

Logique: Extraits du Cours et Exercices

Alexandre Zvonkine

5 novembre 2007

1 Quelques extraits du cours

1.1 Notations

Pour les connecteurs logiques, nous utilisons les notations suivantes :

- \vee – disjonction ;
- \wedge – conjonction ;
- \neg – négation ;
- \rightarrow – implication (on réserve le symbole \Rightarrow pour des raisonnements mathématiques) ;
- \leftrightarrow – équivalence ($p \leftrightarrow q$ veut dire $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$).

Les variables booléennes “atomiques” sont notées p, q, r, s, t, \dots et aussi x, y, z, \dots . Les propositions sont notées A, B, C, \dots et parfois φ, ψ, \dots .

1.2 Axiomes du calcul propositionnel

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(A \wedge B) \rightarrow A$
4. $(A \wedge B) \rightarrow B$
5. $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
6. $A \rightarrow (A \vee B)$
7. $B \rightarrow (A \vee B)$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C))$
9. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
10. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$
11. $A \vee \neg A$

Remarque 1.1 Plus exactement, au lieu d'*axiomes* il faudrait parler des *schémas d'axiomes* : en substituant, au lieu de A, B, C , n'importe quelle proposition on peut obtenir, à partir d'un seul axiome, une infinité de propositions différentes, toutes "vraies".

Remarque 1.2 L'axiome 10 peut être déduit des autres. On l'inclut dans la liste au cas où on voudrait en éliminer l'axiome 11.

1.3 Règles d'inférence

Nous utilisons deux règles :

1. **Substitution** : Dans toute formule démontrée, on peut remplacer toutes les occurrences d'une variable propositionnelle par une proposition (la même pour chaque occurrence).
2. **Modus Ponens** : Si F et G sont deux propositions, et les propositions F et $F \rightarrow G$ sont démontrées, on peut ajouter G à la liste des propositions démontrées.

Définition 1.3 (Tautologie) Une *tautologie* est une proposition qui est toujours vraie, quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles la constituant.

Proposition 1.4 *Tous les axiomes 1 – 11 sont des tautologies.*

Proposition 1.5 *Toutes les propositions que l'on peut démontrer à partir des axiomes 1 – 11 en utilisant les règles de l'inférence Substitution et Modus Ponens, sont des tautologies.*

Théorème 1.6 (Complétude du calcul propositionnel) *Toutes les tautologies peuvent être démontrées à partir des axiomes 1 – 11 en utilisant les règles de l'inférence Substitution et Modus Ponens.*

1.4 Logique à trois valeurs

Si on n'accepte pas le principe du "tiers exclu" (comme c'est le cas dans la logique intuitionniste), on est tenté d'introduire une troisième valeur de vérité :

valeur	interprétation
1	vrai
0	faux
1/2	possible

Les opérations \vee et \wedge sont définies comme

$$A \vee B = \max(A, B), \quad A \wedge B = \min(A, B).$$

La négation est définie par la table suivante :

A	$\neg A$
0	1
1/2	0
1	0

La règle $\neg(1/2) = 0$ est tout à fait compréhensible : si ce n'est pas possible, alors c'est faux. Finalement, pour l'implication on a

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1/2	1
0	1	1
1/2	0	0
1/2	1/2	1
1/2	1	1
1	0	0
1	1/2	1/2
1	1	1

On trouve quelques exercices sur cette logique dans la section 2.5

2 Propositions et fonctions booléennes

2.1 Formules propositionnelles

Exercice 2.1 Vérifier que la formule $(p \wedge q) \rightarrow p$ est une tautologie. Trouver une tautologie “symétrique” pour la disjonction.

Exercice 2.2 Les opérations logiques \vee et \wedge ressemblent les opérations \cup et \cap pour les ensembles. Quels sont des analogues des opérations \neg et \rightarrow ?

Solution. Pour l'implication $A \rightarrow B$ il s'agit de l'ensemble $\overline{A} \cup B$. Une réponse courante $A \subseteq B$ possède un vice de forme : ce n'est pas un ensemble.

Exercice 2.3 Deux formules φ et ψ qui ne contiennent que des connecteurs \vee , \wedge et \neg , sont équivalentes. Montrer qu'elles restent équivalentes si on remplace partout \vee en \wedge et \wedge en \vee .

Solution. Soit $\varphi = \varphi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ une formule qui porte sur les variables p_1, p_2, \dots, p_n . Si on remplace dans cette formule tous les \vee par \wedge , et tous les \wedge par \vee , on obtient la formule $\neg\varphi(\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_n)$.

Exercice 2.4 Appliquer à un exemple la méthode suivante de construction de la forme normale conjonctive : (1) représenter $\neg\varphi$ sous forme normale disjonctive ; (2) utiliser les lois de de Morgan pour “pousser” la négation vers l’intérieur.

Exercice 2.5 Le système de connecteurs $\{\vee, \wedge\}$ est-il complet ?

Solution. Non : si les valeurs de toutes les variables sont 1, une formule qui n’utilise que \vee et \wedge ne peut jamais donner la valeur 0.

Exercice 2.6 Montrer que le système de connecteurs $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$ n’est pas complet.

Solution. Même que pour l’exercice précédent.

Exercice 2.7 Montrer que le système $\{\rightarrow, \neg\}$ est complet.

Solution. $A \vee B$ est équivalent à $\neg A \rightarrow B$.

Exercice 2.8 Montrer que le système qui consiste d’un seul connecteur

$$A \diamond B \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

est complet.

Solution. On peut représenter $\neg A$ comme $A \diamond A$, et $A \vee B$ comme $\neg(A \diamond B)$.

Exercice 2.9 Montrer que toute fonction booléenne *monotone* peut être représentée à l’aide de connecteurs \vee et \wedge , sans utiliser la négation. (Une fonction booléenne est dite “monotone”, si l’augmentation de valeur d’une de ses variable ne peut pas diminuer la valeur de la fonction.)

Solution. Soit $f = f(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Notons

$$f_0 = f(0, p_2, \dots, p_n), \quad f_1 = f(1, p_2, \dots, p_n).$$

Selon le lemme de Shannon,

$$f = (p_1 \wedge f_1) \vee (\neg p_1 \wedge f_0).$$

La fonction est monotone, donc $f_0 \leq f_1$, d'où $f_1 = f_1 \vee f_0$. On obtient

$$f = (p_1 \wedge (f_1 \vee f_0)) \vee (\neg p_1 \wedge f_0) = (p_1 \wedge f_1) \vee (p_1 \wedge f_0) \vee (\neg p_1 \wedge f_0) = (p_1 \wedge f_1) \vee f_0.$$

Par induction, on peut supposer que f_1 et f_0 ne contiennent pas de négation ; alors $f = (p_1 \wedge f_1) \vee f_0$ non plus.

Exercice 2.10 Combien y a-t-il des fonctions booléennes de n variables ?

Exercice 2.11 Soit f une fonction booléenne de 100 variables. Vous disposez d'un superordinateur dont la vitesse est 1 *teraflops*, c'est-à-dire, 10^{12} opérations avec la virgule flottante par seconde.

1. En supposant qu'une valeur de la fonction f peut être calculée en 10^{-12} secondes, combien de temps est-il nécessaire pour calculer toutes les valeurs de f ? (Un jour contient $86\,400 \approx 10^5$ secondes.)
2. Quelle est la distance parcourue par la lumière en 10^{-12} secondes ? Que peut-on dire du processeur qui ferait un tel calcul (s'il y en avait un seul processeur) ?
3. Estimer l'espace mémoire nécessaire pour stocker une forme normale disjonctive de la fonction f : en octets ; en "disques durs" ; en masse des objets physiques. Comparer cette masse avec la masse de la Terre ($6 \cdot 10^{24}$ kg).

Exercice 2.12 Soit φ une formule propositionnelle. Montrer qu'on peut construire une autre formule Φ , qui contient peut-être davantage de variables, telle que φ est satisfaisable si et seulement si Φ est satisfaisable, et Φ est en forme 3-SAT, c'est-à-dire :

$$\Phi = E_1 \wedge E_2 \wedge \dots \wedge E_N,$$

où chaque E_i est en forme

$$E_i = t_1 \vee t_2 \vee t_3$$

(exactement trois termes, ni plus ni moins), et chaque t_j est soit une variable, soit une négation d'une variable.

Estimer la taille de Φ en fonction de la taille de φ . (Proposer une mesure raisonnable de la "taille" d'une formule propositionnelle.)

2.2 Un peu de logique

Exercice 2.13 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ la formule $(n = 1) \rightarrow (n = 2)$ est-elle vraie? Même question pour $(n = 1) \leftrightarrow (n = 2)$.

Exercice 2.14 Les énoncés suivants sont-ils vrais?

1. Si $F \rightarrow G$ et F sont des tautologies, alors G est une tautologie.
2. Si $F \rightarrow G$ et F sont satisfaisables, alors G est satisfaisable.
3. Si $F \rightarrow G$ est satisfaisable et F est une tautologie, alors G est satisfaisable.
4. Si F est satisfaisable et $F \rightarrow G$ est une tautologie, alors G est satisfaisable.
5. Soient F, G, H trois formules; si $F \rightarrow G$ est une tautologie, et $\neg(G \wedge H)$ est satisfaisable, alors $\neg F \vee \neg H$ est satisfaisable.

2.3 BDD : “Binary Decision Diagrams”

Exercice 2.15 Construire les BDD représentant la formule

$$(x \wedge u) \vee (y \wedge v) \vee (z \wedge w)$$

en rangeant les variables

- dans l’ordre x, y, z, u, v, w ;
- dans l’ordre x, u, y, v, z, w .

2.4 Calcul propositionnel

Exercice 2.16 Dédurre la formule $D \rightarrow D$ à partir des axiomes en utilisant les règles Substitution et Modus Ponens (MP).

Solution.

1. Axiome 2, substitutions $A := D, B := (D \rightarrow D), C := D$:

$$(D \rightarrow ((D \rightarrow D) \rightarrow D)) \rightarrow ((D \rightarrow (D \rightarrow D)) \rightarrow (D \rightarrow D)).$$

2. Axiome 1, substitutions $A := D, B := (D \rightarrow D)$:

$$D \rightarrow ((D \rightarrow D) \rightarrow D).$$

3. De 1 et 2, par (MP) :

$$(D \rightarrow (D \rightarrow D)) \rightarrow (D \rightarrow D).$$

4. Axiome 1, substitutions $A := D, B := D$:

$$D \rightarrow (D \rightarrow D).$$

5. De 3 et 4, par (MP) :

$$D \rightarrow D.$$

On peut remarquer que cette déduction n'utilise pas l'axiome 11.

2.5 Logique à trois valeurs

L'objectif des exercices suivants consiste à démontrer que l'axiome 11 $A \vee \neg A$ ne peut pas être déduit des autres axiomes.

Exercice 2.17 Montrer que l'implication $A \rightarrow B$ n'est pas équivalente à la formule $\neg A \vee B$.

Définition 2.18 Une formule propositionnelle est dite *3-tautologie* si sa valeur de vérité est toujours 1, quelles que soient les valeurs de ses variables.

Proposition 2.19 Les axiomes 1 – 10 sont de 3-tautologies.

Exercice 2.20 Vérifier que l'axiome $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ est une 3-tautologie.

Exercice 2.21 Si A et $A \rightarrow B$ sont de 3-tautologies, alors B l'est aussi.

Solution. Regarder la table de vérité de l'implication.

Corollaire 2.22 Toute la formule déductible à partir des axiomes 1 – 10 en utilisant les règles Substitution et Modus Ponens est une 3-tautologie.

Exercice 2.23 Vérifier que l'axiome 11 $A \vee \neg A$ n'est pas une 3-tautologie.

Attention ! Dans ce modèle le théorème de complétude n'est plus vrai : toutes les 3-tautologies ne sont pas déductibles des axiomes 1 – 10.

Exercice 2.24 Voici quelques formules non déductibles à partir des seuls axiomes 1 – 10, sans utiliser l'axiome 11 du tiers exclu :

1. $\neg\neg A \rightarrow A$
2. $\neg A \vee \neg\neg A$
3. $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (règle de la contraposée)
4. $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$
5. $((A \vee B) \rightarrow A) \vee ((A \vee B) \rightarrow B)$

Lesquelles de ces cinq formules sont des 3-tautologies ?