Chemins et Arbres

Jean-François Marckert
Université de Versailles Saint-Quentin
45 Avenue des Etats Unis
78035 Versailles Cedex
marckert@math.uvsq.fr
www.math.uvsq.fr/∼marckert

Table des matières

AVANT PROPOS

Le but de ce cours est de montrer l'efficacité des méthodes probabilistes dans l'étude des arbres simplement générés (au sens de Meir et Moon), vus en probabilité, comme des arbres de Galton–Watson conditionnés par la taille.

Dans une première partie, on rappelle quelques relations liant des processus discrets aux arbres grâce aux algorithmes de parcours en largeur et profondeur. Dans une seconde partie, on utilise un argument de conditionnement pour ramener l'étude de certaines propriétés des arbres à l'étude de caractéristiques des marches aléatoires.

On trouvera en complément (Chapitre 3) quelques éléments à propos des processus browniens évoqués et de la convergence faible de processus.

1 Arbres et Marches : propriétés globales

1.1 Qu'est-ce qu'un arbre ?

Une réponse du type : "c'est un graphe connexe acyclique" n'est pas satisfaisante dans le sens où clairement elle désigne un arbre étiqueté. On souhaite donc définir les arbres comme étant soit :
• une racine seule (un noeud)
• une suite (finie ou non) ordonnée d'arbres.

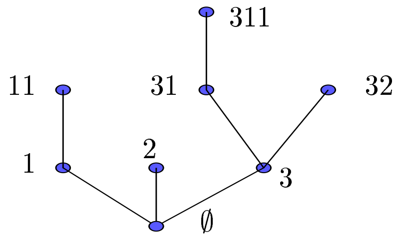
On sort de cette définition récursive peu propice aux probabilités en utilisant l'ordre lexicographique. Chaque noeud est vu comme un mot ; un arbre est vu comme un ensemble de mots ; on procède comme suit :
soit U défini par :

$$U = \emptyset \cup \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{N}^{\star n}.$$

U est l'ensemble des mots finis (ou vide) que l'on peut écrire avec l'alphabet $\{1, 2, 3, ...\}$.
On désigne par uv la concaténation des caractères de u avec ceux de v ; on utilise la convention $\emptyset u = u$.
Un ensemble de mots E (une partie de U) est un arbre s'il possède les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \bullet\ \emptyset \in E \\ \bullet\ \text{si } uv \in E \text{ alors } u \in E \\ \bullet\ \text{si } uk \in E \text{ avec } k > 1 \text{ alors } u(k-1) \in E. \end{cases}$$

L'analogie avec les arbres que l'on connaît est claire : la racine est le noeud étiqueté $\emptyset$; la longueur d'une suite numérotant un noeud u, notée $|u|$, est égale à la profondeur du noeud u dans l'arbre (on pose $|\emptyset| = 0$). On note le fils le plus à gauche de u, $u1$, le second fils $u2$, etc...



Représentation de l'arbre $E = \{\emptyset, 1, 2, 3, 11, 31, 32, 311\}$

Les trois propriétés que l'on impose sont claires : on veut une racine, un chemin liant tout noeud à la racine, les fils d'un noeud u sont rangés du numéro 1 au dernier (ceci nous assure une représentation unique de chaque "forme d'arbre"). Le cardinal de E est appelé *taille de l'arbre.*

Cette formalisation est très importante car elle permet de définir "proprement" des arbres quelconques (aussi bien infinis en hauteur qu'en largeur) et les tribus associées qui sont toujours nécessaires pour faire des probabilités. On souhaite par exemple pouvoir définir des processus à valeur dans l'espace des arbres (comme par exemple les ABR en temps discret ou les processus de Bellman-Harris en temps continus). Il est alors nécessaire que tous les arbres soient définis sur le même espace ; ceci permet également de construire des martingales comme l'a montré Brigitte Chauvin l'année dernière dans son cours à Alea, justement.

Dans le cas des arbres finis, bien souvent on passe la définition des arbres sous silence ; le fait d'avoir un nombre fini d'arbres de taille n rend triviaux tous les problèmes de mesurabilité (si chaque arbre a un poids bien défini (ce qui est toujours le cas), toute variable aléatoire définie sur les arbres est bien définie). Mais, un peu de formalisme ne nuit pas vraiment...

1.2 Codage des arbres finis

Les grands outils probabilistes pour l'étude des arbres sont les codages obtenus grâce à des algorithmes de parcours... "Ces codages" sont en fait des applications simples de notre système de numérotation lexicographique.

1.2.1 Parcours en largeur

Dans le parcours en largeur, on visite successivement les niveaux de l'arbre, de la racine vers le sommet, en visitant chaque noeud du plus à gauche au plus à droite. Sur l'arbre ci-dessous, on a indiqué l'ordre de visite des noeuds.

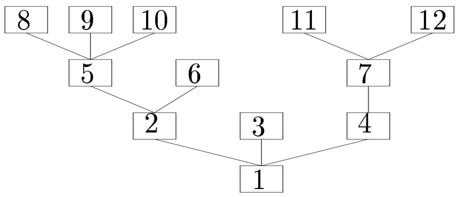


Figure 1 *Ordre de parcours en largeur*

Pour revenir à l'ordre lexicographique : dans le parcours en largeur, on parcourt d'abord $\emptyset$ puis les mots d'une lettre (par ordre lexicographique), puis les mots de deux lettres (par ordre lexicographique), etc...

1.2.2 Parcours en profondeur

On visite d'abord la racine. Plaçons nous au temps k après avoir visité k noeuds. Certains de ces noeuds ont des fils non visités. On prend le plus récemment visité parmi ces noeuds. Au temps $k+1$, on visitera son fils le plus à gauche non encore visité.

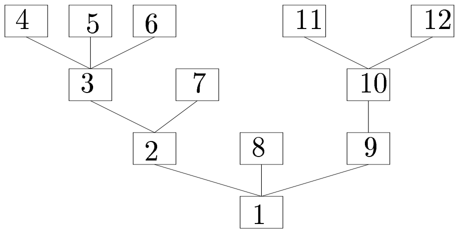


Figure 2 *Ordre de parcours en profondeur.*

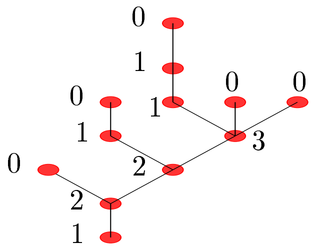
L'ordre du parcours en profondeur est le même que l'ordre lexicographique (classement du dictionnaire).

1.3 Représentation des arbres par un chemin

Prenons un arbre E de cardinal fini et parcourons-le en profondeur (ou en largeur). On note Y_i le nombre d'enfants du i-ème noeud visité. (Y_1= nombre d'enfants de la racine).

Proposition 1 *La suite $(Y_i)_{i=1,\ldots,\mathrm{card}(E)}$ détermine complètement E.*

Autrement dit, à parcours fixé, il existe une injection de l'ensemble des arbres finis dans l'ensemble des listes finies de nombres entiers. Je ne donne pas de preuve de cette proposition qui doit être suffisamment claire (si on veut comprendre ce qui suit).
Ainsi, considérons le parcours en profondeur et la liste suivante de 12 nombres (1,2,0,2,1,0,3,1,1,0,0,0) elle correspond à un arbre de taille 12 (voir dessin ci-contre).



L'application qui à un arbre associe la liste finie de nombres décrite plus haut n'est évidemment pas une surjection. Par exemple, la liste $(2,4)$ n'a clairement pas d'antécédent. Il apparaît rapidement qu'une liste de nombres entiers $Y_1,\ldots,Y_n$ décrit un arbre (il sera alors de taille n) sssi les $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ satisfont à l'ensemble de contraintes suivant :

$$(C)\left\{\begin{array}{lcl} Y_1 & \geq & 1, \\ Y_1+Y_2 & \geq & 2, \\ & \ldots. & \\ Y_1+\ldots+Y_{n-1} & \geq & n-1, \\ Y_1+\ldots+Y_n & = & n-1. \end{array}\right.$$

La raison est que pour reconstituer l'arbre, on attribue des enfants aux noeuds au fur et à mesure qu'on les visite. Il faut donc qu'il y ait des noeuds à visiter jusqu'à la fin de la procédure (mais pas plus).

On peut transformer cet ensemble de conditions de manière à faire apparaître enfin une suite (finie) qui sera "une marche aléatoire" (ou plus exactement une "excursion discrète") dès que l'on aura construit un espace de probabilité (ce qui n'est pas encore le cas). Ainsi, considérons $(S_j)_{j=0,\ldots,n}$, la marche définie par :

$$S_0 = 0, \quad \text{et pour } 1 \le j \le n, \quad S_j = (Y_1 - 1) + \cdots + (Y_j - 1).$$

Les contraintes (C) sont équivalentes aux suivantes :

$$(C') \left\{ \begin{array}{lcl} S_0 & = & 0, \\ S_1 & \ge & 0, \\ & \ldots. & \\ S_{n-1} & \ge & 0, \\ S_n & = & -1. \end{array} \right.$$

Remarque : Le passage des Y_i (contraints) aux S_j (contraints) est bijectif. Ce passage est le point clé qui permet de passer des arbres aux excursions discrètes.

La marche S selon que les variables Y_i soient issues du parcours en largeur ou en profondeur sera nommée "pile du parcours en largeur" (PPL) ou "pile du parcours en profondeur" (PPP).

1.4 Loi de probabilité sur l'ensemble des arbres

1.4.1 Arbres de Galton–Watson

On pourra se référer aux livres de Harris [19] et Athreya & Ney [4] pour plus de renseignements sur les processus de Galton–Watson.

Un processus de Galton-Watson est une chaîne de Markov $(Z_n)_{n=0,1,2\ldots}$ sur $\mathbb{N}$ telle que $Z_0 = 1$ et telle que pour $k \ge 0$, Z_{k+1} s'écrit sous la forme :

$$Z_{k+1} = \sum_{l=1}^{Z_k} Y_l^{(k)}$$

où les variables $Y_l^{(k)}$ sont des copies indépendantes de Z_1, de loi $(p_j)_{j\ge0}$. En général, on donne la représentation concrète suivante de cette chaîne de Markov :

- Au temps $T = k$, Z_k individus sont en vie.
- Au temps $T = k+1$, chacun des Z_k individus disparaît laissant j descendants avec probabilité p_j indépendamment des autres individus. La loi $(p_k)_{k=0,1,\cdots}$ de Z_1 est donc appelée loi de la *progéniture*, ou loi de *reproduction*. L'arbre généalogique de cette population est appelé *arbre de G.W.*. Ce sont des arbres ordonnés, car on distingue les enfants d'un même père (bien qu'ils soient jumeaux dans un certain sens).

Soit f la fonction génératrice de $(p_k)_{k\ge0}$:

$$f(s) = \sum_{k\ge0} p_k\, s^k \text{ pour } |s| \le 1.$$

La fonction f suffit à décrire entièrement l'évolution de la chaîne $(Z_k)_{k\geq 0}$. Par exemple, on montre que la fonction génératrice f_n de Z_n est $f^{\circ n}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_1) &= f'(1) \overset{def}{=} m \\ \mathbb{E}(Z_n) &= f_n'(1) = f_{n-1}'(1)f'(1) = \big(f'(1)\big)^n = m^n.\end{aligned}$$

Écartons les cas $(p_0 + p_1 = 1)$ ainsi que le cas où il existe j tel que $p_j = 1$; on appelle *temps d'extinction* du processus $(Z_n)_{n\geq 0}$ le premier temps T tel que $Z_T = 0$ (selon les définitions ci-dessus, si $Z_T = 0$ alors $Z_{T+k} = 0, \forall k \geq 0$).
Si $p_0 > 0$, la *probabilité q d'extinction,* définie par

$$q = \mathbb{P}(T < +\infty),$$

est strictement positive ($Z_1 = 0$ avec probabilité p_0).
La probabilité d'extinction q vaut 1 si $m \leq 1$ (si $p_1 \neq 1$) et est la plus petite solution positive de l'équation $f(t) = t$ si $m > 1$.
Le comportement du processus $(Z_k)_{k\geq 0}$ est donc fortement lié à la valeur de m. Le théorème suivant l'illustre une fois encore :

Théorème 1 *Notons $W_n = Z_n m^{-n}$ et F_n la tribu engendrée par $Z_0, \cdots, Z_n$. Si $0 < m < +\infty$ alors la suite $\{W_n, F_n\}_{n\geq 0}$ est une martingale.*

Puisque W_n est positive , il existe une v.a. W telle que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} W_n = W \quad \text{p.s..}$$

Dans le cas $m \leq 1$, $q = 1$, il apparaît clairement que la v.a. W vaut 0. Dans le cas $m > 1$, la croissance moyenne du processus $(Z_k)_{k\geq 0}$ est exponentielle.

On appelle *population totale* X la variable aléatoire définie par :

$$X = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots .$$

Au temps 1, on a Z_1 individu(s). Chacun de ces Z_1 individus a un nombre total de descendants de même loi que X. Ainsi

$$X = 1 + \sum_{k=1}^{Z_1} X_k$$

où les X_k sont des copies indépendantes de X. Soit g la fonction génératrice de X ; g est solution de l'équation fonctionnelle :

$$g(x) = x\, f(g(x)).$$

Si $\mathbb{E}(Z_1) < 1$, on peut en déduire la population moyenne car :

$$\mathbb{E}(X) = g'(1-) = \frac{1}{1 - f'(1)} = \frac{1}{1 - \mathbb{E}(Z_1)}.$$

Si $\mathbb{E}(Z_1) \geq 1$, la population moyenne est infinie.

1.5 Arbres de Galton–Watson conditionnés par la taille

On a dit plus haut que l'on pouvait décrire un arbre par une liste de nombres Y_i. Dans le cas des arbres de Galton-Watson, les Y_i sont des copies i.i.d. de loi $(p_k)_{k\geq 0}$, la loi de reproduction. Si les Y_i décrivent un arbre de taille n, alors les Y_i vérifient les conditions (C) ; la pile (PPP) (ou PPL), S, elle, vérifie (C').

En fait, contraindre les Y_i à vérifier (C) est équivalent à contraindre la marche S à vérifier (C'). Ainsi, dans le cas des arbres de GW conditionnés par $\{X = n\}$, la marche S associée est simplement une marche aléatoire (d'incréments des copies de $Y_i - 1$) conditionnée à vérifier (C'). Les piles PPP et PPL sont appelées des *excursions discrètes* (un peu spéciales car elles terminent en -1, alors qu'habituellement la définition couramment admise est "terminer en 0".)

1.5.1 Probabilité qu'un arbre de GW soit de taille n

Construisons une marche S d'incrément $Y_i - 1$ indépendants (on construit donc d'abord une PPP ou PPL puis l'arbre). La probabilité que l'arbre soit de taille n est égal à la probabilité que la marche S touche -1 pour la première fois au temps n. Si on note T_{-1} le temps d'atteinte de -1 pour la marche, on a

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(T_{-1} = n).$$

Le principe de rotation attribué à Otter [30] (par les probabilistes) dit que

$$\mathbb{P}(T_{-1} = k) = \frac{1}{k}\mathbb{P}\big((Y_1 - 1) + \cdots + (Y_k - 1) = -1\big)$$

où les Y_i sont indépendantes dans le membre de droite. Cette identité affirme qu'il y a k fois plus de marches de longueur k qui terminent en -1 que de marches qui en plus restent positives jusqu'au temps $k - 1$. Ces dernières quantités ne sont pas toujours simples à calculer mais, si les variables $Y_i - 1$ sont **centrées** et possèdent une variance finie σ^2, en utilisant la version locale du théorème de la limite centrale, on trouve que :

$$\mathbb{P}(X = n) \sim \frac{n^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Ceci étant valable si $pgcd\{\ i\ t.q.\ \mathbb{P}(Y_1 - 1 = i) > 0\} = 1$. On retrouve donc facilement le fait que la longueur de la première excursion est p.s. finie mais de moyenne infinie.
Éléments de preuve du principe de rotation : Voyons pourquoi

$$\mathbb{P}((Y_1 - 1) + \cdots + (Y_k - 1) = -1) = k\ \mathbb{P}\big(((Y_1 - 1) + \cdots + (Y_k - 1) = -1) \cap (C)\big).$$

On remarque que le membre de gauche ne dépend pas de l'ordre des variables Y_i. On change donc l'ordre de ces variables par rotation : On prend $Z_i^l = Y_{i+l\ \overline{mod}\ k}$ où $\overline{mod}$ désigne le modulo habituel à part qu'on prend $k\ \overline{mod}\ k = k$. Si l'on regarde les marches

$$W_j^l = \sum_{i=1}^{j} (Z_i^l - 1)$$

on voit que toute ces marches terminent en -1. De plus toutes ces marches sont différentes car leur premier temps d'atteinte de leur minimum à lieu à des instants différents. L'une d'elles donc, uniquement, à son minimum au temps k (et donc est positive jusqu'en $k-1$). Les marches W^l forment une classe invariante par rotation dans laquelle une seule marche est une "excursion". Il est donc exclu que deux excursions soient dans la même classe (ou qu'une marche soit dans la classe de deux excursions différentes). Chaque classe contient donc 1 excursion sur un total de k marches ; la formule d'Otter est une conséquence directe du fait que ces k marches sont équiprobables.

1.5.2 Probabilité d'un arbre conditionné par $\{X = n\}$

Considérons une loi de reproduction $(p_k)_{k\geq 0}$. Soit $(y_1, \dots, y_n)$ une liste satisfaisant à (C), c'est à dire décrivant un arbre de taille n. Une question naturelle qui se pose est la suivante : Conditionnellement à $\{X = n\}$, quelle est la probabilité d'obtenir l'arbre décrit par les (y_i) ? Remarquons d'abord que sans le conditionnement, la réponse est simple :

$$\mathbb{P}\big((Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)\big) = \prod_{i=1}^{n} p_{y_i}. \tag{1.1}$$

Le conditionnement, ne va pas changer fondamentalement les choses, les probabilités obtenues étant proportionnelles à celles avant conditionnement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big((Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n) | X = n\big) &= \frac{\mathbb{P}\big((Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)\big)}{\mathbb{P}(X = n)} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n} p_{y_i}}{\mathbb{P}(X = n)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

puisque la suite y_i décrit un arbre de taille n.

1.6 Exemples de familles d'arbres

1.6.1 Arbres binaires

On appelle arbre binaire de Galton–Watson, un arbre sous une loi de reproduction de type $p_2 = p$, $p_0 = 1 - p$ (avec $0 < p < 1$). Sous cette loi, tout noeud à 0 ou 2 enfants. Conditionnons par $\{X = 2n + 1\}$.

Une analyse simple montre que s'il y a $2n+1$ noeuds, n d'entre eux sont internes, $n+1$ sont des feuilles. Ainsi, sachant $\{X = 2n + 1\}$, quelle que soit la forme de l'arbre considéré, sa probabilité est $p_0^{n+1} p_2^n / \mathbb{P}(X = 2n + 1)$. Ainsi, tous les arbres binaires obtenus sont équiprobables et cette construction est donc équivalente à celle de la combinatoire, dans laquelle on munit l'ensemble des arbres binaires de taille n de la loi uniforme.

1.6.2 Arbres planaires (ou géométriques)

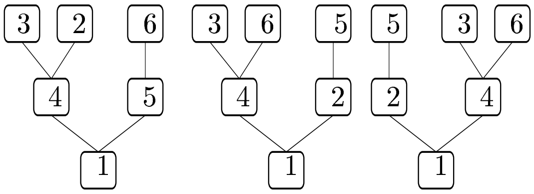
On considère comme loi de reproduction, la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ pour un $0 < p < 1$. Autrement dit, $p_i = (1-p)^i p$ (pour tout i entier). On a

$$\mathbb{P}\big((Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n) | X = n\big) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \big((1-p)^{y_i} p\big)}{\mathbb{P}(X = n)} = \frac{p^n\ (1-p)^{n-1}}{\mathbb{P}(X = n)}$$

car chaque noeud sauf la racine est le fils d'un autre noeud. Ainsi, la probabilité ne dépend pas des $(y_i)_i$, donc elle ne dépend pas de la forme de l'arbre : tous les arbres obtenus sont équiprobables. D'autre part, la loi géométrique attribue une probabilité non nulle à tous les arbres de taille n. Cette construction est donc équivalente à celle des arbres planaires de la combinatoire (munis de la loi uniforme).

1.6.3 Arbres de Cayley

Les arbres de Cayley de taille n sont les graphes connexes acycliques (sur un ensemble de n points). On choisit le noeud 1 pour être la racine, on obtient alors n^{n-2} arbres d'après Cayley (1889). Il s'agit ici d'arbres non ordonnés, mais dont les noeuds sont étiquetés. Ils ne rentrent pas dans notre modèle (il faut augmenter U pour y ajouter un label). Mais on va s'intéresser ici juste à la "forme" des arbres de Cayley.



Puisqu'il n'y a pas de structure d'ordre entre les fils de chaque noeud, on peut représenter "graphiquement" le même arbre de plusieurs manières. Pour différencier les arbres, on choisit d'ordonner les étiquettes des fils de chaque noeud. On obtient ainsi une représentation canonique. Sur le dessin ci-dessus, les deux premiers arbres sont différents, et les arbres 2 et 3 sont les mêmes. Le troisième a ses étiquettes ordonnées et est donc le représentant canonique. Suivant cette représentation, un arbre étiqueté de racine 1, est entièrement défini par la donnée d'un $n-$uplet d'ensembles disjoints $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ où les A_i ont pour union l'ensemble $\{2, \cdots, n\}$. Pour construire l'arbre, on choisit un sens de parcours sur celui-ci et on affecte au i-ème noeud parcouru l'ensemble de fils d'étiquettes A_i que l'on range par ordre croissant. Par exemple, choisissons le parcours en largeur ; les deux arbres 2 et 3 sont définis par le 6-uplet : $(\{2,4\}, \{5\}, \{3,6\}, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$. Tout n-uplet d'ensembles $(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ ayant les propriétés ci-dessus ne définit pas pour autant un arbre. Il faut de plus que la suite a_i des cardinaux des A_i satisfassent les contraintes (C).

La question que l'on se pose est la suivante : si on se donne une liste de nombres $(a_1, \cdots, a_n)$ (décrivant une forme d'arbre) combien y a-t-il d'arbres de Cayley ayant cette forme ?

On calcule le nombre d'arbres dont les cardinaux de $A_1, A_2, \ldots$ sont $a_1, a_2, \ldots$. Pour les étiquettes A_1 on a $C_{n-1}^{a_1}$ choix, pour A_2 on a $C_{n-1-a_1}^{a_2}$ choix... de sorte que le nombre d'arbres correspondant est :

$$C_{n-1}^{a_1} \prod_{k=2}^{n} C_{n-1-(a_1+\cdots+a_{k-1})}^{a_k} = \frac{(n-1)!}{a_1! \cdots a_n!};$$

la probabilité d'apparition d'un tel arbre est donc proportionnelle à ce nombre.

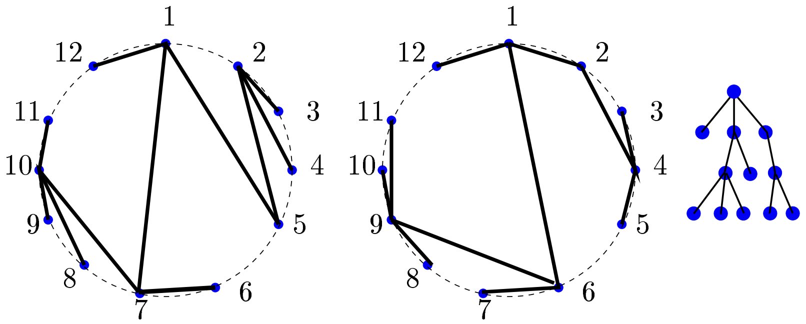
Par ailleurs, si on étudie les arbres de G.W. à progéniture poissonnienne $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, la probabilité (voir (1.2)) qu'un arbre présente une suite $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ (de descendants) est quant à elle proportionnelle à

$$\frac{e^{-n\lambda}\lambda^n}{a_1! \cdots a_n!}.$$

Ainsi, ces deux probabilités sont nécessairement les mêmes. Il s'ensuit que la "forme" d'un arbre de Cayley est distribuée comme celle d'un arbre de GW $\mathcal{P}(\lambda)$ conditionné à être de taille n.

1.6.4 Arbres sans croisements

On considère un cercle sur lequel sont choisis n points différents numérotés dans l'ordre des aiguilles d'une montre. Un arbre ayant pour ensemble de sommets les n points choisis est dit sans croisements si ses arêtes ne se croisent pas. Considérons l'ensemble de tous les arbres sans croisements de racine le point 1. Munissons l'ensemble de ces arbres de la loi uniforme. On peut



Deux arbres sans croisements de taille 12 et leur représentation hors cercle.

maintenant, effacer le cercle, puis, en conservant les relations d'ordre ainsi que les relations père-fils représenter les arbres sans-croisements de manière habituelle (comme sur la figure). Si l'on considère un arbre planaire quelconque, avec un peu de patience, on voit que l'on peut l'inscrire dans un cercle à la manière d'un arbre sans croisements. L'exemple de la figure, montre qu'il n'y a pas de bijection entre les arbres sans croisements et les arbres planaires, plusieurs arbres sans croisements pouvant correspondre au même arbre planaire, une fois retiré du cercle.

La question que l'on se pose est la suivante : la forme d'un arbre sans croisements est-elle celle d'un arbre de Galton-Watson conditionné par $\{X = n\}$? Si tel est le cas, quelle est la loi de reproduction ?

En fait, il existe plusieurs arguments qui montrent que les arbres sans croisements ne sont pas des arbres de GW. Mais, c'est "presque" le cas, dans le sens où en fait, il s'agit d'un arbre de Galton-Watson où seule la racine a une loi différente des autres noeuds. On décompose ici les arguments sous forme d'exercice :

Exercice : 1. Établir que le nombre d'arbres sans croisements de taille n de forme $(y_1, \cdots, y_n)$ est

$$\prod_{i=2}^{n} (y_i + 1)$$

2. Considérons un arbre de GW dont la loi de reproduction de la racine est donnée par

$$\lambda_k = 2 \times 3^{-k}, \text{ pour } k = 1, 2, 3, \cdots$$

les autres noeuds ayant pour loi de reproduction

$$\mu_k = \frac{4(k+1)}{3^{k+2}}, \text{ pour } k = 0, 1, 2, \cdots$$

Soit un arbre de loi induite par ces lois de reproduction et par le conditionnement $\{X = n\}$. Montrer que sous λ et μ,

$$\mathbb{P}_{\lambda,\mu}((Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \cdots, y_n)) \text{ est proportionnel à } \prod_{i=2}^{n}(y_i + 1).$$

3. Conclure (voir [27] pour plus de détails).

1.7 Une famille exponentielle et un paramètre critique

On a vu l'importance que revêt la valeur de la moyenne de Z_1 dans le comportement général des processus de G.W.. Pourtant, on vient de voir que sous le conditionnement par $\{X = n\}$, la loi sur les arbres binaires, géométriques et poissonniens était la même pour toute valeur du paramètre : la moyenne n'a joué aucun rôle ! Ce phénomène se produit quelle que soit la loi de la progéniture comme l'a montré Kennedy [22].

Voici la raison de tout cela : soit $(Z_n)_{n\geq 0}$ un processus de G.W. de loi de progéniture $(p_k)_{k\geq 0}$ et de fonction génératrice f. Définissons une nouvelle loi de progéniture $(\tilde{p}_k)_{k\geq 0}$ par

$$\tilde{p}_k \stackrel{def}{=} \frac{a^k p_k}{f(a)}.$$

Notons avec des tildes les variables sous la loi $\tilde{p}$. On a

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}_1 = y_1, \cdots, \tilde{Y}_n = y_n | \tilde{X} = n) = \mathbb{P}(Y_1 = y_1, \cdots, Y_n = y_n | X = n).$$

C'est à dire que la loi induite par p ou $\tilde{p}$ sous le conditionnement par $\{X = n\}$ est la même loi de probabilité sur les arbres de taille n. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{Y}_1 = y_1, \cdots, \tilde{Y}_n = y_n | \tilde{X} = n) &= \frac{\prod_{k=1}^{n} a^{y_k} p_{y_k}}{f(a)^n \mathbb{P}(\tilde{X} = n)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n} p_{y_k}}{\mathbb{P}(\tilde{X} = n) f(a)^n a^{-n+1}}\end{aligned}$$

ce qui est proportionnel à

$$P(Y_1 = y_1, \cdots, Y_n = y_n | X = n) = \frac{\prod_{k=1}^{n} p_{y_k}}{\mathbb{P}(X = n)}$$

Or, deux probabilités proportionnelles sur le même ensemble sont égales.
On peut alors remarquer que passer d'une Bernoulli à une autre (ou d'une géo à une autre, ou d'une Poisson à une autre) consiste à trouver une valeur de a adéquate. La valeur de a (lorsqu'elle existe) telle que $af'(a) = f(a)$ fournit le cas *critique*, c'est à dire le cas ou $\tilde{m} = 1$. La variance de $\tilde{Z}_1$, $\tilde{\sigma}^2$ associée à cette valeur de a s'écrit :

$$\tilde{\sigma^2} = \frac{a^2 f''(a)}{f(a)}.$$

Elle joue un rôle normalisateur particulier.

Par la suite, on supposera toujours que la loi de reproduction est critique. On notera σ^2 la variance de la loi de reproduction.

1.8 Lien avec les poids de la combinatoire

En combinatoire, on définit les familles d'arbres *simples* non pas par une loi de reproduction mais par une équation fonctionnelle rendant compte des arbres possibles et des *poids* qu'on leur associe.

Un arbre binaire est par définition (combinatoire) ou un noeud externe (une feuille), ou un noeud interne connecté à un couple (ordonné) de deux arbres binaires. Ce genre de définition récursive s'applique à tous les types simples d'arbres. Par exemple, un arbre planaire est une feuille ou un noeud interne connecté à une liste finie (et ordonnée) d'arbres planaires.

On décide alors de compter chaque arbre t avec un certain poids $\tilde{w}(t)$, compatible avec cette construction. On utilise alors ce poids comme une "probabilité" pour calculer des lois de hauteurs, largeurs, etc...

La remarque suivante, issue de Aldous [1], permet de *passer* d'une définition *combinatoire* des arbres à une définition *probabiliste* et réciproquement.

Soit $(c_i)_{i\geq 0}$ une suite de nombres positifs, avec $c_0 = 1$. On note

$$\phi(y) = \sum_k c_k y^k$$

la fonction génératrice associée. Supposons que l'on ait attribué à tout arbre t d'une certaine famille $\mathcal{F}$, un poids $\tilde{w}(t)$. On note w_n le poids total des arbres ayant n noeuds,

$$w_n = \sum_{t \big| |t|=n} \tilde{w}(t),$$

et Y la fonction génératrice associée. Prenons un arbre t ayant n noeuds, décrit par la suite $(y_1, \ldots, y_n)$; les deux égalités suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} Y(x) &= x\phi(Y(x)) \\ \tilde{w}(t) &= \prod_{k=1}^{n} c_{y_k}. \end{aligned}$$

Une famille $\mathcal{F}$ d'arbres est dite simple si la famille de poids vérifie ces égalités. La probabilité considérée sur les arbres de tailles n est la suivante :

$$\mathbb{P}(T = t | X = n) = \frac{\tilde{w}(t)}{w_n} \tag{1.3}$$

de sorte que la probabilité de choisir un arbre t de taille n parmi tous les arbres de taille n est proportionnelle à son poids.

- Pour les familles d'arbres ordonnés, on choisit $c_i = 1$ si le degré sortant i est autorisé, 0 sinon.
- Pour les arbres étiquetés, on prend $c_i = 1/i!$ si le degré sortant i est autorisé, 0 sinon.

Avec ces choix des c_i, on obtient l'équiprobabilité sur l'ensemble des arbres de tailles n pour les familles que l'on a considérées plus haut (arbres binaires, planaires, de Cayley).

Le but maintenant est de construire une loi de progéniture $(p_i)_{i\geq 0}$ d'un processus de G.W. de sorte que la loi induite sur les arbres de taille n soit équivalente à (1.3). On pose

$$p_i = \frac{c_i a^i}{\phi(a)}, \text{ pour } i \geq 0,$$

a étant choisi de sorte que $\mathbb{E}(Z_1) = 1$ (comme on l'a déjà dit, a vérifie, $a\phi'(a) = \phi(a)$). En (1.1), on a donné la probabilité d'un arbre de Galton-Watson t décrit par les $(y_1, \ldots, y_n)$ sous la condition $\{X = n\}$. Notons la $w(t)$. On a

$$w(t) = \prod_{k=1}^{n} p_{y_k} = \prod_{k=1}^{n} \Big(\frac{c_{y_k} a^{y_k}}{\phi(a)}\Big).$$

Ainsi,

$$w(t) = \tilde{w}(t)\frac{a^{|t|-1}}{\phi^{|t|}(a)}$$

et donc, $w(t)$ et $\tilde{w}(t)$ sont proportionnels et donc définissent les mêmes probabilités et donc le même modèle.

1.9 Théorème limite pour les variables globales

On revient ici sur les deux parcours : largeur et profondeur. On exhibe les excursions associées ; on donne des fonctionnelles de l'arbre que ces excursions permettent d'étudier. Tous les résultats énoncés sont sous la loi ambiante conditionnée par $\{X = n\}$. On rappelle que la loi de reproduction est de moyenne 1 et de variance $0 < \sigma^2 < +\infty$.

1.9.1 Fonctionnelles associées au parcours en largeur. Théorèmes limites

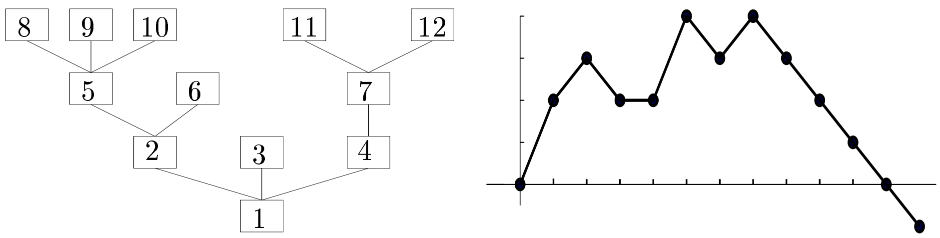


Figure 3 *Arbre et sa PPL*

L'excursion que l'on associe est, comme déjà dit, la PPL :

$$S_0 = 0 \quad \text{et pour } j \in \{1, \ldots, n\}, \quad S_j = \sum_{i=1}^{j}(Y_i - 1),$$

où Y_i est le nombre de descendants du i-ème noeud atteint par le parcours en largeur. Le fait que S soit une marche aléatoire conditionnée exactement à être une excursion a déjà été dit. Kaigh a montré que

$$\Big(\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}\Big)_{[0,1]} \xrightarrow{faiblement} (\sigma\ e_t)_{[0,1]} \tag{1.4}$$

où $(e_t)_{t\in[0,1]}$ est une excursion brownienne normalisée et donc :

$$\frac{\max_k S_k}{\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \sigma M_1^{(e)},$$

où $M_1^{(e)}$ est le maximum de l'excursion brownienne (voir p. 35).

Largeur de l'arbre

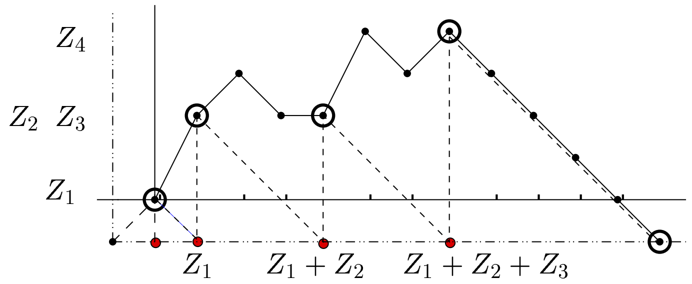


Figure 4 *Profil de l'arbre de la Figure 3.*

La largeur de l'arbre est la quantité $\max_k Z_k$. En modifiant quelque peu le dessin représentant S (on ajoute un premier pas montant), on voit que S permet de retrouver le profil de l'arbre, c'est à dire, la suite $(Z_k)_k$ du nombre d'individus à chaque génération (voir Figure 4, les points du graphe entourés). Grâce à l'utilisation d'une file d'attente, on peut montrer que

$$Z_0 = 1, \text{ et pour } k \geq 1, \quad Z_k = S_{Z_1+Z_2+\cdots+Z_{k-1}} + 1$$

En utilisant des principes de variations modérées de la trajectoire S, on montre que la largeur de l'arbre et la hauteur de l'excursion sont très proches l'une de l'autre et ont donc la même limite en loi (divisées par $\sqrt{n}$) : $\sigma M_1^{(e)}$ (travaux de Takács).

Hauteur de l'arbre

Le parcours en largeur permet aussi de retrouver la hauteur (on pouvait s'attendre à ceci puisque la hauteur est le nombre de générations et celles-ci se lisent sur la PPL). Dans Chassaing & al [10] on montre que la hauteur de l'arbre et la quantité

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{S_k + 1}$$

sont très proches (dans le cas des arbres binaires, mais c'est aussi vrai pour toutes les familles d'arbres simples). L'idée repose encore sur l'utilisation de principe de variations modérées des trajectoires de S : on écrit que

$$H = \sum_{k=1}^{H} 1 = \sum_{k=1}^{H} \sum_{j=Z_0+\ldots+Z_{k-1}+1}^{Z_0+\ldots+Z_k} \frac{1}{Z_k}$$

puis, on montre que pour j appartenant à l'intervalle $[Z_0 + \ldots + Z_{k-1}, Z_0 + \ldots + Z_k]$, S_j vaut approximativement Z_k. On montre ensuite que cette quantité normalisée converge en loi vers

$$\int_0^1 \frac{1}{e_s} ds$$

ce qui permet donc de retrouver les résultats de Flajolet & Odlyzko [15] dans ce cas particulier. En effet, selon Biane & Yor [8], on a

$$\int_0^1 \frac{1}{e_s} ds \stackrel{loi}{=} 2\ M_1^{(e)}.$$

On pourra également trouver des utilisations du parcours en largeur dans Aldous [1, 3] (étude des composantes géantes dans les graphes aléatoires), Spencer [35] (arbres étiquetés, graphes et loi de Poisson), Schutzenberger [34], Foata & Riordan [16] et Françon [17] pour les relations entre fonctions acycliques, problèmes de parking, arbres étiquetés...

Convergence du profil

Le *profil* est la suite $(Z_k)_{k\geq 0}$. Drmota & Gittenberger [13] ont établi que

$$\frac{Z_{[\sqrt{n}\ x]}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{faiblement} \frac{\sigma}{2}\ l_1^{(e)}(\frac{\sigma}{2}x)$$

où $l_1^{(e)}(x)$ est le temps local au temps 1 à la hauteur x d'une excursion brownienne normalisée. $l_1^{(e)}(x)$ est défini par

$$l_1^{(e)}(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^1 \mathbb{1}_{[x,x+\varepsilon]}(e_s) ds.$$

Or, d'après Jeulin [18], ou [1], [8], on a :

$$\sup\{l_1^{(e)}(x) | x \geq 0\} \stackrel{loi}{=} 2 \sup\{e_t | t \geq 0\}$$

La loi de la largeur proprement dite W_n se déduit donc de ce résultat :

$$\frac{W_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \sigma M_1^{(e)}.$$

On pourra également voir les articles de Takács [39], d'Aldous [1] ainsi que le Chassaing &M [9] pour des approches probabilistes et pour des résultats sur la convergence des moments de $W/\sqrt{n}$.

1.9.2 Parcours en profondeur

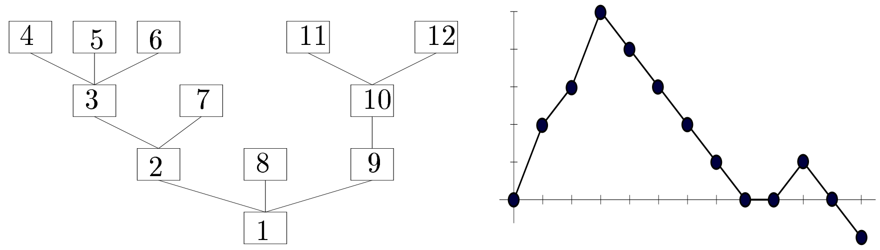


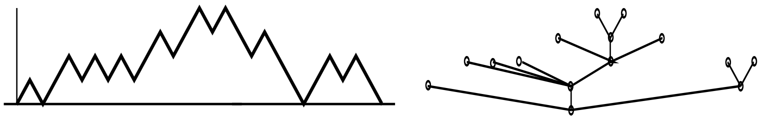
Figure 5 *Un arbre et sa PPP*

Le parcours en profondeur permet d'associer à chaque arbre trois excursions relativement différentes (mais asymptotiquement proportionnelles). La première, est la PPP notée S également (car elle a même loi que la PPL) dont on a déjà parlé.

$$S_0 = 0 \quad \text{et pour } j \in \{1, \dots, n\}, S_j = \sum_{i=1}^{j}(Y_i - 1),$$

où Y_i est le nombre de descendants du i-ème noeud atteint par le parcours en profondeur. S vérifie évidemment la même propriété asymptotique (1.4) que la PPL.

La deuxième excursion associée, est appelée tour de l'arbre : on peut la décrire de manière très intuitive par la position d'une mouche marchant autour de l'arbre à la vitesse 1 (dans le sens des aiguilles d'une montre). Le tour de l'arbre est le processus $(V(k))_{k=0,\dots,2n-2}$ qui donne l'ordonnée de la mouche en fonction du temps (voir dessin ci-dessous). On peut remarquer les très grandes "similitudes géométriques" entre l'arbre et son tour (ce qui se révèle fondamental dans la construction d'un arbre limite).



La troisième enfin est appelé processus des hauteurs. On note v_i le i-ème noeud visité par le parcours en profondeur (v_0 =racine). Le processus des hauteur est défini par

$$h(i) = h(v_i) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-1.$$

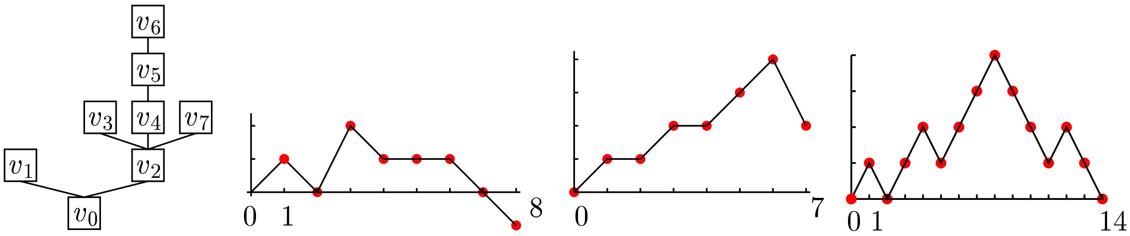


Figure 6 : un arbre, sa PPP, son processus des hauteurs et son tour.

Ces trois processus caractérisent l'arbre dont ils sont issus.

1.9.3 Fonctionnelles associées au parcours en profondeur

En ce qui concerne le tour, Aldous [1, 2] a prouvé que :

$$\left(\frac{V_{[2nt]}}{\sqrt{n}}\right)_{[0,1]} \xrightarrow{faiblement} \left(\frac{2e_t}{\sigma}\right)_{[0,1]}.$$

• Le tour d'un arbre géométrique de taille n est une excursion de Bernoulli de taille $2n-2$ (il s'agit de bijection entre des ensembles probabilisés)

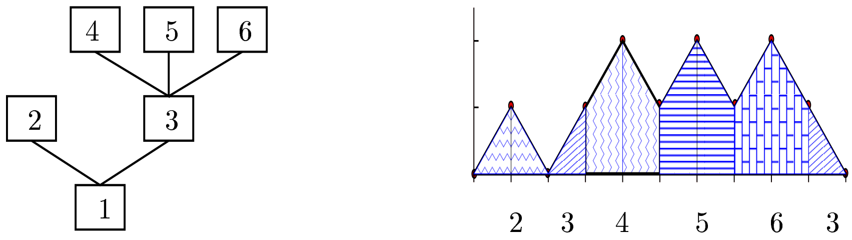
• La hauteur de l'arbre est le maximum de l'excursion V associée. Ceci donne une nouvelle preuve du fait que la hauteur d'un arbre de G.W. de taille n divisée par $\sqrt{n}$ converge vers le maximum de l'excursion brownienne (au facteur $2/\sigma$ près).
• Soit $V(T)$ l'ensemble des sommets de l'arbre T. La *longueur de cheminement total* $LC(T)$ est la somme des distances des noeuds à la racine, i.e.

$$LC(T) = \sum_{x \in V(T)} h(x).$$

Pour donner la loi limite de $LC(T)$, on utilise le processus V. La mouche marchant deux fois sur chaque arête, on peut associer à chaque arête de l'arbre deux pas de l'excursion, et donc à chaque noeud $v \in V(T) \backslash racine$ aussi, tels que : $[V_{k_1}, V_{k_1}+1]$ et $[V_{k_2}, V_{k_2}+1]$ de sorte que

$$V_{k_1} \vee V_{k_1} + 1 = V_{k_2} \vee V_{k_2} + 1 = h(v).$$

Au noeud v, on peut donc associer une partie de la surface sous l'excursion entre les droites



d'équations $x = k_1$ et $x = k_1 + 1$ et entre les droites $x = k_2$ et $x = k_2 + 1$. L'aire de cette partie est alors $2h(v) - 1$. L'aire totale A sous l'excursion s'écrit donc :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{v \in V(T)} (2\ h(v) - 1) \\ &= 2LC(T) - \#V(T) \\ &= \sum_{k=0}^{2\#V(t)-1} \frac{V_k + V_{k+1}}{2}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème d'Aldous, on obtient :

$$\frac{A}{n^{3/2}} \xrightarrow{loi} \frac{4}{\sigma} A_e \quad \text{et} \quad \frac{LCT}{n^{3/2}} \xrightarrow{loi} \frac{2}{\sigma} A_e$$

où A_e est l'aire sous l'excursion brownienne normalisée,

$$A_e = \int_0^1 e_s ds.$$

On pourra également trouver des utilisations du parcours en profondeur dans les articles de Le Gall & Le Jan [24], Le Gall [23], Takàcs [37].

Dans [28], on trouve la preuve du résultat suivant :

$$\Big(\frac{S(nt_1)}{\sigma\sqrt{n}}, \frac{\sigma h(nt_2)}{2\sqrt{n}}, \frac{\sigma V(2nt_3)}{2\sqrt{n}}\Big) \xrightarrow[n]{faible} \big(e(t_1), e(t_2), e(t_3)\big).$$

Ceci signifie que les trois processus issus du parcours en profondeur sont asymptotiquement proportionnels. On verra apparaître cette propriété dans le second chapitre.
Exercice : On considère un arbre de Galton-Watson telle que la loi de progéniture ne permette que les degrés (sortants) 0, 3 et 5. Calculer p_0, p_3, p_5 qui rende les arbres de taille n équiprobables. Quelle est loi limite de la hauteur sous le conditionnement $\{X = n\}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

2 Arbres et Marches : propriétés locales

On a vu dans le premier chapitre que certaines caractéristiques “globales” de l’arbre (comme la hauteur, la largeur, le déplacement total...) pouvaient, à la limite, s’obtenir comme sous-produits de la convergence faible de certaines excursions discrètes vers l’excursion Brownienne.

Qu’en est-il des propriétés locales ? Par exemple, qu’en est-il du nombre et des emplacements des noeuds de degré d fixé (ou d’un sous-arbre d’un type donné), ou du type des ancêtres d’un noeud... Il s’avère que ces quantités passent mal à la limite, ou plutôt, elles ne sont pas des fonctionnelles de la limite : sur l’excursion Brownienne, on ne les voit plus !

Pour étudier ces quantités, la méthode que l’on propose consiste à utiliser le plus possible le fait que l’excursion discrète que l’on a, est une marche aléatoire conditionnée. Les marches aléatoires sont les processus discrets les plus simples que l’on puisse imaginer ; ce sont des chaînes de Markov homogènes, en temps, en espace, possédant la propriété de Markov forte (si on regarde la marche juste après l’apparition d’un événement A que l’on attend, on voit une marche qui a même loi que la première, à ceci près qu’elle a été translatée) ; les marches aléatoires sont de plus des martingales (dans notre cas la criticité de la loi de reproduction signifie que les $Y_i - 1$ sont de moyenne 0). Il reste le problème que les excursions ne sont pas des marches aléatoires : pour le coup, il y n’y a plus rien qui marche : ce sont encore des chaînes de Markov, mais elles ne sont plus homogènes ni en temps ni en espace (plus on est haut, plus on est poussé à redescendre, et c’est encore pire lorsque l’on approche du temps n), et ce ne sont plus des martingales non plus (la moyenne n’étant visiblement pas constante). Pourtant, une excursion et une marche aléatoire, ça se ressemble... pas de loin, bien sûr mais de près ! (voir p. 33 et 35) si on zoome, on ne voit pas bien la différence. En fait, on va donner toute une classe de propriétés qui se transportent très bien des marches aléatoires aux excursions. Ce sont des propriétés de concentration, en particulier les propriétés de concentration d’occurences d’un motif fixé (disons quelques “pas”).

2.1 Transport des principes de concentration

Soit une marche aléatoire $(Z_i)_{i\geq 0}$:

$$Z_0 = 0, \quad Z_j = \sum_{i=1}^{j} z_i \quad \text{pour } j \geq 1,$$

dont les incréments, les $(z_i)_{i\geq 0}$ sont i.i.d. ; on suppose de plus que $Z_0 = 0$, $\mathbb{E}(z_1) = 0$ et $0 < \mathrm{Var}(z_1) < +\infty$. Supposons aussi que z_i est à valeurs dans $\{-1, 0, 1, 2, \cdots\}$ et n’est pas lattice.
On note $\mathcal{W}_Z(n)$ l’ensemble des marches aléatoires $(Z_i)_{0\leq i\leq n}$ de longueur n muni de la loi induite par celle de z_1 et $\mathcal{E}_Z(n)$ l’ensemble des excursions correspondantes :

$$\{\omega \in \mathcal{E}_Z(n)\} \Leftrightarrow \{\omega \in \mathcal{W}_Z(n), Z_1(\omega) \geq 0, \cdots, Z_{n-1}(\omega) \geq 0, Z_n(\omega) = -1\}.$$

Par la formule d’Otter (discutée déjà p. 8) on a

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_Z(n)) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(Z_n = -1) \sim \frac{n^{-3/2}}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{Var}(z_1)}}.$$

Soit A_n un sous ensemble de $\mathcal{W}_Z(n)$ et n tel que $\mathbb{P}(Z_n = -1) \neq 0$. On a

$$\mathbb{P}(A_n|\mathcal{E}_Z(n)) \leq \frac{\mathbb{P}(A_n)}{\mathbb{P}(\mathcal{E}_Z(n))}.$$

Et donc,

$$\mathbb{P}(A_n|\mathcal{E}_Z(n)) = O(n^{3/2})\mathbb{P}(A_n). \tag{2.5}$$

On déduit de ceci

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(A_n) = o(n^{-\beta}) & \Longrightarrow & \mathbb{P}(A_n|\mathcal{E}_Z(n)) = o(n^{-\beta+3/2}). \\ \mathbb{P}(A_n) = o(\exp(-cn^{\nu})) & \Longrightarrow & \mathbb{P}(A_n|\mathcal{E}_Z(n)) = o(\exp(-c'n^{\nu})). \end{array}}$$

Cette simple propriété implique la chose suivante : s'il existe un principe de déviations modérées (ou de grandes déviations) pour une fonctionnelle d'une marche aléatoire centrée (ici c'est important qu'elle soit centrée) alors il existe une borne supérieure pour le principe analogue sur l'excursion associée.

2.2 Un peu de concentration !

Lemme 1 *Soit* $(Z_i)_{i\geq 0}$ *une marche aléatoire d'incréments* z_i*, centrés. S'il existe une constante* $a > 0$ *telle que* $\mathbb{E}\big(e^{a|z_1|}\big) < +\infty$ *alors pour tout* $0 < \nu < \frac{1}{2}$*, pour tout* $c > 0$*, il existe* $c' > 0$ *tel que*

$$\mathbb{P}(|Z_n| \geq cn^{1/2+\nu}) \leq O(\exp(-c'n^{2\nu}))$$

(Preuve Petrov [31] (Théorèmes 2.2, 2.4, et 2.6)).

La somme de n variables aléatoires satisfaisant aux hypothèses du lemme est de l'ordre de $\sqrt{n}$ (théo de la limite centrale). Les déviations d'ordre $n^{1/2+\nu}$ arrivent avec probabilité $e^{-cn^{2\nu}}$

2.3 Répétition de motifs

Un pas $j-1$ sur la PPP ou PPL correspond à un noeud ayant j enfants. On étudie donc une marche aléatoire (non conditionnée) $(W(i))_{i\geq 0}$ dont les incréments, i.i.d. ont pour loi $(\mu_j)_{j\geq -1} = (p_{j+1})_{j\geq -1}$.

On considère donc une marche aléatoire $W_k = \sum_{i=1}^{k} w_i$ où les w_i sont i.i.d. de loi $(\mu_j)_{j\geq -1}$, c'est à dire $(\mathbb{P}(w_i = j) = \mu_j)$. On va réfléchir sur la marche W et en déduire des choses sur W conditionnée par $\{T_{-1}^{W} = n\}$. On traduira ensuite ces résultats sur nos arbres.

Nombre de noeuds de degré fixé

Combien y a-t-il de pas $+j$ sur la marche $(W_i)_{i=0\dots n}$? Soit N_j ce nombre de pas ; on a

$$N_j(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{W_k - W_{k-1} = j} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{w_k = j}.$$

Comme W est une marche aléatoire et puisque ses accroissements sont indépendants on voit que $(N_j(k))_k$ est elle même une marche aléatoire dont les incréments sont $+1$ ou 0 ($+1$ avec probabilité

μ_j). Il est facile de voir que $N_j(n)$ est une binomiale $B(n, \mu_j)$ que l'on connaît parfaitement donc, mais, regardons un peu ce que donne Petrov, puisque :

$$N_j(n) - \mu_j n = \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{w_k = j} - \mu_j \right)$$

On a donc, pour tout $0 < \nu < 1/2$, (comme les incréments ont des moments exponentiels)

$$\mathbb{P}(|N_j(n) - \mu_j n| \geq n^{1/2+\nu}) = O(e^{-cn^{2\nu}}),$$

pour un certain c. On sait donc d'après la remarque ci-dessus que cette concentration est encore valable sur la marche W conditionnée à être une excursion.
On peut montrer avec ceci des bornes plus fines, du genre

$$\mathbb{P}(|N_j(n) - \mu_j n| \geq dn^{1/2} \log n) = o(n^{-\beta})$$

pour tout β, pour d assez grand ; ceci est donc encore vrai sur l'excursion.
Revenons à l'arbre. On déduit de cela que le nombre de noeuds dans l'arbre ayant j enfants est très proche de $\mu_{j+1} n$, c'est à dire $p_j n$. En fait ceci est plus faible qu'un résultat de Drmota établissant la convergence du nombre de noeuds de degré j vers une Gaussienne. Mais la démonstration est vraiment plus simple !

Mais où sont-ils ?

Où se trouve sur la marche le i-ème pas de longueur j ?
Eh bien, le premier a lieu après un temps g_1 géométrique $G(\mu_j)$ car chaque pas a probabilité μ_j d'être de longueur j (autrement dit, $\mathbb{P}(g_1 = l) = \mu_j(1 - \mu_j)^{l-1}$ pour tout $l \geq 1$). En utilisant la propriété de Markov forte, on voit que T_i, le temps d'apparition du i-ème saut de taille j sur la marche, vérifie

$$T_i = g_1 + \cdots + g_i,$$

où les g_k sont des copies i.i.d. de loi $G(\mu_j)$. On voit que T_i est encore une marche aléatoire ! En écrivant

$$T_i - i/\mu_j = \sum_{k=1}^{i} (g_k - 1/\mu_j)$$

on peut utiliser Petrov et on attrape, pour $0 \leq \nu \leq 1$:

$$\mathbb{P}(|T_i - i/\mu_j| > n^{1/2+\nu}) = O(\exp(-cn^{2\nu}))$$

et donc

$$\mathbb{P}(\sup_{i \leq n} |T_i - i/\mu_j| > n^{1/2+\nu}) = O(\exp(-c' n^{2\nu})).$$

Ainsi, T_i est très proche de i/μ_j (c'est le théorème de renouvellement)... Mais aussi, les T_i sont uniformément proches des i/μ_j en même temps. On en déduit que ceci est vrai aussi sur l'excursion discrète associée ! Sur l'arbre ceci signifie que non seulement il y a (à une vache près) np_j noeuds de degré j, mais qu'en plus, lorsque l'on parcours l'arbre en profondeur (ou en largeur) on trouvera le i-ème noeud de degré sortant j au temps i/p_j (à $n^{1/2+\nu}$ près, avec probabilité presque 1) : ceci nous dit que les noeuds ayant j enfants sont "bien répartis" dans l'arbre (voir [28]).

Cette méthode (à peine modifiée) permet de montrer que le nombre de sous arbres d'un type fixé et leur localisation dans les arbres de taille n possèdent le même genre de propriété.

2.4 Répartition des ancêtres

On va établir un résultat de régularité uniforme dans l'arbre. Prenons un noeud u dans un arbre. Il existe un chemin $u_0 = root, u_1, \ldots, u_{h(u)} = u$ liant la racine à u. Les noeuds différents de u sur ce chemin sont appelés ancêtres de u. On s'intéresse aux quantités suivantes :
$h(u)$ le nombre d'ancêtres de u (autrement dit, la profondeur de u) ;
$a_k(u)$, le nombre d'ancêtres de u (u exclu) qui ont k enfants (on appelle ces noeuds des k-ancêtres de u) ;
$a_{k,j}(u)$, le nombre d'ancêtres de u qui ont k enfants, et dont u est un descendant du j-ème (donc j varie de 1 à k ; les enfants de chaque noeud sont ordonnés du plus à gauche au plus à droite). On appelle ces noeuds les k, j-ancêtres de u.

2.5 Comment retrouver les ancêtres sur la marche S ?

On note $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ les noeuds d'un arbre de taille n (avec l'ordre fourni par le parcours en profondeur) et S la PPP correspondante.

On dit que $S(j)$ est un minimum à droite pour S sur $[\![0, l-1]\!]$ si

$$\min_{0 \le k \le l-j} \{S(j+k)\} = S(j).$$

Lemme 2 *(Le Gall, Le Jan) Pour tout $l \in [\![0, n-1]\!]$ et $j \in [\![0, l-1]\!]$, $S(j)$ est un minimum à droite pour S sur $[\![0, l-1]\!]$ si et seulement si v_j est un ancêtre de v_l.*

Lorsque que $S(j)$ est un minimum à droite pour S sur $[\![0, l-1]\!]$, on dira que v_j est un minimum à droite sur $[\![0, l-1]\!]$.
Preuve : On montre ceci en voyant la marche S comme la taille d'une file d'attente dans un système LIFO (last in first out). La correspondance arbre – file d'attente remonte à Kendall 1954. On considère donc une file d'attente à un serveur, LIFO. On suppose que le serveur sert un client par unité de temps. Considérons un arbre de taille n dont les noeuds $(v_0, \cdots, v_{n-1})$ ont été ordonnés selon l'ordre du parcours en profondeur. Les noeuds sont les clients. La racine arrive au temps 0. Les fils de v_i arrivent au temps $i+1$ du plus à droite au plus à gauche (de sorte que le plus à gauche arrivant le dernier sera servi le premier). Au temps i, le client en tête de queue est servi et s'en va au temps $i+1$.

La taille de la queue en fonction du temps est $\big(S(i)+1\big)_{i=0,\cdots,n}$, où S est la PPP ; en effet, lorsque le client i est servi (-1), il est remplacé par ses enfants $(+Y_i)$; de plus au temps 0, la taille de la file est 1.

Sur ce dessin (Figure 7), considérons le noeud 5. Il est servi au temps 5 (ce qui est normal, par construction). Dans l'arbre, sa profondeur est 3 puisqu'il a 3 ancêtres v_4, v_1 et v_0. Les temps de service de ses ancêtres sont exactement les minima à droite avant le temps 5.

Terminons la preuve maintenant. D'abord, notons que dans notre procédure LIFO, les parents sont servis avant leurs enfants. Considérons v_k. Par construction, v_k est servi au temps k. Notons

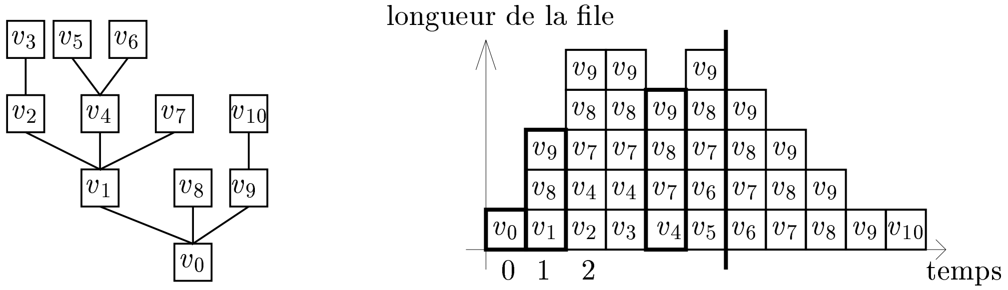


Figure 7 *: Evolution de la file LIFO associée à un arbre*

$t(v_k)$ le sous arbre enraciné en v_k. Après v_k, les $|t(v_k)|-1$ clients suivants servis sont exactement les noeuds de $t(v_k)$; mais ces noeuds ne sont pas dans la file au temps k. Donc, $S(k) \leq S(k+i)$, pour tout $i \in \{1, \cdots, |t(v_k)|-1\}$. De plus, $S(k) > S(k+|t(v_k)|)$. En effet, au temps $k+|t(v_k)|$, tous les descendants de v_k sont sortis de la file. La file contient les mêmes gens qu'au temps k à ceci près que v_k a disparu. Donc $S(k)$ est un minimum à droite dans l'ensemble $[\![1, k+|t(v_k)|-1]\!]$ mais pas dans $[\![1, k+|t(v_k)|]\!]$.
Considérons maintenant v_j. Tous les ancêtres de v_j sont servis avant v_j et sont des minima à droite dans $[\![0, l-1]\!]$. De plus, un noeud v_i qui est servi avant le temps l et qui n'est pas un ancêtre de v_l n'est pas non plus un minimum à droite dans $[\![0, l-1]\!]$ puisque $S(i+|t(v_i)|) < S(i)$ et $i+|t(v_i)| < l$ (car dans ce cas v_l n'est pas dans $t(v_i)$ et tous les noeuds de $t(v_i)$ sont servis avant v_l ; ainsi $l > i+|t(v_i)|$). On a donc bien démontré ce qu'on prétendait : les minima à droite de S dans $[\![0, l-1]\!]$ sont exactement les ancêtres de v_l. $\square$

2.5.1 De quels types sont les ancêtres ?

Dans le lemme 2 on a vu comment reconnaître les ancêtres de v_l sur S. Notons $A(l)$ l'ensemble des indices j pour lesquels $S(j)$ est un minimum à droite pour S dans l'intervalle $[\![0, l-1]\!]$.

$$A(l) = \big\{ j | 0 \leq j \leq l-1, \min_{0 \leq k \leq l-j} \{S(j+k)\} = S(j) \big\}. \tag{2.6}$$

Pour le plus grand j de $A(l)$, on pose $j^\star = l$; pour les autres j de $A(l)$, posons $j^\star = \inf\{k > j | k \in A(l)\}$.

Lemme 3 *Pour tout* $0 \leq l \leq n-1$,

$$\begin{aligned} a_k(v_l) &= \#\{j \in A(l) \ t.q.\ S(j+1) - S(j) = k-1\} \\ a_{k,i}(v_l) &= \#\{j \in A(l) \ t.q.\ S(j+1) - S(j) = k-1, S(j^\star) - S(j) = k-i\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Preuve : La première relation provient du fait suivant : l'assertion $\big\{S(j)$ est un minimum à droite et $S(j+1) - S(j) = k-1\big\}$ est équivalente à l'assertion $\big\{v_j$ est un ancêtre de v_l et v_j a k enfants$\big\}$. Passons à la seconde relation : Soit v_j un k,i-ancêtre de v_l. Le minimum à droite $(v_{j^\star})$ suivant v_j est le i-ème enfant de v_j. Dans la file, lorsque v_j est servi, la taille de la file augmente de $k-1$, $S(j+1) = S(j) + k - 1$. Puis, les fils de v_j (et leur descendants) sont servis selon leur ordre. Lorsque le premier fils de v_j est servi, la longueur de la file est $S(j+1) - 1$. Lorsque le second fils de v_j est servi, la longueur de la file est $S(j+1) - 2$... Lorsque le $(i-1)$-ème fils de v_j est servi, la longueur de la file est $S(j^\star) = S(j+1) - (i-1) = S(j) + k - i$. Réciproquement, par le même argument, la relation $S(j^\star) = S(j) + k - i$ implique que $v_{j^\star}$ est le i-ème enfant de v_j. $\square$

2.5.2 Traduction sur une marche non-conditionnée

On prend à nouveau notre marche aléatoire non conditionnée $(W(i))_{i\geq 0}$ dont les incréments, les w_i sont i.i.d. et ont pour loi $(\mu_j)_{j\geq -1} = (p_{j+1})_{j\geq -1}$.

Les formules (2.6, 2.7) nous dictent ce qu'il faut étudier sur la marche W :
$RM(l)$ le nombre de minima à droite de $(W(i))_i$ sur $[\![0, l-1]\!]$:

$$RM(l) = \#\big\{j|0 \leq j \leq l-1, \min_{0\leq k\leq l-j}\{W(j+k)\} = W(j)\big\}, \tag{2.8}$$

et les analogues des variables $A(l)$, a_k, $a_{k,j}$.

$$B(l) = \big\{j|0 \leq j \leq l-1, \min_{0\leq k\leq l-j}\{W(j+k)\} = W(j)\big\}.$$

Pour le plus grand j de $B(l)$, posons $j' = l$; pour les autres j de $B(l)$, on pose $j' = \inf\{k > j|k \in B(l)\}$.

$$\begin{aligned} b_k(l) &= \#\big\{j \in B(l) \text{ t.q. } W(j+1) - W(j) = k-1\big\}, \\ b_{k,i}(l) &= \#\big\{j \in B(l) \text{ t.q. } W(j+1) - W(j) = k-1, W(j^{'}) - W(j) = k-i\big\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ces variables sont encore difficiles à étudier car elles font appel au futur de la marche (ce qui en probabilité est beaucoup plus délicat que de faire appel au passé). C'est pour cela que l'on retourne la marche !

2.6 Retournement de la marche

On associe donc à $(W(j))_{j\in[\![0,l]\!]}$, la marche aléatoire $(W^\bullet(j))_{j\in[\![0,l]\!]}$ définie par :

$$W^\bullet(j) = W(l) - W(l-j) \text{ pour tout } j \in [\![0, l]\!]. \tag{2.10}$$

Le graphe de la trajectoire $W^\bullet$ est le symétrique du graphe de W par rapport au centre $(l/2, W(l)/2)$. Les incréments de $(W^\bullet(i))_{i\geq 0}$ ont aussi pour distribution $(\mu_j)_{j\geq -1}$.

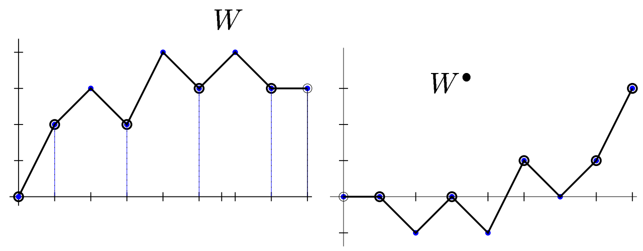


Figure 8 : *Symétrie de W.*

Soit $R^\bullet(l)$ le nombre de records (au sens large) de la trajectoire $(W^\bullet(j))_{j\in[\![0,l]\!]}$:

$$R^\bullet(l) = \#\big\{j, 1 \leq j \leq l, \max_{0\leq k\leq j}\{W^\bullet(k)\} = W^\bullet(j)\big\}.$$

Par (2.10), on obtient :

$$\begin{aligned} R^\bullet(l) &= RM(l), && (2.11)\\ \max_{0\le i\le l} W^\bullet(i) &= W(l) - \min_{0\le i\le l} W(i). && (2.12)\\ \big|\max_{0\le j\le l}\{W^\bullet(j)\} - R^\bullet(l)\frac{\sigma^2}{2}\big| &= \big|W(l) - \min_{0\le i\le l}\{W(i)\} - RM(l)\frac{\sigma^2}{2}\big|. && (2.13)\end{aligned}$$

Les variables b_k et $b_{k,j}$ se traduisent également sur $W^\bullet$. Notons $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{R^\bullet(l)} < \cdots$ les temps des records pour $W^\bullet$ comme en (2.16), et posons

$$\begin{aligned} c_k(l) &= \#\big\{\tau_j, 0 < \tau_j \le l, w(\tau_j) = k-1\big\}, && (2.14)\\ c_{k,i}(l) &= \#\big\{\tau_j, 0 < \tau_j \le l, w(\tau_j) = k-1, W^\bullet(\tau_j) - W^\bullet(\tau_{j-1}) = k-i\big\}. \end{aligned}$$

On a :

$$c_k(l) = b_k(l), \qquad c_{k,i}(l) = b_{k,i}(l). \tag{2.15}$$

Voici un tableau récapitulatif des quantités évoquées (et invoquées)

S	W	$W^\bullet$
$h(l)$	$RM(l)$	$R^\bullet(l)$
$S(l)$	$W(l) - \min_{j\le l} W(j)$	$\max_{j\le l} W^\bullet(j)$
a_k	b_k	c_k
$a_{k,i}$	$b_{k,i}$	$c_{k,i}$

2.6.1 Distribution des variables d'échelles

Considérons la marche aléatoire $(W^\bullet(i))_{i\ge 0}$ définie par

$$W^\bullet(0) = 0, \quad W^\bullet(k) = \sum_{j=1}^{k} w(j), \text{ pour } k \ge 1,$$

où les variables aléatoires $(w(j))_{j\ge 1}$ sont i.i.d., de moyenne 0. On suppose de plus que le support de la distribution de $w(1)$ est $\{-1, 0, 1, \dots\}$ et

$$\mathbb{P}(w(1) = i) = \mu_i \text{ pour } i \ge -1.$$

Les temps d'accroissement de $W^\bullet$, les $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots$ sont définis par :

$$\tau_k = \inf\big\{j > \tau_{k-1}, W^\bullet(j) \ge W^\bullet(\tau_{k-1})\big\}, \text{ pour } k \ge 1. \tag{2.16}$$

Considérons les variables aléatoires $w(\tau_m)$, pour $m \ge 1$. C'est l'incrément correspondant au m-ème temps d'accroissement ; on appelle ces variables les incréments d'échelles. La loi de $w(\tau_m)$ de dépend pas de m. Notons aussi que $w(\tau_1)$ n'est pas l'accroissement de record (qui est $W^\bullet(\tau_1)$).

Lemme 4 *La loi de $w(\tau_1)$ est donnée par*

$$q_k \stackrel{def}{=} \mathbb{P}(w(\tau_1) = k) = (k+1)\mu_k \text{ pour } k \ge 0.$$

On peut aisément déduire de cela que si $\mathbb{E}\big(w^{m+1}(1)\big)$ existe, alors $\mathbb{E}\big(w^m(\tau_1)\big) = \mathbb{E}\big(w^{m+1}(1)\big) + \mathbb{E}\big(w^m(1)\big)$ pour $m > 0$; en particulier, $\mathbb{E}\big(w(\tau_1)\big) = \mathrm{Var}\,\big(w(1)\big)$.
Voici la loi conditionnelle de $W^\bullet(\tau_1)$ sachant $w(\tau_1)$:

Lemme 5 *Pour* $0 \leq r \leq k$, *si* $\mu_k > 0$,

$$\mathbb{P}(W^\bullet(\tau_1) = r | w(\tau_1) = k) = \frac{1}{k+1}.$$

Interprétation de ces résultats : Prenons un jeu équilibré (de moyenne 0) avec mise initiale 1 mais gain aléatoire. On commence avec fortune=0 ; puis on s'intéresse au temps de retour à l'équilibre (ou à 0) après le temps 0. Ainsi, la probabilité que notre fortune devienne positive alors que l'on vient de gagner k est $k+1$ fois la probabilité de gagner k (en un coup). Le lemme 5 précise alors qu'à ce moment, notre fortune est uniformément distribuée sur $[\![0, k]\!]$.

Preuve des résultats concernant les variables d'échelles

Soit $\lambda_r = \mathbb{P}(W^\bullet(\tau_1) = r)$; pour tout $r \geq 0$,

$$\lambda_r = \mu_r + \frac{\mu_{-1}}{1-\lambda_0}\lambda_{r+1}. \tag{2.17}$$

Pour montrer cette première formule, on décompose les résultats favorables : battre le record de r peut se faire de deux manières :
• Partir de 0 et faire un pas de r.
• Descendre d'abord en -1 (avec proba μ_{-1}). Une fois en -1, regardons les accroissements de record relativement au niveau -1. Pour que, globalement, l'accroissement de record soit de r, il faut qu'il soit de $r+1$ par rapport au niveau -1. Mais si relativement au niveau -1 il est de 0, c'est reparti pour un tour... Ainsi, on peut avoir autant d'accroissement de records de valeur 0 (au niveau -1) que l'on veut... puis un accroissement de $r+1$. On obtient

$$\lambda_r = \mu_r + \mu_{-1}\Big(\sum_{j=0}^{+\infty}\lambda_0^j\Big)\lambda_{r+1}.$$

On peut trouver ceci dans Feller 1 ; d'après (2.17), on a :

$$\sum_{r\geq 0} r\lambda_r = \sum_{r\geq 0} r\big(\mu_r + \frac{\mu_{-1}}{1-\lambda_0}\lambda_{r+1}\big).$$

Simplifiant cette écriture, on obtient

$$\mathbb{E}(\Lambda)\Big(1 - \frac{\mu_{-1}}{1-\lambda_0}\Big) = 0,$$

où Λ est une variable de distribution $(\lambda_r)_{r\geq 0}$. Comme $\mathbb{E}(\Lambda) > 0$, on trouve $\lambda_0 = 1 - \mu_{-1}$ puis, finalement

$$\lambda_r = \mu_r + \lambda_{r+1} = \mathbb{P}(W^\bullet(1) \geq r) \text{ pour } r \geq 1, \tag{2.18}$$

En calculant la moyenne, on trouve

$$\mathbb{E}(W^\bullet(\tau_1)) = \frac{\sigma^2}{2}$$

où σ^2 est la variance de $w(1)$; de plus si $w(1)$ possède des moments exponentiels, $W^\bullet(\tau_1)$ aussi, ce qui sera important plus tard .

On décompose q_k :

$$q_k = \sum_{i=-k}^{0} \mathbb{P}\left(W^\bullet(\tau_1 - 1) = i \cap w(\tau_1) = k\right)$$

$W^\bullet(\tau_1 - 1) = 0$ implique que $\tau_1 = 1$; donc

$$\mathbb{P}\left(W^\bullet(\tau_1 - 1) = 0 \cap w(\tau_1) = k\right) = \mu_k.$$

Pour i dans $[\![1, k]\!]$, étudions l'événement $E_{i,k} = \{W^\bullet(\tau_1 - 1) = -i \cap w(\tau_1) = k\}$.

Soit $W^\bullet$ une trajectoire de $E_{i,k}$. Durant les temps $[\![1, \tau_1 - 1]\!]$, $W^\bullet$ a visité les sites $-1, \cdots, -i$ (et peut-être d'autre sites).
Notons $r_1^{(1)} < \cdots < r_1^{(\kappa_1)}$ les temps de visites de -1,
$r_2^{(1)} < \cdots < r_2^{(\kappa_2)}$ les temps de visites de -2 après la dernière visite de -1 (On a donc $r_1^{(\kappa_1)} < r_2^{(1)}$) et on continue comme ça.
$r_i^{(1)} < \cdots < r_i^{(\kappa_i)}$ les temps de visite de $-i$ après la dernière visite de $-i+1$ (on a $r_{i-1}^{(\kappa_{i-1})} < r_i^{(1)}$).
Pour tout $l \geq 1$, on a $\kappa_l \geq 1$.
Entre les temps 0 et $\tau_1 - 1$, la trajectoire $W^\bullet$ peut être décomposée en i morceaux $V_1, \ldots, V_i$ comme suit :

$$\begin{aligned} V_1(m) &= W^\bullet(m) \text{ pour } m \in [\![0, r_1^{(\kappa_1)}]\!] \\ V_j(m) &= W^\bullet(m) \text{ pour } m \in [\![r_{j-1}^{(\kappa_{j-1})}, r_j^{(\kappa_j)}]\!]. \end{aligned}$$

Pour $j \in [\![1, i]\!]$, on définit V'_j comme :

$$\begin{aligned} V'_1 &= V_1 \\ V'_j(m) &= V_j\left(m + r_{j-1}^{(\kappa_{j-1})}\right) + j - 1 \text{ pour } m \in [\![0, r_j^{(\kappa_j)} - r_{j-1}^{(\kappa_{j-1})}]\!] \text{ et } j \in [\![2, i]\!]. \end{aligned}$$

Selon la propriété de Markov forte, les V'_js sont indépendants et ont la même loi. La probabilité de la trajectoire $W^\bullet$ est le produit des probabilités des V'_js multipliée par μ_k (la probabilité du dernier saut).

La probabilité de la trajectoire V'_j avec $\kappa_j = k_j$ est la probabilité de réaliser une trajectoire

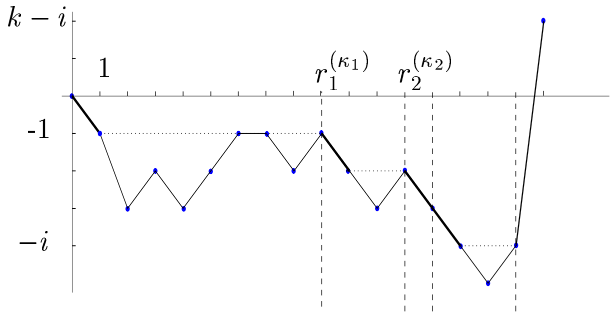


Figure 9 *Décomposition de la trajectoire*

commençant par le pas -1, suivi de k_j passages en -1. Ainsi, la trajectoire restreinte $V'_j(m) +$

$1|_{m\geq 1}$ est en fait une trajectoire de marche aléatoire commençant en 0 et dont les $k_j - 1$ premiers accroissements de records valent 0. Ainsi,

$$\mathbb{P}(V_j', \kappa_j = k_j) = \mu_{-1}\, \lambda_0^{k_j - 1}.$$

On obtient finalement

$$\mathbb{P}(E_{i,k}) \;=\; \mu_k \sum_{(k_1,\cdots,k_i)\in\mathbb{N}^{\star i}} \mu_{-1}^i \prod_{j=1}^{i} \lambda_0^{k_j-1} = \mu_k.$$

Ceci prouve les Lemmes 4 et 5. □

2.7 Concentration du nombre de records et du type de records

Considérons la marche $(W_i^\bullet)_{i=1...k}$ et $R^\bullet(k)$ le nombre d'accroissements de records.
Quel rapport y-a-t-il entre $\max\{W_i^\bullet,\, i = 1...k\}$ **et** $R^\bullet(k)$ **?**
La réponse est très simple : le maximum est la somme des accroissements de records (et donc en l'occurence il y en a $R^\bullet(k)$). Autrement dit,

$$\max\{W_i^\bullet,\, i = 1...k\} = \sum_{j=1}^{R^\bullet(k)} W^\bullet(\tau_j) - W^\bullet(\tau_{j-1})$$

Comme la valeur moyenne d'un accroissement de record est $\sigma^2/2$, on doit tout de suite penser que

$$|\max\{W_i^\bullet,\, i = 1...k\} - \frac{\sigma^2}{2} R^\bullet(k)|$$

est petit. C'est vrai mais on voit apparaître un problème qu'il ne serait pas honnête de passer sous silence. Le nombre $R^\bullet(k)$ n'est pas constant (il est aléatoire) et n'est pas indépendant des variables $W^\bullet(\tau_j) - W^\bullet(\tau_{j-1})$. On se sort de ce véritable problème en posant des variables intermédiaires. On pose

$$\begin{aligned} d_k(r) &= \#\{\tau_j, 0 < j \leq r, w(\tau_j) = k-1\}, \\ d_{k,i}(r) &= \#\{j, 0 < j \leq r, w(\tau_j) = k-1, W^\bullet(\tau_j) - W^\bullet(\tau_{j-1}) = k-i\}. \end{aligned}$$

Ainsi si $c_k(l)$ compte les variables d'échelles présentes avant le temps l, $d_k(r)$ elle, compte les r premières (on fait comme si la marche était de longueur infinie). Par la propriété de Markov forte et les Lemmes 4 et 5,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(w(\tau_j) = k-1) &= q_{k-1} = k\mu_{k-1}, \\ \mathbb{P}(w(\tau_j) = k-1, W^\bullet(\tau_j) - W^\bullet(\tau_{j-1}) = k-i) &= \mu_{k-1}, \end{aligned}$$

$d_k(r)$ est cette fois une somme de variables indépendantes (en fait c'est une binomiale $B(r, q_{k-1})$ et $d_{k,i}(r)$ une binomiale $B(r, \mu_{k-1})$).
On remonte alors aux c_k tout d'abord en établissant que le nombre d'accroissements de records est inférieur à $n^{1/2+\nu}$ avec une probabilité presque de 1. J'esquisse ici juste l'argument (un peu compliqué que l'on peut trouver dans [28]). L'idée est simple : un accroissement de record, en

moyenne vaut $\sigma^2/2$. S'il y en avait $n^{1/2+\nu}$, le record de la marche sur $[\![0,n]\!]$ (qui est la somme des accroissements de records) serait de l'ordre de $n^{1/2+\nu}(\sigma^2/2)$, or, on sait qu'il est de l'ordre de $n^{1/2}$. On cherche donc ici la probabilité d'un événement rare qui en fait, est exponentiellement petit.

Montrons que $c_k(l)$ est concentré (la preuve est identique pour $c_{k,j}(l)$:)

$$\mathbb{P}(|c_k(l) - q_{k-1}R^\bullet(l)| > n^{1/4+\nu}) \leq \mathbb{P}(R^\bullet(l) > n^{1/2+\nu}) \\ + \mathbb{P}(|c_k(l) - q_{k-1}R^\bullet(l)| > \gamma n^{1/4+\nu}, R^\bullet(l) \leq n^{1/2+\nu}).$$

Le premier terme est exponentiellement petit comme déjà dit ; occupons nous du deuxième :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|c_k(l) - q_{k-1}R^\bullet(l)| > n^{1/4+\nu}, R^\bullet(l) = r) \\ &\leq \mathbb{P}\big(|d_k(r) - q_{k-1}r| > n^{1/4+\nu}, R^\bullet(l) = r\big) \\ &\leq \mathbb{P}\big(|d_k(r) - q_{k-1}r| > n^{1/4+\nu}\big)\end{aligned}$$

Maintenant, puisque $d_k(r)$ est une binomiale (r, q_{k-1}) (que r est inférieur à $n^{1/2+\nu}$), on voit que ce que mesure la dernière probabilité est exponentiellement petit. Il y en a $n^{1/2+\nu}$ termes, qui sont tous exponentiellement petit. Tous calculs faits, on trouve

$$\mathbb{P}(|c_k(l) - q_{k-1}R^\bullet(l)| > n^{1/4+\nu}) \leq e^{-cn^\nu}.$$

ÇA Y EST ! On a fois établi les résultats de concentration entre le records et les types records. On renverse à nouveau la marche ; les résultats sur les records deviennent des résultats entre le $S_k - \min\{S_j,\ j \leq k\}$ et les différents type de minima à droite. On reconditionne à être une excursion. On obtient alors, enfin, les résultats recherchés. Mais ça valait le coup :

En fait, en raffinant un tout petit peu les raisonnements faits plus haut, on peut montrer que $a_k(u)$ vérifie les propriétés suivantes : pour tout β positif, il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{u,\,k} \big|a_k(u) - kp_k h(u)\big| > \gamma n^{1/4} \ln n\Big) = o(n^{-\beta}).$$

Mais aussi, pour tout β positif, il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{u,\,k,\,j} \big|a_{k,j}(u) - p_k h(u)\big| > \gamma n^{1/4} \ln n\Big) = o(n^{-\beta}).$$

Ainsi $a_{k,j}$ se comporte comme a_k/k.(On a prouvé ici, des résultats du genre

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{u,\,k} \big|a_k(u) - kp_k h(u)\big| > n^{1/4+\nu}\Big) = o(e^{-cn^\nu}).$$

On peut tirer pas mal de corollaires de ces résultats, par exemple que la plus haute branche de l'arbre, contient (à des miettes près) le plus de noeuds d'un type fixé (parmi toute les branches), mais aussi qu'il y a autant ou presque de virage à droites que de virage à gauches, lorsque l'on se rend de la racine à une des plus hautes feuilles d'un arbre binaire.

Mais encore ... On obtient aussi, par exemple que la hauteur du j-ème noeud, disons $(h(j))$ et S_j sont proportionnels (le rapport $\sigma^2/2$ "en loi" entre le tour de l'arbre ou le processus des hauteurs et la PPL, est en fait, la moyenne de l'accroissement de record). En fait, on montre que

$$\mathbb{P}\big(\sup_k |h(k) - \frac{\sigma^2}{2} S_k| \geq n^{1/4+\nu}\big) = O(\exp(-n^{2\nu})).$$

Ceci, d'après un résultat que l'on trouve dans les compléments, assure que le processus

$$\frac{h(nt)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n]{faible} \frac{2}{\sigma} e_t$$

l'excursion Brownienne normalisée. Puis, par un argument très simple, que

$$\frac{V(2nt)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n]{faible} \frac{2}{\sigma} e_t$$

autrement dit, que le tour de l'arbre converge vers l'excursion Brownienne (on retrouve le résultat d'Aldous dont la preuve était si difficile...). On a, en prime, le fait que ces processus soient proportionnels.

3 Compléments

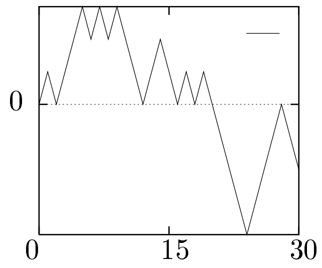
3.1 Éléments sur les processus Browniens

On donne (ou rappelle) ici quelques caractéristiques et propriétés des processus browniens. Certaines de ces propriétés ne sont pas utilisées dans ce cours et ne sont données qu'à titre indicatif.

3.1.1 Marches aléatoires et excursions discrètes

Marche aléatoire

Une marche aléatoire est une suite $\omega = (S_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ définie par : $S_0(\omega) = 0$ et $S_k(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_k(\omega)$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On représente généralement les marches aléatoires par la ligne brisée liant les points (k, S_k).

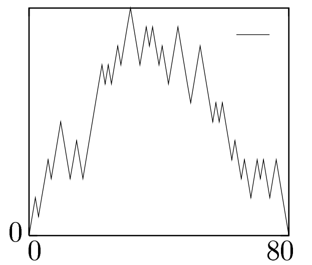


Les *marches simples symétriques* sont les marches où les variables X_i sont uniformes sur $\{-1, 1\}$. La loi induite sur les marches de longueur n par la loi des X_i est alors l'équiprobabilité. Ainsi, calculer des probabilités sur ces marches, revient souvent à effectuer des dénombrements. On pourra se référer aux livres de Révész [32] et Spitzer [36].

Excursions discrètes

Les excursions simples discrètes de longueur m sont des marches aléatoires conditionnées à respecter l'ensemble de contraintes :

$$S_0 = 0, S_1 > 0, \cdots, S_{m-1} > 0, S_m = 0. \qquad (\star)$$



On considère dans ce cours les marches conditionnées à respecter l'ensemble de contraintes :

$$S_0 = 0, S_1 \geq 0, \cdots, S_{m-1} \geq 0, S_m = -1, \qquad (\star\star)$$

ces marches étant naturellement associées aux arbres. On appellera les trajectoires de type $(\star\star)$ également des excursions, leur comportement étant très similaire à celui des excursions simples.

Processus browniens

Les processus décrits ci-dessous sont obtenus comme limites de marches aléatoires conditionnées ou non. Les lois de fonctionnelles de ces processus (maximum, temps d'atteinte...) sont obtenues soit via des propriétés connues sur le mouvement brownien, soit par des principes d'invariance, comme limite de lois analogues sur les marches aléatoires.

A ce propos, on pourra trouver un petit historique des lois associées aux processus browniens dans l'article de Csáki & Mohanty [12] ainsi qu'une idée sur les méthodes employées dans le papier de Durrett & Iglehart [14].

Mouvement brownien

Le mouvement brownien, que l'on notera $\mathcal{B}$, est un processus défini sur $\mathbb{R}^+$, continu, à accroissements indépendants tel que pour tout t, $\mathcal{B}_t$ est une v.a. centrée, gaussienne et a pour variance t.

On pourra se rapporter aux livres de Revuz & Yor [33] ou de Karatzas & Shreve [20] pour avoir tous les éléments nécessaires à la bonne compréhension de cet objet.

Le mouvement brownien est un objet central en probabilité puisqu'il apparaît, après renormalisation, comme limite d'une large classe de marches aléatoires, de la même façon que la loi normale apparaît comme limite de sommes de v.a. renormalisées. Plus précisément, soit $\xi_1, \xi_2, \cdots$ une suite de v.a. indépendantes, de même loi, centrées et de variance σ^2 finie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$ les sommes partielles. On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$,

$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]} + (nt - [nt]) \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \xi_{[nt]+1}$$

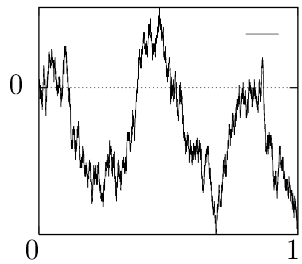
le processus renormalisé, linéaire par morceaux, interpolé de $(S_k)_{k\geq 0}$.

Théorème 6 *(Donsker)* $X_n \xrightarrow{faiblement} \mathcal{B}$ *dans l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$ *munies de la topologie induite par* $\|.\|_\infty$.

C'est à dire que pour toute fonction f continue bornée sur l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_n \mathbb{E}\big(f(X_n)\big) = \mathbb{E}(f(\mathcal{B})).$$

(On trouvera plus loin les méthodes utilisées pour obtenir ce genre de résultats (ainsi que des précisions sur le cadre topologique). Pour une démonstration du théorème de Donsker ainsi que pour tout problème relatif aux mesures et aux convergences des mesures, on pourra se référer aux livres de Billingsley [5], [6], Breiman [7] .



Remarquons que le Brownien n'est pas a priori défini seulement sur $[0,1]$, mais plus naturellement sur $\mathbb{R}^+$ grâce à ses propriétés de changement d'échelles.

Voici quelques propriétés du mouvement brownien :

• Il est markovien et fortement markovien : Pour $T > 0$ déterministe donné, $(\tilde{\mathcal{B}}_s)_{s\geq 0}$ défini par

$$\tilde{\mathcal{B}}_s = \mathcal{B}_{T+s} - \mathcal{B}_T$$

est un mouvement brownien indépendant de ce qui s'est passé avant le temps T :

$$(\tilde{B}_s)_{s\geq 0} \text{ est indépendant de } \sigma\{\mathcal{B}_t | 0 \leq t \leq T\}.$$

Cette propriété est également vraie si T est une variable aléatoire positive indépendante du brownien ou si T est un temps d'arrêt pour la filtration brownienne (voir [33]), par exemple, un temps d'atteinte d'une hauteur donnée.

• Ses propriétés de changement d'échelles : si a est un nombre réel strictement positif et $\mathcal{B}$ un mouvement brownien,

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{a}}\, \mathcal{B}_{at}\Big)_{t\geq 0} \text{ est un mouvement brownien}$$

• Retournement du temps : pour $T > 0$ déterministe donné,

$$(\mathcal{B}_s)_{0\leq s\leq T} \overset{loi}{=} (\mathcal{B}_{T-s} - \mathcal{B}_T)_{0\leq s\leq T}$$

• Soit

$$g = \sup\{t < 1 | \mathcal{B}_t = 0\}$$

le dernier temps avant 1 où le brownien s'annule et

$$\theta = \inf\{t | \mathcal{B}_t = M_1^{(\mathcal{B})}\}$$

la date où il atteint son maximum $M_1^{(B)}$ (cette date est unique p.s.). Alors g et θ suivent la loi de l'arcsinus sur $[0,1]$, c'est à dire que

$$g \overset{loi}{=} \theta,$$

$$\mathbb{P}(\theta \leq s) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{s}, \quad \mathbb{P}(\theta \in ds) = \frac{ds}{\pi\sqrt{s(1-s)}}$$

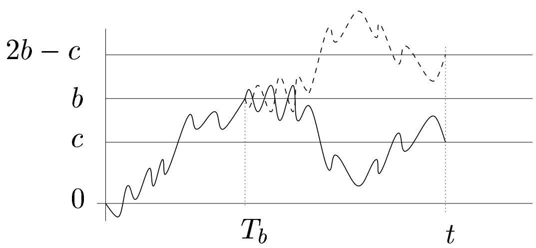
On va donner quelques propriétés de la v.a.

$$T_b = \inf\{t | \mathcal{B}_t = b\}$$

le temps d'atteinte de la hauteur b par le brownien et

$$M_t^{\mathcal{B}} = \max\{\mathcal{B}_s | s \in [0,t]\}$$

le maximum de la trajectoire brownienne sur l'intervalle $[0,t]$.



Le principe de réflexion de Désiré André permet d'obtenir des identités entre trajectoires et ainsi d'en déduire simplement des lois de v.a. liées. Il repose uniquement sur le fait que le brownien est fortement markovien à accroissements de loi symétrique ; il est donc également valable pour les marches simples symétriques. On peut l'énoncer ainsi : supposons que $T_b \leq t$. Alors, les 2 processus, $(\mathcal{B}_s)_{s\in[0,t]}$ et $\tilde{\mathcal{B}}_s = \begin{cases} \mathcal{B}_s & \text{pour } 0 \leq s \leq T_b, \\ 2b - \mathcal{B}_s & \text{pour } T_b \leq s \leq t, \end{cases}$ ont même loi en tant que processus (et ce sont donc des browniens !).

Ainsi, avec cette identité, on montre facilement que :

$$\mathbb{P}(T_b < t \cap \mathcal{B}_t < b) = \mathbb{P}(T_b < t \cap \mathcal{B}_t > b) = \mathbb{P}(\mathcal{B}_t > b).$$

On en déduit par exemple que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_b < t) &= \mathbb{P}(T_b < t \cap \mathcal{B}_t < b) + \mathbb{P}(T_b < t \cap \mathcal{B}_t > b) = 2\mathbb{P}(\mathcal{B}_t > b) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{b/\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx, \end{aligned}$$

et donc que

$$\mathbb{P}(T_b \in dt) = |b|(2\pi t^3)^{-1/2} e^{-b^2/2t} dt \quad \text{pour} \quad t > 0.$$

Le processus temps d'atteinte $(T_x)_{x>0}$ est le processus stable d'indice 1/2. Il est purement discontinu à accroissements stationnaires et indépendants. On peut déduire ses propriétés de celles du mouvement brownien. Par exemple, les propriétés de changement d'échelles du brownien donnent :

$$T_b \overset{loi}{=} b^2 T_1.$$

T_x et $M_t^{\mathcal{B}}$ sont reliés par l'identité évidente suivante :

$$\{T_b \leq t\} = \{M_t^{\mathcal{B}} \geq b\}.$$

Par le changement d'échelle du mouvement brownien, on a donc :

$$\mathbb{P}(T_b \leq t) = \mathbb{P}(\sqrt{t} M_1^{\mathcal{B}} \geq b) = \mathbb{P}\Big(\Big(\frac{b}{M_1^{\mathcal{B}}}\Big)^2 \leq t\Big)$$

et donc,

$$T_b \overset{loi}{=} \frac{b^2}{N^2}$$

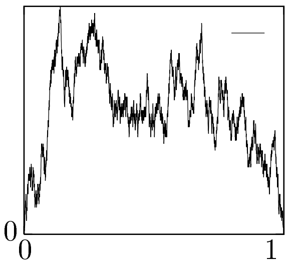
où N est une normale centrée réduite. D'autre part, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$M_t^{\mathcal{B}} \overset{loi}{=} |\mathcal{B}_t| \underset{\text{Lévy}}{\overset{loi}{=}} M_t^{\mathcal{B}} - \mathcal{B}_t.$$

L'égalité de Lévy est également une égalité en loi entre les processus $(|\mathcal{B}_t|)_{t\geq 0}$ et $(M_t^{\mathcal{B}} - \mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$. Par contre celle de gauche, n'en est pas une puisque le processus $(M_t^{\mathcal{B}})_{t\geq 0}$ est croissant alors que $(|\mathcal{B}_t|)_{t\geq 0}$ ne l'est pas.

Excursion brownienne renormalisée

Elle peut être construite de diverses manières :
• C'est un mouvement brownien conditionné à vérifier $\mathcal{B}_0 = 0, \mathcal{B}_1 = 0$ et $\mathcal{B}_t > 0$ pour tout $t \in]0,1[$.



• Une renormalisation de la portion de trajectoire brownienne qui "enjambe" 1. Autrement dit, considérons $d = \inf\{t \geq 1 | \mathcal{B}_t = 1\}$ le premier moment après 1 où le brownien s'annule et g défini plus haut. Le processus

$$\Big(\frac{|\mathcal{B}_{g+(d-g)t}|}{\sqrt{d-g}}\Big)_{t\in[0,1]}$$

est une excursion brownienne renormalisée.
• Un pont de Bessel de dimension 3 : soit $\big(\mathcal{B}_t^{(3)}\big)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien tridimensionnel conditionné à vérifier $\mathcal{B}_0^{(3)} = 0$ et $\mathcal{B}_1^{(3)} = 0$; $e_t = \big|\mathcal{B}_t^{(3)}\big|$ est une excursion brownienne renormalisée.
• De la même manière que le mouvement brownien apparaît comme limite faible de marches aléatoires, l'excursion brownienne apparaît comme limite faible d'excursions discrètes (avec la même renormalisation).
• La densité de e_t est donnée par [14] :

$$f_t(y) = \frac{2y^2 \exp(-y^2/2t(1-t))}{(2\pi t^3(1-t)^3)^{1/2}} \mathbb{1}_{y\geq 0}.$$

• La loi du maximum de $e.$ est :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(\sup\{e_s|0\le s\le 1\}\le x\big) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}}(1-4j^2x^2)e^{-2j^2x^2}\\ &= \sqrt{2}\pi^{5/2}x^{-3}\sum_{j=0}^{+\infty}j^2e^{-j^2\pi^2/(2x^2)}\\ &= \Big(\frac{\pi^3}{2}\Big)^{1/2}\theta'\Big(\frac{\pi}{2x^2}\Big)\end{aligned}$$

où

$$\theta(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2x}$$

est la fonction *theta* de Jacobi (voir Chung [11]). Ceci permet de calculer les moments :

$$\mathbb{E}(\sup\{e_s|0\le s\le 1\})=\sqrt{\pi/2}\qquad \text{et}$$

$$\mathbb{E}(\sup\{e_s|0\le s\le 1\}^r)=2^{-r/2}r(r-1)\Gamma(r/2)\zeta(r)\quad\text{pour}\quad r>1.$$

• La loi de l'aire sous l'excursion brownienne et celle de son temps local sont également connues. On pourra voir à ce sujet les articles de Louchard [25], [26], Takács [38], [40].

3.2 Comment montrer qu'une suite de processus converge ?

On se contente ici de décrire deux méthodes largement utilisées dans les théorèmes limites de ce cours :

3.2.1 Convergence faible de processus

On considère $X, X_1, X_2, \dots$ des processus définis et continus de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Définition. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge *faiblement* vers X si, pour tout fonctionnelle F continue bornée (pour la topologie induite par la norme uniforme) sur $\mathcal{C}[0,1]$ et à valeur dans $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(F(X_n))\underset{n}{\to}\mathbb{E}(F(X)).$$

Plusieurs remarques sont nécessaires, ici :
• F est continue sur $\mathcal{C}[0,1]$ pour la topologie induite par la norme uniforme, si pour tout $g\in\mathcal{C}[0,1]$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$, tel que $\Big(f\in C[0,1]$ et $\|f-g\|_\infty\le\eta\Big)\Rightarrow|F(g)-F(f)|<\varepsilon$.
• Les processus X_n ne sont pas censés être définis sur le même espace Ω ni moins encore sous la même loi de probabilité.

Proposition 2 *Soit $(X_n)_n$ une suite de processus convergeant faiblement vers X. Soit $(Y_n)_n$ une suite de processus t.q.*

$$\forall\varepsilon>0,\qquad \mathbb{P}(\|X_n-Y_n\|_\infty\ge\varepsilon)\xrightarrow[n]{}0.$$

Sous ces hypothèses, on a

$$Y_n\xrightarrow[n]{faible}X.$$

Remarquons que X_n et Y_n sont définis sur le même espace.

Preuve Billingsley p.25 [5]..

Lorsqu'on souhaite montrer que la suite X_n converge vers X mais qu'on ne sait pas que X_n est proche d'une suite Y_n convergeant vers X, on doit montrer deux propriétés pour la suite X_n :

Convergence des lois finies dimensionnelles et tension

Définition. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq 1$ et tout $(x_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$,

$$\mathbb{P}(X_n(t_1) \leq x_1, \ldots X_n(t_k) \leq x_k) \xrightarrow[n]{} \mathbb{P}(X(t_1) \leq x_1, \ldots X(t_k) \leq x_k)$$

on dit que les *lois finies dimensionnelles de X_n convergent vers celle de X.*

Définition. La suite de processus X_n est *tendue* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
(i) Pour tout $\eta > 0$, $\exists a$ tel que :

$$\mathbb{P}(|X_n(0)| > a) \leq \eta, \text{ pour tout } n \geq 1$$

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe δ, $0 < \delta < 1$ et un entier n_0 tel que

$$\frac{1}{\delta}\mathbb{P}(\sup_{t \leq s \leq t+\delta} |X_n(s) - X_n(t)| \geq \varepsilon) \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

Théorème 2 *Soit $(X_n)_n$ une suite de processus continus. Si la suite $(X_n)_n$ est tendue, et si les lois finies dimensionnelles de X_n convergent vers celles de X, alors*

$$X_n \xrightarrow[n]{faible} X.$$

Dans la pratique, on utilise un critère de tension plus fort mais plus facile à prouver. On remplace (ii) par :

(ii') Il existe $\gamma > 0$ et $\alpha > 1$, une constante c tels que

$$(ii'') \qquad \mathbb{E}|X_n(t) - X_n(s)|^\gamma \leq c|t-s|^\alpha \text{ pour tout } n \geq 1, \text{ et tout } 0 \leq s \leq t \leq 1.$$

3.3 Corollaire de la convergence faible

Dans ce cours, on utilise essentiellement deux corollaires de la convergence faible. Supposons que $(X_n)_n$ soit une suite de processus continus, sur $[0,1]$ convergeant simplement vers X dans $(C[0,1], \|.\|_\infty)$. Alors :

• Pour toute fonction f continue de $C[0,1]$ dans $\mathbb{R}$,

$$f(X_n) \xrightarrow[n]{loi} f(X),$$

(par exemple $f = \max$ ou $f = \int_0^1$ sont autorisées.)

• Si de plus f est bornée,

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \longrightarrow \mathbb{E}(f(X)).$$

Références

[1] D.J. Aldous, (1991) *The continuum random tree. II*, Ann. Probab. 19, No.1, 1-28.

[2] D.J. Aldous, (1993), *The continuum random tree. III*, Ann. Probab., **21**, 248-289.

[3] D.J. Aldous, (1997) *Brownian excursions, critical random graphs and the multiplicative coalescent.*, Ann. Probab. 25, No.2, 812-854.

[4] K.B. Athreya, P.E. Ney, (1972) *Branching processes*, Springer-Verlag.

[5] P. Billingsley, (1968) *Convergence of probability measures*, J. Wiley and Sons.

[6] P. Billingsley, (1979) *Probability and measure*, Wiley Series in Prob. and math. Stat.

[7] L. Breiman, (1968) *Probability*, Addison-Wesley.

[8] P. Biane, M. Yor, (1987) *Valeurs principales associées aux temps locaux browniens* , Bull. Sci. Maths 111, 23-101.

[9] P. Chassaing and J.F. Marckert, (2001) *Parking functions, empirical processes, and the width of rooted labeled trees*, Electron. J. Combin. 8 , no. 1,

[10] P. Chassaing, J.F. Marckert and M. Yor, (2000) *The height and width of simple trees* in Math. Comp. Sci. : Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities. Birkhauser.

[11] K.L. Chung, (1976) *Excursions in Brownian motion*, Ark. för Math., **14**, 155-177.

[12] E. Csáki, S.G. Mohanty, (1986) *Some joint distributions for conditional random walks.* , Can. J. Stat. 14, 19-28.

[13] M. Drmota, B. Gittenberger, (1997) *On the profile of random trees*, Random Struct. Algorithms 10, No.4, 421-451 .

[14] R.T. Durrett, D.L. Iglehart, (1977) *Functionals of Brownian meander and Brownian excursion*, Ann. Probab. 5, 130-135.

[15] P. Flajolet, A.M. Odlyzko, (1982) *The average height of binary trees and other simple trees*, J. Comput. Syst. Sci. 25, 171-213.

[16] D. Foata, J. Riordan, (1974) *Mappings of acyclic and parking functions.* Aequationes math. Vol. **10** : 10-22.

[17] J. Françon, (1975) *Acyclic and parking functions.* J. Combinat. Theory, Ser. A Vol. **18** : 27-35.

[18] Th. Jeulin, (1980) *Semi-martingales et grossissement d'une filtration.* Lecture Notes in Mathematics, 833, Springer-Verlag.

[19] T.E. Harris, (1963) *The theory of branching processes* , Springer-Verlag.

[20] I. Karatzas, S.E. Shreve, (1988) *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag.

[21] J.H.B. Kemperman, (1961) *The passage problem for a stationary Markov chain*, Univ. of Chaicago Press.

[22] D.P. Kennedy, (1975) *The Galton-Watson process conditioned on the total progeny.* J. appl. Probab. 12, 800-806.

[23] J.F. Le Gall, (1986) *Une approche élémentaire des théorèmes de décomposition de Williams*, Lect. Notes Math. 1204, Sém. Prob. XX, 447-464, Springer.

[24] J.F. Le Gall, Y. Le Jan, (1996) *Branching processes in Lévy processes : The exploration process*, preprint Université de Paris-Sud, Orsay.

[25] G. Louchard, (1984) *The Brownian excursion area : A numerical analysis,* Comput. Math. Appl. 10, 413-417.

[26] G. Louchard, (1986) *Erratum : The Brownian excursion area : a numerical analysis,* Comput. Math. Appl., Part A 12, 375.

[27] J.F. Marckert, A. Panholzer (2001) Non-crossing Trees are Almost Conditioned Galton-Watson trees, to appear in Rand. Struct. Algo.

[28] J.F. Marckert, A. Mokkadem (2001) The depth first processes of Galton-Watson trees converge to the same Brownian excursion, To appear in Annals of Probability.

[29] J.F. Marckert, A. Mokkadem (2002) Ladder variables, Internal structure of Galton-Watson trees and Finite branching random walks, to appear in Journal of Probability.

[30] R. Otter, (1949) *The multiplicative process.* , Ann. Math. Statist., Baltimore Md. 20, 206-224 (1949).

[31] V.V. Petrov, (1975) *Sums of independant random variables*, Springer.

[32] P. Révész, (1990) *Random walk in random and non-random environments*, World Scientific xiv.

[33] D. Revuz, M.Yor, (1990) *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag, 9-10.

[34] M. P. Schutzenberger, (1968) *On an enumeration problem.* J. Combinatorial Theory Vol. **4**, 219–221.

[35] J. Spencer, (1997). *Enumerating graphs and Brownian motion.* Commun. Pure Appl. Math. Vol. **50** (3), 291-294.

[36] F. Spitzer, (1964) *Principes of Random Walk* , D. Van Nostrand Compagny, p. 61.

[37] L. Takács, (1991) *A Bernoulli excursion and its various applications*, Adv. Appl. Prob, 23, 557-585.

[38] L. Takács, (1992) *Random walk processes and their various applications*, Probability theory and applications, Essays to the Mem. of J. Mogyorodi, Math. Appl. 80, 1-32.

[39] L. Takács, (1993) *Limit distributions for queues and random rooted trees*, J. Appl. Math. Stoch. Ana., **6** , No.3, 189 - 216

[40] L. Takács, (1995) *Brownian local times*, J. Appl. Math. Stochastic Anal. 8, No.3, 209-232.