

Réseaux Bayesiens (Bayesian Networks)

Richard.Moot@labri.fr

<http://www.labri.fr/perso/moot/SE/>

Rappel:

Théorème de Bayes

- ④ Une maladie du coeur affecte une personne sur 1.000
- ④ Un test a été développé qui a 5% de faux positives (personnes non atteintes pour lequel le test dit qu'ils sont atteintes) mais qui détecte toujours cette maladie si une personne est atteinte.
- ④ Quelle est la probabilité qu'une personne aléatoire pour laquelle le test donne un résultat positif a vraiment cette maladie?

Rappel: Théorème de Bayes

95% ?

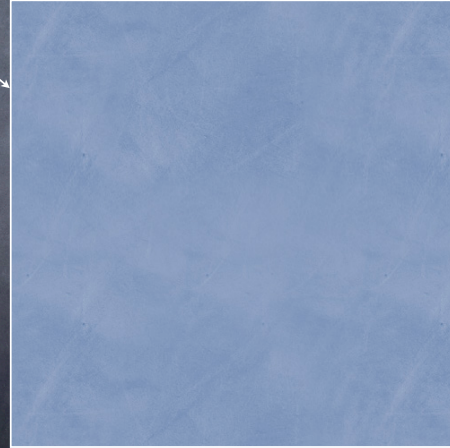
Rappel:

Théorème de Bayes

- ④ La réponse est: un peu moins que 2% !
- ④ Ne vous inquiétez pas si vous n'avez pas trouvé la bonne réponse
- ④ Malheureusement, les médecins, les avocats et beaucoup d'autres experts ont du mal avec ce raisonnement aussi
- ④ Alors, comment trouve-t-on la réponse correcte? Et comment peut-on appliquer cette réponse à la modélisation des connaissances?

Rappel: Théorème de Bayes

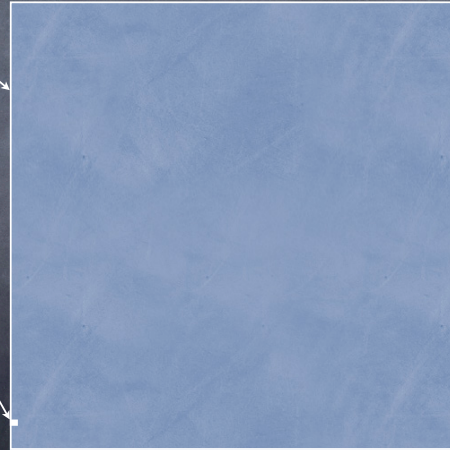
Population:
10.000



Rappel: Théorème de Bayes

Population:
10.000

Malades:
10



Rappel: Théorème de Bayes

Population:
10.000

Malades:
10

Faux positives:
500



Rappel: Théorème de Bayes

Population:
10.000

Malades:
10

Faux positifs:
500



Alors la probabilité
que quelqu'un qui a
un résultat de test
positif est vraiment
malade est:

$$\frac{10}{510} \\ = 0.0196$$

Rappel: Théorème de Bayes

$$p(m) = 0.001$$

$$p(-m) = 0.999$$

$$p(t|m) = 1$$

$$p(t|-m) = 0.05$$

$$p(m|t) = ?$$

Rappel: Théorème de Bayes

$$p(m) = 0.001$$

$$p(-m) = 0.999$$

$$p(t|m) = 1$$

$$p(t|-m) = 0.05$$

$$p(m|t) = \frac{p(t|m) \cdot p(m)}{p(t)} \leftarrow \text{Théorème de Bayes}$$

Rappel: Théorème de Bayes

$$p(m) = 0.001$$

$$p(-m) = 0.999$$

$$p(t|m) = 1$$

$$p(t|-m) = 0.05$$

$$p(m|t) = \frac{p(t|m) \cdot p(m)}{p(t)} \leftarrow \text{Théorème de Bayes}$$

$$p(t) = ?$$

Rappel: Théorème de Bayes

$$p(m) = 0.001$$

$$p(-m) = 0.999$$

$$p(t|m) = 1$$

$$p(t|-m) = 0.05$$

$$p(m|t) = \frac{p(t|m) \cdot p(m)}{p(t)}$$

$$p(t) = p(t|m) \cdot p(m) + p(t|-m) \cdot p(-m)$$

Rappel: Théorème de Bayes

$$p(m) = 0.001$$

$$p(-m) = 0.999$$

$$p(t|m) = 1$$

$$p(t|-m) = 0.05$$

$$p(m|t) = \frac{p(t|m) \cdot p(m)}{p(t)}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= p(t|m) \cdot p(m) + p(t|-m) \cdot p(-m) \\ &= 1 \cdot 0.001 + 0.05 \cdot 0.999 \end{aligned}$$

Rappel: Théorème de Bayes

$$p(m) = 0.001$$

$$p(-m) = 0.999$$

$$p(t|m) = 1$$

$$p(t|-m) = 0.05$$

$$p(m|t) = \frac{p(t|m) \cdot p(m)}{p(t)}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= p(t|m) \cdot p(m) + p(t|-m) \cdot p(-m) \\ &= 1 \cdot 0.001 + 0.05 \cdot 0.999 = 0.05095 \end{aligned}$$

Rappel: Théorème de Bayes

$$p(m) = 0.001$$

$$p(-m) = 0.999$$

$$p(t|m) = 1$$

$$p(t|-m) = 0.05$$

$$p(m|t) = \frac{p(t|m) \cdot p(m)}{p(t)} = \frac{1 \cdot 0.001}{0.05095}$$

$$\begin{aligned} p(t) &= p(t|m) \cdot p(m) + p(t|-m) \cdot p(-m) \\ &= 1 \cdot 0.001 + 0.05 \cdot 0.999 = 0.05095 \end{aligned}$$

Rappel: Théorème de Bayes

$$p(m) = 0.001$$

$$p(-m) = 0.999$$

$$p(t|m) = 1$$

$$p(t|-m) = 0.05$$

$$p(m|t) = \frac{p(t|m) \cdot p(m)}{p(t)} = \frac{1 \cdot 0.001}{0.05095} = 0.019627$$

$$\begin{aligned} p(t) &= p(t|m) \cdot p(m) + p(t|-m) \cdot p(-m) \\ &= 1 \cdot 0.001 + 0.05 \cdot 0.999 = 0.05095 \end{aligned}$$

Réseaux Bayesiens

- Les réseaux Bayesiens sont un moyen de combiner de l'information connue (ou observé) avec de l'information inconnue (ou caché)
- Application du règle de Bayes garantit la cohérence des probabilités qu'on trouve
- Les réseaux même permettent, grâce à l'information fourni par des experts, d'établir de causes possibles pour des événements et ainsi d'éviter de devoir calculer tout les relations possibles

Réseaux Bayesiens

- ④ Les réseaux Bayesiens sont de modèles dites graphiques, où nous (avec l'aide d'un expert) donnons les dépendances entre des événements
- ④ La structure utilisée pour les dépendances est un graphe dirigé acyclique
 - dirigé: connections entre cause possible et effet
 - acyclique: un événement ne peut pas (même indirectement) influencer sa propre probabilité

Exemple



g: il y a un grève de tramway

j: Jean arrive en retard

p: Pierre arrive en retard

Exemple



| | |
|----|-----|
| g | 0.1 |
| ¬g | 0.9 |

Exemple



Alors, il y a un grève de tramway assez souvent: un jour ouvrier sur dix.

| | |
|----|-----|
| g | 0.1 |
| ¬g | 0.9 |

Exemple



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| ¬g | 0.9 |

Jean vient en tramway:
il est normalement à
l'heure sauf s'il a un
grève de tramway

Exemple

Pierre vient en voiture:
il y a des bouchons un
jour sur deux et même
plus en cas de grève



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| ¬g | 0.9 |

| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| ¬p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

Quelle est la probabilité que Jean a du retard?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(j) = p(j|g) \cdot p(g) + p(j|\neg g) \cdot p(\neg g)$$

Quelle est la probabilité que Jean a du retard?



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| ¬g | 0.9 |

| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| ¬p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(j) = 0.8 \cdot p(g) + p(j|\neg g) \cdot p(\neg g)$$

Quelle est la probabilité que Jean a du retard?



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| ¬g | 0.9 |

| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| ¬p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(j) = 0.8 \cdot 0.1 + p(j|\neg g) \cdot p(\neg g)$$

Quelle est la probabilité que Jean a du retard?



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| ¬g | 0.9 |

| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| ¬p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(j) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot p(\neg g)$$

Quelle est la probabilité que Jean a du retard?



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| ¬g | 0.9 |

| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| ¬p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(j) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.9$$

Quelle est la probabilité que Jean a du retard?



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| ¬g | 0.9 |

| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| ¬p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(j) = 0.08 + 0.09$$

Quelle est la probabilité que Jean a du retard?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(j) = 0.17$$

Quelle est la probabilité que Jean a du retard?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

Quelle est la probabilité que Pierre a du retard?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(p) = p(p|g) \cdot p(g) + p(p|\neg g) \cdot p(\neg g)$$

Quelle est la probabilité que Pierre a du retard?



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| ¬g | 0.9 |

| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| ¬p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(p) = 0.6 \cdot p(g) + p(p|\neg g) \cdot p(\neg g)$$

Quelle est la probabilité que Pierre a du retard?



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| ¬g | 0.9 |

| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| ¬p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(p) = 0.6 \cdot 0.1 + p(p|\neg g) \cdot p(\neg g)$$

Quelle est la probabilité que Pierre a du retard?



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| ¬g | 0.9 |

| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| ¬p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(p) = 0.6 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot p(-g)$$

Quelle est la probabilité que Pierre a du retard?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(p) = 0.6 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.9$$

Quelle est la probabilité que Pierre a du retard?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(p) = 0.06 + 0.45$$

Quelle est la probabilité que Pierre a du retard?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: calculer l'information implicite

$$p(p) = 0.51$$

Quelle est la probabilité que Pierre a du retard?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: ajouter des observations

Variable observé
sûr fond noir

Supposons qu'on observe j, quelle est la probabilité de g?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: ajouter des observations

$$p(g|j) = \frac{p(j|g) \cdot p(g)}{p(j)}$$

Supposons qu'on observe j, quelle est la probabilité de g?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: ajouter des observations

$$p(g|j) = \frac{0.8 \cdot 0.1}{0.17}$$

Supposons qu'on observe j, quelle est la probabilité de g?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: ajouter des observations

$$p(g|j) = 0.47$$

Supposons qu'on observe j, quelle est la probabilité de g?



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| | |
|----|-----|
| g | 0.1 |
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: ajouter des observations

$$p(g|j) = 0.47$$

Alors, savoir que j augmente la probabilité de g de façon significative (de 0.1 à 0.47)



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.1 |
|----|-----|
| -g | 0.9 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: ajouter des observations

$$p(p) = p(p|g) \cdot p(g) + p(p|\neg g) \cdot p(\neg g)$$

Alors, on peut modifier notre estimation de p prenant en compte g



| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.47 |
|----|------|
| ¬g | 0.53 |

| | g | ¬g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| ¬p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: ajouter des observations

$$p(p) = 0.6 \cdot 0.47 + 0.5 \cdot 0.53$$

Alors, on peut modifier notre estimation de p prenant en compte g



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.47 |
|----|------|
| -g | 0.53 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: ajouter des observations

$$p(p) = 0.55$$

Alors, on peut modifier notre estimation de p prenant en compte g



| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| g | 0.47 |
|----|------|
| -g | 0.53 |

| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple: ajouter des observations

$$p(p) = 0.55$$

Faisant le calcul comme avant
mais avec les valeurs de g
induit à partir de j on
augmente la probabilité de p
à 0.55 (de 0.51)

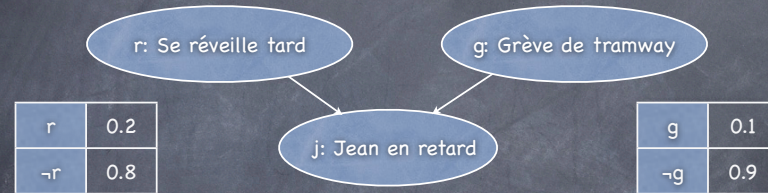


| | g | -g |
|----|-----|-----|
| j | 0.8 | 0.1 |
| -j | 0.2 | 0.9 |

| | |
|----|------|
| g | 0.47 |
| -g | 0.53 |

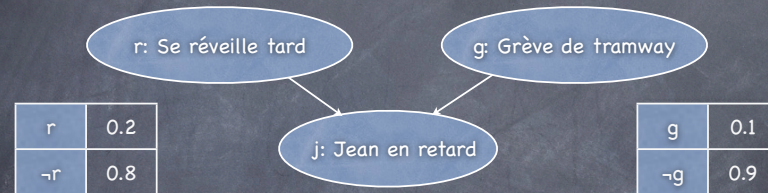
| | g | -g |
|----|-----|-----|
| p | 0.6 | 0.5 |
| -p | 0.4 | 0.5 |

Exemple



| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----------|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| $\neg j$ | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

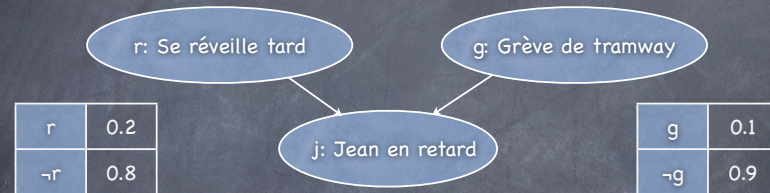
Exemple



Maintenant, on peut calculer la probabilité que Jean arrive en retard comme avant: il y a juste quatre possibilités à considérer.

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----------|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| $\neg j$ | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

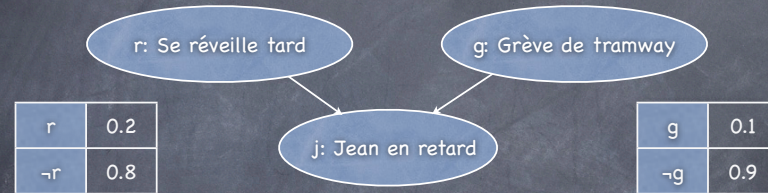
Exemple



$$p(j) = p(j|g \wedge r) \cdot p(g) \cdot p(r) + p(j|\neg g \wedge r) \cdot p(\neg g) \cdot p(r) + p(j|g \wedge \neg r) \cdot p(g) \cdot p(\neg r) + p(j|\neg g \wedge \neg r) \cdot p(\neg g) \cdot p(\neg r)$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

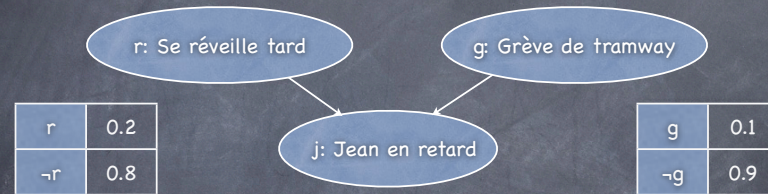
Exemple



$$p(j) = 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.9 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.1 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.8$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

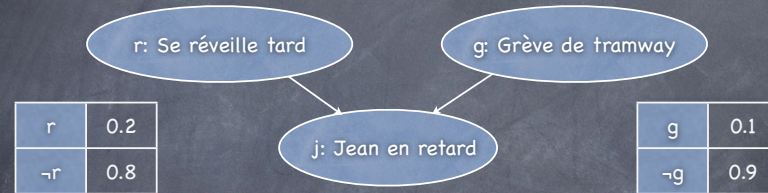
Exemple



$$p(j) = 0.018 + 0.108 + 0.008 + 0.072$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

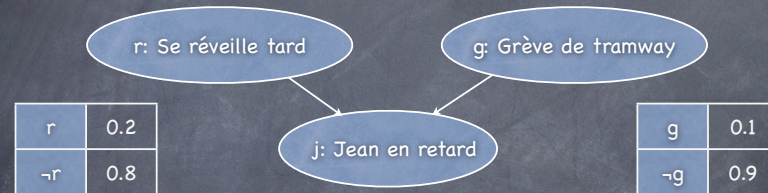
Exemple



$$p(j) = 0.206$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

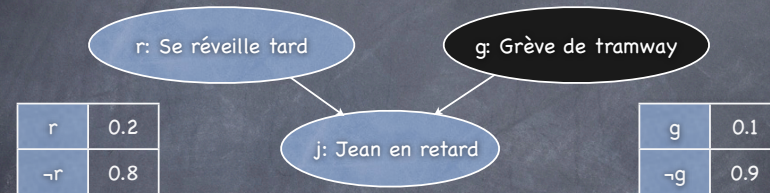
Exemple



Supposons maintenant qu'on sait qu'il y a un grève de tramway. On peut propager cette information pour mettre à jour la probabilité que j .

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----------|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| $\neg j$ | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

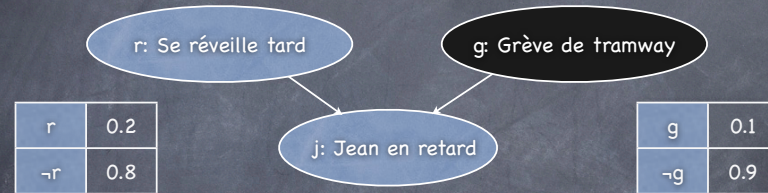
Exemple



Supposons maintenant qu'on sait qu'il y a un grève de tramway. On peut propager cette information pour mettre à jour la probabilité que j .

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----------|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| $\neg j$ | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

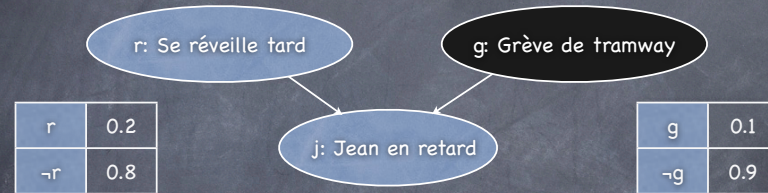
Exemple



$$p(j|g) = p(j|g \wedge r) \cdot p(r) + p(j|g \wedge \neg r) \cdot p(\neg r)$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

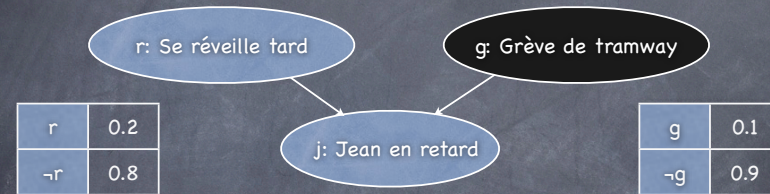
Exemple



$$p(j|g) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.8$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

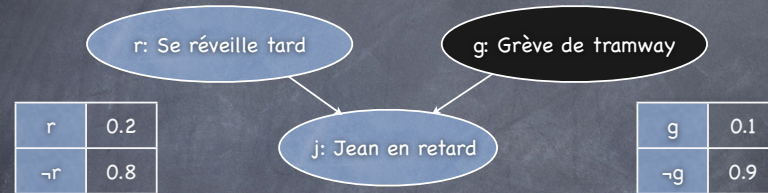
Exemple



$$p(j|g) = 0.18 + 0.64$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

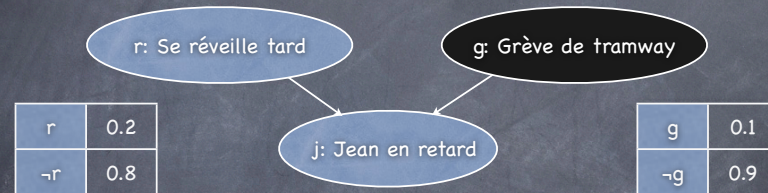
Exemple



$$p(j|g) = 0.82$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

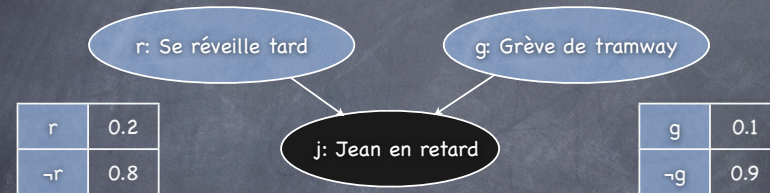
Exemple



Qu'est-ce que savoir que le tramway est en grève et qu'il est plus probable que j nous permet de dire sur la probabilité de r?

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

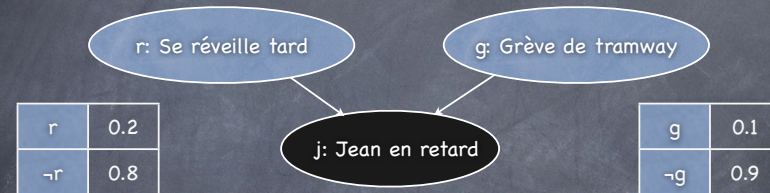
Exemple



Supposons maintenant qu'on sait juste que Jean a du retard. On peut propager cette information aussi

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----------|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| $\neg j$ | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

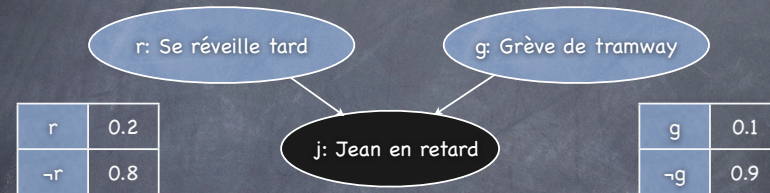
Exemple



Savoir que Jean a du retard augmente la probabilité que Jean s'est réveillé tard et la probabilité qu'il y ait un grève de tramway

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

Exemple

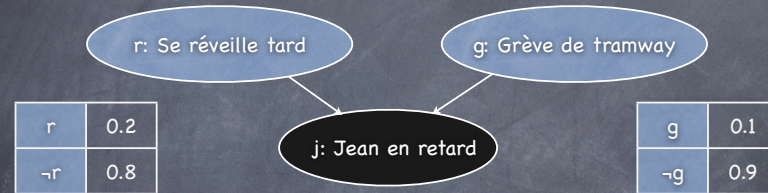


Maintenant, on veut calculer $p(r|j)$ et $p(g|j)$. Pour pouvoir appliquer le règle de Bayes on calcule d'abord $p(j|r)$ et $p(j|g)$.

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

Exemple

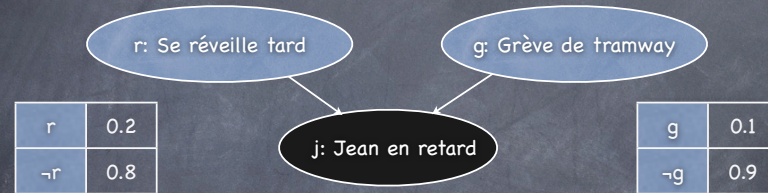


$$p(j|r) = p(j|g \wedge r) \cdot p(g) + p(j|\neg g \wedge r) \cdot p(\neg g)$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

Exemple

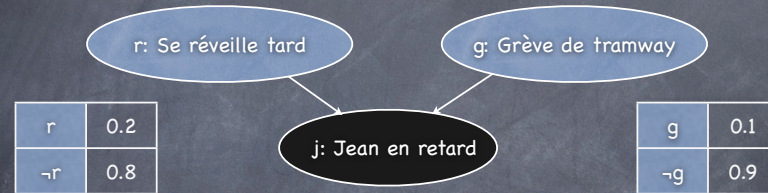


$$p(j|r) = 0.9 \cdot 0.1 + 0.6 \cdot 0.9$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

Exemple

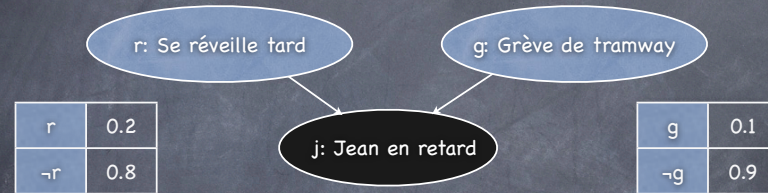


$$p(j|r) = 0.09 + 0.54$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

Exemple



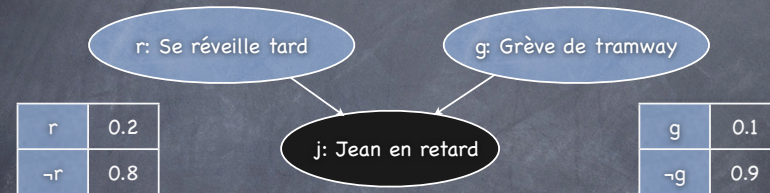
$$p(j|r) = 0.63$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

$$p(j|r) = 0.63$$

Exemple



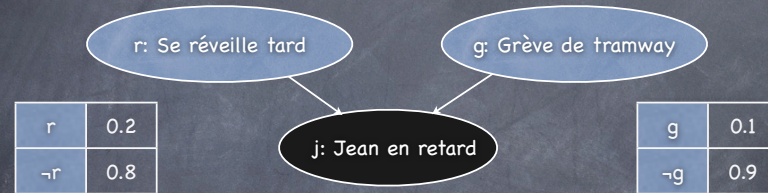
$$p(j|g) = p(j|g \wedge r) \cdot p(r) + p(j|g \wedge \neg r) \cdot p(\neg r)$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

$$p(j|r) = 0.63$$

Exemple



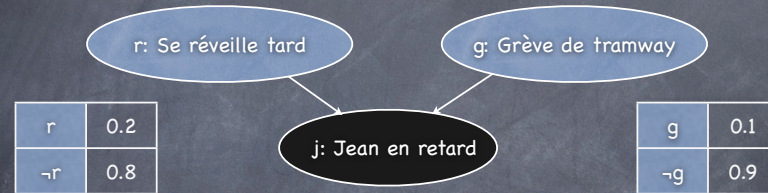
$$p(j|g) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.8 \cdot 0.8$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

$$p(j|r) = 0.63$$

Exemple



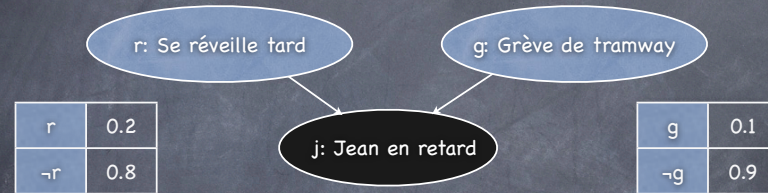
$$p(j|g) = 0.18 + 0.64$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

$$p(j|r) = 0.63$$

Exemple

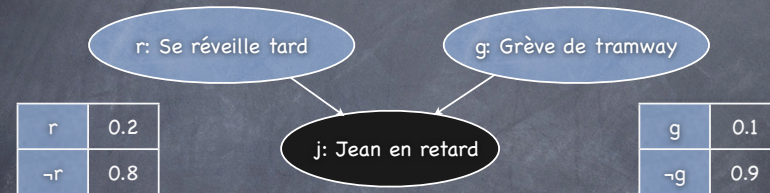


$$p(j|g) = 0.82$$

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$
$$p(j|r) = 0.63$$
$$p(j|g) = 0.82$$

Exemple



Maintenant, on a tout ce qu'il nous faut pour calculer $p(g|j)$ et $p(r|j)$

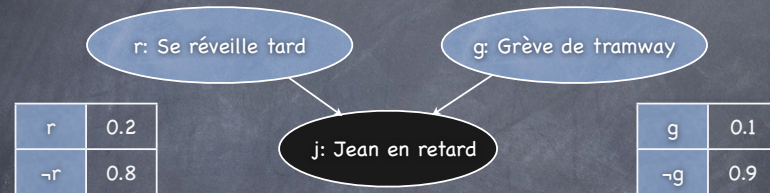
| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----------|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| $\neg j$ | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

$$p(j|r) = 0.63$$

$$p(j|g) = 0.82$$

Exemple



$$p(r|j) = \frac{p(j|r) \cdot p(r)}{p(j)}$$

$$p(g|j) = \frac{p(j|g) \cdot p(g)}{p(j)}$$

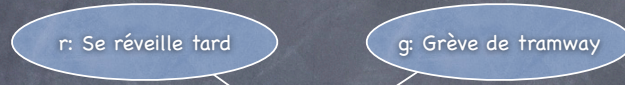
| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

$$p(j|r) = 0.63$$

$$p(j|g) = 0.82$$

Exemple



| | |
|----|-----|
| r | 0.2 |
| ¬r | 0.8 |

| | |
|----|-----|
| g | 0.1 |
| ¬g | 0.9 |

$$p(r|j) = \frac{0.63 \cdot 0.2}{0.206}$$

$$p(g|j) = \frac{0.82 \cdot 0.1}{0.206}$$

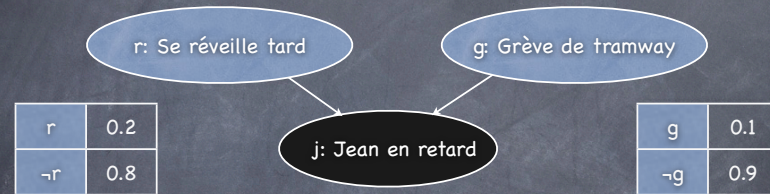
| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

$$p(j|r) = 0.63$$

$$p(j|g) = 0.82$$

Exemple



| | |
|----|-----|
| r | 0.2 |
| ¬r | 0.8 |

| | |
|----|-----|
| g | 0.1 |
| ¬g | 0.9 |

$$p(r|j) = 0.612$$

$$p(g|j) = 0.398$$

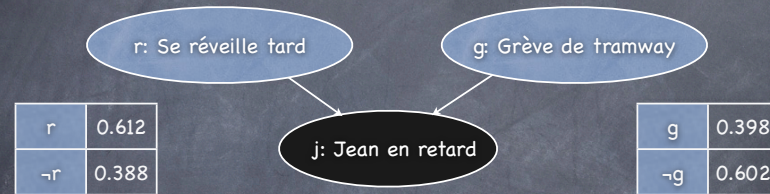
| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

$$p(j|r) = 0.63$$

$$p(j|g) = 0.82$$

Exemple



Finalemnt, on finit avec la distribution de probabilité indiqué ici.

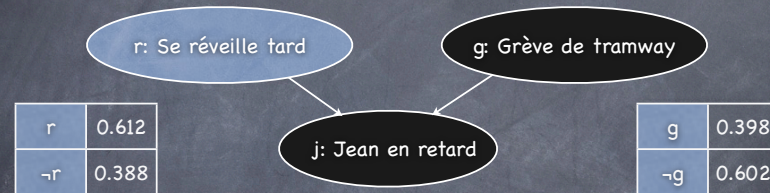
| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| ¬j | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

$$p(j|r) = 0.63$$

$$p(j|g) = 0.82$$

Exemple



Par contre, qu'est-ce qui se passe quand on écoute le radio et on apprend qu'il y a un grève de tramway?

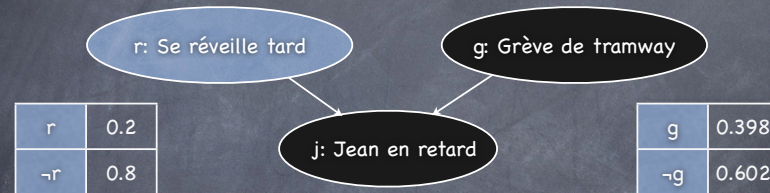
| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----------|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| $\neg j$ | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

$$p(j|r) = 0.63$$

$$p(j|g) = 0.82$$

Exemple



Savoir qu'il y a un grève de tramway explique le retard de Jean. Alors on révisé notre opinion sur l'heure de son réveil vers la probabilité de base

| | $g \wedge r$ | $\neg g \wedge r$ | $g \wedge \neg r$ | $\neg g \wedge \neg r$ |
|----------|--------------|-------------------|-------------------|------------------------|
| j | 0.9 | 0.6 | 0.8 | 0.1 |
| $\neg j$ | 0.1 | 0.4 | 0.2 | 0.9 |

$$p(j) = 0.206$$

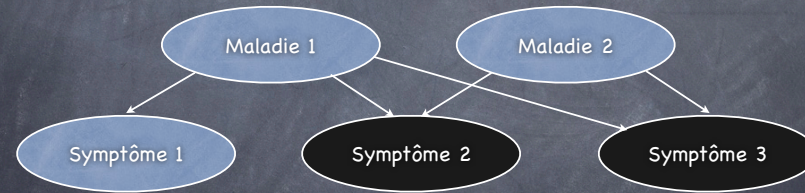
$$p(j|r) = 0.63$$

$$p(j|g) = 0.82$$

Application

Quick Medical Reference

600 Maladies



4000 Symptômes

Conclusions

- Les réseaux Bayesiens sont un méthode avec beaucoup d'applications.
- Leur utilité est qu'ils permettent la combinaison entre l'information fourni par les experts (structure de graphe) et les probabilités déduit des donnés, qui sont difficiles à estimer correctement