

Systemes Experts 4

Calcul de Séquents

Richard.Moot@labri.fr
<http://www.labri.fr/perso/moot/SE>

Remarques

Comment peut-on
trouver une formule
pour F à partir de son
table de vérité?

F	p	q	r
	0	0	0
	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
	1	0	0
	1	0	1
	1	1	0
	1	1	1

Remarques

Comment peut-on
trouver une formule
pour F à partir de son
table de vérité?

F	p	q	r
0	0	0	0
0	0	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1

Remarques

Comment peut-on
trouver une formule
pour F à partir de son
table de vérité?

F	p	q	r
0	0	0	0
0	0	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1

Solution 1:

On regarde les lignes
où F est indiqué
comme étant vraie.

Remarques

$$\neg p \wedge q \wedge \neg r$$

∨

$$p \wedge \neg q \wedge r$$

Ceci nous donne une
formule en forme normale
disjonctive

F	p	q	r
0	0	0	0
0	0	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
0	1	1	1

Remarques

Comment peut-on
trouver une formule
pour F à partir de son
table de vérité?

Solution 2:

On regarde les lignes
où F est indiqué
comme étant fausse.

F	p	q	r
0	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
0	1	1	1

Remarques

$$p \wedge q \wedge r$$

∨

$$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

F	p	q	r
0	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
0	1	1	1

Remarques

¬(

$$p \wedge q \wedge r$$

∨

$$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

)

F	p	q	r
0	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
0	1	1	1

Remarques

$$\neg(p \wedge q \wedge r)$$



F	p	q	r
0	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
0	1	1	1

\wedge

$$\neg(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$



Remarques

$$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$$

\wedge

$$p \vee q \vee r$$



F	p	q	r
0	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
0	1	1	1



Remarques

Ceci nous donne (après lois De Morgan) une formule en forme normale conjonctive

$$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$$

\wedge

$$p \vee q \vee r$$



F	p	q	r
0	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
0	1	1	1



Remarques

Comment peut-on trouver une formule pour F à partir de son table de vérité?

Remarque:

Il y a souvent une solution plus simple!



F	p	q	r
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1



Remarques

$$\neg(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

F	p	q	r
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

$$\vee$$

$$p \wedge q \wedge \neg r$$

Blue arrows point to the 5th and 7th rows of the table.

Remarques

$$\neg p \vee q \vee r$$

F	p	q	r
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

$$\wedge$$

$$\neg p \vee \neg q \vee r$$

Blue arrows point to the 5th and 7th rows of the table.

Remarques

$$\neg p \vee q \vee r$$

$$\wedge$$

$$\neg p \vee \neg q \vee r$$

F	p	q	r
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

Blue arrows point to the 5th and 7th rows of the table.

Remarques

$$\neg p \vee q \vee r$$

$$\wedge$$

$$\neg p \vee \neg q \vee r$$

$$\equiv$$

$$\neg p \vee r$$

F	p	q	r
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

Blue arrows point to the 5th and 7th rows of the table.

Remarques

$$\begin{aligned} & \neg p \vee q \vee r \\ & \wedge \\ & \neg p \vee \neg q \vee r \\ & \equiv \\ & \neg p \vee r \\ & \equiv \\ & p \rightarrow r \end{aligned}$$

F	p	q	r
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

Remarques

On peut utiliser les simplifications suivantes

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \equiv B$$

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv B$$

L'atome A est inutile pour la valeur de vérité de la formule: B est vrai si A est vraie et si A est fausse.

F	p	q	r
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

Remarques

On peut utiliser les simplifications suivantes

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \equiv B$$

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv B$$

Exercice: montre que les deux simplifications sont valides

F	p	q	r
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
0	1	0	0
1	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

Logique des Prédicats

- Les prédicats sont des formule atomiques du forme
 - aime(jean,marie)
 - aime(pierre,sœur_de(jean))
 - travaille(x,microsoft)
- Une proposition est un prédicat qui ne prend aucun argument.

Logique des Prédicats

- Les prédicats sont des formule atomiques du forme

– aime(jean,marie)
– aime(pierre,sœur_de(jean))
– travaille(x,microsoft)

constants

- Une proposition est un prédicat qui ne prend aucun argument.

Logique des Prédicats

- Les prédicats sont des formule atomiques du forme

– aime(jean,marie)
– aime(pierre,sœur_de(jean))
– travaille(x,microsoft)

variables

- Une proposition est un prédicat qui ne prend aucun argument.

Logique des Prédicats

- Les prédicats sont des formule atomiques du forme

– aime(jean,marie)
– aime(pierre,sœur_de(jean))
– travaille(x,microsoft)

termes

- Une proposition est un prédicat qui ne prend aucun argument.

Logique des Prédicats

- Les prédicats sont des formule atomiques du forme

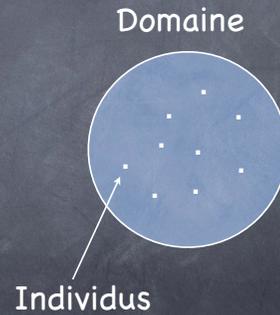
– aime(jean,marie)
– aime(pierre,sœur_de(jean))
– travaille(x,microsoft)

prédicats

- Une proposition est un prédicat qui ne prend aucun argument.

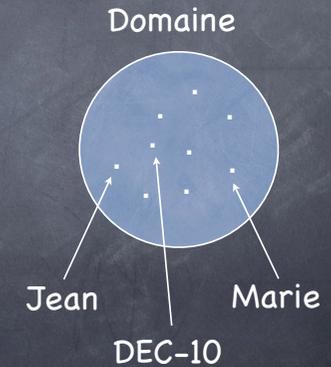
Logique des Prédicats: Interprétation

- On a un domaine d'interprétation avec des individus. Ceci peuvent être des personnes, des machines, des entreprises, du matériel.



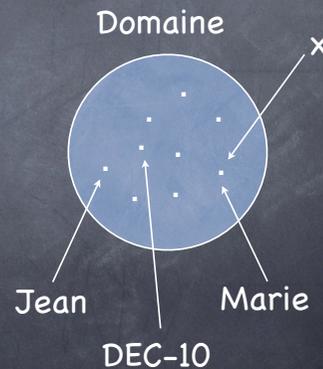
Logique des Prédicats: Interprétation

- Les constants sont des individus qu'on a donné un nom qui est défini par notre modèle.
- Les variables sont plus anonymes, leur valeur n'est pas défini par notre modèle.



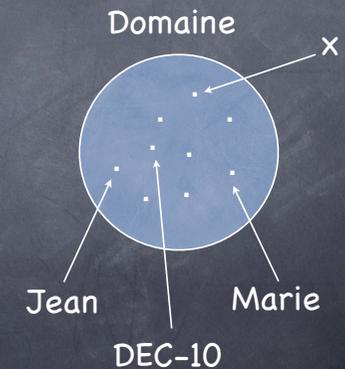
Logique des Prédicats: Interprétation

- Les variables sont plus anonymes, leur valeur n'est pas défini par notre modèle.
- L'interprétation d'une variable peut désigner la même entité qu'un constante (ou une autre variable).



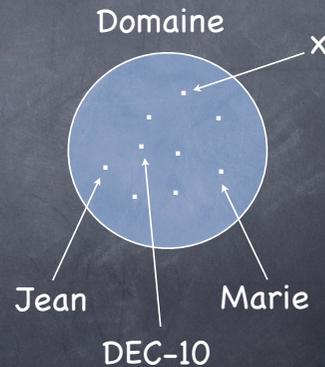
Logique des Prédicats: Interprétation

- Les variables sont plus anonymes, leur valeur n'est pas défini par notre modèle.
- Mais la valeur d'une variable peut aussi être un entité pour lequel notre modèle n'a pas de nom



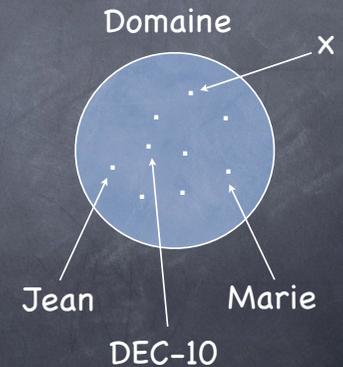
Logique des Prédicats: Interprétation

- Les prédicats sont des fonctions qui prennent des entités de notre modèle comme argument et donnent une valeur de vérité comme résultat.
- Une proposition ne prend aucun argument et donne juste vrai/faux



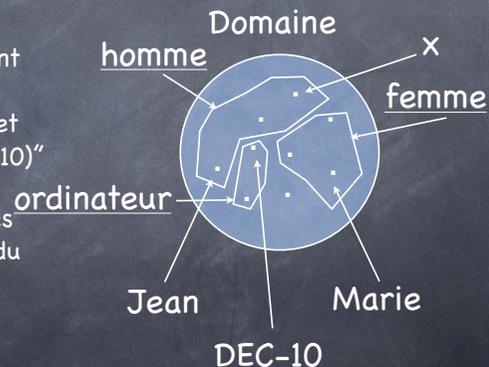
Logique des Prédicats: Interprétation

- Un prédicat avec un seul argument est une propriété des entités. Il dit de chaque entité s'il a cette propriété ou pas.
- Des exemples sont "homme(x)", "femme(Marie)" et "ordinateur(DEC-10)"



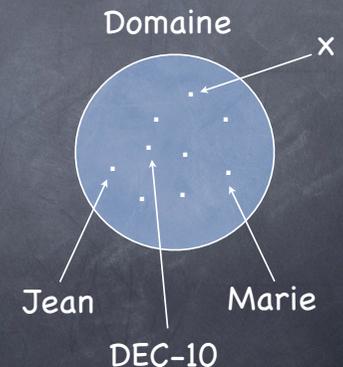
Logique des Prédicats: Interprétation

- Des exemples sont "homme(x)", "femme(Marie)" et "ordinateur(DEC-10)"
- Alors, ce sont des sous-ensembles du domaine



Logique des Prédicats: Interprétation

- Un prédicat avec deux arguments est une relation entre deux entités.
- Des exemples sont "aime(Jean,Marie)", "aime(x,x)" et "possede(Marie,DEC-10)"

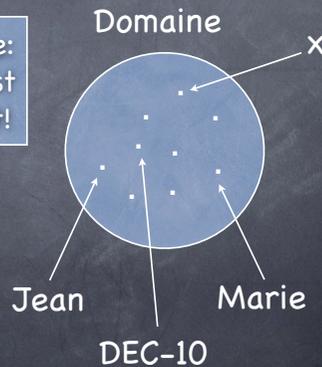


Logique des Prédicats: Interprétation

- Un prédicat avec deux arguments est une relation entre deux entités.

Remarque: l'ordre est important!

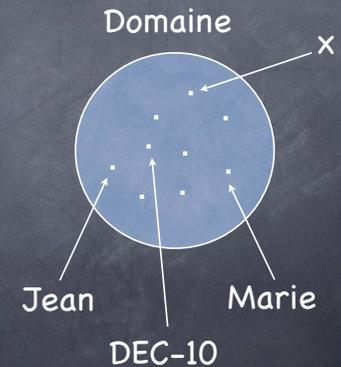
- Des exemples sont "aime(Jean,Marie)", "aime(x,x)", "possede(Marie,DEC-10)"



Logique des Prédicats: Interprétation

- On peut construire des formules complexes comme avant, en utilisant \neg , \wedge , \vee et \rightarrow .

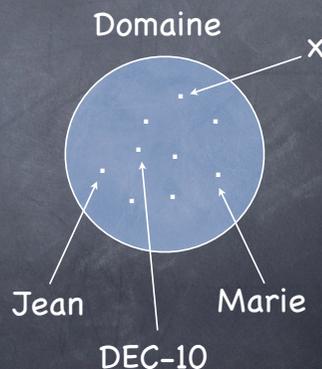
- Eg. aime(Jean,Marie) \wedge possede(Marie,DEC-10) vrai si et seulement si Jean aime Marie et Marie possède un DEC-10.



Logique des Prédicats: Interprétation

- Finalement, si x est un variable la formule $\exists x.[F]$ est vrai si et seulement si il existe un entité x de notre domaine tel que F est vrai pour cet x .

- La formule $\forall x.[F]$ est vrai si et seulement si F est vrai pour chaque entité x .



Logique des Prédicats Variables: libres et liées

- une variable est libre s'il apparaît dans une formule atomique
- dans une formule complexe une variable x est libre si et seulement si il n'apparaît pas dans une sous-formule du forme $\forall x.[F]$ ou $\exists x.[F]$.
- si une variable apparaît dans un tel sous-formule il est liée.

Logique des Prédicats Variables: libres et liées

- alors x est libre dans $f(x)$ et y est libre dans $g(y)$
- x et y sont toutes les deux libres dans $f(x) \wedge g(y)$
- x est libre et y est liée dans $\forall y.[f(x) \wedge g(y)]$
- x et y sont liées dans $\exists x.[\forall y.[f(x) \wedge g(y)]]$

Logique des Prédicats Variables: libres et liées

- x et y sont liées dans $\exists x.[\forall y.[f(x) \wedge g(y)]]$
- Dans $\exists x.[\forall y.[f(x) \wedge g(y)]] \vee h(x)$ il y a un occurrence libre et un occurrence lié de x .
- On a le droit de renommer les variables.

Logique des Prédicats Variables: libres et liées

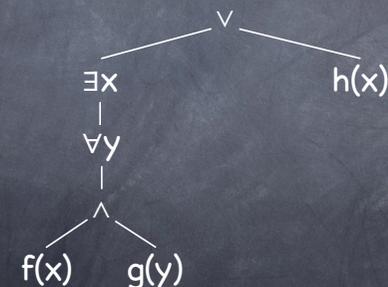
- x et y sont liées dans $\exists x.[\forall y.[f(x) \wedge g(y)]]$
- Dans $\exists x.[\forall y.[f(x) \wedge g(y)]] \vee h(x)$ il y a un occurrence libre et un occurrence lié de x .
- On a le droit de renommer les variables.

lié

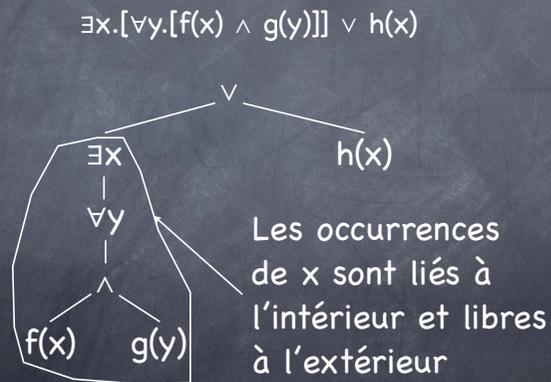
libre

Logique des Prédicats Variables: libres et liées

$$\exists x.[\forall y.[f(x) \wedge g(y)]] \vee h(x)$$



Logique des Prédicats Variables: libres et liées



Calcul des Séquents

- Le calcul des séquents est (encore!) un calcul différent pour trouver des preuves
- Le calcul des séquents est relativement bureaucratique, mais permet d'exploiter les symétries de la logique (eg. entre \wedge et \vee)
- Grâce au calcul des séquents, Gentzen a pu démontrer la cohérence de la logique des prédicats.

Calcul des Séquents

- Contrairement à la résolution, où on avait un seul règle et beaucoup d'axiomes (les clauses), le calcul des séquents a un seul axiome et deux règles pour chaque connecteur.
- Par contre le calcul de séquents s'adapte facilement à la logique des prédicats.
- Mais on verra aussi, comment on peut utiliser la résolution pour la logique de prédicats — grâce au forme normale prénex et au Skolemisation

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

Son interprétation est:
si toutes les formules A sont vraies, au moins une des formules B est vraie aussi.

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

Son interprétation est:
si toutes les formules A sont
vraies, au moins une des
formules B est vraie aussi.

Remarque: l'ordre des A et des B n'est pas
important (pourquoi?)

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

Son interprétation est:
si toutes les formules A sont
vraies, au moins une des
formules B est vraie aussi.

Remarque 2: alors la virgule à gauche est un
"et" et la virgule à droite est un "ou"

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

On appelle les formules à
gauche de la flèche les
hypothèses et les formules à
droite les conclusions

Remarque 2: alors la virgule à gauche est un
"et" et la virgule à droite est un "ou"

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

Pourquoi une conjonction à
gauche et une disjonction à
droite?

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

Pourquoi une conjonction à gauche et une disjonction à droite?

Parce que ça nous permet de donner une formulation plus jolie et symétrique.

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

Pourquoi une conjonction à gauche et une disjonction à droite?

Le plus souvent on utilise des séquents avec juste une seule formule B comme conclusion

Calcul des Séquents

Un séquent s'écrit comme

$$A_1, \dots, A_n \Rightarrow B_1, \dots, B_m$$

Pourquoi une conjonction à gauche et une disjonction à droite?

Les tautologies sont des séquents avec aucun hypothèse et une seule conclusion

Calcul des Séquents

On a un seul axiome et deux règles pour chaque connecteur

$$\frac{}{A, \Gamma \Rightarrow A, \Delta} [Ax]$$

Le règle d'axiome dit que si on a la même formule quelque part à gauche et quelque part à droite alors, on a fini notre démonstration

Calcul des Séquents

On a un seul axiome et deux règles pour chaque connecteur

$$\frac{}{A, \Gamma \Rightarrow A, \Delta} [Ax]$$

Alors, des exemples d'axiomes valides sont:

$$a \Rightarrow a$$

$$b \Rightarrow a, b$$

$$a, b \Rightarrow a$$

$$a, c, e \Rightarrow b, c, d$$

$$a, \neg(b \wedge c), e \Rightarrow c \vee \neg d, a \quad \forall x.[p(x)], p(y) \Rightarrow p(a), \forall x.[p(x)]$$

Calcul des Séquents

On a un seul axiome et deux règles pour chaque connecteur

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \wedge] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [D \wedge]$$

Un règle ou le connecteur apparaît à gauche et un règle ou le connecteur apparaît à droite.

Calcul des Séquents

On a un seul axiome et deux règles pour chaque connecteur

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \wedge] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [D \wedge]$$

Pour la conjonction:

à gauche, la virgule est interprété comme un conjonction,

à droite, par contre il faut démontrer à la fois pour A et pour B.

Calcul des Séquents

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \wedge] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [D \wedge]$$

$$A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \wedge] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [D \wedge]$$

$$\frac{A, B \Rightarrow B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} [G \wedge]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \wedge] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [D \wedge]$$

$$\frac{A, B \Rightarrow B \quad A, B \Rightarrow A}{A, B \Rightarrow B \wedge A} [D \wedge] \quad \frac{A, B \Rightarrow B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} [G \wedge]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \wedge] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [D \wedge]$$

$$\frac{A, B \Rightarrow B \quad \frac{A, B \Rightarrow A}{[Ax]} [D \wedge]}{A, B \Rightarrow B \wedge A} [D \wedge] \quad \frac{A, B \Rightarrow B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} [G \wedge]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \wedge] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [D \wedge]$$

$$\frac{A, B \Rightarrow B \quad \frac{A, B \Rightarrow A}{[Ax]} [D \wedge]}{A, B \Rightarrow B \wedge A} [D \wedge] \quad \frac{A, B \Rightarrow B \wedge A}{A \wedge B \Rightarrow B \wedge A} [G \wedge]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\wedge}] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [D_{\wedge}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\vee}] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D_{\vee}]$$

Pour la disjonction:

à droite, la virgule est interprétée comme une disjonction,

à gauche, par contre il faut démontrer à la fois pour A et pour B.

Calcul des Séquents

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\wedge}] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B, \Delta} [D_{\wedge}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\vee}] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D_{\vee}]$$

Maintenant la symétrie est très claire:
compare $[D_{\wedge}]$ à $[G_{\vee}]$ et $[G_{\wedge}]$ à $[D_{\vee}]$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\wedge}] \quad \frac{\Delta \Rightarrow A, \Gamma \quad \Delta \Rightarrow B, \Gamma}{\Delta \Rightarrow A \wedge B, \Gamma} [D_{\wedge}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\vee}] \quad \frac{\Delta \Rightarrow A, B, \Gamma}{\Delta \Rightarrow A \vee B, \Gamma} [D_{\vee}]$$

Maintenant la symétrie est très claire:
compare $[D_{\wedge}]$ à $[G_{\vee}]$ et $[G_{\wedge}]$ à $[D_{\vee}]$

Encore plus clair quand on renomme Γ et Δ : on inverse gauche et droite et remplace \wedge par \vee

Calcul des Séquents

On a un seul axiome et deux règles pour chaque connecteur

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\vee}] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D_{\vee}]$$

$$A \Rightarrow A \vee B$$

Calcul des Séquents

On a un seul axiome et deux règles pour chaque connecteur

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\vee] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D\vee]$$

$$\frac{A \Rightarrow A, B}{A \Rightarrow A \vee B} [D\vee]$$

Calcul des Séquents

On a un seul axiome et deux règles pour chaque connecteur

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\vee] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D\vee]$$

$$\frac{}{A \Rightarrow A, B} [Ax] \\ \frac{}{A \Rightarrow A \vee B} [D\vee]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\vee] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D\vee]$$

$$(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\vee] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D\vee]$$

$$\frac{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A \vee C \quad (A \wedge B) \vee C \Rightarrow B \vee C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)} [D\wedge]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\vee] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D\vee]$$

$$\frac{\frac{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A, C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A \vee C} [D\vee] \quad \frac{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B, C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B \vee C} [D\vee]}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)} [D\wedge]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\vee] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D\vee]$$

$$\frac{\frac{A \wedge B \Rightarrow A, C \quad C \Rightarrow A, C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A, C} [G\vee] \quad \frac{A \wedge B \Rightarrow B, C \quad C \Rightarrow B, C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B, C} [G\vee]}{\frac{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A \vee C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A \vee C} [D\vee] \quad \frac{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B \vee C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B \vee C} [D\vee]}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)} [D\wedge]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\vee] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D\vee]$$

$$\frac{\frac{A, B \Rightarrow A, C}{A \wedge B \Rightarrow A, C} [Ax] \quad \frac{A, B \Rightarrow B, C}{A \wedge B \Rightarrow B, C} [Ax]}{\frac{A \wedge B \Rightarrow A, C \quad C \Rightarrow A, C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A, C} [G\vee] \quad \frac{A \wedge B \Rightarrow B, C \quad C \Rightarrow B, C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B, C} [G\vee]}{\frac{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A \vee C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A \vee C} [D\vee] \quad \frac{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B \vee C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B \vee C} [D\vee]}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)} [D\wedge]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\vee] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \vee B, \Delta} [D\vee]$$

$$\frac{\frac{A, B \Rightarrow A, C}{A \wedge B \Rightarrow A, C} [Ax] \quad \frac{A, B \Rightarrow B, C}{A \wedge B \Rightarrow B, C} [Ax]}{\frac{A \wedge B \Rightarrow A, C \quad C \Rightarrow A, C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A, C} [G\vee] \quad \frac{A \wedge B \Rightarrow B, C \quad C \Rightarrow B, C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B, C} [G\vee]}{\frac{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A \vee C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow A \vee C} [D\vee] \quad \frac{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B \vee C}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow B \vee C} [D\vee]}{(A \wedge B) \vee C \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)} [D\wedge]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C}{A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C} [D \rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \quad A, B, B \rightarrow C \Rightarrow C}{A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C} [G \rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A} [Ax] \quad A, B, B \rightarrow C \Rightarrow C}{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C} [G \rightarrow]}{A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C} [D \rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A} [Ax] \quad \frac{A, B, B \rightarrow C \Rightarrow B \quad A, B, C \Rightarrow C}{A, B, B \rightarrow C \Rightarrow C} [G \rightarrow]}{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C} [G \rightarrow]}{A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C} [D \rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A} [Ax] \quad \frac{\frac{}{A, B, B \rightarrow C \Rightarrow B} [Ax] \quad A, B, C \Rightarrow C}{A, B, B \rightarrow C \Rightarrow C} [G \rightarrow]}{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C} [G \rightarrow]}{A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C} [D \rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G \rightarrow] \quad \frac{A, \Gamma \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta} [D \rightarrow]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A} [Ax] \quad \frac{\frac{\frac{}{A, B, B \rightarrow C \Rightarrow B} [Ax] \quad A, B, C \Rightarrow C}{A, B, B \rightarrow C \Rightarrow C} [G \rightarrow]}{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow C} [G \rightarrow]}{A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C} [D \rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\neg}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D_{\neg}]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\neg}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D_{\neg}]$$

$$A \Rightarrow \neg\neg A$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\neg}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D_{\neg}]$$

$$\frac{\overline{\neg A, A \Rightarrow}}{A \Rightarrow \neg\neg A} [D_{\neg}]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\neg}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D_{\neg}]$$

$$\frac{A \Rightarrow A}{\neg A, A \Rightarrow} [G_{\neg}]$$
$$\frac{\overline{\neg A, A \Rightarrow}}{A \Rightarrow \neg\neg A} [D_{\neg}]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\neg}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D_{\neg}]$$

$$\frac{\frac{\frac{}{A \Rightarrow A} [Ax]}{\neg A, A \Rightarrow} [G_{\neg}]}{A \Rightarrow \neg \neg A} [D_{\neg}]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\neg}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D_{\neg}]$$

$$\Rightarrow A \vee \neg A$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\neg}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D_{\neg}]$$

$$\frac{\Rightarrow A, \neg A}{\Rightarrow A \vee \neg A} [D_{\vee}]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G_{\neg}]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D_{\neg}]$$

$$\frac{\frac{A \Rightarrow A}{\Rightarrow A, \neg A} [D_{\neg}]}{\Rightarrow A \vee \neg A} [D_{\vee}]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\neg]$$

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \neg A, \Delta} [D\neg]$$

$$\frac{}{A \Rightarrow A} [Ax]$$

$$\frac{}{\Rightarrow A, \neg A} [D\perp]$$

$$\frac{}{\Rightarrow A \vee \neg A} [D\vee]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\perp]$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta} [DT]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\perp]$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta} [DT]$$

$$\neg A \Rightarrow A \rightarrow \perp$$

$$A \rightarrow \perp \Rightarrow \neg A$$

Calcul des Séquents

$$\frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\perp]$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta} [DT]$$

$$\frac{A, \neg A \Rightarrow \perp}{\neg A \Rightarrow A \rightarrow \perp} [D\rightarrow]$$

$$A \rightarrow \perp \Rightarrow \neg A$$

Calcul des Séquents

$$\frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\perp]$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta} [DT]$$

$$\frac{A \Rightarrow A, \perp}{A, \neg A \Rightarrow \perp} [G\neg]$$

$$\frac{}{\neg A \Rightarrow A \rightarrow \perp} [D\rightarrow]$$

$$A \rightarrow \perp \Rightarrow \neg A$$

Calcul des Séquents

$$\frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\perp]$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta} [DT]$$

$$\frac{}{A \Rightarrow A, \perp} [Ax]$$

$$\frac{}{A, \neg A \Rightarrow \perp} [G\neg]$$

$$\frac{}{\neg A \Rightarrow A \rightarrow \perp} [D\rightarrow]$$

$$A \rightarrow \perp \Rightarrow \neg A$$

Calcul des Séquents

$$\frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\perp]$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta} [DT]$$

$$\frac{}{A \Rightarrow A, \perp} [Ax]$$

$$\frac{}{A, \neg A \Rightarrow \perp} [G\neg]$$

$$\frac{}{\neg A \Rightarrow A \rightarrow \perp} [D\rightarrow]$$

$$\frac{A, A \rightarrow \perp \Rightarrow}{A \rightarrow \perp \Rightarrow \neg A} [D\neg]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\perp]$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta} [DT]$$

$$\frac{}{A \Rightarrow A, \perp} [Ax]$$

$$\frac{}{A, \neg A \Rightarrow \perp} [G\neg]$$

$$\frac{}{\neg A \Rightarrow A \rightarrow \perp} [D\rightarrow]$$

$$\frac{A, A \rightarrow \perp \Rightarrow A \quad A, \perp \Rightarrow}{A, A \rightarrow \perp \Rightarrow} [R\rightarrow]$$

$$\frac{A, A \rightarrow \perp \Rightarrow}{A \rightarrow \perp \Rightarrow \neg A} [D\neg]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\perp]$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta} [DT]$$

$$\frac{\frac{}{A \Rightarrow A, \perp} [Ax] \quad \frac{}{A, \neg A \Rightarrow \perp} [G\neg]}{\neg A \Rightarrow A \rightarrow \perp} [D\rightarrow] \quad \frac{\frac{}{A, A \rightarrow \perp \Rightarrow A} [Ax] \quad \frac{}{A, \perp \Rightarrow} [R\rightarrow]}{A \rightarrow \perp \Rightarrow \neg A} [D\neg]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\perp]$$

$$\frac{}{\Gamma \Rightarrow \top, \Delta} [DT]$$

$$\frac{\frac{}{A \Rightarrow A, \perp} [Ax] \quad \frac{}{A, \neg A \Rightarrow \perp} [G\neg]}{\neg A \Rightarrow A \rightarrow \perp} [D\rightarrow] \quad \frac{\frac{}{A, A \rightarrow \perp \Rightarrow A} [Ax] \quad \frac{}{A, \perp \Rightarrow} [G\perp]}{A \rightarrow \perp \Rightarrow \neg A} [D\neg]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\exists x.[p(x)] \Rightarrow \forall x.[p(x)]$$

$$\forall x.[p(x)] \Rightarrow \exists x.[p(x)]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]}{\exists x.[p(x)] \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [G\exists]$$

$$\forall x.[p(x)] \Rightarrow \exists x.[p(x)]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{p(y) \Rightarrow p(y)}{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [D\forall] \quad \frac{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]}{\exists x.[p(x)] \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [G\exists]$$

$$\frac{\forall x.[p(x)] \Rightarrow \exists x.[p(x)]}{\forall x.[p(x)] \Rightarrow \exists x.[p(x)]} [G\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{p(y) \Rightarrow p(y)}{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [D\forall] \quad \frac{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]}{\exists x.[p(x)] \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [G\exists]$$

$$\frac{\forall x.[p(x)] \Rightarrow \exists x.[p(x)]}{\forall x.[p(x)] \Rightarrow \exists x.[p(x)]} [G\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{p(y) \Rightarrow p(y)}{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [D\forall] \quad \frac{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]}{\exists x.[p(x)] \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [G\exists]$$

Occurrence libre de y !

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{p(y) \Rightarrow p(z)}{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [D\forall] \quad \frac{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]}{\exists x.[p(x)] \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [G\exists]$$

Maintenant l'application de [D\forall] est correct

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{p(y) \Rightarrow p(z)}{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [D\forall] \quad \frac{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]}{\exists x.[p(x)] \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [G\exists]$$

Maintenant l'application de $[D\forall]$ est correct
Mais le tentative de preuve échoue: on ne finit pas avec une axiome

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{p(y) \Rightarrow p(z)}{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [D\forall] \quad \frac{\forall x.[p(x)] \Rightarrow p(y), \exists x.[p(x)]}{\forall x.[p(x)] \Rightarrow \exists x.[p(x)]} [D\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{p(y) \Rightarrow p(z)}{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [D\forall] \quad \frac{p(y), \forall x.[p(x)] \Rightarrow p(y), \exists x.[p(x)]}{\forall x.[p(x)] \Rightarrow p(y), \exists x.[p(x)]} [G\forall]$$

$$\frac{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]}{\exists x.[p(x)] \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [G\exists] \quad \frac{\forall x.[p(x)] \Rightarrow p(y), \exists x.[p(x)]}{\forall x.[p(x)] \Rightarrow \exists x.[p(x)]} [D\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{p(y) \Rightarrow p(z)}{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [D\forall] \quad \frac{p(y), \forall x.[p(x)] \Rightarrow p(y), \exists x.[p(x)]}{\forall x.[p(x)] \Rightarrow p(y), \exists x.[p(x)]} [G\forall]$$

$$\frac{p(y) \Rightarrow \forall x.[p(x)]}{\exists x.[p(x)] \Rightarrow \forall x.[p(x)]} [G\exists] \quad \frac{\forall x.[p(x)] \Rightarrow p(y), \exists x.[p(x)]}{\forall x.[p(x)] \Rightarrow \exists x.[p(x)]} [D\exists]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\forall x.[p(x)] \rightarrow q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{\Rightarrow \forall x.[p(x)], \exists x.[p(x) \rightarrow q] \quad q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)] \rightarrow q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L\rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{\Rightarrow p(y), \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)], \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [A\forall] \quad \frac{q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)] \rightarrow q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L\rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{\Rightarrow p(y), p(y) \rightarrow q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow p(y), \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [D\exists] \quad \frac{q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)], \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [A\forall] \quad \frac{q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)] \rightarrow q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L\rightarrow]$$

Calcul des Séquents

$$\frac{A[x:=t], \forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\forall] \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=y], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \forall x.[A], \Delta} [D\forall]^*$$

$$\frac{A[x:=y], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x.[A], \Gamma \Rightarrow \Delta} [G\exists]^* \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[x:=t], \exists x.[A], \Delta}{\Gamma \Rightarrow \exists x.[A], \Delta} [D\exists]$$

*: pas d'occurrences libres de y dans Γ ou Δ

$$\frac{\frac{\frac{p(y) \Rightarrow p(y), q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{\Rightarrow p(y), p(y) \rightarrow q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [A_x] [R \rightarrow]}{\Rightarrow p(y), \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [D \exists]}{\Rightarrow \forall x.[p(x)], \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [D \forall] \quad \frac{p(a), q \Rightarrow q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]}{q \Rightarrow p(a) \rightarrow q, \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L \rightarrow]}{q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L \rightarrow]}{\forall x.[p(x)] \rightarrow q \Rightarrow \exists x.[p(x) \rightarrow q]} [L \rightarrow]$$

Résolution

- La résolution pour le calcul propositionnel s'applique aux clauses du forme $q_1 \wedge \dots \wedge q_n \rightarrow p$
- La résolution pour le calcul des prédicats s'applique aux clauses du forme $\forall x_1, \dots, x_n. [q_1 \wedge \dots \wedge q_n \rightarrow p]$
- On va travailler en deux étapes: d'abord on bouge les quantificateurs (\forall et \exists) vers l'extérieur, après on élimine les quantificateurs existentiels (\exists).

Calcul des Séquents Forme Normale Prénexe

- Une formule est en forme normale prénexe si et seulement si les quantificateurs sont tous à l'extérieur des autres connecteurs.
- On peut transformer chaque formule en forme normale prénexe.

Calcul des Séquents Forme Normale Prénexe

- On peut transformer chaque formule en forme normale prénexe.
- Étape 1: on renomme chaque variable qui a des occurrences libres et des occurrences liés, on renomme aussi chaque variable qui a plusieurs occurrences du forme $\forall x$ ou $\exists x$

$$(\forall x.[p(x)] \rightarrow \exists x.[q(x)]) \wedge r(x)$$

Calcul des Séquents Forme Normale Prénex

- On peut transformer chaque formule en forme normale prénexe.
- Etape 1: on renomme chaque variable qui a des occurrences libres et des occurrences liés, on renomme aussi chaque variable qui a plusieurs occurrences du forme $\forall x$ ou $\exists x$

$$(\forall x.[p(x)] \rightarrow \exists x.[q(x)]) \wedge r(z)$$

Calcul des Séquents Forme Normale Prénex

- On peut transformer chaque formule en forme normale prénexe.
- Etape 1: on renomme chaque variable qui a des occurrences libres et des occurrences liés, on renomme aussi chaque variable qui a plusieurs occurrences du forme $\forall x$ ou $\exists x$

$$(\forall x.[p(x)] \rightarrow \exists y.[q(y)]) \wedge r(z)$$

Calcul des Séquents Forme Normale Prénex

- Etape 1: on renomme chaque variable qui a des occurrences libres et des occurrences liés, on renomme aussi chaque variable qui a plusieurs occurrences du forme $\forall x$ ou $\exists x$
- Etape 2: on utilise les équivalences suivants pour bouger les quantificateurs vers l'extérieur de la formule.

$$(\forall x.[p(x)] \rightarrow \exists y.[q(y)]) \wedge r(z)$$

Lois De Morgan

$$\neg \forall x.F \equiv \exists x.\neg F$$

$$\neg \exists x.F \equiv \forall x.\neg F$$

Forme Prénex

$$\textcircled{1} \forall x.[F] \wedge G \equiv \forall x.[F \wedge G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{2} \forall x.[F] \vee G \equiv \forall x.[F \vee G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{3} \forall x.[F] \rightarrow G \equiv \exists x.[F \rightarrow G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{4} G \rightarrow \forall x.[F] \equiv \forall x.[G \rightarrow F] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

Forme Prénex

$$\textcircled{1} \exists x.[F] \wedge G \equiv \exists x.[F \wedge G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{2} \exists x.[F] \vee G \equiv \exists x.[F \vee G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{3} \exists x.[F] \rightarrow G \equiv \forall x.[F \rightarrow G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{4} G \rightarrow \exists x.[F] \equiv \exists x.[G \rightarrow F] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

Forme Prénex

$$\textcircled{1} \exists x.[F] \wedge G \equiv \exists x.[F \wedge G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{2} \exists x.[F] \vee G \equiv \exists x.[F \vee G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{3} \exists x.[F] \rightarrow G \equiv \forall x.[F \rightarrow G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{4} G \rightarrow \exists x.[F] \equiv \exists x.[G \rightarrow F] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$(\forall x.[p(x)] \rightarrow \exists y.[q(y)]) \wedge r(z)$$

Forme Prénex

$$\textcircled{1} \exists x.[F] \wedge G \equiv \exists x.[F \wedge G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{2} \exists x.[F] \vee G \equiv \exists x.[F \vee G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{3} \exists x.[F] \rightarrow G \equiv \forall x.[F \rightarrow G] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\textcircled{4} G \rightarrow \exists x.[F] \equiv \exists x.[G \rightarrow F] \quad \text{Pas d'occurrences de } x \text{ en } G$$

$$\exists y.[(\forall x.[p(x)] \rightarrow q(y))] \wedge r(z)$$

Forme Prénex

④ $\exists x.[F] \wedge G \equiv \exists x.[F \wedge G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\exists x.[F] \vee G \equiv \exists x.[F \vee G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\exists x.[F] \rightarrow G \equiv \forall x.[F \rightarrow G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $G \rightarrow \exists x.[F] \equiv \exists x.[G \rightarrow F]$ Pas d'occurrences de x en G

$$\exists y.[(\forall x.[p(x) \rightarrow q(y)] \wedge r(z))]$$

Forme Prénex

④ $\forall x.[F] \wedge G \equiv \forall x.[F \wedge G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\forall x.[F] \vee G \equiv \forall x.[F \vee G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\forall x.[F] \rightarrow G \equiv \exists x.[F \rightarrow G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $G \rightarrow \forall x.[F] \equiv \forall x.[G \rightarrow F]$ Pas d'occurrences de x en G

$$\exists y.[\exists x.[(p(x) \rightarrow q(y))] \wedge r(z)]$$

Forme Prénex

④ $\forall x.[F] \wedge G \equiv \forall x.[F \wedge G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\forall x.[F] \vee G \equiv \forall x.[F \vee G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $\forall x.[F] \rightarrow G \equiv \exists x.[F \rightarrow G]$ Pas d'occurrences de x en G

④ $G \rightarrow \forall x.[F] \equiv \forall x.[G \rightarrow F]$ Pas d'occurrences de x en G

$$\exists y.[\exists x.[(p(x) \rightarrow q(y)) \wedge r(z)]]$$

Skolemisation

④ On a vu qu'on peut transformer chaque formule en une formule équivalente qui a les quantificateurs à l'extérieur

④ Maintenant on veut démontrer qu'on peut éliminer les quantificateurs existentiels \exists en gardant que les quantificateurs universels \forall .

④ Cette procédure, s'appelle Skolemisation, d'après son inventeur Thoralf Skolem.

Skolemisation

- L'idée est très simple. On peut remplacer un quantificateur existentiel par un nouveau constante.
- Alors on remplace x par a et y par b

$$\exists y. [\exists x. [(p(x) \rightarrow q(y)) \wedge r(z)]]$$

Skolemisation

- L'idée est très simple. On peut remplacer un quantificateur existentiel par un nouveau constante.
- Alors on remplace x par a et y par b
- En effet, on donne un nouveau nom à l'entité dont on sait qu'il doit exister. Ceci n'est pas trop différent des pratiques journalistiques: "Deep Throat", "Il Mostro" et "Zodiac Killer"

$$(p(a) \rightarrow q(b)) \wedge r(z)$$

Skolemisation

- Mais qu'est-ce qu'on fait dans le cas où l'existentiel est dans le portée d'un universel?
- Regardons l'exemple en bas.
- Si on remplace la formule par $\forall x. [p(x,a)]$ on change le sens de la formule (pourquoi?)

$$\forall x. [\exists y. [p(x,y)]]$$

Skolemisation

- Si on remplace la formule par $\forall x. [p(x,a)]$ on change le sens de la formule (pourquoi?)
- Si on interprète p comme "père de" la formule en bas signifie que chacun a un père.
- Le formule $\forall x. [p(x,a)]$ signifie que le constante "a" est le père de tout le monde.

$$\forall x. [\exists y. [p(x,y)]]$$

Skolemisation

- La formule $\forall x.[p(x,a)]$ signifie que le constante "a" est le père de tout le monde.
- L'idée de Skolem est de remplacer l'existentiel par une fonction avec tout les universels avant l'existentiel comme arguments.
- Alors on finit avec les résultat en bas à droite. Un peut voir la fonction f dans ce cas comme la fonction "pere_de(x)"

$$\forall x.[\exists y.[p(x,y)]]$$

$$\forall x.[p(x,f(x))]$$

Clauses de Horn

- Comme dans le cas propositionnel, ce n'est pas toujours possible de transformer une formule en clause de Horn
- Les clauses de Horn pour la logique du prédicats sont à la base de Prolog.