

Devoir à la Maison — Logique Correction

Le DM étant principalement calculatoire, il a, en général, été bien (voire très bien) réussi. En tant qu'entraînement, ce travail a donc joué son rôle : la plus grande partie du groupe sait désormais identifier tautologies et formules satisfaisables dans la logique à deux ou trois valeurs, et manipuler des tables de vérité sans problème. Je ne détaillerai donc pas cette correction, donnant simplement les réponses correctes aux problèmes calculatoires, pour les personnes qui, n'ayant pas rendu le DM, souhaiteraient le faire et se corriger. L'exercice 3, qui présentait manifestement quelques difficultés, sera plus détaillé. En tant que mécanisme d'évaluation, par contre, ce DM n'a pas donné les résultats escomptés, le taux de réussite étant aberrant par rapport aux DS. Eu égard à la nature de cette épreuve et aux engagements pris, j'ai utilisé le système de calcul suivant, en accord avec le responsable de l'UE : la moyenne du contrôle continu est la moyenne des deux DS, quand celle du DM est inférieure à celles-ci (pour ne pas pénaliser les personnes n'ayant pas rendu le DM, ou l'ayant trop vite fait, pensant que seules les deux meilleures notes seraient prises en compte), et la moyenne des trois notes, pondérées par 3 pour les DS et 2 pour le DM, quand ce calcul est plus favorable que le précédent (dans la plupart des cas, le DM améliore tout de même sensiblement les notes). Les notes de contrôle continu seront communiquées après harmonisation sur tous les groupes.

Exercice 1 – 4 points.

Parmi les formules suivantes, quelles sont les tautologies ?

- $a \wedge (a \vee \neg a)$: Non (équivalent à a).
- $(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b)$: Oui.
- $(a \wedge (\neg(\neg b \wedge 1) \vee \neg\neg\neg b)) \vee \neg a$: Oui.
- $(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$: Non (forme normale disjonctive d'une formule non tautologique d'après sa table).

Exercice 2 – 3 points. Quelles sont les formules équivalentes entre elles ? Regrouper en une ou plusieurs classes d'équivalence les formules suivantes :

1. $(b \wedge c) \wedge \neg(a \vee \neg(\neg b \wedge \neg c))$
2. $\neg(\neg a \wedge (\neg b \vee c))$
3. $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$
4. $\neg(\neg c \vee \neg(\neg b \wedge \neg a))$
5. $a \vee (b \wedge \neg c)$
6. $\neg(\neg c \vee \neg(\neg b \wedge \neg a))$
7. $((b \vee 0) \wedge \neg(c \wedge 1)) \vee a$

Classes d'équivalence : $\{1\}, \{2, 5, 7\}, \{3\}, \{4, 6\}$ (réduire les formules pour trouver l'équivalence $\{5, 6, 7\}$, calculer quelques tables de vérité pour vérifier que les autres comportements sont différents).

Exercice 3 – 3 points. Considérons un entier $n \in \mathbb{N}$ et les relations d'infériorité stricte ($<$), supériorité stricte ($>$), égalité ($=$) et divisibilité ($|$). Quels sont les domaines de vérité des formules suivantes, c'est-à-dire, quelles sont, pour chaque formule, les valeurs du paramètre n pour lesquelles ces formules sont vraies ?

- $(n > 2) \rightarrow (n < 5)$
- $(3|n) \rightarrow (2|n)$
- $((n > n) \vee (n < n)) \rightarrow (n = n)$

Cela a posé plus de problèmes : si la table de vérité de l'implication est connue, les conséquences ne le sont pas forcément. En détail :

$(n > 2) \rightarrow (n < 5)$ est vrai si $(\neg(n > 2) \wedge \neg(n < 5)) \vee (\neg(n < 2) \wedge (n < 5)) \vee ((n > 2) \wedge (n < 5))$ est vrai. Dans \mathbb{N} , la première clause est impossible ($n \leq 2$ et $n \geq 5$ sont exclusifs), mais les deux autres clauses le peuvent. n a donc pour valeurs $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

$(3|n) \rightarrow (2|n)$ est vrai quand 3 divise n et 2 divise n , ou bien quand 3 ne divise pas n . Les valeurs exclues sont donc les entiers multiples de 3 impairs : $n \in \mathbb{N} - \{3, 9, 15, 21 \dots\}$ (soit $\{3 + 6k, k \geq 0\}$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n > n) \vee (n < n)$ est faux, et $(n = n)$ est vrai, la formule revient donc à $0 \rightarrow 1$, qui est tautologique. Dans ce dernier cas, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 – 4 points. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont satisfaisables, lesquelles ne le sont pas ?

Une analyse très rapide de certaines valeurs de tables de vérité donne rapidement des résultats...

- $(a \wedge b) \vee \neg a$: Satisfaisable.
- $\neg(a \vee b) \wedge (a \vee \neg a) \wedge b$: Non satisfaisable.
- $(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge \neg(a \vee b))$: Satisfaisable.
- $a \wedge (\neg c \wedge b) \wedge \neg(a \vee \neg c)$: Non satisfaisable.

Exercice 5 – 3 points. Donner la représentation en forme normale disjonctive, puis en forme normale conjonctive, de la formule $\phi(a,b,c)$ à trois variables donnée par la table de vérité suivante :

a	b	c	ϕ
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Le tout était de ne pas se tromper de ligne ... La DNF est donnée directement :

$$(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

On pouvait simplifier en :

$$(\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

La DNF de la négation de la formule s'obtient en considérant les lignes égales à 0 dans la table :

$$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$

On peut également simplifier :

$$(\neg a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$$

La CNF de la formule peut alors être construite par négation de cette DNF :

$$(a \vee b) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$$

Exercice 6 – 3 points. On se place dans la *logique à trois valeurs* (l'axiome $A \vee \neg A$ du tiers exclu n'est plus une tautologie). Parmi les formules suivantes, lesquelles sont des 3-tautologies ?

Là encore, quelques tables de vérité donnent rapidement les résultats.

- $a \vee (\neg a \vee \neg \neg a)$: 3-tautologie. D'ailleurs, $(\neg a \vee \neg \neg a)$ est déjà une 3-tautologie : il s'agit de la non-non-traduction de la 2-tautologie $a \vee \neg a$.
- $\neg(\neg a \wedge \neg b) \rightarrow (a \vee b)$: 2-tautologie, mais non une 3-tautologie.
- $(\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(a \vee b) \vee \neg(\neg \neg a \wedge \neg \neg b)$: ni une 2- ni une 3-tautologie.