

Une bijection qui prouve le théorème du diamant aztèque en peignant des chemins

Frédéric Bosio Marc van Leeuwen

Laboratoire de Mathématiques et Applications
Université de Poitiers

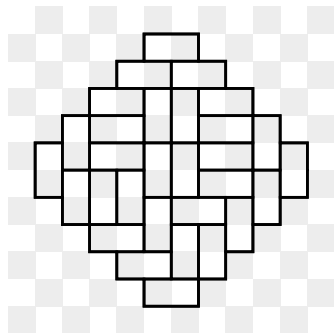
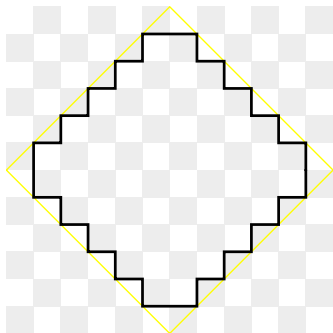
jeudi 14 février 2013 / JCB 2013, Bordeaux

Overview

- 1 Diamants aztèques et pavages par dominos
- 2 Correspondance entre pavages et familles de chemins
- 3 Calcul du nombre de familles de chemins
- 4 Une preuve bijective

Les diamants aztèques, pavages

Le “diamant aztèque” d’ordre n est l’ensemble des $4\binom{n+1}{2}$ carrés unité contenus dans le losange $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq n + 1\}$



Un diamant aztèque d’ordre 5 et un pavage par des dominos.

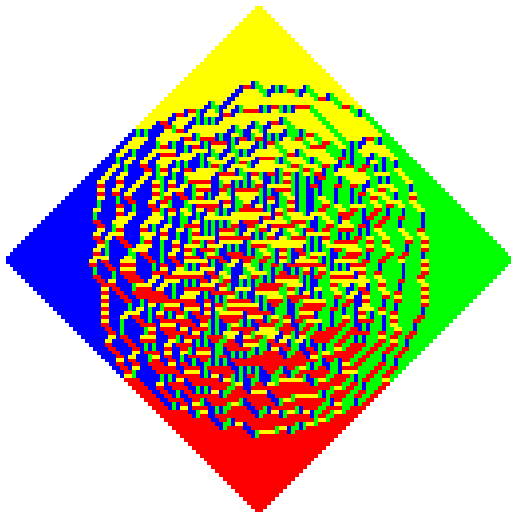
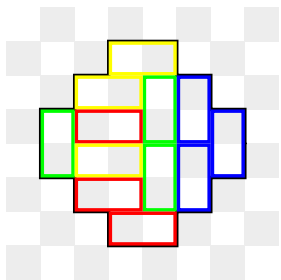
Le théorème des diamants aztèques

Théorème (Elkies, Kuperberg, Larsen, Propp ; 1992)

Le nombre de pavages du diamant aztèque d'ordre n par des dominos est égal à $2^{\binom{n+1}{2}}$.

- Formule d'une étonnante simplicité
- L'article original donne 4 preuves, toutes basées sur une correspondance avec des paires de matrices à signes alternants
- Si le nombre de pavages s'accroît rapidement avec n , c'est sensiblement moins rapide que pour les pavages d'un carré $2n \times 2n$. Par exemple pour le diamant aztèque d'ordre 14 (avec 420 carrés) on trouve $2^{105} \approx 4.05 \times 10^{31}$ pavages, contre $\approx 1.27 \times 10^{48}$ pour le carré 20×20 (400 carrés unité)
- Plus généralement le nombre de pavages est très sensible à la forme précise du bord

Le phénomène du “cercle arctique”



Overview

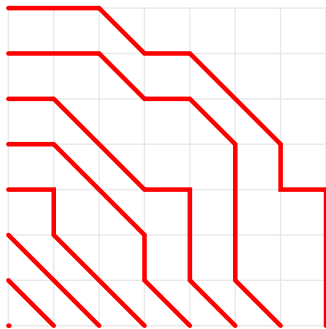
- 1 Diamants aztèques et pavages par dominos
- 2 Correspondance entre pavages et familles de chemins
- 3 Calcul du nombre de familles de chemins
- 4 Une preuve bijective

Familles de chemins disjoints

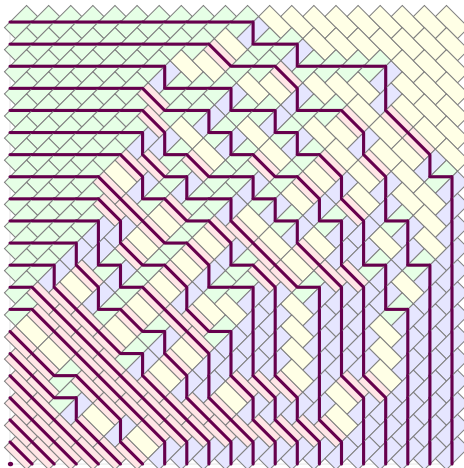
On considérera des chemins sur les points d'un réseau carré, allant globalement vers la droite et vers le bas, avec 3 types de pas : horizontaux, diagonaux, verticaux.

Une *famille* de chemins relie les $n + 1$ sommets sur le côté gauche d'un carré $n \times n$ aux $n + 1$ sommets sur son côté en bas.

La famille est dite *disjointe* si aucune paire de chemins ne visite un même point du réseau.

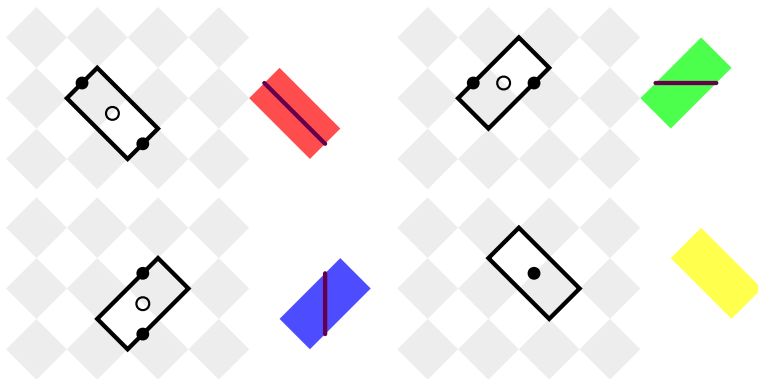


Correspondance entre pavages et familles de chemins

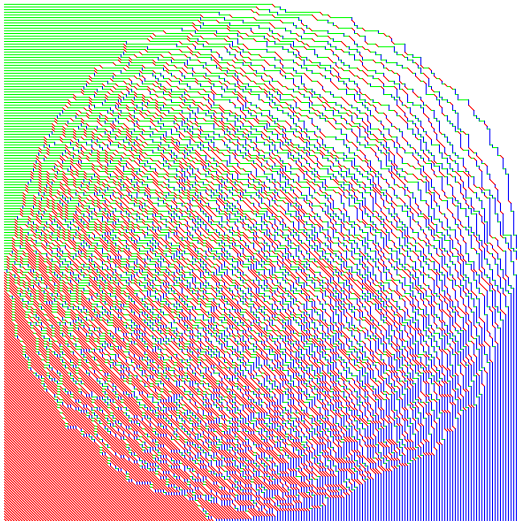


Les 4 positions d'un domino

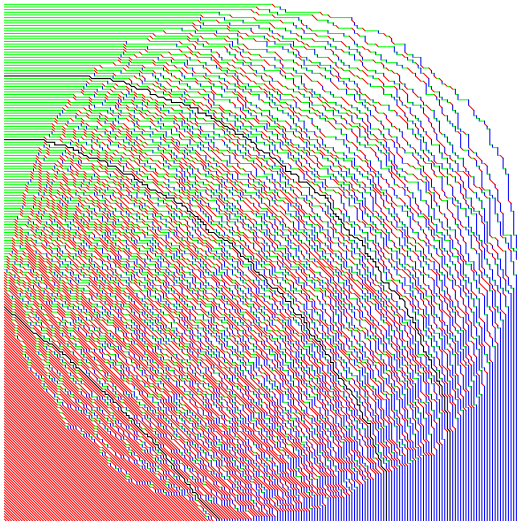
Chaque position d'un domino correspond à un type de pas des chemins, ou à l'absence d'un chemin.



Le cercle arctique dans les familles de chemins



Le cercle arctique dans les familles de chemins



Overview

- 1 Diamants aztèques et pavages par dominos
- 2 Correspondance entre pavages et familles de chemins
- 3 Calcul du nombre de familles de chemins
- 4 Une preuve bijective

Un déterminant de nombres de Delannoy

En isolation, le nombre de chemins de $(0, k)$ vers $(l, 0)$ est le nombre de Delannoy $D(k, l)$. Ces nombres sont définis par $D(k, 0) = 0 = D(0, l)$ et par la récurrence

$$D(k + 1, l + 1) = D(k + 1, l) + D(k, l) + D(k, l + 1).$$

D'après la méthode de Lindström-Gessel-Viennot, le nombre de *familles disjointes* reliant les points $((0, k))_{k=0}^n$ respectivement aux points $((l, 0))_{l=0}^n$ est $\det(\mathcal{D}_{n+1})$, où $\mathcal{D}_{n+1} = (D(k, l))_{k, l=0}^n$.

Le théorème du diamant aztèque affirme que $\det(\mathcal{D}_{n+1}) = 2^{\binom{n+1}{2}}$, par exemple :

$$\det(\mathcal{D}_5) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 \\ 1 & 7 & 25 & 63 & 129 \\ 1 & 9 & 41 & 129 & 321 \end{vmatrix} = 2^{\binom{5}{2}} = 1024.$$

Calcul récursif du déterminant

Avec $L_n = (\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1})_{i,j=0}^{n-1}$ et $U_n = (\delta_{i,j} - \delta_{i+1,j})_{i,j=0}^{n-1} = L_n^\top$ on a :

$$L_n \mathcal{D}_n U_n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathcal{D}_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{pour } n > 1.$$

Par exemple pour $n = 4$ on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 13 & 25 \\ 1 & 7 & 25 & 63 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 10 & 26 \end{pmatrix}$$

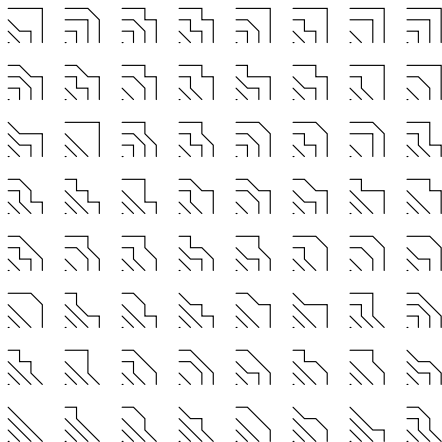
Donc $\det(\mathcal{D}_n) = 2^{n-1} \det(\mathcal{D}_{n-1})$, et par récurrence $\det(\mathcal{D}_n) = 2^{\binom{n}{2}}$.

Overview

- 1 Diamants aztèques et pavages par dominos
- 2 Correspondance entre pavages et familles de chemins
- 3 Calcul du nombre de familles de chemins
- 4 Une preuve bijective**

Des statistiques sur les familles de chemins

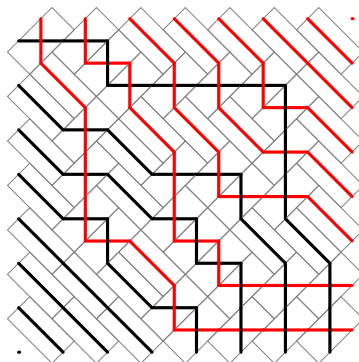
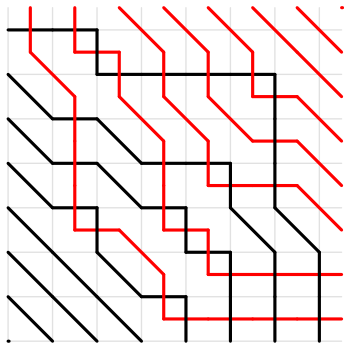
Considérons l'ensemble des familles disjointes de 4 chemins :



Si l'on compte dans chaque famille les pas verticaux par ligne verticale, on trouve une loi produit de lois binomiales symétriques, de paramètres respectivement $n = 0, 1, 2, 3$.

Par symétrie on a la même loi pour les pas horizontaux, comptés par ligne horizontale. Comptant les pas *horizontaux* par espace entre deux lignes *verticales*, c'est encore vrai, mais avec paramètres $n = 3, 2, 1$.

Une “dualité” qui intervertit les pas horizontaux et verticaux



En vue de cette correspondance, il n'est pas étonnant que les lois des nombres de pas horizontaux et verticaux, tous deux agrégés verticalement, soient des images miroir l'un de l'autre.

Une loi jointe sur les triangles de bits

Pour un triangle de bits aléatoires, les sommes par lignes et par colonnes définissent une loi jointe, dont chaque facteur en isolation est un produit de lois binomiales.

Dans l'énumération des familles disjointes, la loi jointe des nombres de pas horizontaux et verticaux agrégés "par colonne" est donnée précisément par cette loi jointe.

0	1	0	1	0	0	0	0	1	3
1	1	0	1	0	1	0	0		4
0	0	1	1	1	1	1			5
1	0	0	1	0	1				3
0	1	0	0	1					2
1	0	1	1						3
0	0	1							1
1	1								2
0									0
									0
4	4	3	5	2	3	1	0	1	0

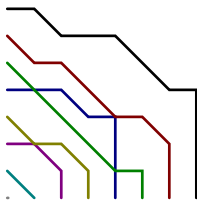
Chemins “en forme de falaise”

On commence avec une collection de familles de chemins, pas forcément disjointes, mais avec la bonne loi jointe pour les nombres de pas horizontaux et verticaux, agrégés verticalement.

Le chemin numéro i ira de $(0, i)$ à $(i, 0)$ (et a donc autant de pas horizontaux que de pas verticaux); on demande que tous ses pas verticaux soient groupés à la fin du chemin. Les i pas initiaux sont chacun horizontal ou diagonal selon la valeur d'un bit indépendant.

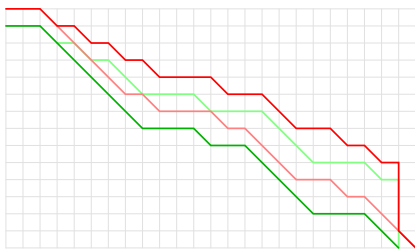
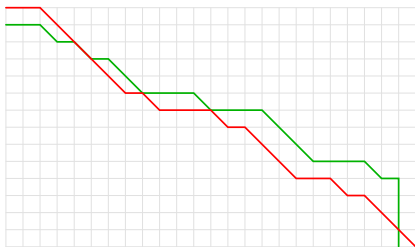
On les appellera chemins “en forme de falaise”.

Pour transformer des familles de tels chemins en une famille disjointe, on va *redistribuer* des pas à l'intérieur d'une famille, sans changer le nombre des pas verticaux sur chaque ligne verticale, ni celui des pas horizontaux entre deux telles lignes.



Démêler une paire de chemins

Au cœur de la transformation d'une famille de chemins en forme de falaise en un famille disjointe, une méthode *inversible* qui rend une paire de chemins voisins disjointe. Chaque fois que la paire originale atteint un *nouveau maximum* de croisement, les pas impliqués (**diagonal** et **horizontal**) sont intervertis **horizontal** et **diagonal**). Dans la dernière ligne verticale considérée, on transfère des pas verticaux vers le chemin du haut.

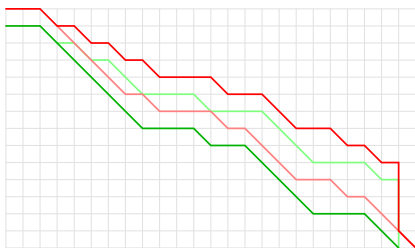
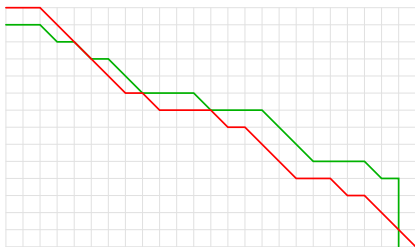


Démêler une paire de chemins

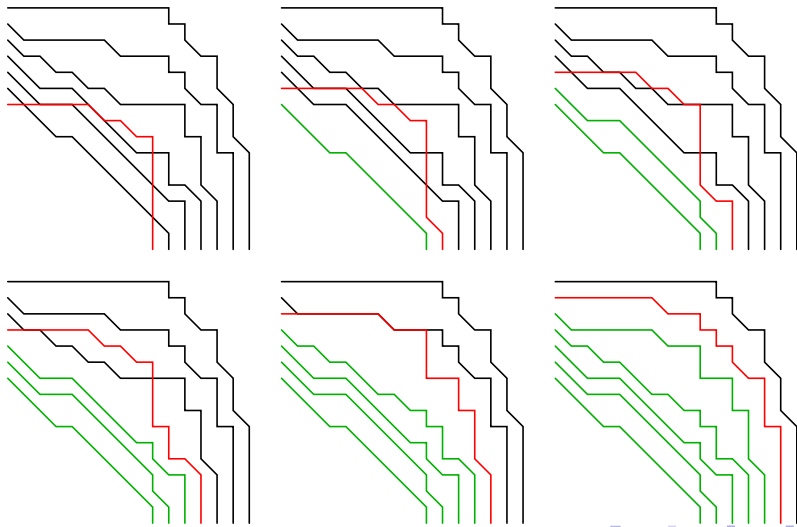
Non seulement l'opération rend les chemins disjoints, chaque chemin évite le *tracé ancien* de l'autre.

Pour inverser cette opération, il faut connaître le nombre d'échanges faits entre les chemins. C'est le nombre de pas verticaux transférés dans la dernière ligne ; le chemin **du haut** n'en possédait pas avant.

Puis, des pas sont à intervertir chaque fois que, allant de droite à gauche, l'écartement entre les chemins atteint un *nouveau minimum* en dessous de ce seuil.



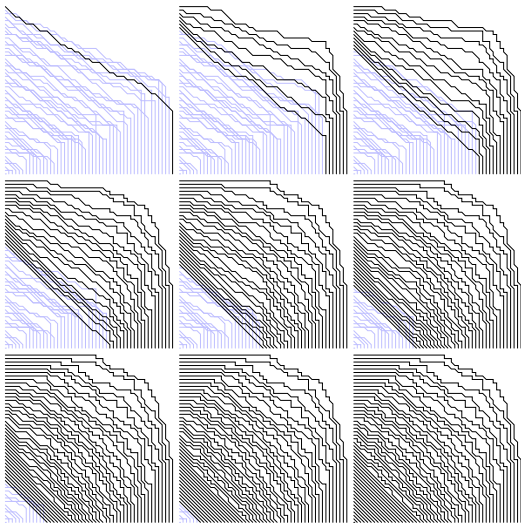
Itération pour accommoder un nouveau chemin



La construction en étapes

Pour “peigner” une famille de chemins en forme de falaise, on commence avec le dernier (plus long) chemin, on démêle le précédent avec celui-là, puis on insère le précédent, etc.

Chaque insertion d'un chemin P ne change que la partie à gauche de la droite verticale où P se termine, et redistribue les pas verticaux se situant sur cette droite.



Conclusion

- Traduire le théorème du diamant aztèque en termes de familles disjointes de chemins en donne un point de vue intéressant.
- Il permet une preuve algébrique très simple du théorème.
- On peut aussi prouver bijectivement ce dénombrement des familles disjointes, donc le théorème du diamant aztèque, par une transformation inversible des familles en forme de falaise.
- C'est utile pour engendrer des familles disjointes aléatoirement.
- La représentation par des chemins et bijection donnent aussi un autre regard sur le phénomène du cercle arctique.
- On obtient aussi une description précise de la loi jointe, sur l'ensemble des familles disjointes, des nombres de pas horizontaux et verticaux, agrégés "par colonnes" ; c'est celle des sommes par lignes/colonnes dans un triangle de bits.