Licence **Sciences et Technologies**	**ANNEE : 2007/2008** **SESSION D'AUTOMNE 2007** **ETAPE :** **UE :** INF 251 **Epreuve :** Algorithmes et Structures de Données Fondamentaux **Date :** 17 Décembre 2007 **Heure :** 8 H 30 **Durée :** 3 H **Documents :** Tous documents interdits **Vous devez répondre directement sur le sujet qui comporte 10 pages. Insérez ensuite votre réponse dans une copie d'examen comportant tous les renseignements administratifs** **Epreuve de** M^{me} Delest.

Indiquez votre code **d'anonymat** : N° : .

La notation tiendra compte de la clarté de l'écriture des réponses.

Barème indicatif

- Question 1 – Connaissances générales : 4 points
- Question 2 – Tas : 1.5 points
- Question 3 – Arbre AVL : 1.5 points
- Question 4 – Utilisation des structures de données : 4 points
- Question 5 – Ecriture de fonction sur les arbres : 2 Points
- Question 6 – Ecriture de fonction sur les piles : 2 Points
- Question 7 – Listes et arbres binaires: 6 points

Question 1. Cochez les affirmations qui sont correctes :

☒ Le temps d'accès au dernier élément d'une liste simplement chainée est en O(n).

☐ Dans un arbre binaire de recherche le minimum est toujours à la racine de l'arbre.

☐ Le temps d'accès à l'élément maximum d'un tas min est en O(1).

☐ Un arbre AVL est un tas.

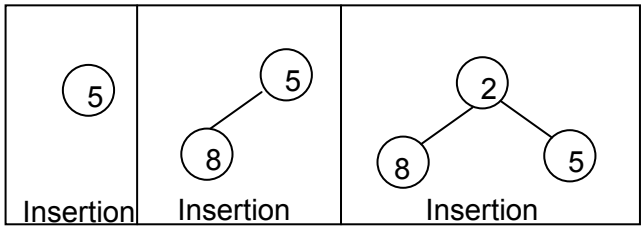
☒ Pour un arbre binaire de recherche donné l'obtention de la liste des nombres triés est en temps O(n).

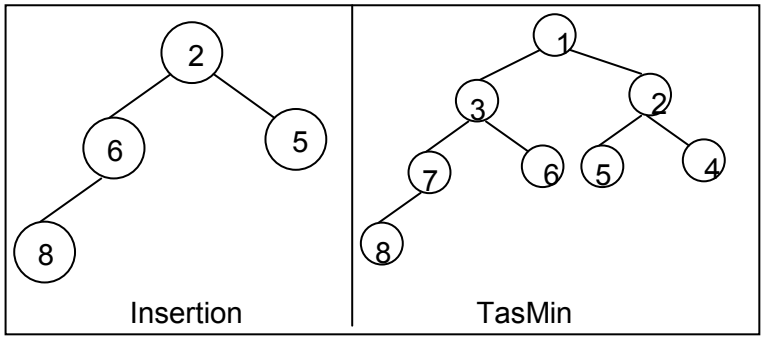
☐ Dans un tas, la primitive supprimerValeur consiste à supprimer une valeur située dans une feuille.

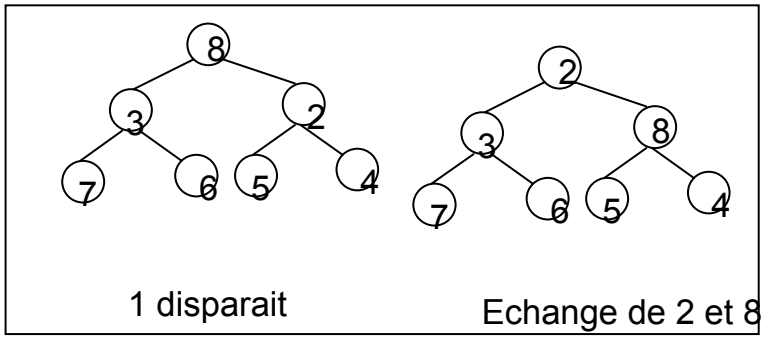
☒ La complexité mémoire d'une table de hachage chainée est plus importante que la complexité mémoire d'une table de hachage ouvert

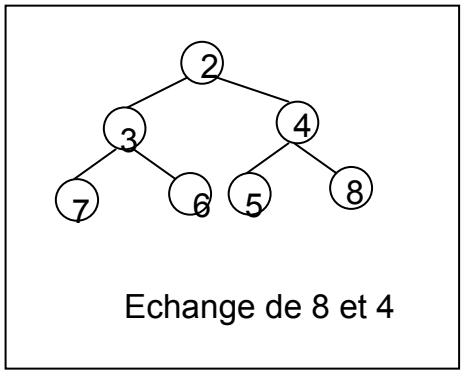
☐ Si s est une variable de type ^entier, on modifie la valeur de l'entier en écrivant s=s+1

Question 2. Soit la suite de clé 5,8,2,6,3,4,1,7. Construire le tas-Min correspondant à l'insertion consécutive des clés, on dessinera l'arbre après chacune des quatre premières insertions ainsi que l'arbre final. Montrez l'exécution de *supprimerValeur* sur le tas ainsi construit.

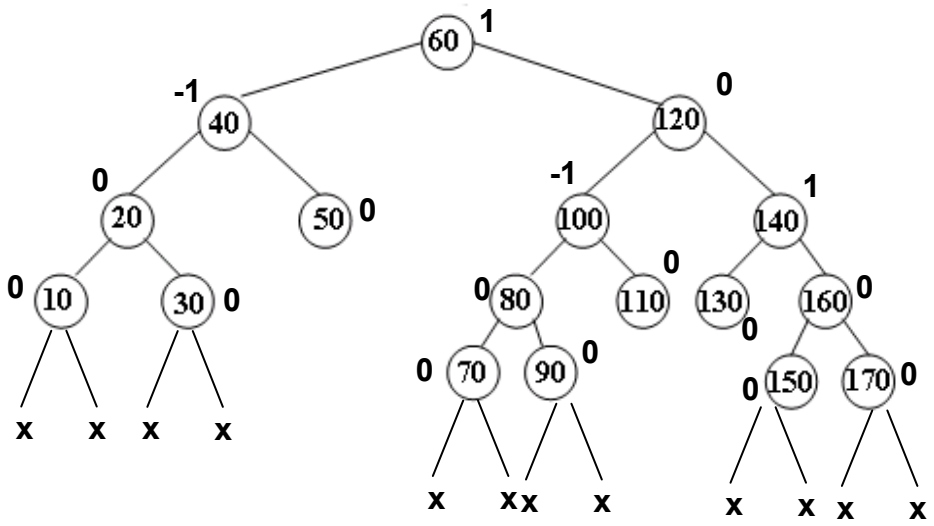






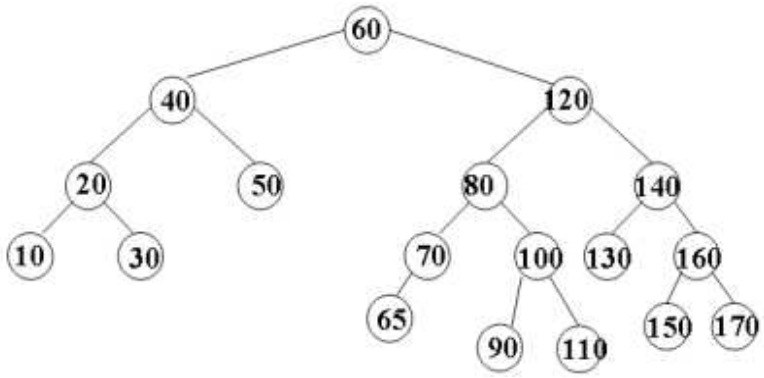


Question 3. On donne l'arbre AVL suivant.



1 – Donnez sur l'arbre ci-dessus les positions des insertions de feuille qui conduiront à un arbre déséquilibré ?
2 - Donnez sur le dessin les facteurs d'équilibrage.
3 - Dessinez et expliquez les modifications de l'arbre lors de l'insertion de la valeur 65. On mentionnera les modifications des facteurs d'équilibrages.

La valeur 65 s'insère comme fils gauche du nœud contenant 70. Par suite, l'arbre est déséquilibré. Le facteur d'équilibrage du nœud contenant 70 passe à -1, celui correspondant à 80 passe à -1. Le nœud pour lequel le facteur de déséquilibrage est mauvais est le nœud contenant la valeur 100
(facteur d'équilibrage -2). On effectue donc une rotation à droite autour du nœud 100. Après cette opération l'arbre est AVL.



Question 4. Un dispositif dispose de deux robots pour traiter des commandes. Une commande est identifiée par un nom sur 30 caractères et un date sous la forme [jour,mois,année]. Le premier robot (R1) mémorise les commandes dès quelles lui parviennent. Le second robot (R2) traite les commandes.

1 – Quelle structure de données pertinente peut-on utiliser pour accéder en temps constant aux identificateurs des commandes ?

Une table de hachage, il suffit d'écrire une fonction qui transforme le libellé de la commande en un entier qui sera ensuite haché. On peut définir une fonction commandeToEntier qui prend en argument une commande et la transforme en entier.

2 – Quelle structure de données peut utiliser R1 pour que R2 traite les commandes dans le même ordre où elles arrivent à R1 ?

Une file : le premier entré dans la file est le premier traité.

3 – Décrivez le type de cette structure et notamment on détaillera les éléments de la structure.

Type FC : file de entier ;/ on stocke les valeurs de hachage*/*

L'entier dans la structure est une valeur de hachage de l'élément de commande.

```
Commande=structure
        Code :entier ; /* obtenu par la fonction commandeToEntier */
        Nom :tableau[1..30] de char ;
        Date :structure
                Jour :entier ;
                Mois :entier ;
                Année : entier ;
              Finstructure
         finstructure
```

Si on choisit un adressage ouvert on a donc une table de hachage de Commande. Si C est une commande la clé doit être calculée à partir de C.code. Il faut donc modifier les fonctions de hachage.

4 – Ecrire les fonctions *ajouterCommande (utilisée par R1)*et *supprimerCommande* utilisé par R2.

```
Fonction ajouterCommande(ref F :FC ; ref T : tableHash de commande ;ref C :commande) :vide
   Début
      Enfiler(F,ajouter(C,T))
   Fin
Fonction supprimerCommande(ref F :FC ; ref T : tableHash de commande) :vide
   Début
      Supprimer(valeur(F),T) ;
      Défiler(F)
   Finsi
```

5 – Modifier la fonction *ajouterCommande* pour éviter les doublons.

```
Fonction ajouterCommande(ref F :FC ; ref T : tableHash de commande ;ref C :commande) :vide
   Début
      Si chercher(T,C)==NIL alors
         Enfiler(F,ajouter(C,T))
      finsi
   Fin
```

Question 5. On définit la longueur de cheminement externe d'un arbre binaire comme la somme des hauteurs des feuilles (nombre d'arêtes de la racine à la feuille). Ecrire la fonction longueurDeCheminement qui prend en paramètre un arbre et calcule se paramètre.

```
Fonction longueurDeCheminement(ref A :arbreBInaire ;val h :entier) :entier
    Début
        Si estFeuille(A) alors
            retourner(h)
        sinon
            c=0 ;
            si filsGauche(A) !=NIL alors
                c=c+ longueurCheminement(filsGauche(A),h+1)
            finsi
            si filsDroit(A) !=NIL alors
                c=c+ longueurCheminement(filsDroit(A),h+1)
            finsi
            retourner( c)
    fin
```

L'appel se fait avec longueurCheminement(A,0).

Question 6. Ecrire une fonction *sup3* qui prend en entrée une pile d'entier et qui fournit en sortie la pile modifiée telle que tous les nombres multiples de 3 se retrouvent en tête de pile et dans le même ordre que la pile. Par exemple, [1,3,5,4,2,6,8 est transformée en [1,5,4,2,8,3,6.

```
Fonction sup3(ref P :pile d'entier ) :vide
    Var PC,P3 :pile d'entier ;
    Var v :entier ;
    Début
        creerPile(PC) ;
        creerPile(P3) ;
        tantque !pileVide(P) faire
            v=valeurPile(P) ;
            depiler(P) ;
            si v est multiple de 3 alors
                empiler(P3,v)
            sinon
                empiler(PC,v)
            finsi
        fintantque
        copierPile(PC,P) ;
        copierPile(P3,P) ;
    fin
fonction copier(ref P1,P2 :pile d'entier) :vide ;
    début
        tantque !pileVide(P1) faire
            empiler(P2,valeurPile(P1)) ;
            dépiler(P1) ;
        fintantque
    fin
```

Question 7. On considère un tableau de dimension N contenant des entiers tous différents appartenant à l'intervalle [1..N]. Par exemple, le tableau de dimension 8 contient 5,8,2,6,3,4,1,7.
1 – Ecrire une fonction *tableauToListe* qui transforme un tableau en une liste simplement chainée en conservant l'ordre des entiers dans le tableau et renvoie vrai si les éléments du tableau sont conforme à l'énoncé (des entiers tous différents) et faux sinon.
On écrit d'abord une fonction de vérification de la contrainte. En effet, si la vérification se fait en cours de construction de la liste, il faudra en cas de viol de la condition détruire la liste ce qui est coûteux en temps et en mémoire.

```
Fonction vérifier(ref T :tableau[1..N] d'entiers) :booléen ;
    Var i :entier ;
    Var B :tableau[1..N]de booleen ;
    Début
        Pour i allant de 1 à N faire
            B[i]=faux
        Finpour
        Pour i allant de 1 à N faire
            Si B[T[i]]==vrai alors
                retourner(faux)
            sinon
                B[T[i]]=vrai
            Finsi
        Finpour
        Retourner(vrai)
    Fin
fonction tableauToListe(ref L :listed'entier ;refT :tableau[1..N]d'entier) :booleen ;
/* on suppose que la liste n'est pas créée*/
    Var P :^cellule ;
    Début
        Si !verifier(T) alors
            Retourner(faux)
        Sinon
            creerListe(L) ;
            insererEnTete(T[1],L) ;
            P=premier(L) ;
            Pour i allant de 2 à N faire
                insererApres(T[i],L,P) ;
                P=suivant(L,P) ;
            Finpour
            Retourner(vrai)
        Finsi
    Fin
```

2 – Ecrire une fonction *picDeListeSC* qui à partir de la liste ainsi constituée fournit la liste des valeurs T[j] telles que T[j-1]<T[j] et T[j]>T[j+1] (sur l'exemple (4,6,8)).

```
fonction picDeListeSC(ref L :listeSC d'entier) :listeSC d'entier;
    Var SSP,P :^cellule ;
    Var pic :listeSC d'entier ;
   Début
        creerListe(pic) ;
        P=premier(L) ;
        Si ! listeVide(L) et  suivant(L,P) !=NIL alors
            SP=suivant(L,P)
            SSP=suivant(L,SP) ;
```

```
        Tantque SSP !=NIL faire
            Si contenu(SP)>contenu(P) et contenu(SP)>contenu(SSP) alors
                insererEnTete(contenu(SP),pic)
            finsi
            P=SP ;
            SP=SSP ;
            SSP=suivant(L,SP)
        Fintantque
    Finsi
    Retourner(pic)
  Fin
```

3 – Si on choisit d'utiliser des listes doublement chainées, écrire la fonction *picDeListeDC* en utilisant la primitive *précédent*.

```
fonction picDeListeDC(ref L :listeDC d'entier) :listeSC d'entier;
  Var ,P :^cellule ;
  Var pic :listeSC d'entier ;
 Début
    creerListe(pic) ;
    P=premier(L) ;
    Si ! listeVide(L) et  suivant(L,P) !=NIL alors
        P=suivant(L,P)
        Tantque suivant(L,P) !=NIL faire
            Si contenu(P)>contenu(suivant(L,P) et contenu(P)>contenu(precedent(L,P)) alors
                insererEnTete(contenu(P),pic)
            finsi
            P=suivant(L,P)
        Fintantque
    Finsi
    Retourner(pic)
  Fin
```

4 – Donnez les avantages et les inconvénients des deux implémentations et des deux fonctions :

- En temps

Les deux fonctions sont équivalentes en temps : une boucle tantque qui parcours une liste de taille N.

- En mémoire

Les deux fonctions ne sont équivalentes la fonction en listeSC utilise moins de mémoire par définition que celle en listeDC puisque une cellule stocke un pointeur de plus. Cependant en ce qui concerne la complexité, elles sont équivalentes, O(n).

- En lisibilité de la fonction.

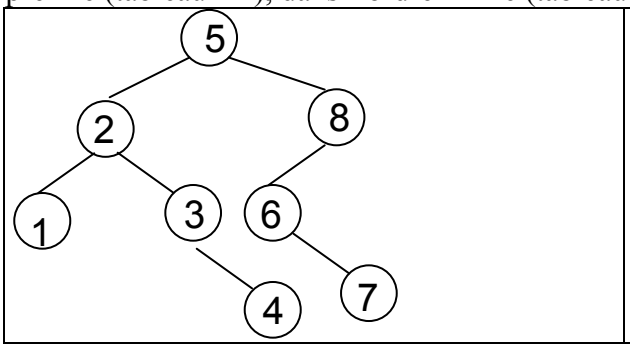
Il y a un avantage léger pour la fonction listeDC. En effet, au niveau du test on comprend mieux les comparaisons qui sont effectuées grâce à la primitive precedent.

5 – Ecrire une fonction *tableauToABR* qui transforme un tableau en un arbre binaire de recherche renvoie vrai si tous les éléments du tableau sont conformes à l'énoncé (des entiers tous différents) et faux sinon. On donnera l'algorithme COMPLET d'insertion.

```
fonction insertion(ref x:^sommet, val e:entier):vide;
 var s:^sommet;
 début
  si valeurSommet(x)>e alors
   s=filsGauche(x);
   si s==NIL alors
     ajouterFilsGauche(x,e);
   sinon
     insertion(s,e);
   finsi
  sinon
   s=filsDroit(x);
```

```
      si s==NIL alors
        ajouterFilsDroit(x,e);
      sinon
        insertion(s,e);
      finsi
    finsi
  fin
finfonction
fonction tableauToABR(ref A :arbreBinaire d'entier ;refT :tableau[1..N]d'entier) :booleen ;
/* on suppose que l'arbre n'est pas créée*/
    Début
        Si ! verifier(T) alors
            Retourner(faux)
        Sinon
            creerArbre(A,T[1]) ;
            Pour i allant de 2 à N faire
                insertion(racine(A),T[i]) ;
            Finpour
            Retourner(vrai)
        Finsi
    Fin
```

6 – Appliquer cette fonction au tableau donné en exemple. Donnez la suite des valeurs dans l'ordre préfixe (tableau PR), dans l'ordre infixe (tableau IN) et dans l'ordre suffixe (tableau SU).



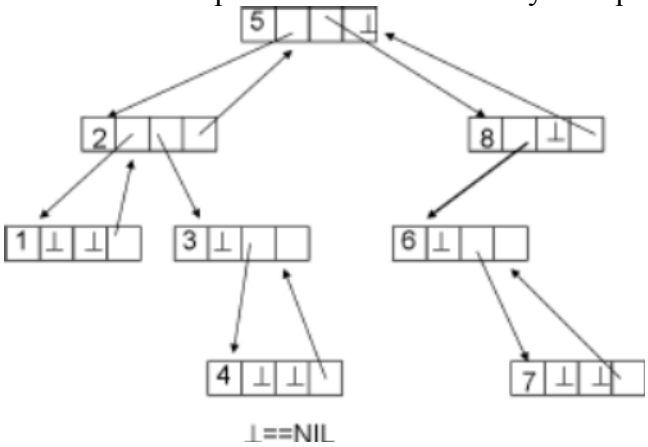
PR=5,2,1,3,4,8,6,7
IN=1,2,3,4,5,6,7,8
SU=1,4,3,2,7,6,8,5

7 - Donner sous formes de schéma ou de tableau la représentation des structures de données dans le cas où l'arbre est implémenté en allocation statique

T

5	2	8	1	3	6	NULL	NULL	NULL	NULL	4	NULL	7	NULL	NULL

8 - Donner sous formes de schéma ou de tableau la représentation des structures de données dans le cas où l'arbre est implémenté en allocation dynamique



9 – Ecrire en utilisant les primitives du type abstrait *arbreBinaire* la fonction *compte1NoeudTA* dont le résultat est le nombre de nœud ayant un seul fils.

```
fonction compte1NoeudTA (ref A :^sommet) :entier;
    Début
        Si estFeuille(A) alors
            Retourner(0)
        Sinon
            Si filsGauche(A) !=NIL et filsDroit(A) !=NIL alors
              Retourner(compte1NoeudTA(filsGauche(A))+ compte1NoeudTA(filsDroit(A))) ;
            sinon
                Si filsGauche(A) !=NIL alors
                    Retourner(1+compte1NoeudTA(filsGauche(A))) ;
                Sinon
                    Retourner(1+compte1NoeudTA(filsDroit(A))) ;
                Finsi
            Finsi
        Finsi
    Fin
```

10 – Ecrire la fonction *compte1NoeudAD* en utilisant directement l'implémentation en allocation dynamique.

```
fonction compte1NoeudAD (ref A :^sommet) :entier;
    Début
        Si A^.gauche==NIL et A^.droit==NIL alors
            Retourner(0)
        Sinon
            Si A^.gauche !=NIL et A^.droit!=NIL alors
              Retourner(compte1NoeudTA(A^.gauche)+ compte1NoeudTA(A^.droit)) ;
            sinon
                Si A^.gauche !=NIL alors
                    Retourner(1+compte1NoeudTA(A^.gauche)) ;
                Sinon
                    Retourner(1+compte1NoeudTA(A^.droit)) ;
                Finsi
            Finsi
        Finsi
    Fin
```

Récapitulatif des types et des primitives

Listes simplement chainées (listeSC)

fonction premier(val L:type_liste):^type_predefini;
fonction suivant(val L:type_liste; val P:^type_predefini):^type_predefini;
fonction listeVide(val L:type_liste):booléen;
fonction créer liste(ref L:type_liste):vide;
fonction insérerAprès(val x:type_prédéfini;ref L:type_liste; val P:^type_predefini):vide;
fonction insérerEnTete(val x:type_prédéfini;ref L:type_liste):vide;
fonction supprimerAprès(ref L:type_liste;val P:^type_predefini):vide;
fonction supprimerEnTete(ref L:type_liste):vide;

Listes doublement chainées (listeDC), On ajoute les primitives suivantes

fonction dernier(val L:type_liste):^type_predefini;
fonction précédent(val L:type_liste; val P:^type_predefini):^type_predefini;

Piles

fonction valeur(ref P:pile de type_predefini):type_predefini;
fonction pileVide(ref P:pile de type_predefini):booléen;
fonction empiler(ref P:pile de type_predefini; val v:type_predefini):vide;
fonction dépiler (ref P:pile de type_predefini):vide;
fonction créerPile(P:pile de type_predefini);

Files

fonction valeur(ref F:file de type_predefini):type_predefini;
fonction fileVide(ref F:file de type_predefini):booléen;
fonction enfiler(ref F:file de type_predefini; val v:type_predefini):vide;
fonction défiler (ref F:file de type_predefini):vide;
fonction créerFile(F:file de type_predefini);

ArbresBinaire

fonction valeurSommet(val A:arbreBinaire de type_prédéfini, val S:sommet):valeur_prédéfini;
fonction racine(val A:arbreBinaire de type_prédéfini):sommet;
fonction filsGauche(val A:arbreBinaire de type_prédéfini, val S:sommet):sommet;
fonction filsDroit(val A:arbreBinaire de type_prédéfini, val S:sommet):sommet;
fonction père(val A:arbreBinaire de type_prédéfini, val S:sommet):sommet;
fonction créerArbreBinaire(ref A:arbreBinaire de type_prédéfini, val racine:type_prédéfini):vide;
fonction ajouterFilsGauche(val x:type_prédéfini, ref A:arbreBinaire de type_prédéfini,
val S:sommet):vide;
fonction ajouterFilsDroit(val x:type_prédéfini, ref A:arbreBinaire de type_prédéfini,
val S:sommet):vide;
fonction supprimerFilsGauche(ref A:arbreBinaire de type_prédéfini, val S:sommet):vide;
fonction supprimerFilsDroit(ref A:arbreBinaire de type_prédéfini, val S:sommet):vide;

Arbres Binaires en allocation dynamique

fonction valeurSommet(val S:^sommet):valeur_prédéfini;
fonction racine(val A:arbreBinaire de type_prédéfini):^sommet;

fonction filsGauche(val S:^sommet):^sommet;
fonction filsDroit(val S:^sommet):^sommet;
fonction créerArbreBinaire(val racine:type_prédéfini):^sommet;
fonction ajouterFilsGauche(val x:type_prédéfini, val S:^sommet):vide;
fonction ajouterFilsDroit(val x:type_prédéfini, val S:^sommet):vide;
fonction supprimerFilsGauche(val S:^sommet):vide;
fonction supprimerFilsDroit(val S:^sommet):vide;
fonction grefferFilsDroit(ref s1:^sommet;ref s2:arbreBinaire):vide;
fonction grefferFilsGauche(ref s1:^sommet;ref s2:arbreBinaire):vide;
fonction elaguerFilsDroit(ref s1:^sommet):arbreBinaire;
fonction elaguerFilsGauche(ref s1:^sommet):arbreBinaire ;

Tas

fonction insérerValeur(ref T:tas de entier, val v:entier):vide;
fonction supprimerValeur(val T:tas de entier):entier;
fonction taille(val T:tas de entier):entier;
fonction creerTas(ref T:tas,val:v:entier):vide;

Table de hachage

fonction chercher(ref T:tableHash de clés, val v:clé):^clé;
fonction créerTableHachage(ref T: tableHash de clé,ref h:fonction):vide;
fonction ajouter(val x:clé, ref T:tableHash de clé):^clé;
fonction supprimer(val x:^clé, ref T:tableHash de clé):vide;