

## Devoir à la Maison — Logique

Pour le 6 Décembre 2007

Barème indicatif, tous documents autorisés.

La rédaction doit être aussi personnelle que possible.

*Répondre à tous les exercices, en donnant les calculs nécessaires et/ou les justifications (même informelles) des raisonnements utilisés. On répondra sur papier libre ou document électronique (PDF, PostScript ou DVI). Dans tous les exercices, le système d'inférences du cours est utilisé ; sauf indication explicite contraire, on se base sur la logique à deux états.*

### Exercice 1 – 4 points.

Parmi les formules suivantes, quelles sont les tautologies ?

- $a \wedge (a \vee \neg a)$
- $(a \wedge b) \vee (\neg a \vee \neg b)$
- $(a \wedge (\neg(\neg b \wedge 1) \vee \neg\neg\neg b)) \vee \neg a$
- $(\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

**Exercice 2** – 3 points. Quelles sont les formules équivalentes entre elles ? Regrouper en une ou plusieurs classes d'équivalence les formules suivantes :

- $(b \wedge c) \wedge \neg(a \vee \neg(\neg b \wedge \neg c))$
- $\neg(\neg a \wedge (\neg b \vee c))$
- $(a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$
- $\neg(\neg c \vee \neg(\neg b \wedge \neg a))$
- $a \vee (b \wedge \neg c)$
- $\neg(\neg c \vee \neg(\neg b \wedge \neg a))$
- $((b \vee 0) \wedge \neg(c \wedge 1)) \vee a$

**Exercice 3** – 3 points. Considérons un entier  $n \in \mathbb{N}$  et les relations d'infériorité stricte ( $<$ ), supériorité stricte ( $>$ ), égalité ( $=$ ) et divisibilité ( $|$ ). Quels sont les domaines de vérité des formules suivantes, c'est-à-dire, quelles sont, pour chaque formule, les valeurs du paramètre  $n$  pour lesquelles ces formules sont vraies ?

- $(n > 2) \rightarrow (n < 5)$
- $(3|n) \rightarrow (2|n)$
- $((n > n) \vee (n < n)) \rightarrow (n = n)$

**Exercice 4** – 4 points. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont *satisfaisables*, lesquelles ne le sont pas ?

- $(a \wedge b) \vee \neg a$
- $\neg(a \vee b) \wedge (a \vee \neg a) \wedge b$
- $(a \vee b) \wedge \neg(a \wedge \neg(a \vee b))$
- $a \wedge (\neg c \wedge b) \wedge \neg(a \vee \neg c)$

**Exercice 5** – 3 points. Donner la représentation en *forme normale disjunctive*, puis en *forme normale conjonctive*, de la formule  $\phi(a,b,c)$  à trois variables donnée par la table de vérité suivante :

$a$	$b$	$c$	$\phi$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

**Exercice 6** – 3 points. On se place dans la *logique à trois valeurs* (l'axiome  $A \vee \neg A$  du tiers exclu n'est plus une tautologie). Parmi les formules suivantes, lesquelles sont des 3-tautologies ?

- $a \vee (\neg a \vee \neg \neg a)$
- $\neg(\neg a \wedge \neg b) \rightarrow (a \vee b)$
- $(\neg a \wedge \neg b) \vee \neg(a \vee b) \vee \neg(\neg \neg a \wedge \neg \neg b)$