Thibon et L. Williams



Introduction

Les algèbres de Hopf combinatoires ont des applications à différents contextes combinatoires :

- fonctions de Bessel,
- $(q-)$ inversion de Lagrange (non-commutative),
- revisite les algorithmes classiques (ABR, AD, ...),
- fonctions de parking,
- ...

Ici : q -énumération des tableaux de permutation.

Principe : utiliser les *contraintes* de l'algèbre pour

- trouver les questions intermédiaires naturelles,
- régler la partie algébrique en un coup de cuiller,
- s'occuper des (un)easy lemmes combinatoires.



Les tableaux de permutation, leurs formes, et le reste

Objets combinatoires provenant de l'étude de la partie totalement positive des Grassmaniennes. On n'utilisera ici aucune définition !

Tout ce dont on a besoin : à travers une bijection simple et naturelle,

Forme des TP \sim *Tops des descentes* des permutations.

Tops des descentes :

3	21	12	111
123	132 231 312	213	321



Hopf ? \mapsto raffiner les tops des descentes par les *reculs*

$$\mathfrak{M}_3 =$$

DT \ Rec	3	21	12	111
3	123			
21		$\begin{matrix} 132 \\ 312 \end{matrix}$	231	
12			213	
111				321

Cette "matrice" est la matrice de transition dans **NCSF** entre les fonctions de Schur rubans et la base L , dite *fondamentale de Tevlin*.

$$R_{21} = 2L_{21} \quad R_{12} = L_{21} + L_{12}.$$



Question 1: énumérer les TP par forme ?

Définissons la *base monomiale de Tevlin* Ψ :

$$L_I = \sum_{J \text{ fin } I} \Psi_J,$$

de sorte que

$$RL_4 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 3 & 2 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 3 & \cdot & 2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad R\Psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & 3 & 2 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 2 & 3 & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 3 & 2 & \cdot & 2 & 3 & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & 3 & 5 & 3 & 3 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Q. équiv. : calculer les sommes E_I des lignes de RL_n .

Avec un peu d'habitude : plus simple de calculer C_I sur $R\Psi_n$...



Un premier résultat (facile)

I	4	31	22	211	13	121	112	1111
C_I	1	8	4	18	2	12	6	24

On devine *et* on montre

$$I = (i_1, \dots, i_r) \mapsto C_I := r^{i_1} (r-1)^{i_2} \dots 1^{i_r}.$$

D'où, par inclusion-exclusion, on trouve les E_I .

Ex.:

$$E_{211} = C_{211} - C_{22} - C_{31} + C_4 = 7.$$



Autres coefficients combinatoires

C_I donne le développement de $\sum_J R_J$ sur les Ψ . Mais
 $\sum_J R_J = S_1^n!$

Qu'en est-il des autres S^I ?

$$S\Psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2.3 & 2 & 2.3 & 2.2 & 2.2.2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2.2 & 2.2 \\ 1 & 4 & 4.3/2 & 3.4 & 3 & 3.3 & 3.3 & 2.3.3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2.3 & 3 & 3.3 & 2.3 & 2.2.3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2.3 & 2.3 \\ 1 & 4 & 4.3/2 & 3.4 & 4 & 3.4 & 3.4 & 2.3.4 \end{pmatrix}$$

Formule générale : ce sont des produits de binomiaux.



Retour aux TP : les q -analogues !

Via la bijection, la puissance de q vaut $\# \text{ motifs } 31 - 2 \text{ dans } \sigma$.

$$R_q L_{q_4} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ \cdot & 1 + q + q^2 & 1 + q & \cdot & 1 & q & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 + q & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & q & 1 + q + q^2 & \cdot & 1 + q & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 + q & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

Ex.: les contributions q^2 sont 4123 et 4132.



Question 2: q -compter les permutations par forme ?

Essentiellement même calcul que précédemment avec une q -matrice de transition entre les Ψ et les L :

$$L_q \Psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q & q^2 & q^3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q & \cdot & \cdot & q^2 & q^3 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & q & \cdot & q^2 & \cdot & q^3 & \cdot \\ 1 & q & q^2 & q^3 & q^3 & q^4 & q^5 & q^6 \end{pmatrix}$$

C'est l'indice majeur de la *composition de raffinement* de l et J .

Des R aux Ψ

La q -matrice de transition donne

$$R_q \Psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot \\ 1 & q[3] & q+q^2 & \cdot & q & q^2 & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & q+q^2 & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q[3] & q+2q^2+q^3+q^4 & q^3[3] & q+q^2 & q^2+q^3+q^4 & q^3 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & q & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q[3] & q+q^2 & \cdot & q+q^2 & q^2+q^3+q^4 & q^3 & \cdot \\ 1 & \cdot & q+q^2 & \cdot & q+q^2 & \cdot & q^3 & \cdot \\ 1 & q[3] & q+2q^2+q^3+q^4 & q^3[3] & q[3] & q^2+q^3+2q^4+q^5 & q^3[3] & q^6 \end{pmatrix}$$

La somme est le q -analogue direct de la précédente :

$$I = (i_1, \dots, i_r) \mapsto C_I(q) := [r]^{i_1} [r-1]^{i_2} \dots 1^{i_r}.$$



D'autres q -coefficients combinatoires

Même principe : pourquoi se limiter à la dernière ligne de la q -matrice entre les S et les Ψ ?

Un petit miracle se produit :

$$S_q \Psi_4 = \begin{pmatrix} [1] & [1] & [1] & [1] & [1] & [1] & [1] & [1] \\ [1] & [4] & [3] & [2][3] & [2] & [2][3] & [2][2] & [2][2][2] \\ [1] & [1] & [3] & [3] & [2] & [2] & [2][2] & [2][2] \\ [1] & [4] & [4][3]/[2] & [3][4] & [3] & [3][3] & [3][3] & [2][3][3] \\ [1] & [1] & [1] & [1] & [2] & [2] & [2] & [2] \\ [1] & [4] & [3] & [2][3] & [3] & [3][3] & [2][3] & [2][2][3] \\ [1] & [1] & [3] & [3] & [3] & [3] & [2][3] & [2][3] \\ [1] & [4] & [4][3]/[2] & [3][4] & [4] & [3][4] & [3][4] & [2][3][4] \end{pmatrix}$$



Démonstrations

La méthode Hopf et ce qu'il reste à faire !

- Interprétation combinatoire des $S\Psi_n$: statistiques sur les *matrices tassées d'entiers* M
 - Colonnes = évaluation colonne de M ,
 - Lignes = composition des positions des dernières lettres du mot associé à M ,
 - Puissances de q = *inversions particulières* du mot associé à M .
- Interprétation combinatoire naturelle de $R\Psi_n$: statistiques sur les *mots tassés* w
 - Colonnes = composition des descentes de w ,
 - Lignes = compositions des positions des dernières lettres de w ,
 - Puissances de q = *inversions particulières* de w .

Jusque là, tout va bien.



Démonstrations (2/2)

Les matrices $S_q L_{q_n}$ et $R_q L_{q_n}$ provenant des TP ne donnent rien : ne rentrent pas dans le formalisme Hopf.

Solution : reformuler le tout !

- Interprétation combinatoire des SL_n : statistiques sur les permutations σ
 - Colonnes = plus fin que $\text{Des}(\sigma^{-1})$,
 - Lignes = composition de Lehmer de σ ,
 - Puissances de q = inversions de σ (à une puissance de q dépendant de la ligne près).
- Interprétation combinatoire de RL_n : statistiques sur les permutations σ
 - Colonnes = composition des descentes de σ^{-1} ,
 - Lignes = composition de Lehmer de σ ,
 - Puissances de q = inversions de σ (à ...)



Exemple de composition de Lehmer

σ	11	2	1	7	13	12	10	4	15	5	6	14	9	8	3
$LC(\sigma^{-1})$	2	1	12	5	6	6	1	7	6	3	0	1	0	1	0

Calculons LC :

$$\begin{aligned} \emptyset &\rightarrow \{1\} \rightarrow \{1, 3\} \rightarrow \{1, 3, 6\} \rightarrow \{1, 3, 6, 7\} \rightarrow \{1, 3, 6, 7, 4\} \\ &\rightarrow \{1, 3, 6, 7, 4, 2\} \rightarrow \{1, 3, 6, 7, 4, 2, 12\}. \end{aligned}$$

Qui veut deviner comment on calcule LC ?

Dernier exposé ? \Rightarrow Fatigués ?



Type B

Grassmanniennes co-minuscules de type B définies par Lam-Williams.

- La q -formule est la même qu'en type A à un facteur $\prod(1 + q^i)$ près,
- Comme dans le cas du type A , on peut tout régler en force,
- Besoin de nouvelles (type B) algèbres de Hopf... mais les résultats initiaux sont encourageants : seulement besoin de définir la base des Ψ^B !
- En prime : généralisation combinatoire à tout nombre de couleurs.



Ouvert pour la suite...

Conjecture : retour à RL_n !

- Colonnes = composition des descentes de σ^{-1} ,
- Lignes = composition des tops de descentes de σ ,
- Puissances de q = nombre de motifs $31 - 2$ dans σ .

Deux stratégies possibles : bijection directe (à l'intérieur des classes de reculs) ou trouver la construction de Hopf adaptée !

Application à d'autres types de tableaux de permutations ?