

TD n° 5 : Tribus - Probabilités continues

Exercice 1

Soit \mathfrak{F} une tribu sur Ω . Montrer que

1. $\emptyset \in \mathfrak{F}$
2. si \mathcal{J} est un ensemble au plus dénombrable et si $\{A_i : i \in \mathcal{J}\} \subseteq \mathfrak{F}$ est une collection de membres de \mathfrak{F} , alors $\bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i \in \mathfrak{F}$

Exercice 2

Si \mathfrak{F}_i une tribu sur Ω pour tout $i \in I$, où I est un ensemble quelconque.

Montrer que $\mathfrak{G} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ est une tribu.

Exercice 3

Soit $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ l'espace des issues d'un lancé de dé. Quelle est la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$?

Exercice 4

Soit $\mathcal{C} = \{A_i : i \in \mathcal{I}\}$ une classe de parties de Ω au plus dénombrable et telle que ses éléments forment une partition de Ω , c'est à dire

$$\Omega = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \text{ et } A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j.$$

Décrire la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par \mathcal{C} .

Exercice 5

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace de probabilité et $B \in \mathfrak{F}$ tel que $P(B) > 0$.

On définit Q sur \mathfrak{F} par $Q(A) = P(A|B)$.

Montrer que Q est une probabilité.

Exercice 6

La densité f de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\begin{cases} ax & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ a & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ -ax + 4a & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement f et calculer la constante a .
2. Calculer $P(|X - 1, 5| \leq 1)$ et $P(X \geq 3)$.

Exercice 7

La densité f de la variable aléatoire X est donnée par

$$f(x) = \frac{a}{x^2 + 1}.$$

On rappelle que $(\arctan(x))' = \frac{1}{x^2+1}$.

1. Calculer a .
2. Calculer $P(X \geq 1)$
3. Calculer l'espérance et la variance de X

4. Quelle est la densité de la variable aléatoire $Y = |X|$? (On pourra introduire la fonction de répartition de Y).

Exercice 8

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$\begin{aligned} p_n(x) &= 0 \text{ si } |x| > n + \frac{1}{n} \\ p_n(x) &= 0 \text{ si } \frac{1}{n} < |x| < n \\ p_n(x) &= \sqrt{n} \text{ si } n \leq |x| \leq n + \frac{1}{n} \\ p_n(x) &= \frac{n}{2} - \sqrt{n} \text{ sinon.} \end{aligned}$$

1. Vérifier que les p_n sont des densités de probabilité.
2. Soit X_n une variable aléatoire réelle associée à la densité p_n .
3. Calculer l'espérance et la variance de la variable X_n pour tout $n \geq 0$. Montrer que la suite de v.a. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0.

Les exercices suivants ne seront pas nécessairement traités en TD.

Exercice 9

Soit \mathcal{B}_k la tribu des boréliens de \mathbb{R}^k . On rappelle que \mathcal{B}_k est la tribu engendrée par la classe des pavés de \mathbb{R}^k .

Montrer dans chacun des cas suivants que la classe \mathcal{C} engendre également la tribu \mathcal{B}_k

1. si $k = 1$ et \mathcal{C} est la classe des intervalles fermés de \mathbb{R} :
 $\mathcal{C} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$
2. si $k = 1$ et $\mathcal{C} = \{]-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$
3. si $k \geq 2$ et $\mathcal{C} = \{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_k, b_k] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i, i = 1, \dots, k\}$
4. si $k \geq 2$ et $\mathcal{C} = \{]-\infty, b_1] \times \dots \times]-\infty, b_k] : b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k\}$