

Dessiner les fonctions rationnelles (et méromorphes)

Alexander Zvonkin (LaBRI)

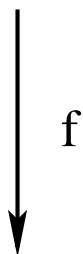
Journées Combinatoires de Bordeaux

6 février 2009

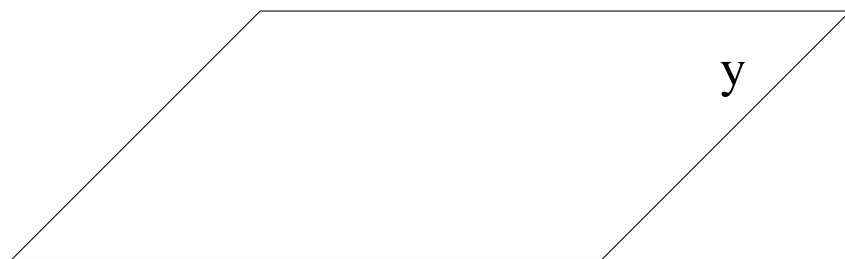
L'idée générale de cet exposé :



La sphère complexe
de Riemann

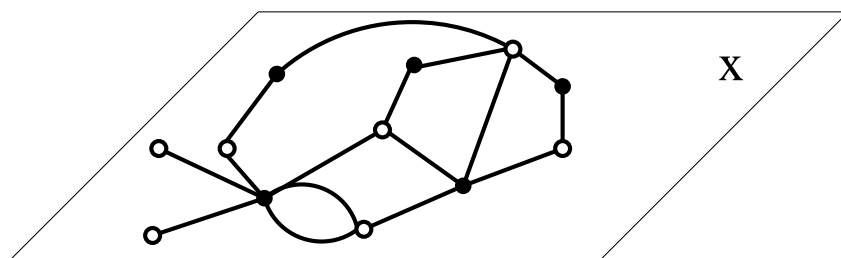


$y=f(x)$: fonction rationnelle

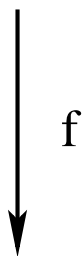


La sphère complexe
de Riemann

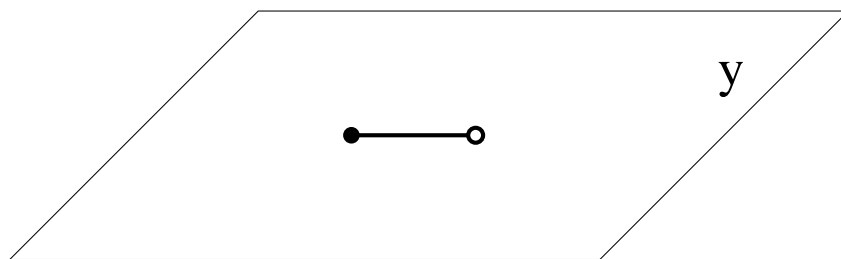
L'idée générale de cet exposé :



un dessin : $D = f^{-1}(d)$

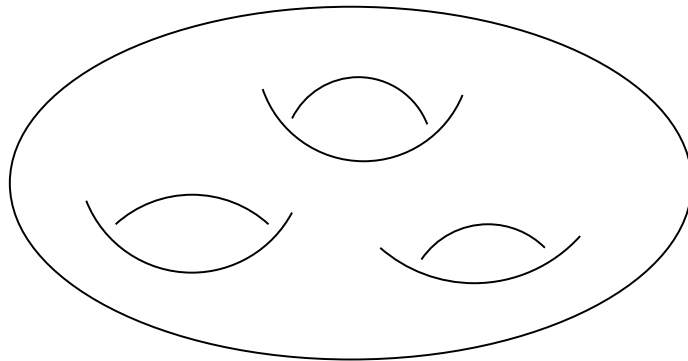


$y=f(x)$: fonction rationnelle



un simple dessin : d

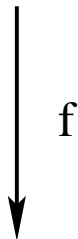
L'idée générale de cet exposé :



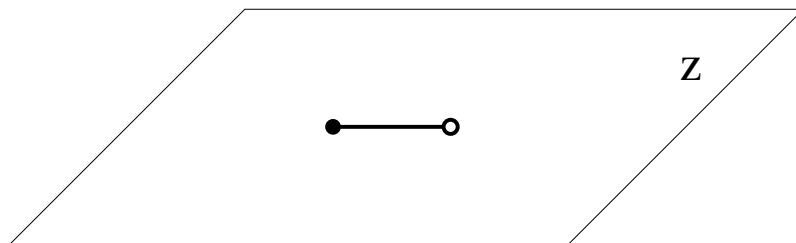
Une surface de Riemann :

$$F(x,y) = 0$$

un dessin : $D = f^{-1}(d)$



$z=f(x,y)$: fonction méromorphe



un simple dessin : d

Parfois, une simple idée géométrique peut remplacer un gros calcul.

Parfois, un simple calcul peut remplacer une difficile idée géométrique.

Introduction : Cartes et fonctions de Belyi

1. C'est quoi une CARTE ?

Une carte est un **graphe dessiné** sur une variété orientée et compacte de dimension 2 (sphère, tore, ...) de telle manière que...

Introduction : Cartes et fonctions de Belyi

1. C'est quoi une CARTE ?

Une carte est un **graphe dessiné** sur une variété orientée et compacte de dimension 2 (sphère, tore, ...) de telle manière que...

- les arêtes ne se coupent pas ;
- le complément du graphe est une union disjointe de régions homéomorphes à un disque ouvert.

Introduction : Cartes et fonctions de Belyi

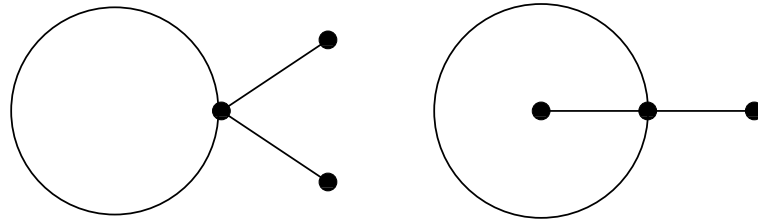
1. C'est quoi une CARTE ?

Une carte est un **graphe dessiné** sur une variété orientée et compacte de dimension 2 (sphère, tore, ...) de telle manière que...

- les arêtes ne se coupent pas ;
- le complément du graphe est une union disjointe de régions homéomorphes à un disque ouvert.

Ces régions s'appellent **FACES** ;

le **degré** d'une face = le nombre d'arêtes qui l'entourent (les arêtes "intérieures" sont comptées deux fois).

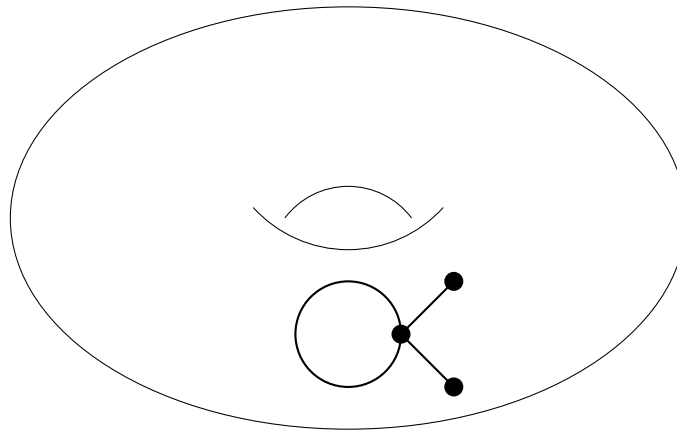


Le même graphe mais deux cartes différentes

Les degrés des faces :

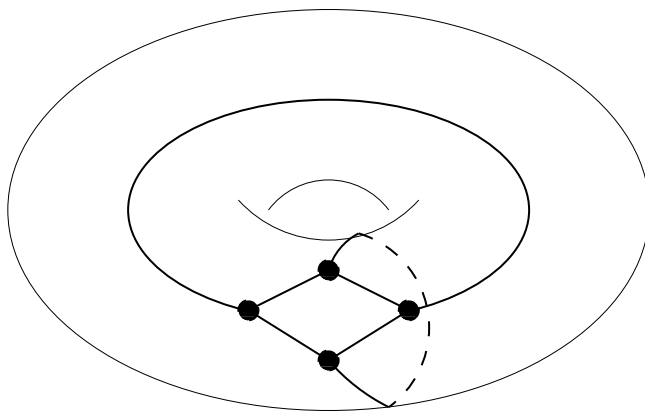
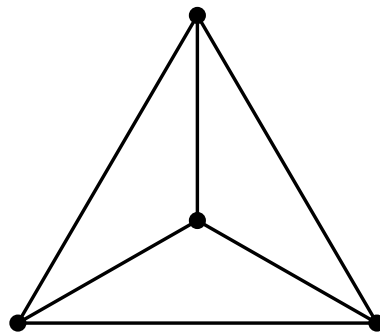
- pour la carte de gauche : 1 et 5 ;
- pour celle de droite : 3 et 3 .

Un graphe n'a pas de faces mais seulement des sommets et des arêtes.

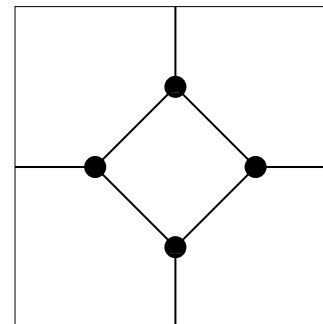


Ceci n'est pas une carte

Le graphe complet K_4 dessiné sur la sphère et sur le tore :



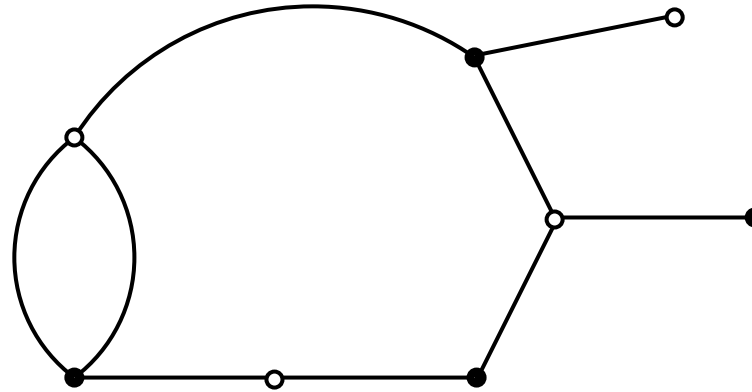
=



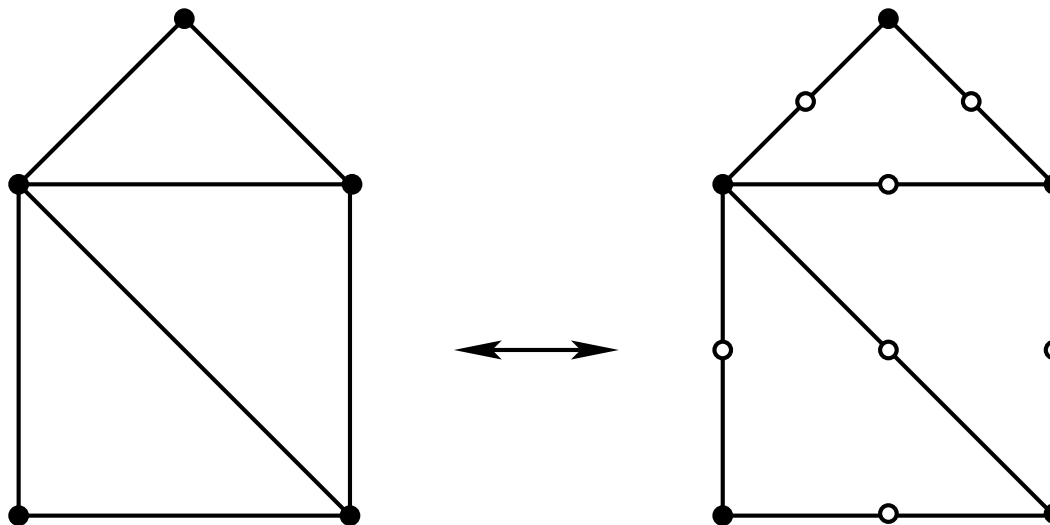
Degrés des faces :

- sur la sphère : 3, 3, 3, 3 ;
- sur le tore : 8, 4 .

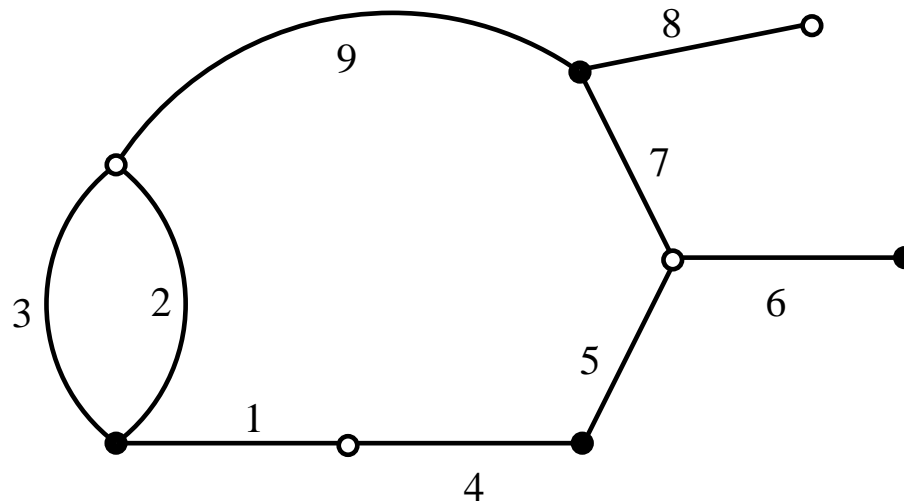
Une **HYPERCARTE** = Une carte bicoloriée :



Cartes \longleftrightarrow hypercartes *dont tous les sommets blancs sont de degré 2* :



Cartes et hypercartes peuvent être codées par des **triplets de permutations** :



$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5)(6)(7, 8, 9)$$

$$\alpha = (1, 4)(2, 9, 3)(5, 6, 7)(8)$$

$$\varphi = (1, 5, 9)(2)(3, 8, 7, 6, 4)$$

Remarque importante :

$$\sigma\alpha\varphi = 1$$

Dans l'autre sense :

À tout triplet $(\sigma, \alpha, \varphi)$ tel que

- le groupe des permutations $G = \langle \sigma, \alpha, \varphi \rangle$ est transitif,
- $\sigma\alpha\varphi = 1$,

correspond une hypercarte.

Cycles de σ \longleftrightarrow sommets noirs

Cycles de α \longleftrightarrow sommets blancs

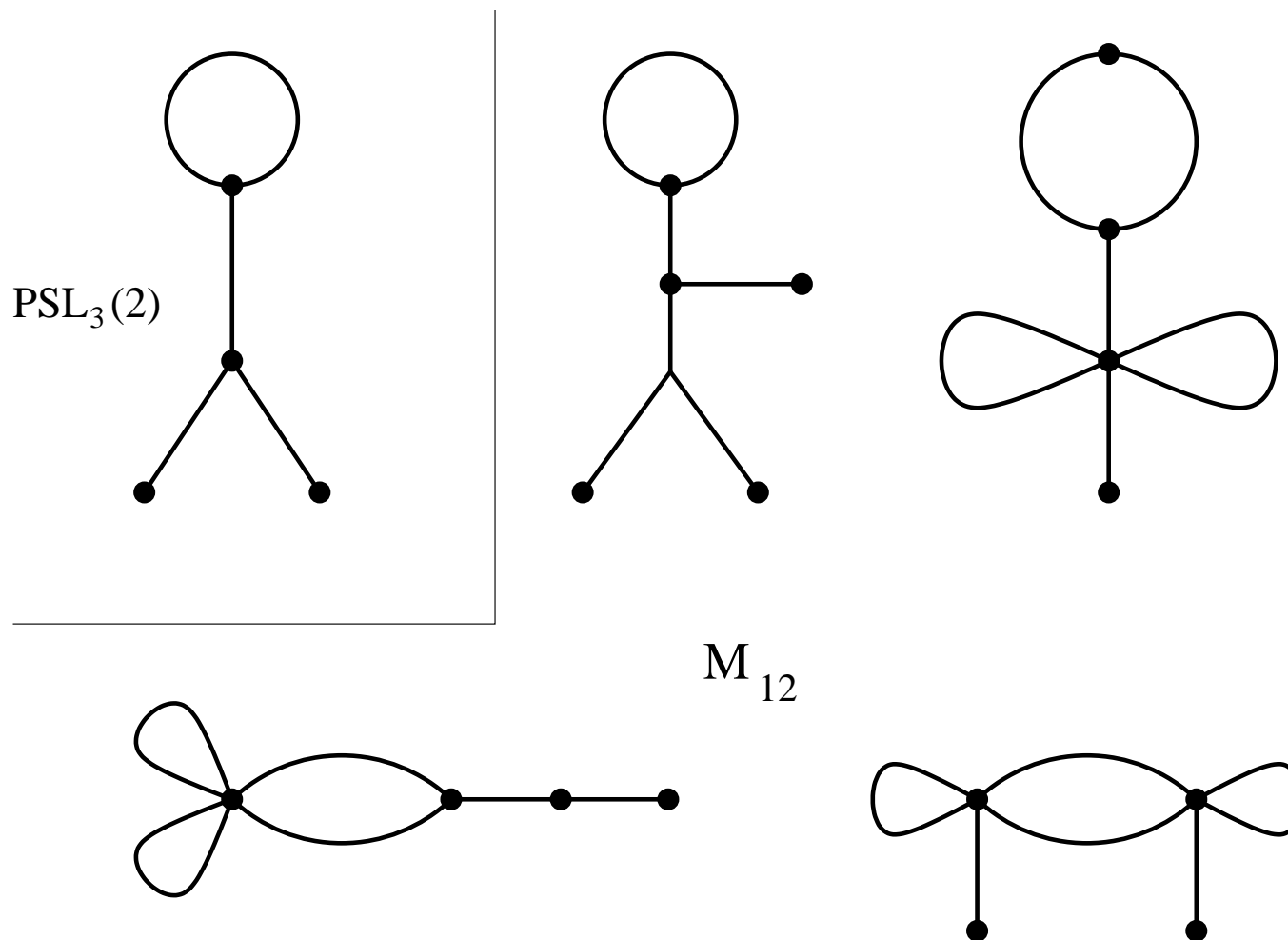
Cycles de φ \longleftrightarrow faces

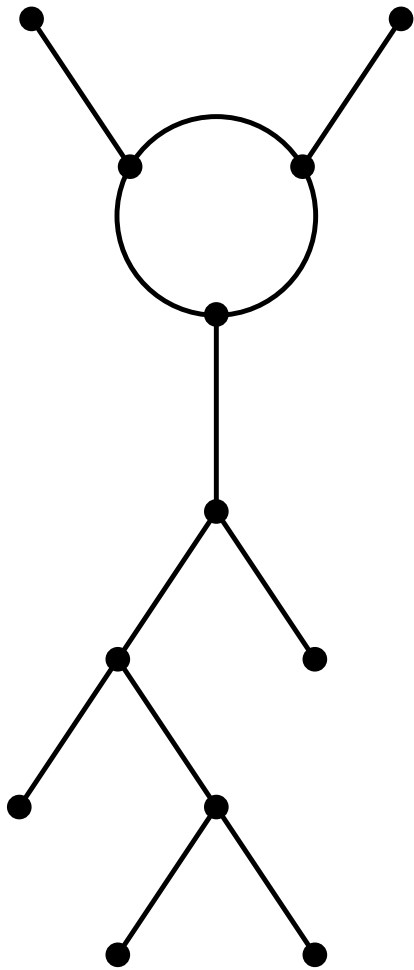
Caractéristique d'Euler :

$$\text{cycl}(\sigma) + \text{cycl}(\alpha) + \text{cycl}(\varphi) - n = 2 - 2g.$$

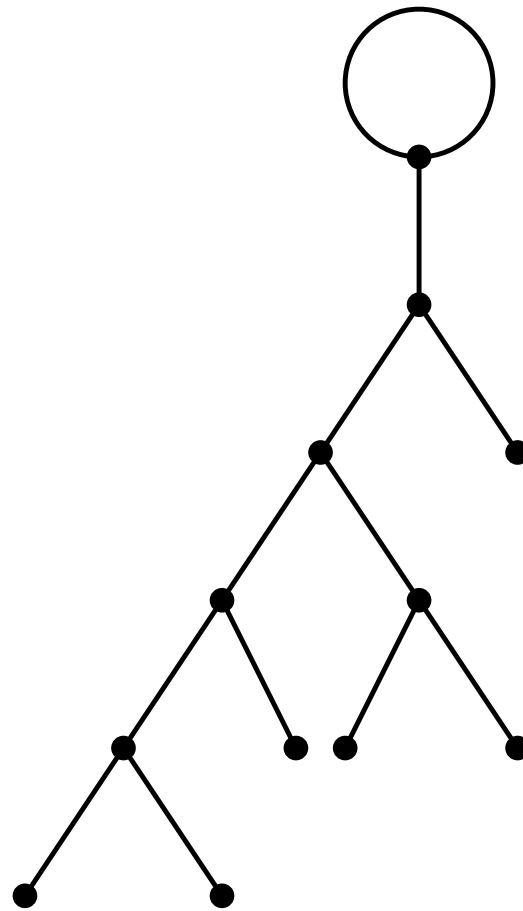
Digression : **GRUPE CARTOGRAPHIQUE**

Une (hyper)carte \longrightarrow triplet $(\sigma, \alpha, \varphi)$ \longrightarrow groupe $G = \langle \sigma, \alpha, \varphi \rangle$

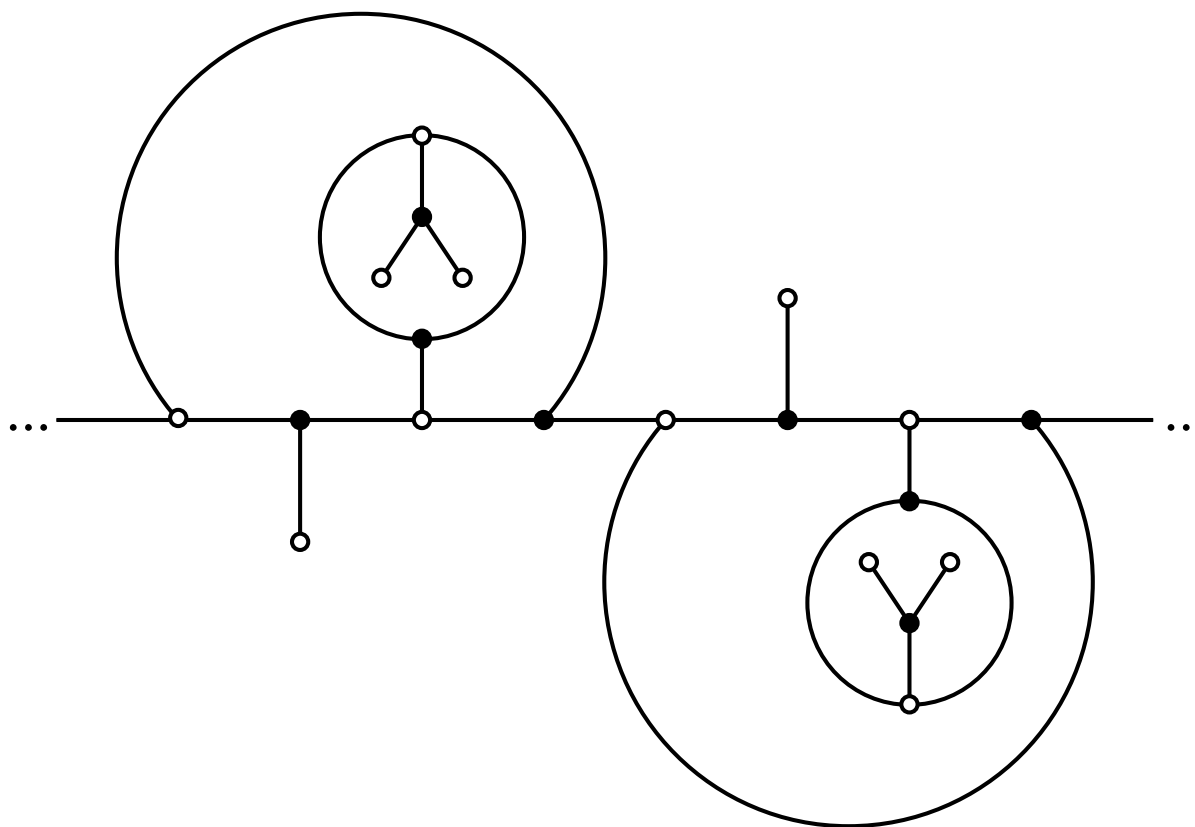




M_{24}



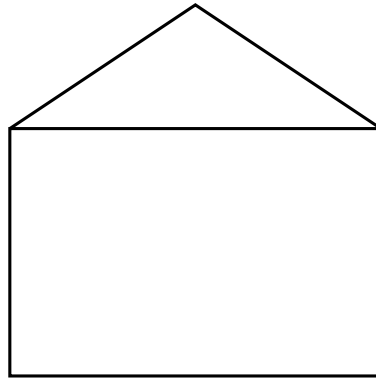
Une M_{24} -hypercarte trouvée par Marston Conder
(la ligne horizontale représente l'équateur sur la sphère) :



FONCTIONS de BELYI

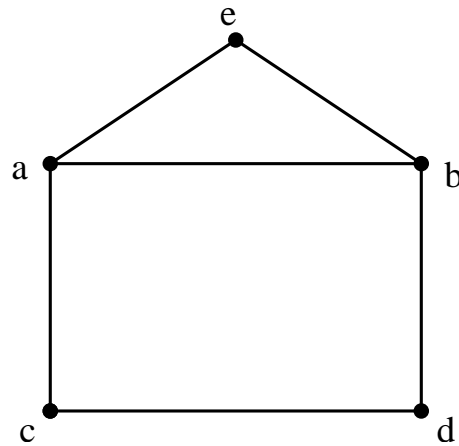
(cas planaire)

Soit une (hyper)carte, ou un dessin d'enfant :



On cherche une fonction rationnelle f qui vérifie les conditions suivantes :

Soit une (hyper)carte, ou un dessin d'enfant :



On cherche une fonction rationnelle f qui vérifie les conditions suivantes :

Condition 1. Les sommets *noirs* sont des racines de f , avec les *multiplicités de ces racines égales aux degrés des sommets*.

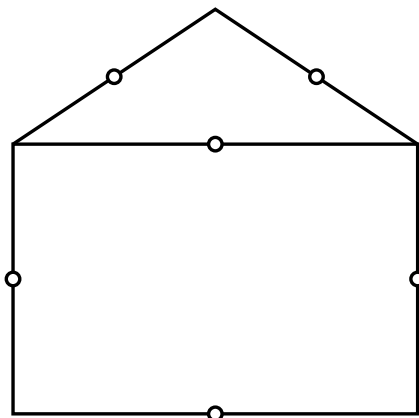
Alors, le numérateur de f dans notre exemple doit être

$$(x - a)^3(x - b)^3(x - c)^2(x - d)^2(x - e)^2.$$

Une meilleure forme du numérateur est

$$(x^2 + px + q)^3(x^3 + rx^2 + sx + t)^2.$$

Soit une (hyper)carte, ou un dessin d'enfant :



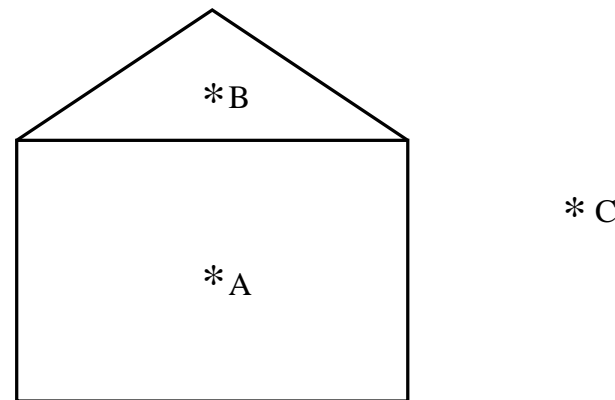
On cherche une fonction rationnelle f qui vérifie les conditions suivantes :

Condition 2. Les sommets *blancs* sont des racines de $f - 1$, avec les *multiplicités des racines égales aux degrés des sommets*.

Alors, le numérateur de $f - 1$ dans notre exemple doit être

(un polynôme de degré 6)².

Soit une (hyper)carte, ou un dessin d'enfant :



On cherche une fonction rationnelle f qui vérifie les conditions suivantes :

Condition 3. À l'intérieur de chaque *face* il y a un pôle de f , avec la *multiplicité de ce pôle égale au degré de la face*.

Alors, le *dénominateur* de f dans notre exemple doit être

$$(x - A)^4(x - B)^3(x - C)^5.$$

Mais souvent on prend $C = \infty$, alors le dénominateur devient

$$(x - A)^4(x - B)^3.$$

Donc, 0, 1 et ∞ sont des **valeurs critiques** de la fonction f ;
c'est-à-dire, les équations

$$f = 0, \quad f = 1 \quad \text{et} \quad f = \infty$$

ont des racines multiples.

Condition 4. À part 0, 1 et ∞ il n'y a pas d'autres valeurs critiques.

Finalement, nous avons

$$f(x) = K \frac{(x^2 + px + q)^3 (x^3 + rx^2 + sx + t)^2}{(x - A)^4 (x - B)^3},$$

et

$$f(x) - 1 = K \frac{(x^6 + mx^5 + nx^4 + ux^3 + vx^2 + wx + z)^2}{(x - A)^4 (x - B)^3},$$

ce qui nous donne 14 paramètres and 12 équations.

Plus exactement, il y avait 15 paramètres, mais nous avons déjà choisi $C = \infty$. Maintenant nous pouvons choisir arbitrairement les valeurs d'encore deux autres paramètres ; par exemple,

$$A = 0 \quad \text{and} \quad B = 1.$$

Finalement, nous avons

$$f(x) = K \frac{(x^2 + px + q)^3 (x^3 + rx^2 + sx + t)^2}{(x - A)^4 (x - B)^3},$$

et

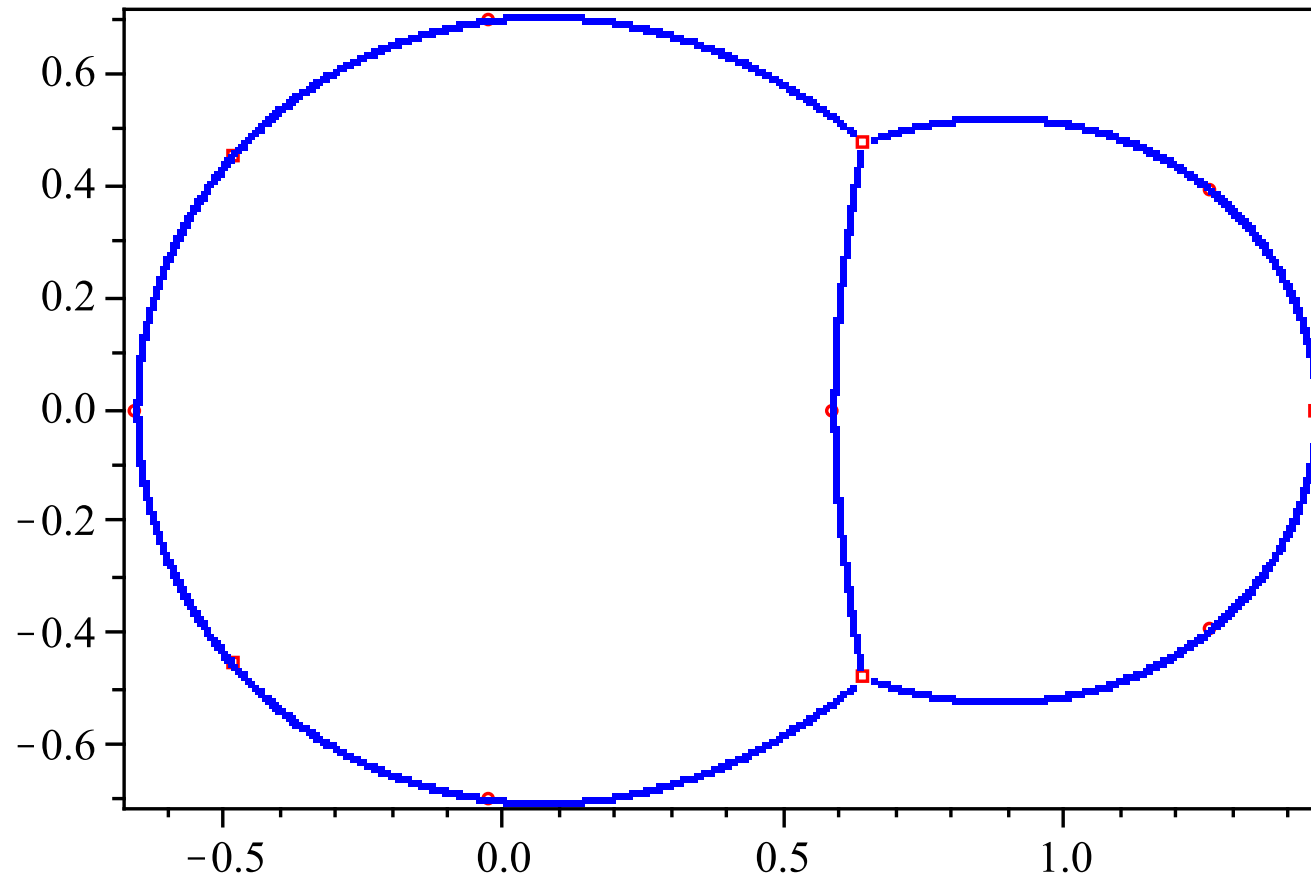
$$f(x) - 1 = K \frac{(x^6 + mx^5 + nx^4 + ux^3 + vx^2 + wx + z)^2}{(x - A)^4 (x - B)^3},$$

Résultats de calcul :

$$f(x) = -\frac{1}{2^{10}3^9} \frac{(25x^2 - 32x + 16)^3 (25x^3 - 12x^2 - 24x - 16)^2}{x^4 (x - 1)^3},$$

et

$$f(x) - 1 = -\frac{1}{2^{10}3^9} \frac{(3125x^6 - 7500x^5 + 4800x^4 - 112x^3 - 96x^2 + 1536x - 1024)^2}{x^4 (x - 1)^3}.$$



Le dessin obtenu comme $f^{-1}([0, 1])$ à l'aide de la fonction f précédente

Théorème

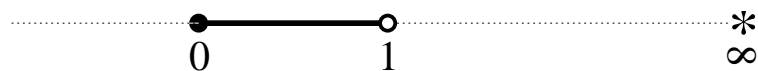
Pour toute hypercarte planaire, une telle fonction rationnelle existe. Elle est unique, à une homographie de la variable x près.

C'est un cas particulier du **Théorème d'Existence de Riemann**.

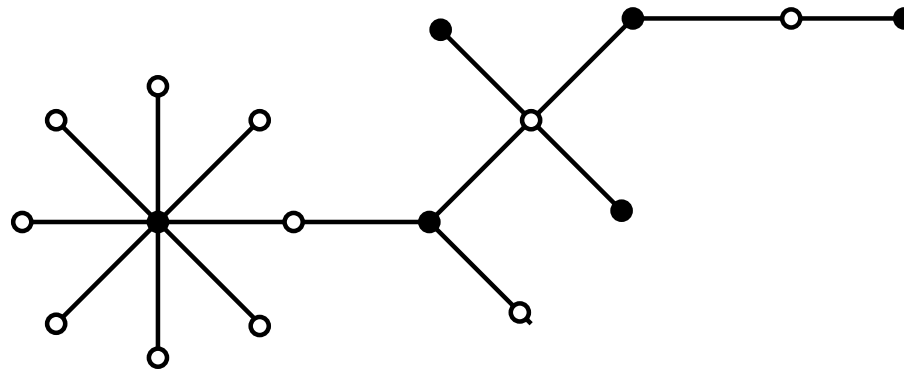
Une homographie permet de choisir arbitrairement trois paramètres.

Les coefficients de f peuvent être fait **nombre algébriques**.

L'hypercarte en question elle-même est l'image réciproque de l'*hypercarte élémentaire* suivante :



Un cas particulier d'une hypercarte est un **arbre plan** (avec une structure bipartite naturelle) :

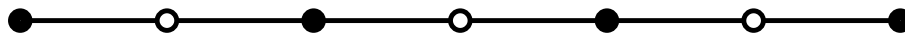
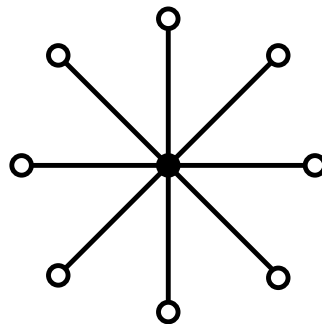


Il y a un seul pôle à l'infini $\Rightarrow f$ est un polynôme.

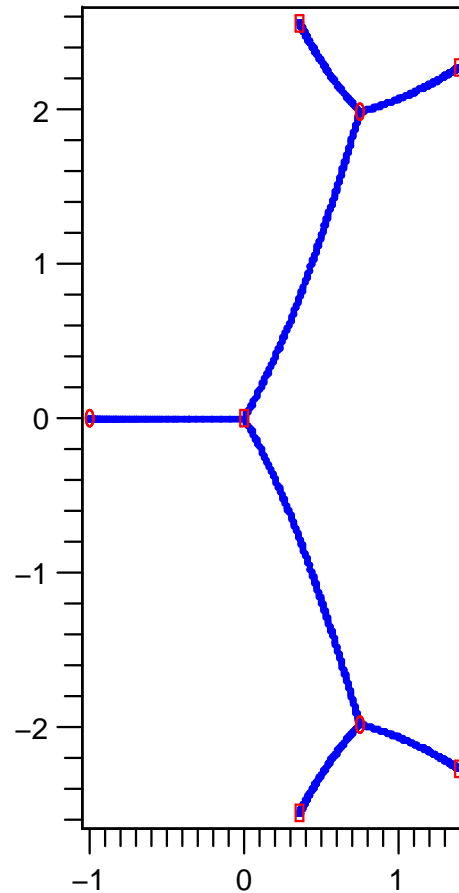
Les polynômes comme cela s'appellent **polynômes de Shabat**.

Exemples :

- pour l'arbre-étoile $f(x) = x^n$;
- pour l'arbre-chaîne $f(x) = T_n(x)$, le polynôme de Chebyshev (les valeurs critiques, au lieu de 0 et 1, sont ± 1).



Proposition. Tout arbre plan possède une *forme géométrique canonique* (à une translation, rotation et homothétie près).



$$f(x) = \frac{1}{729} \cdot (2x^2 - 3x + 9)^3 (x + 1),$$

$$f(x) - 1 = \frac{1}{729} \cdot x^3 (8x^4 - 28x^3 + 126x^2 - 189x + 378).$$

PAIRES de BELYI
(cas non planaire)

Pour le genre $g \geq 1$ on cherche une **paire de Belyi** (X, f) où :

1. X est une surface de Riemann de genre g ;
2. $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ est une fonction méromorphe ayant au plus trois valeurs critiques 0, 1 et ∞ .
(Ici $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la sphère complexe de Riemann.)

La carte (ou hypercarte) s'obtient comme $f^{-1}([0, 1]) \subset X$.

(Existence, unicité... tout à l'heure.)

Un point de vue plus général :

Quelles sont les données dont on a besoin pour représenter une surface de Riemann en tant que revêtement ramifié à n feuilles de la sphère complexe ?

Un point de vue plus général :

Quelles sont les données dont on a besoin pour représenter une surface de Riemann en tant que revêtement ramifié à n feuilles de la sphère complexe ?

- k points de ramification $y_1, y_2, \dots, y_k \in \overline{\mathbb{C}}$;
- k permutations $g_1, g_2, \dots, g_k \in S_n$:
 g_i est la permutation des feuilles quand on passe autour de y_i .

Conditions sur ces données :

- aucune condition sur les points de ramification y_1, y_2, \dots, y_k ;
- permutations g_1, g_2, \dots, g_k agissent transitivement sur les n feuilles (car la surface X is connexe) ;
- leur produit $g_1 g_2 \dots g_k = 1$.

Conditions sur ces données :

- aucune condition sur les points de ramification y_1, y_2, \dots, y_k ;
- permutations g_1, g_2, \dots, g_k agissent transitivement sur les n feuilles (car la surface X is connexe) ;
- leur produit $g_1 g_2 \dots g_k = 1$.

Théorème d'Existence de Riemann :

1. Il existe une surface de Riemann X et un revêtement à n feuilles $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ayant ces données de ramification.
2. La paire (X, f) est unique, à des isomorphismes de X et de $\overline{\mathbb{C}}$ près.

En faisant un isomorphisme de $\overline{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire, une homographie, on peut mettre

$$y_{k-2} = 0, \quad y_{k-1} = 1, \quad y_k = \infty.$$

Alors, il en restent :

– **données discrètes** : k permutations g_1, \dots, g_k telles que

$$g_1 \cdots g_k = 1;$$

– **données continues** : $k - 3$ points de ramification y_1, \dots, y_{k-3} .

En faisant un isomorphisme de $\overline{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire, une homographie, on peut mettre

$$y_{k-2} = 0, \quad y_{k-1} = 1, \quad y_k = \infty.$$

Alors, il en restent :

– **données discrètes** : k permutations g_1, \dots, g_k telles que

$$g_1 \dots g_k = 1;$$

– **données continues** : $k - 3$ points de ramification y_1, \dots, y_{k-3} .

Et si $k = 3$?

Si $k = 3$ alors il restent seulement les données discrètes !

Si $k = 3$ alors, pour représenter un revêtement nonramifié en dehors de $0, 1$ et ∞ , on doit fournir seulement trois permutations

$$g_1 = \sigma, \quad g_2 = \alpha, \quad g_3 = \varphi$$

telles que

$$g_1 g_2 g_3 = \sigma \alpha \varphi = 1.$$

Est-il possible de représenter **TOUTE** surface de Riemann de cette manière-là ?

NON ! Mais la classe des “représentables” surfaces est remarquable.

Théorème de Belyi (G. V. Belyi, 1979) : Soit X une surface de Riemann. Une fonction méromorphe $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ayant au plus trois valeurs critiques existe si et seulement si X est définie au-dessus du corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques.

Théorème de Belyi (G. V. Belyĭ, 1979) : Soit X une surface de Riemann. Une fonction méromorphe $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ayant au plus trois valeurs critiques existe si et seulement si X est définie au-dessus du corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques.

Ainsi, un triplet de permutations $(\sigma, \alpha, \varphi)$ (agissant transitivement, et avec $\sigma\alpha\varphi = 1$) donne lieu à toute une variété de structures :

- une hypercarte (genre, énumération, dualité, symétries, ...) ;
- un groupe cartographique (représentations, caractères, ...) ;
- une surface de Riemann (structure complexe, courbes algébriques, espaces de modules, ...) ;
- un corps de nombres (groupe de Galois, ...).

Et toutes ces structures sont liées l'une à l'autre !

Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable.

(A. Grothendieck)

La fin de l'introduction

Premier sujet :

Une borne de

Davenport–Stothers–Zannier

ou

Dessiner au lieu de calculer

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ deux polynômes premiers entre eux.

Question : Quel est le degré minimal de $P^3 - Q^2$?

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ deux polynômes premiers entre eux.

Question : Quel est le degré minimal de $P^3 - Q^2$?

Notations : $\deg P = 2n$, $\deg Q = 3n$, et

$$P^3 - Q^2 = R.$$

B. J. Birch, S. Chowla, M. Hall Jr., A. Schinzel (1965) :

DEUX CONJECTURES

1. $\deg R \geq n + 1$;
2. cette borne est atteinte pour une infinité de valeurs de n
(en réalité elle est atteinte pour tout n).

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ deux polynômes premiers entre eux.

Question : Quel est le degré minimal de $P^3 - Q^2$?

Notations : $\deg P = 2n$, $\deg Q = 3n$, et

$$P^3 - Q^2 = R.$$

B. J. Birch, S. Chowla, M. Hall Jr., A. Schinzel (1965) :

DEUX CONJECTURES

1. $\deg R \geq n + 1$;
2. cette borne est atteinte pour une infinité de valeurs de n
(en réalité elle est atteinte pour tout n).

La première conjecture a été prouvée par H. Davenport en 1965.

La deuxième a été démontrée par W. W. Stothers in 1981, puis redémontrée et généralisée par U. Zannier en 1995 (avec une bonne demi-douzaine de publications entre temps).

Nous allons démontrer la “partie difficile”, c’est-à-dire, la deuxième conjecture.

Tout d’abord, un petit calcul quand même :

$$P^3 - Q^2 = R;$$

$$\frac{P^3}{R} - \frac{Q^2}{R} = 1;$$

$$\frac{P^3}{R} - 1 = \frac{Q^2}{R}.$$

Ainsi s’achève l’étape de calcul. Et maintenant...



Nous allons démontrer la “partie difficile”, c’est-à-dire, la deuxième conjecture.

Tout d’abord, un petit calcul quand même :

$$P^3 - Q^2 = R;$$

$$\frac{P^3}{R} - \frac{Q^2}{R} = 1;$$

$$\frac{P^3}{R} - 1 = \frac{Q^2}{R}.$$

Ainsi s’achève l’étape de calcul. Et maintenant...

Supposons que $f = \frac{P^3}{R}$ soit une fonction de Belyi

Alors, quelle sera la carte (ou l’hypercarte) correspondante ?

(La partie restante sera une traduction de l’énoncé du problème en langage combinatoire.)

$$f = \frac{P^3}{R}$$

Les **SOMMETS NOIRS** sont les racines de P^3 , soit **les racines de P** .

Si P n'a pas de racines multiples, alors toutes les racines de P^3 (c'est-à-dire, tous les sommets noirs) sont de degré 3.

Leur nombre est $\deg P = 2n$.

$$f - 1 = \frac{Q^2}{R}$$

Les **SOMMETS BLANC** sont les racines de Q^2 , soit **les racines de Q** .

Si Q n'a pas de racines multiples, alors toutes les racines de Q^2 (c'est-à-dire, tous les sommets blancs) sont de degré 2.

Par conséquent, les sommets blancs peuvent être “effacés” car notre hypercarte est juste une carte.

Sommets noirs = juste sommets ;

Sommets blancs = “milieux d'arêtes” .

Le nombre d'arêtes est $\deg Q = 3n$.

La FORMULE d'EULER :

$$\# (\text{sommets}) - \# (\text{arêtes}) + \# (\text{faces}) = 2$$

$$2n - 3n + \# (\text{faces}) = 2$$

$$\# (\text{faces}) = n + 2$$

—

La FORMULE d'EULER :

$$\# (\text{sommets}) - \# (\text{arêtes}) + \# (\text{faces}) = 2$$

$$2n - 3n + \# (\text{faces}) = 2$$

$$\# (\text{faces}) = n + 2$$

Les **FACES** correspondent aux **PÔLES** de $f = \frac{P^3}{R}$

- un pôle à l'infini \longleftrightarrow la face extérieure ;
- les racines de R \longleftrightarrow les $n + 1$ faces finies restantes.

$\deg R = n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ toutes les faces finies sont de degré 1
--

RÉCAPITULATIF :

Existe-t-il une **carte planaire** ayant :

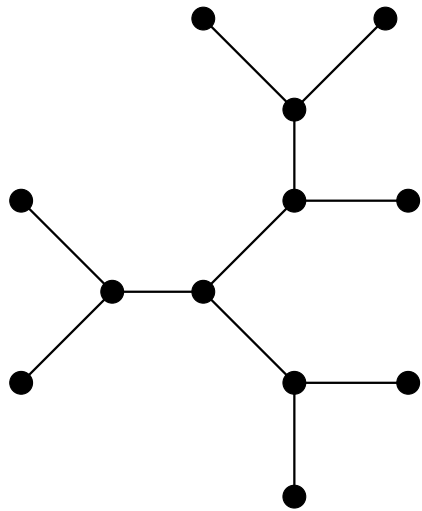
- $2n$ sommets, tous de degré 3 ;
- $3n$ arêtes ;
- $n + 1$ faces finies de degré 1 (plus une grande face extérieure) ?

ou plus simple encore :

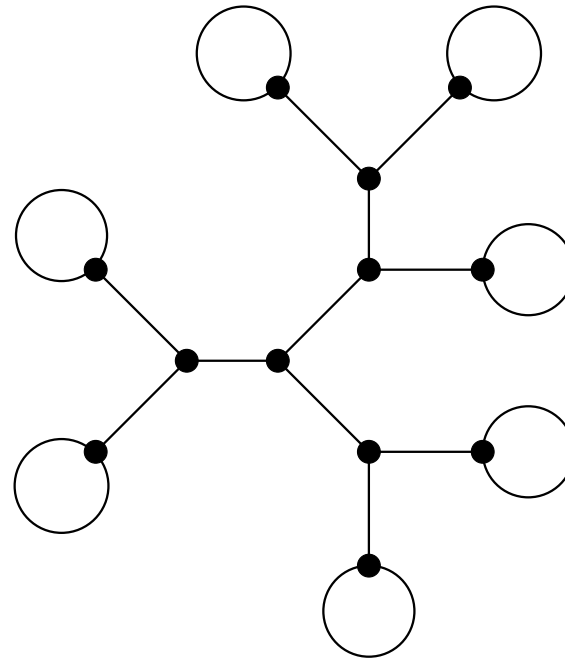
- tous les sommets sont de degré 3 ;
- toutes les faces finies sont de degré 1.

Remarque : Ceci est une traduction directe du problème en langage combinatoire, et rien d'autre !

SOLUTION :



D'abord, un arbre...



puis, on y colle des boucles

GÉNÉRALISATION :

Soient F et G deux polynômes de degré n ,

$$F(x) = \prod_{i=1}^p (x - a_i)^{\alpha_i}, \quad G(x) = \prod_{i=1}^q (x - b_i)^{\beta_i},$$

et

$$F - G = R.$$

Supposons que le pgcd des α_i, β_j soit 1. Alors :

- Si $p + q \geq n + 1$ alors $\deg R \geq 0$ (trivial), et cette borne est atteinte.
- Si $p + q \leq n + 1$ alors $\deg R \geq (n + 1) - (p + q)$, et cette borne est atteinte.

IDÉE : $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et β_1, \dots, β_q sont les degrés des sommets noirs et blancs d'une hypercarte correspondant à la fonction de Belyi

$$f = \frac{F}{R}.$$

Deuxième sujet :

La courbe de Fermat

ou

Calculer au lieu de dessiner

Soit une courbe algébrique (courbe de Fermat)

$$X = \{(x, y) \mid x^n + y^n = 1\}.$$

En fait, on considère plutôt une courbe *projective*

$$X = \{(x : y : z) \mid x^n + y^n = z^n\}$$

mais on ne va pas y prêter beaucoup d'attention.

Question : Soit

$$p : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto x$$

la projection sur la première coordonnée. Quelles sont les valeurs critiques de p ?

Soit une courbe algébrique (courbe de Fermat)

$$X = \{(x, y) \mid x^n + y^n = 1\}.$$

En fait, on considère plutôt une courbe *projective*

$$X = \{(x : y : z) \mid x^n + y^n = z^n\}$$

mais on ne va pas y prêter beaucoup d'attention.

Question : Soit

$$p : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto x$$

la projection sur la première coordonnée. Quelles sont les valeurs critiques de p ?

Réponse : Elles sont les valeurs de x telles que l'équation

$$y^n = 1 - x^n$$

possède moins de n solutions par rapport à y , soit $\{x \mid 1 - x^n = 0\}$.

Donc, les valeurs critiques de p sont les racines n -ème de l'unité.

Pourquoi l'_∞ n'est pas une valeur critique ?

1. La projection

$$p : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$$

en coordonnées projectives se représente comme

$$p : (x : y : z) \mapsto (x : z)$$

où $(x : z)$ est une coordonnée projective en $\mathbb{C}P^1 = \overline{\mathbb{C}}$.

2. Cette projection n'est pas définie au point

$$(x : y : z) = (0 : y : 0), \quad y \neq 0;$$

heureusement, ce point n'appartient pas à la courbe de Fermat.

3. Le point $\infty \in \mathbb{C}P^1$ est représenté par

$$(x : z) = (x : 0), \quad x \neq 0.$$

Donc, l'équation de la courbe se réduit à

$$x^n + y^n = 0.$$

4. Par conséquent, vue que $x \neq 0$, l'équation possède n solutions différentes par rapport à y .

Maintenant, la fonction

$$f : x \mapsto x^n$$

envoie toutes les racines n -ème de l'unité vers 1, et crée deux nouvelles valeurs critiques : 0 et ∞ .

D'où, la fonction

$$F = f \circ p : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto x^n$$

est une fonction de Belyi sur X .

Maintenant, la fonction

$$f : x \mapsto x^n$$

envoie toutes les racines n -ème de l'unité vers 1, et crée deux nouvelles valeurs critiques : 0 et ∞ .

D'où, la fonction

$$F = f \circ p : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto x^n$$

est une fonction de Belyi sur X .

On a

$$\deg p = n \quad \text{et} \quad \deg f = n,$$

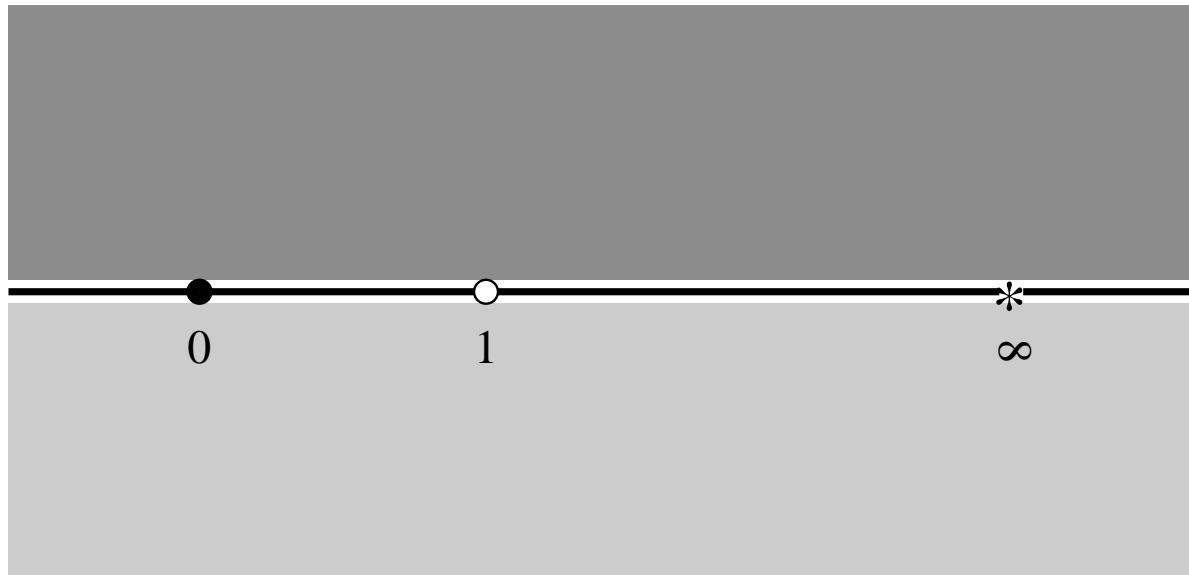
d'où

$$\deg F = n^2.$$

Seules les valeurs 0, 1 et ∞ ont n images réciproques chacune.

Considérons une **triangulation** T suivante de la sphère $\overline{\mathbb{C}}$:

- 3 sommets placés au 0 , 1 et ∞ , marqués par \bullet , \circ , et $*$;
- 3 arêtes : $[0, 1]$, $[1, \infty]$ et $[\infty, 0]$;
- 2 faces triangulaires : les demi-plans supérieur et inférieur.



Question : Quelle est l'image réciproque $F^{-1}(T)$ de T ?

Réponse :

- 3 arêtes dans l'image \Rightarrow
 $3n^2$ arêtes dans l'image réciproque ;
- 2 faces triangulaires dans l'image \Rightarrow
 $2n^2$ faces triangulaires dans l'image réciproque ;
- 3 sommets de degré 2 dans l'image \Rightarrow
 $3n$ sommets de degré $2n$ dans l'image réciproque.

Réponse :

- 3 arêtes dans l'image \Rightarrow
 $3n^2$ arêtes dans l'image réciproque ;
- 2 faces triangulaires dans l'image \Rightarrow
 $2n^2$ faces triangulaires dans l'image réciproque ;
- 3 sommets de degré 2 dans l'image \Rightarrow
 $3n$ sommets de degré $2n$ dans l'image réciproque.

Corollaire :

1. Le graphe en question est le *graphe complet triparti* $\boxed{K_{n,n,n}}$.
2. Le genre du plongement est

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

3. Ce plongement est une triangulation \Rightarrow le genre est minimal.

Une remarque historique :

- Le fait que le genre minimal d'un plongement du graphe complet triparti $K_{n,n,n}$ est

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

a été démontré par A. T. White (1969) et indépendamment par G. Ringel et J. W. T. Youngs (1970).

- Une relation entre ce problème combinatoire et l'équation de Fermat a été découverte par G. Jones en 1993.

GÉNÉRALISATION :

Soient f et h deux fonctions de Belyi “**planaires**” (c’est-à-dire, rationnelles), et

$$\deg f = m, \quad \deg h = n.$$

Considérons une courbe algébrique

$$X = \{(x, y) \mid f(x) = h(y)\}.$$

Proposition : $f(x)$, et aussi $h(y)$, sont des fonctions de Belyi sur X (de degré mn).

GÉNÉRALISATION :

Soient f et h deux fonctions de Belyi “**planaires**” (c’est-à-dire, rationnelles), et

$$\deg f = m, \quad \deg h = n.$$

Considérons une courbe algébrique

$$X = \{(x, y) \mid f(x) = h(y)\}.$$

Proposition : $f(x)$, et aussi $h(y)$, sont des fonctions de Belyi sur X (de degré mn).

En effet, pour tout $t \neq 0, 1, \infty$ l’équation $f(x) = t$ possède m solutions *distinctes*, et l’équation $h(y) = t$ possède n solutions *distinctes*, soit mn paires distinctes (x, y) sur X .

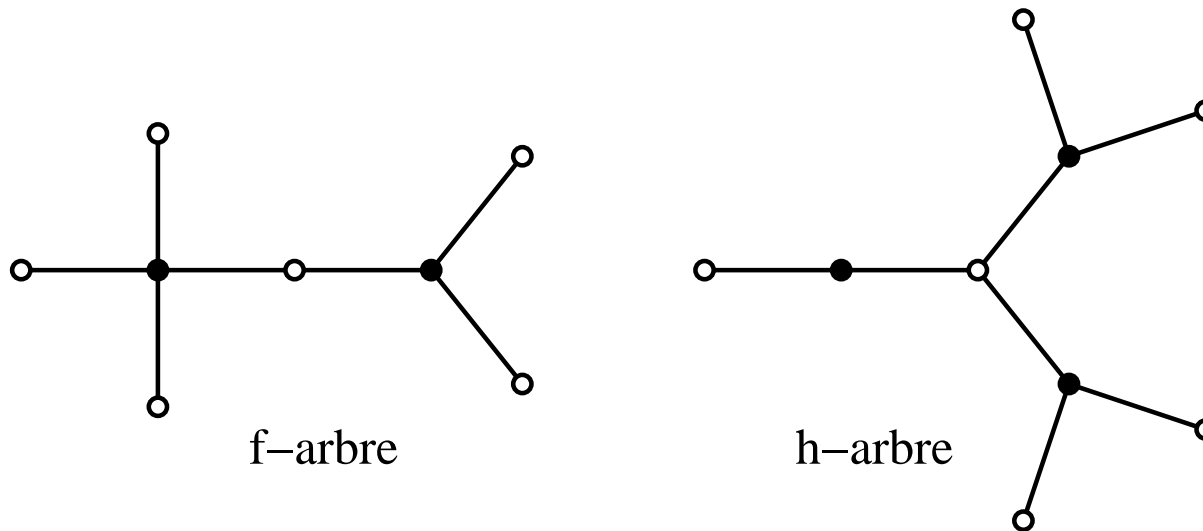
L’hypercarte correspondante peut être trouvée d’une manière combinatoire, en utilisant les hypercartes planaires correspondant à f et h .

Un exemple “stupide” :

$$f(x) = \frac{1}{2^8 3^3} x^4 (7 - x)^3,$$

$$h(y) = \frac{1}{5^5} (y^2 + 4)^3 (3y + 8)^2.$$

Voilà les deux arbres correspondants :



Le resultat :

- une surface X de genre $g = 5$;
- une fonction de Belyi de degré 56 ;
- 11 sommets noirs de degrés $12^2 6 4^2 3^6$;
- 36 sommets blancs de degrés $6 3^5 2^5 1^{25}$;
- 1 face de degré 56.

Un autre exemple :

$$\begin{aligned}f &= \text{icosa\^edre}, \\h &= \text{cube}.\end{aligned}$$

Le resultat :

- une surface X de genre $g = 253$;
- une fonction de Belyi de degré 1440 ;
- 96 sommets (noirs) de degré 15 ;
- 720 ar\^etes ;
- 120 faces de degré 12.

On attend des applications plus intéressantes...

C'est tout, merci !