

TD n° 7 : Loi normale, convergences

Exercice 1

Lors de la fabrication en série de billes, on admet que le diamètre est reparti suivant une loi normale. A l'aide de deux cribles, l'un avec des trous de 10 mm et l'autre avec des trous de 10.3 mm, on peut évaluer les probabilités suivantes :

$$P(X \geq 10) = 0.1736 \text{ et } P(X \geq 13) = 0.1446.$$

Déterminer les paramètres λ et σ de la loi de distribution de X .

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres m et σ . On pose $Y = e^X$, calculer l'espérance et la variance de Y

Exercice 3

Un pays compte 1004000 électeurs. Le vote est obligatoire. 4000 électeurs votent "OUI" par conviction, les autres votent au hasard entre "OUI" et "NON". Quelle est la probabilité que le "OUI" l'emporte ?

Exercice 4

On suppose que les erreurs liées à une expérience suivent la loi normale de moyenne nulle et d'écart-type σ .

1. Déterminer σ sachant que l'erreur (en valeur absolue) est supérieure à 0,1 dans 10% des cas ?
2. Dans ce cas, quelle est la probabilité pour que l'erreur soit supérieure à 0,2 ?
3. Toujours dans le même cas, déterminer a en sorte que la probabilité pour que l'erreur soit supérieure à a soit de 5%.

Exercice 5

Une usine fabrique des objets dont on sait que 4% présentent des défauts. Calculer la probabilité P_k qu'un lot de 35 objets (choisis au hasard) comprenne k objets défectueux, pour $k = 1, 2, 3$.

Refaire les calculs en remplaçant la loi exacte par son approximation de Poisson.

Exercice 6

On suppose que la température moyenne du mois de janvier à Bordeaux est une variable aléatoire normale, d'espérance $3,7^\circ C$ et d'écart-type $1,8^\circ C$. On suppose que les températures moyennes (du mois de janvier à Bordeaux) des différentes années sont des variables aléatoires indépendantes.

1. Quelle est la loi de la moyenne des températures moyennes sur 5 années consécutives ?
Quelle est la probabilité que cette moyenne sur 5 ans dépasse $5^\circ C$.
2. Quelle est la probabilité que, 5 années consécutives, la température moyenne de janvier dépasse $5^\circ C$?

Exercice 7

On suppose qu'avec une certaine balance de laboratoire, l'erreur (en g) sur la pesée d'un corps est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres 0 et 0,08. Soit X la variable aléatoire égale au résultat de la pesée d'un corps de masse exacte $72,37g$

1. Quelle est la probabilité $P(72,3 < X < 72,5)$?
2. Déterminer un intervalle I centré sur $72,37$ tel que $P(X \in I) = 0,98$.

Exercice 8

On effectue 30 observations d'une variable aléatoire X supposée normale. Parmi les valeurs observées, 5 sont inférieures à 240, 15 sont comprises entre 240 et 250, 10 sont supérieures à 250.

Proposer des valeurs pour l'espérance μ et l'écart-type σ de X .

Exercice 9

Un restaurant peut servir 75 repas.

La pratique montre que 20 % des clients ayant réservé ne viennent pas.

1. Le restaurateur accepte 90 réservations.
Quelle est la probabilité qu'il se présente plus de 50 clients.
2. Combien le restaurateur doit-il accepter de réservations pour avoir une probabilité supérieure ou égale à 0,9 de pouvoir servir tous les clients qui se présenteront ?

Exercice 10

On suppose que la durée de vie d'une ampoule électrique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2 * 10^{-3}h^{-1}$.

Si l'on remplace une ampoule par une ampoule semblable dès qu'elle ne fonctionne plus, qu'elle est la probabilité qu'au bout de 50 000 heures l'ampoule en fonctionnement soit au moins la dixième ?