

Devoir Surveillé 1 – Ordres

Corrigé

Durée : 1h.

Ce premier devoir étant un peu plus long et difficile que prévu, il a été corrigé généreusement. La note doit donc être comprise comme suit : < 10 : reprendre très sérieusement les cours et TD ; 10-14 : des lacunes problématiques, revoir certaines notions ; ≥ 15 : vous vous en sortirez probablement.

Questions à choix multiples – 4 points.

*Chaque question dispose d'un ou plusieurs items dont la réponse est **Oui** ou **Non**. Inscrire la réponse correcte en vis-à-vis (on ne demande aucune justification).*

1. La relation sur les personnes définie par x a le même âge, ou est plus jeune, que y :
 - est-elle un ordre ?
*La première question, devant servir simplement à vérifier l'acquisition intuitive de la notion d'ordre (on associe à chacun un nombre et on trie selon ce nombre, c'est donc un ordre), était en fait une question piège (soit deux personnes du même âge, elles sont en relation réciproque et l'antisymétrie ne tient pas). Sauf à considérer que toutes les personnes du même âge sont identiques, la relation n'est donc pas un ordre. Eut égard à la difficulté "cachée" de la question, j'ai accordé 1 point à ceux qui ont répondu **oui**, 2 à ceux (peu nombreux) qui ont répondu **non**.*
2. L'ordre "naturel" (\leq : "inférieur ou égal") défini sur les rationels (\mathbb{Q}^+ , ensemble des fractions d'entiers positifs) :
 - est-il total ? *Oui. Prenons deux bâtons fictifs de même longueur, coupons n'importe quelle fraction de l'un et n'importe quelle fraction de l'autre, il y en aura toujours un plus grand (ou égal) et un plus petit (ou égal) que l'autre.*
 - est-il bien fondé ? *Non : $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \dots > 0$ peut facilement être une suite infinie.*
3. L'égalité ($=$, "égal"), définie sur \mathbb{R} :
 - est-elle symétrique ? *Oui : si $x = y$, $y = x$.*
 - est-elle antisymétrique ? *Oui aussi : si on a $x = y \wedge y = x$, alors $x = y$.*

- est-elle une relation d'ordre? *Oui toujours : on a $x = x$ et $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$. Elle n'est bien entendu pas totale.*
 - est-elle une relation d'équivalence? *Oui : c'est un pré-ordre symétrique.*
4. La relation le reste de la division de y par 2 est x , définie sur les entiers naturels :
- Ici, remarquer que la relation n'a a priori aucune propriété intéressante. Le problème est qu'elle n'est valide que pour $x \in \{0, 1\}$, ce qui change un peu la donne... J'ai compté 1 point pour les trois premiers items, 1 point pour les deux derniers.*
- est-elle totale? *Non (puisque jamais vérifiée pour $x = 2$, par exemple).*
 - est-elle réflexive? *Non (le reste de la division de 3 par 2 est 1).*
 - est-elle symétrique? *Non ($15\%2 = 1$, $1\%2 \neq 15$).*
 - est-elle antisymétrique? *Oui. En effet, les seuls nombres pouvant apparaître des deux côtés de la relation sont 0 et 1, et le reste de la division de 0 par 2 est 0, le reste de la division de 1 par 2 est 1.*
 - est-elle transitive? *Oui, par le même argument : les seuls entiers permettant de vérifier la transitivité sont 0 et 1 : 0R0R0 et 1R1R1.*

Questions à réponses courtes – 6 points.

Chaque question appelle une réponse courte (deux lignes, grand maximum), on ne demande pas de détails.

1. Donner les bornes inférieures et supérieures de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ ordonné par inclusion, où E est un ensemble fini quelconque.
Entr'aperçu en TD : $\sup((\mathcal{P}(E), \subseteq)) = E$, $\inf((\mathcal{P}(E), \subseteq)) = \emptyset$.
2. Donner un ordre bien fondé sur \mathbb{Q}^+ (fractions entières positives).
On peut remarquer que \mathbb{Q} est (à 0 près) isomorphe à \mathbb{N}^2 . L'ordre lexicographique ou l'ordre produit, en considérant les fractions comme des couples (num, den), est donc bien fondé. Comme l'énoncé ne précise pas "ordre total", on pouvait même donner un ordre partiel comme l'ordre naturel sur \mathbb{N} , voire simplement $0 < 1$. Par contre, l'ordre par les parties entières des fractions n'est pas valide : $\text{Ent}(\frac{1}{2}) = \text{Ent}(\frac{1}{3})$, la relation n'est donc pas antisymétrique et il s'agit d'un pré-ordre...
3. Peut-on définir un ordre bien fondé sur \mathbb{R}^+ ? Si oui, le décrire ; si non, donner un argument.

*On ne peut pas donner d'ordre bien fondé **total** sur \mathbb{R}^+ (ou tout intervalle réel), la réponse attendue était donc **non**. L'argument est la densité de \mathbb{R} .*

Si on ne connaît pas le terme technique, on peut raisonner comme suit : si on avait un ordre bien fondé total pour \mathbb{R} , on aurait une numérotation pour chacun des réels, or \mathbb{R} et \mathbb{N} ne sont pas totipotents (les approximations étaient acceptées). Cependant, comme précédemment, l'énoncé ne précisait pas "total", certains ordres partiels bien fondés ont donc été acceptés (comme précédemment, la relation sur les parties entières n'est pas un ordre).

4. Dans le cadre d'un programme, soit la relation suivante sur les fonctions utilisées : $f R f'$ quand la fonction f fait, dans son code, appel à la fonction f' .

(a) R est-elle transitive ?

Oui : Si on a deux fonctions, l'une faisant appel à l'autre, l'ensemble des appels de la seconde sera effectuée par la première. On pouvait avoir un doute quant à l'énoncé, certains ayant interprété littéralement "dans son code" comme "présente lors de l'écriture de la fonction" : la réponse était acceptée si elle était justifiée.

(b) : En général, R est-elle un pré-ordre ? Un ordre ?

Non : on a $f R f$ quand la fonction f est écrite selon le style récursif, ce qui n'est en général pas le cas. Là encore, une réflexion sur l'énoncé pouvait permettre une autre interprétation : f est par définition présente dans son propre code ; la réflexivité était donc acceptable avec cette justification. Par contre, R n'est en aucun cas anti-symétrique (deux fonctions différentes peuvent parfaitement s'appeler l'une l'autre).

Exercice 1 – 5 points.

Rédiger l'exercice, avec les justifications nécessaires.

Les sous-mots d'un mot $u = a_1a_2\dots a_n$ sont les mots $a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_m}$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$.

Cet exercice – directement tiré d'un TD des années précédentes – a été très mal compris de par les termes utilisés : "sous-mot" n'a pas ici la même définition que dans la plupart des langages de programmation, par exemple, il fallait se référer à la définition formelle. Un sous-mot de u est une suite de 0 à $|u|$ lettres de u , prises dans l'ordre original. Par exemple, on peut concaténer la seconde, la troisième et la huitième lettre d'un mot de longueur 10... Le calcul précis du nombre de sous-mots était aussi ardu, et l'importance de cet exercice dans la note finale a donc été réduite.

1. Quels sont les sous-mots de abc ? de aba ? de abb ?

Sous-mots de abc : $abc, ab, ac, bc, a, b, c, \varepsilon$; de aba : $aba, ab, aa, ba, a, b, \varepsilon$; de abb : $abb, ab, bb, a, b, \varepsilon$. (On pouvait négliger les ε si on considère qu'un sous-mot a au moins une lettre.)

2. Combien un mot de n lettres distinctes admet-il de sous-mots ?

Il y a 1 sous-mot de n lettres, n sous-mots de $n - 1$ lettres et, en général, $\binom{n}{k}$ sous-mots de k lettres : il s'agit de choisir k lettres à retenir dans un mot de longueur n . Alors il y a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ sous-mots au total, soit 2^n (ou $2^n - 1$ si on néglige ε).

3. La relation R définie par

$$u R v \Leftrightarrow u \text{ est un sous-mot de } v$$

est-elle une relation d'ordre ?

Oui. Il s'agit de vérifier classiquement la réflexivité (immédiate), la transitivité (peu difficile) et l'antisymétrie (un peu plus long) de la relation, sans autre difficulté que le détail de la relation... Les preuves portant sur d'autres relations que celle qui était vraiment définie étaient acceptées pour cette question.

Bonus : Pour les mots de trois lettres ou moins sur $\{a, b\}^*$, tracer le diagramme de Hasse de R .

Il s'agit de savoir faire un diagramme de Hasse (en voir quelques uns en cas de difficulté, par exemple sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Hasse), et bien sûr d'avoir la bonne définition. Fig. 1.

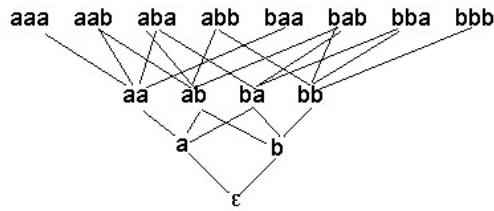


FIG. 1 – Diagramme pour l'ordre des sous-mots

Exercice 2 – 5 points.

Rédiger l'exercice, avec les justifications nécessaires.

Soit $(\mathbb{N} - 0, |)$ l'ensemble des entiers naturels ordonnés par la relation de divisibilité.

1. Donner (si elles existent) les bornes inférieures et supérieures de cet ensemble.

La borne inférieure est 1, qui divise tous les entiers. La borne supérieure n'existe pas a priori, on peut aussi considérer qu'il s'agit de $+\infty$ (l'hypothétique multiple de tous les entiers). Attention à ne pas confondre borne supérieure (ici, ce qui est multiple de tout) d'autres notions (ce qui ne divise rien : élément maximal, etc).

2. Prouver que l'ordre est bien fondé. Est-il total ?

De très nombreuses personnes citent la présence de 1 comme minimum et supposent que cela suffit pour la bienfonditude de l'ordre. C'est absolument et totalement faux : la présence de 0 ne signifie pas qu'un ordre sur \mathbb{R}^+ ou \mathbb{Q}^+ est bien fondé, de même que ε pour A^ , &c. Deux arguments permettent de prouver qu'un ordre est bien fondé : **qu'il ne puisse exister** de suite infinie strictement décroissante pour cet ordre et cet ensemble, ou que **toute sous-partie de l'ensemble** admette un élément minimal. Ici, comme vu en TD, il suffit de remarquer que $x|y \Rightarrow x \leq y$ et, soit de se ramener aux propriétés de \leq , soit de prouver que la longueur d'une suite strictement décroissante est bornée par le premier entier. L'ordre n'est, bien sur, pas total : deux entiers premiers entre eux, par exemple 7 et 11, ne sont pas comparables.*

3. Tracer le diagramme de Hasse de cet ordre pour les entiers de 1 à 9. Là encore, il suffit de se rappeler de la construction du diagramme. Voir fig. 2.

4. Bonus : Comment peut-on caractériser, sur ce diagramme, les nombres premiers ? les couples d'entiers premiers entre eux ? le plus grand commun diviseur de deux entiers ?

Les nombres premiers, par définition, sont ceux qui ne sont divisibles que

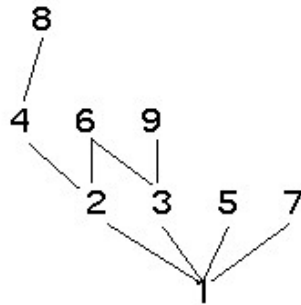


FIG. 2 – Diagramme pour l'ordre de divisibilité

par 1 et eux-mêmes : ce sont donc ceux qui ont 1 pour ancêtre direct, sans intermédiaire (autrement dit, ils se trouvent au niveau du diagramme suivant la racine). Le pgcd de deux entiers est le plus grand nombre divisant ces deux entiers, il s'agit donc du plus grand ancêtre commun sur le graphe que forme le diagramme (le premier nombre commun rencontré en suivant le chemin des deux entiers concernés jusqu'à la racine). Deux entiers sont premiers entre eux quand $\text{pgcd}(x,y) = 1$, donc quand leur plus grand ancêtre commun est 1 (soit quand les chemins jusqu'à la racine ne se croisent pas avant celle-ci).