

Bruno Mery (Doctorant, LaBRI bureau 123, mery@labri.fr)
Université de Bordeaux, année 2007-2008
Informatique Théorique 1
INF154T Groupe CSB5A2

Exercices de et inspirés de : Géraud Sénizergues, Anne Dicky,
Alexandre Zvonkine, Irène Durand, Pierre Castéran...

Travaux Dirigés

Ordres

1 Relations, ordres, totalité

Rappels

- Une *relation binaire* R définie sur un ensemble E est *réflexive* si, $\forall x \in E, x R x$.
- R est *symétrique* si, $\forall (x, y) \in E^2, x R y \implies y R x$.
- R est *antisymétrique* si, $\forall (x, y) \in E^2, (x R y \wedge y R x) \implies x = y$ (i.e., $x R y$ et $y R x$ sont contradictoires).
- R est *transitive* si, $\forall (x, y, z) \in E^3, (x R y \wedge y R z) \implies x R z$.
- Un *pré-ordre* sur E est une relation binaire réflexive et transitive.
- Un *ordre* sur E est un pré-ordre antisymétrique.
- Une *relation d'équivalence* sur E est un pré-ordre symétrique.
- Une relation R sur E (donc également un ordre, un pré-ordre...) est dite *totale* si, $\forall (x, y) \in E^2, (x R y \vee y R x)$, *partielle* sinon.

1.1 Ensembles

Exercice 1 Soit U un ensemble. On considère, sur l'ensemble $\mathcal{P}(U)$ les relations :

$$X R Y \iff X \cap Y \neq \emptyset,$$
$$X S Y \iff X \subseteq Y \text{ (inclusion large).}$$

Ces relations sont-elles réflexives ? Symétriques ?

Montrer par un contre-exemple que la relation R n'est pas transitive.

Corrigé 1 R n'est pas réflexive ($\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$). Elle est symétrique ($X \cap Y = Y \cap X$) et non transitive ($\{0, 1\}R\{1, 2\}$ et $\{1, 2\}R\{2, 3\}$ mais $\{0, 1\} \cap \{2, 3\} = \emptyset$).

S est réflexive ($X \subseteq X$ par définition), non symétrique (cf. \emptyset et $\{0\}$), et transitive.

Exercice 2 Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F muni d'une relation d'ordre \leq . Montrer que la relation R , définie par

$$x R y \iff f(x) \leq f(y)$$

est un pré-ordre sur E . À quelle condition (nécessaire et suffisante) R est-elle une relation d'ordre ?

Corrigé 2 $f(x)$ est l'image (unique) de $x \forall x \in E$, et \leq est réflexive : $f(x) \leq f(x)$, donc $x R x$: R est réflexive. Soient $(x, y, z) \in E^3$ tels que $f(x) \leq f(y) \leq f(z)$: \leq est transitive, donc $f(x) \leq f(z)$, et on a bien $(x R y \wedge y R z) \implies x R z$: R est transitive. Pour que R soit antisymétrique (donc un ordre), il faut que $(f(x) \leq f(y) \wedge f(y) \leq f(x)) \implies x = y$, c'est-à-dire que $f(x) = f(y) \implies x = y$, c'est-à-dire que f soit *injective*.

1.2 Damier

Exercice 3 Sur l'ensemble des cases d'un damier carré, on définit la relation R par $c R c'$ si l'on peut aller de la case c à la case c' en se déplaçant de gauche à droite, puis de bas en haut (les déplacements peuvent être nuls). R est-elle un ordre ? Si oui, total ou partiel ? Et si l'on interdit certaines cases du damier ?

Corrigé 3 Les déplacements peuvent être nuls donc $c R c$: R est réflexive. En posant $c = (x, y)$ (coordonnées de la case c), on a : $c R c' \implies x \leq x' \wedge y \leq y'$, et on peut facilement vérifier l'antisymétrie et la transitivité. R est un ordre total. Par contre, si on interdit un sous-ensemble de cases, non seulement R n'est plus totale (par définition), mais la transitivité ne tient plus : R n'est plus un ordre...

1.3 Entiers naturels

Exercice 4 On considère, sur l'ensemble des entiers naturels, les relations

$$\begin{aligned}m R n &\iff m|n \\m S n &\iff m = n + 1\end{aligned}$$

Les relations R et S sont-elles antisymétriques ? La relation S est-elle transitive ?

Corrigé 4 R comme S sont antisymétriques. On peut utiliser le même argument : $m R n \Rightarrow m \leq n$ (id. pour S). La relation S n'est pas transitive : $1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 1 + 1 \neq 3$.

1.4 Mots

Exercice 5 (Redondant avec l'exercice 6).

Exercice 6 Soit une relation R suivante sur A^* : $uRv \iff |u|_a < |v|_a \vee (|u|_a = |v|_a \wedge |u|_b \leq |v|_b)$ Pourquoi n'est-ce pas une relation d'ordre ? Donner d'autres exemples de ce type.

Corrigé 6 Le problème est l'antisymétrie : considérer aab, aba, baa (on a donc un pré-ordre).

2 Ordres bien fondés

Rappels

- Soient E un ensemble muni d'un ordre \leq , F une partie non vide de E .
- Un élément $x \in E$ est un *minorant* de F s'il est inférieur ou égal (par \leq) à tout élément de F .
- Un élément $x \in E$ est un *majorant* de F s'il est supérieur ou égal à tout élément de F .
- Si $x \in F$ est un minorant de F , il s'agit du *plus petit élément* (unique) de F .
- De même, s'il existe un majorant de F appartenant à F , il s'agit du *plus grand élément* de F .
- Enfin, si l'ensemble des minorants de F admet un *plus grand élément*, il s'agit de la *borne inférieure* (unique) de F .
- De même, si l'ensemble des majorants de F admet un *plus petit élément*, il s'agit de sa *borne supérieure*.
- Si $x \in F$ est tel qu'il n'existe pas de $y \in F$ avec $x \leq y$, x est un *élément maximal* de F .
- Inversement, si $x \in F$ est tel qu'il n'existe pas de $y \in F$ avec $y \leq x$, x est un *élément minimal* de F .
- L'ordre \leq sur E est dit *bien fondé* s'il n'existe pas de suite infinie décroissante suivant \leq dans E .

2.1 Inclusion des relations

Exercice 7 Une relation R définie dans un ensemble E est dite *incluse* dans une relation S (définie sur le même ensemble) si, $\forall(x,y) \in E^2$, on a $x R y \Rightarrow x S y$.

Dans ce cas, parmi les propriétés suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. Si R est un ordre, alors S aussi.
2. Si S est un ordre, alors R aussi.

Supposons que R et S soient tous deux des ordres. Quelles propriétés sont vraies ?

1. Si R est un ordre total, alors S aussi.
2. Si S est un ordre total, alors R aussi.
3. Si R est un ordre bien fondé, alors S aussi.
4. Si S est un ordre bien fondé, alors R aussi.

Corrigé 7 Première partie : 1 est fausse. On se place dans les entiers naturels, avec R définie par $0R1$ (et aucun autre élément), R est un ordre (partiel), et S la relation totale sans restrictions $xSy\forall x,y$. On a bien $R \in S$, S n'est pas un ordre. 2 est vraie : si on n'avait pas $xRx\forall x$, on n'aurait pas xSx (absurde) ; si on pose $x \neq y \wedge xRy \wedge yRx$, on a également une contradiction, etc.

Deuxième partie : 1 est vraie. Si R est totale, par définition $\forall (x,y) \in E^2, (xRy \vee yRx)$, donc S est aussi définie sur E tout entier (et de fait, $R = S$). 2 est fausse : sur les entiers naturels, considérons $S = \leq$ et $R = \leq_{10 \times n}$, l'ordre des dizaines, l'inclusion est bien respectée et R n'est pas total. 3 est fausse : soit $R = \leq$ définie sur les entiers, $S = \leq$ définie sur les réels, l'inclusion est respectée et S n'est pas bien fondé. Par contre, 4 est vraie : s'il existait une suite infiniment décroissante selon R , elle vaudrait aussi pour S .

2.2 Ensembles

Exercice 8 Soit un ensemble E muni d'un ordre (partiel) \leq . Supposons un élément $e \in E$ à la fois maximal et minimal pour \leq . Laquelle des propositions découle de ces conditions ?

1. Ce n'est pas possible : un tel ensemble n'existe pas.
2. E n'a qu'un élément.
3. E a au moins deux éléments incomparables.
4. Soit E n'a qu'un élément, soit il possède au moins deux éléments incomparables.

Corrigé 8 La réponse correcte est 4. D'une part, l'ensemble à un élément (par exemple $\{0\}$ avec l'ordre usuel) comporte effectivement un élément à la fois maximal et minimal (il n'existe pas d'autre élément)¹. D'autre part, si l'ordre est total et que E possède deux éléments ou plus, la propriété ne peut être vérifiée, donc, si E possède plus d'un élément, il y a au moins deux éléments incomparables. On peut exhiber un ensemble de ce type : tout ensemble suffisamment grand muni de l'ordre $=$ (tous les éléments ne sont comparables qu'avec eux-mêmes et sont donc maximaux et minimaux).

¹Remarque : l'énoncé est ambigu, avec la mention de (*partiel*). On peut considérer que cela signifie que l'ordre *ne peut pas* être total, auquel cas la bonne réponse est la 3, de façon triviale : on ne peut avoir un seul élément avec un ordre non total, et non total \Leftrightarrow il existe deux éléments incomparables. Dans l'esprit de l'énoncé, ici, on précise simplement que l'ordre *peut être total ou non*, mais la formulation est mal choisie.

Exercice 9 Soit $E = \mathbb{N}^2$ muni de l'ordre produit, et

$$F = \{(x, y) \in E \mid 2x + 3y \geq 5\}$$

Trouver les éléments minimaux de F .

Corrigé 9 Les éléments minimaux de F sont les $a = (x, y)$ tels qu'il n'existe pas de $b \in F$ vérifiant $b \prec_{\times} a$. Ainsi, $(1, 1) \in F$, mais pas $(0, 0), (1, 0), (0, 1) \dots$ et tout élément supérieur à $(1, 1)$ est aussi dans F : $(1, 1)$ est un élément minimal. De même, $(3, 0) \in F$ mais $(2, 0)$, non, et ainsi de suite. Après une étude de cas rapide, les éléments minimaux de F sont au nombre de trois : $(1, 1), (3, 0), (0, 2)$ (on peut vérifier qu'ils sont incomparables).

2.3 Mots

Exercice 10 Soit A un alphabet (ensemble $\{a, b, \dots\}$). On note A^* l'ensemble de tous les mots que l'on peut former avec A , et $|u|$ la longueur d'un mot u . Montrer que \leq définie sur A^* par

$$u \leq v \Leftrightarrow (|u| < |v| \vee u = v)$$

est un ordre. Est-il total ? Bien fondé ?

Corrigé 10 \leq est, par définition, réflexive. Elle est antisymétrique (deux mots de longueur différente ne peuvent être en relation réciproque, et sont forcément différents), et on vérifie qu'elle est transitive (posons $u \leq v$ et $v \leq w$, il y a quatre cas...) – \leq est donc un ordre. Cet ordre n'est pas total (comparer aab et aba). Il est aussi bien fondé, car si on pose $u_k \dots \leq u_1 \leq u_0$ différents deux à deux, alors $|u_{i+1}| \leq |u_i| - 1$, et $|u_0|$ est fini ; la suite est donc finie.

Exercice 11 Montrer que l'ordre lexicographique sur \mathbb{N}^2 est bien fondé, mais que l'ordre lexicographique sur A^* n'est pas bien fondé. Donner d'autres exemples munis d'ordres *non* bien fondés malgré l'existence d'un plus petit élément.

Corrigé 11 On peut procéder par l'absurde ou utiliser un théorème du cours (le produit lexicographique de deux ordres bien fondés est bien fondé) pour le premier point. Pour le second, il faut remarquer qu'il ne s'agit pas d'un produit ($\{a\}^*$ est infini, par exemple). On peut alors remarquer que $b > ab > aab > \dots$. Exemples : \mathbb{R}^+ , $\mathcal{P}(V)$ avec V infini, $\mathbb{N} - \{0\}$ avec l'ordre des $\frac{1}{n}, \dots$

Exercice 12 Comment peut-on numéroter tous les mots sur un alphabet fini ? À quel ordre sur les mots correspond cette numérotation ?

Corrigé 12 Soit A l'alphabet, il s'agit de numéroter tous les mots de A^* de façon unique. Posons $num(\varepsilon) = 0$. Par la suite, numérotons A de 1 à $|A|$, et associons aux mots de longueur 1 le numéro de la lettre correspondante. On numérote ensuite par induction : soit un mot u numéroté et une lettre $a \in A$, alors $num(au) = num(a) \otimes |A|^{|u|} + num(u)^2$. Cette numérotation est associée à l'ordre $|u| < |v| \vee (|u| = |v| \wedge u <_{lex} v)$ (ordre des dictionnaires de mots croisés, bien fondé).

Exercice 13 Soit A un alphabet. Montrer que la relation

$$R = \{(u, uv) / u, v \in A^*\}$$

définie sur A^* est un ordre, et qu'il est bien fondé.

Corrigé 13 On vérifie que R est réflexive (uRu car $\varepsilon \in A^*$), antisymétrique (si on a uRw et wRu , il existe $v \in A^*$ tel que $uv = w$ et $wv = u$, donc $w = \varepsilon$ et $u = w$), et transitive (soit u_1Ru_2 et u_2Ru_3 , alors on a $u_1v_1 = u_2$ et $u_2v_2 = u_3$, donc $u_3 = u_1v_1v_2$ et u_1Ru_3). R est bien fondé : on utilise un argument de longueur (si uRw avec $u \neq w$ alors $|u| < |w|$).

2.4 Relations quelconques

Exercice 14 Soit F l'ensemble des fonctions partielles de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . On définit la relation \leq dans F par

$$f \leq g \iff \begin{cases} \text{Dom}(f) \subseteq \text{Dom}(g) \\ \forall x \in \text{Dom}(f) f(x) = g(x) \end{cases}$$

1. Montrer que \leq est un ordre partiel.
2. Peut-on construire pour \leq : une suite infinie croissante ? une suite infinie décroissante ? Une antichaîne (ensemble d'éléments deux à deux incomparables) infinie ?
3. Quels sont les éléments maximaux, minimaux de (F, \leq) ? Y a-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ?

²Rectifié le 2 Octobre, les versions précédentes étaient fausses.

Corrigé 14

1. Vérifier d'abord que \leq est un ordre : la réflexivité est immédiate, et la transitivité / antisymétrie découlent des propriétés équivalentes pour \subseteq . L'ordre est partiel puisque des fonctions aux images différentes pour un même antécédent sont incomparables (e.g., x^2 et $x+2$).
2. Suites infinies croissantes : fonctions définies sur $\{0 \dots k\}$. On ne peut avoir de suite infinie décroissante (\subseteq est bien fondé pour \mathbb{N} , ou : $f \leq g \wedge f \neq g \rightarrow |Dom(f)| < |Dom(g)|$). Antichaine infinie : très facile (prendre $f_i(x) = x + i$, par exemple).
3. Un élément maximal est une f telle qu'il n'existe pas de $g/f \leq g, g \neq f$. Toutes les fonctions définies sur \mathbb{N} entier correspondent à cette propriété. De même, toutes les fonctions non définies (définies sur \emptyset) sont minimales. Par contre, il n'y a pas de plus grand ou plus petit élément (sauf si l'on considère que toutes les fonctions non définies sont équivalentes).

3 Diagramme de Hasse

Rappels

- Dans un ensemble ordonné fini (E, \leq) , on dit que y est le *successeur* de x par rapport à \leq quand $x \leq y$ et qu'il n'existe pas de $z, z \neq x \wedge z \neq y, /x \leq z \leq y$. On dit que y *couvre* x . x est le *prédécesseur* de y , etc.
- Ainsi, la fonction *successeur* dans (\mathbb{N}, \leq) avec l'ordre habituel est $f(n) = n + 1$.
- Pour un ensemble ordonné fini (E, \leq) , le *diagramme de Hasse* est une figure représentant l'ordre considéré. On procède comme suit :
 - Les éléments de E soit placés sur le plan.
 - Si e_2 *couvre* e_1 , on lie e_1 et e_2 par un trait en plaçant e_2 *au-dessus* de e_1 .
 - Alors, $e \leq f$ dans E lorsqu'il existe des $e_1 \dots e_n, e_{i+1}$ étant au-dessus de e_i , les deux éléments étant liés par un trait.
 - Le graphe est celui de la relation d'ordre, l'orientation est implicite (vers le haut).
 - On construit souvent des diagrammes de Hasse approximatifs pour représenter des ordres non bien fondés ou infinis.

Exercice 15 Tracer le diagramme de Hasse, pour $U = \{1, 2, 3, 4\}$, de $\mathcal{P}(U)$ ordonné par inclusion.

Corrigé 15 Racine : \emptyset , lié avec tous les niveau 2 : singletons, liés chacun avec 3 doublons, liés chacun avec 3 triplets, tous liés avec U .

Exercice 16 Sur $\{a, b\}^*$ ordonné par \leq_{fact} , l'ordre facteur gauche des mots ($u \leq_{fact} v \iff \exists w \in A^* / v = uw$), tracer le début (jusqu'à trois lettres) du diagramme de Hasse.

Corrigé 16 Arbre à branchements multiples : ε à la racine, a et b au niveau 2, a facteur de aa et ab , b de ba et bb , aa de aaa et aab , ...

Exercice 17 Les ordres \leq_{cr} (ordre des dictionnaires de mots croisés) et \leq_{lex} (ordre lexicographique) sur A^* sont totaux. Comment parcourir le diagramme de la relation \leq_{fact} pour retrouver les mots ordonnés selon \leq_{cr} et selon \leq_{lex} ?

Corrigé 17 \leq_{cr} : parcours en largeur, \leq_{lex} : parcours en profondeur.

4 Induction

4.1 Principe d'induction

Rappels

- L'induction généralise à tout (E, \leq) où \leq est bien fondé, le principe de récurrence défini sur \mathbb{N} .
- Soit $P(e)$ une propriété vraie ou fausse $\forall e \in E$.
- *Base* : P est vraie pour tout élément de E .
- *Induction* : Soit $x \in E$, on peut démontrer en supposant P vraie $\forall y/y < x$ que $P(x)$ est vraie.
- Si on peut démontrer *Base* et *Induction*, alors $P(x)$ est vraie $\forall x \in E$.

Exercice 18 Montrer que la fonction récursive d'Ackermann :

```
A(m, n) = if m=0 then n+1
          else if n=0 then A(m-1, 1)
          else A(m-1, A(m, n-1))
```

est totale (partout définie) sur \mathbb{N}^2 .

Corrigé 18 On remarque que : si A est définie pour $(m, n-1)$ et $(m-1, K)$, alors elle est définie pour (m, n) . Or, A est définie en $(0, 0)$. Par induction sur \mathbb{N}^2 muni de l'ordre lexicographique (bien fondé), A est définie sur \mathbb{N}^2 .

4.2 Induction structurelle

Rappels

- Une définition inductive est la donnée d'une structure par :
 1. un ensemble d'éléments de base (minimaux),
 2. des règles d'assemblages (correspondant à un certain ordre sur la structure).
- Ainsi, un *Arbre* est soit une feuille, soit une racine et d'autres arbres.
- Une *Liste* est composée d'un élément (*car*) et du *cdr* qui peut être une liste ou l'élément nul.
- Une *preuve par induction structurelle* consiste à utiliser la définition inductive d'une structure pour prouver qu'une propriété, vraie pour les éléments de base et pour tout élément formé suivant les règles à partir d'éléments vérifiant cette propriété, est vraie pour tout élément.

Exercice 19 On définit un système permettant de traiter des listes d'entiers avec les fonctions `empty(L)` (vrai ou faux suivant que L soit vide), `head(L)` (donnant le premier élément d'une liste L non vide), `tail(L)` (donnant la liste privée de son premier élément), `cons(n, L)` (renvoie une liste de tête n et de queue L). (Les constructeurs correspondent à `car`, `cdr`, `cons` en Lisp.)

Considérons la fonction (tri-fusion) :

```
merge(L1, L2) = if empty(L1) then L2
                else if empty(L2) then L1
                else if head(L1) <= head(L2)
                    then cons(head(L1), merge(tail(L1), L2))
                    else cons(head(L2), merge(L1, tail(L2)))
```

Montrer que cette fonction est totale sur les listes d'entiers, et que si L_1 et L_2 sont triées par ordre croissant, il en est de même de `merge(L1, L2)`.

Corrigé 19 Définissons l'ordre approprié sur les paires de listes : $X = (L_1, L_2) \leq Y = (L'_1, L'_2) \iff L_1 \leq L'_1 \wedge L_2 \leq L'_2$ (ordre produit sur les listes). Avec l'ordre sur les listes suivant : $L \leq L' \iff L = L' \vee nL = L'$ pour $n \in \mathbb{N}$. Cet ordre est bien fondé (argument de longueur ou analogie avec un ordre sur les mots ou détail d'une suite décroissante forcément finie). Intéressons nous à la totalité de la fonction : on a `merge` définie pour $(\varepsilon, \varepsilon)$. Si elle est définie pour tout $Y \leq X$, alors elle est définie pour X . Par induction, elle est donc totale. Considérons ensuite l'ordre : soit $P(L)$ vraie si L est triée. Supposons $P(L_1) \wedge P(L_2)$. On a bien que, si $\forall L'_1 \leq L_1$ et $\forall L'_2 \leq L_2$, `merge(L1', L2')` est ordonnée, alors `merge(L1, L2)` aussi. Par induction, on a $P(\text{merge}(L1, L2))$ vraie.

Exercice 20 On considère maintenant des arbres binaires complets dont les feuilles sont étiquetées par des entiers. On notera `b(t1, t2)` l'arbre dont le fils gauche est t_1 et le fils droit t_2 . L'arbre réduit à une feuille i sera noté `f(i)`.

On considère l'algorithme suivant, portant sur deux arbres binaires t et t' , qui détermine si les arbres ont le même feuillage :

1. Si t et t' sont deux feuilles, on termine avec succès si les feuilles sont étiquetées par le même nombre, avec échec sinon.
2. Si l'un des deux arbres seulement est une feuille, on arrête sur échec.
3. Si l'un des deux arbres est de la forme `b(b(t1, t2), t3)`, on le remplace par `b(t1, b(t2, t3))` et on continue.

4. Si le fils gauche de t et celui de t' sont des feuilles :
 - on arrête sur échec si les étiquettes des deux feuilles sont différentes
 - dans le cas contraire, on remplace chacun des deux arbres par son fils droit, on continue...

Montrer que cet algorithme termine toujours.

Corrigé 20 Avec un ordre bien fondé approprié, l'induction ne pose pas de problème. Soit $r(t)$ l'arbre obtenu par rotation de t suivant la procédure décrite dans l'algorithme. Alors on pose $t \preceq t' \iff t = t' \vee t = r(t') \vee t = \text{filsDroit}(t')$. On peut vérifier (mais c'est long) qu'il s'agit d'un ordre. Soit maintenant $c(t)$ le nombre de nœuds de t . On a $c(r(t)) = c(t)$, $c(\text{filsDroit}(t)) < c(t)$. Soit également $g(t) = c(\text{filsGauche}(t))$, on a $c(r(t)) < c(t)$. Pour $t \prec t'$, on a donc $(c(t), g(t)) < (c(t'), g(t'))$ selon l'ordre produit sur \mathbb{N}^2 . Cet ordre étant bien fondé, on ne peut avoir de suite infinie décroissante de ce type, donc \preceq lui-même est bien fondé, l'induction est valide et l'algorithme termine.