DEA Systèmes intelligents et applications
Université d'Artois

Centre de Recherche en Informatique de Lens

Stage de DEA

Décembre 2003 - Juin 2004

Fusion itérée de croyances

Olivier Gauwin

Directeurs de stage : Pierre Marquis
Sébastien Konieczny

Table des matières

Introduction

Rares sont les connaissances n'ayant jamais été remises en cause depuis l'avènement des sciences. Ainsi l'acquisition et l'assimilation d'informations contredisant nos croyances est pour chaque être humain un processus naturel.

Dans le cadre d'une logique formelle, cela pose de nombreux problèmes. En effet, le raisonnement et l'évolution des connaissances en logique classique sont basés sur le processus d'inférence. Or ce dernier ne tolère pas les informations contradictoires. Ainsi si une nouvelle information insérée dans une base de croyances en contredit une autre, tout (et donc n'importe quoi) pourra être déduit de cette dernière base.

Pour surmonter ce problème, les logiques dites « non monotones » ont été développées. Le problème de la révision de croyances abordé ici est un des aspects des logiques non monotones, comme l'a indiqué Peter Gärdenfors [Gär90] : « Belief revision and nonmonotonic logic are two sides of the same coin ». La révision de croyances vise à trouver des opérateurs de révision ayant les meilleures propriétés possibles pour incorporer une nouvelle information dans une base de croyances. En logique, la révision de croyances a été axiomatisée par Alchourrón, Gärdenfors et Makinson. Cette caractérisation des opérateurs de révision s'est imposée, et est désormais connue sous le nom de cadre AGM [AGM85, Gär88].

Lorsque la source des croyances n'est pas unique, le problème est de définir une base de croyances tenant compte « au mieux » des croyances de chaque agent. On parle alors de fusion de croyances. Le problème de la fusion se retrouve essentiellement dans les systèmes multi-agents. Plusieurs cadres ont été définis pour caractériser la fusion de croyances, comme par exemple la fusion contrainte. L'objectif de telles caractérisations est de capturer les propriétés souhaitables des opérateurs de fusion.

Fusion itérée

Traditionnellement, la fusion de croyances opère sur un ensemble de bases de croyances (appelé profil de croyances), et forme une nouvelle base de croyances à partir de cet ensemble. L'objet de ce stage de DEA est d'étudier des opérateurs de fusion particuliers, que nous appellons « opérateurs de fusion itérée ».

Comme tout opérateur de fusion de croyances, un opérateur de fusion itérée opère sur un profil de croyances et produit une nouvelle base à partir de ce profil. L'originalité est qu'ici nous utilisons un processus itératif dont le point fixe définit cette nouvelle base. La fusion itérée nécessite la donnée de deux opérateurs : un opérateur de révision et un opérateur de fusion (que nous appellons « opérateur d'agrégation » afin de le distinguer de l'opérateur de fusion itérée).

On distingue deux types de fusion itérée.

La fusion itérée « crédule » est obtenue par le processus suivant. On effectue une première fusion via l'opérateur d'agrégation. On obtient ainsi une nouvelle base de croyances. Puis on révise chaque base du profil de croyances par cette nouvelle base grâce à l'opérateur de révision. On obtient ainsi un nouveau profil de croyances. Tout ceci constitue une étape de l'itération. La fusion itérée crédule consiste à itérer ce processus jusqu'à obtenir un point fixe sur le profil de croyances, c'est-à-dire deux itérations successives aboutissant au même profil de croyances. Un point fixe sur le résultat de l'agrégation est alors également atteint. C'est ce résultat de l'agrégation au point fixe qui constitue le résultat de la fusion itérée crédule.

La fusion itérée « sceptique » résulte d'un processus similaire. La seule différence se situe à l'étape de révision. Dans la fusion itérée crédule, à chaque itération, chaque base du profil de croyances est révisée par le résultat de l'agrégation précédente. A l'inverse, dans la fusion itérée sceptique, on révise le résultat de l'agrégation précédente par l'ancienne base de croyances pour former la nouvelle.

Les comportements de ces deux types de fusion sont donc à première vue fort différents. Dans la fusion itérée sceptique, chaque agent donne davantage d'importance à ses anciennes croyances qu'aux croyances mises en commun lors de l'agrégation. En effet celui-ci révise les croyances agrégées par son ancienne base de croyances. Inversement, la fusion itérée crédule accorde plus d'importance aux croyances issues de l'agrégation qu'à ses anciennes croyances. Ces comportements justifient les dénominations « crédule » et « sceptique ».

L'intérêt de cette nouvelle famille d'opérateurs de fusion apparait ici clairement. De part leur définition itérative, on voit que ce type de fusion peut se rapprocher de l'idée de négociation entre agents, chaque agent révisant à chaque itération ses croyances en fonction des croyances de l'ensemble des agents. En comparaison, un opérateur de fusion classique effectue simplement la fusion des croyances de chaque agent sans que les croyances de ces agents soient modifiées. On peut ainsi espérer trouver certaines propriétés intéressantes pour la fusion itérée qui ne seraient pas vérifiées par tous les opérateurs de fusion.

L'objet de ce stage de DEA est l'étude des opérateurs de fusion itérée. Cette étude commence par le problème de la définition de tels opérateurs, c'est-à-dire l'existence d'un point fixe pour l'itération. Cela passe par l'étude des propriétés de monotonie et du nombre d'itérations pour atteindre un point fixe. D'autres propriétés sont également étudiées. En particulier, les propriétés de fusion contrainte, l'apparition de consensus parmi les agents, la caractérisation des opérateurs de fusion itérée et la comparaison en terme de prudence de ces opérateurs par rapport aux opérateurs de fusion contrainte usuels seront abordés. Cette étude comporte également une approche expérimentale. Cela permet dans notre cas de tester la convergence du processus d'itération ainsi que certaines conjectures pour de nombreuses instances, et de générer quelques statistiques.

Plan du rapport

Ce rapport est structuré en trois parties.

La première partie présente les travaux de référence sur la révision AGM et la fusion contrainte. En effet, l'étude présentée ici s'inscrit pleinement dans le cadre de ces travaux et en utilise les résultats. D'autres cadres pour la révision et la fusion de croyances sont présentés en annexe.

Les parties deux et trois concernent l'étude, respectivement, de la fusion itérée crédule et de la fusion itérée sceptique. Pour chacun de ces types de fusion itérée, nous définissons formellement ces opérateurs, en étudions les propriétés de monotonie et de convergence. Enfin, nous tentons de les caractériser, en utilisant notamment la notion de prudence et les postulats de fusion contrainte. Nous donnerons également dans chaque cas les résultats expérimentaux obtenus.

Préliminaires formels

Ensembles et relations

Etant donné un ensemble E, on définit les entités suivantes. $\mathcal{P}$(E) est l'ensemble des sous-ensembles de E. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de $E \times E$. Celle-ci est dite :
- *réflexive* si pour tout x de E, $x \mathcal{R} x$.
- *transitive* si pour tout x,y,z de E, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, alors $x \mathcal{R} z$.
- *totale* si pout tout x,y de E, on a $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$.
- *partielle* si elle n'est pas totale.
- *symétrique* si pout tout x,y de E, si $x \mathcal{R} y$ alors $y \mathcal{R} x$.
- *anti-symétrique* si pout tout x,y de E, si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$ alors $x = y$.
- *modulaire* si pour tout x,y,z de E, si $x \leq y$ alors $x \leq z$ ou $z \leq y$.

La fermeture transitive d'une relation $\mathcal{R}$ sera notée $\mathcal{R}^+$.

Un *pré-ordre* est une relation réflexive et transitive sur $E \times E$. Une *relation d'équivalence* est une relation réflexive, transitive et symétrique sur $E \times E$. Un *ordre* est une relation réflexive, transitive et anti-symétrique sur $E \times E$. Un *ordre strict* est une relation irréflexive et transitive sur $E \times E$.

Etant donné un pré-ordre $\leq$ défini sur $E \times E$, on définit les entités suivantes. L'ordre strict $<$ associé à $\leq$ est défini par : $x < y$ si $x \leq y$ et $y \not\leq x$. On définit également la relation d'équivalence $\simeq$ par : $x \simeq y$ si $x \leq y$ et $y \leq x$. Soit E' un sous-ensemble de E, on définit l'ensemble des éléments minimaux de E' pour $\leq$ par : $\min(E', \leq) = \{x \in E' \ : \ \nexists y \in E' \ y < x\}$.

Logique

Soit $\mathcal{L}$ le langage propositionnel construit à partir d'un ensemble d'atomes $\mathcal{A}$ et les connecteurs usuels de la logique classique : $\neg$ (négation), $\wedge$ (conjonction), $\vee$ (disjonction), $\rightarrow$ (implication matérielle), $\Leftrightarrow$ (équivalence) et $\oplus$ (ou exclusif). On note $\perp$ la contradiction et $\top$ la tautologie.

L'opération de conséquence est définie comme suit. Une *opération de conséquence* sur un langage $\mathcal{L}$ est une fonction $Cn : \mathcal{P}(\mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$ vérifiant :

1. $A \subseteq Cn(A)$
2. Si $A \subseteq B$, alors $Cn(A) \subseteq Cn(B)$
3. $Cn(A) = Cn(Cn(A))$

On suppose dans la suite du document qu'une telle opération de conséquence vérifie les propriétés suivantes :

1. Cn contient les conséquences logiques classiques
2. Si $\varphi \in Cn(A)$ alors il existe un sous-ensemble fini A' de A tel que $\varphi \in Cn(A')$ (compacité)

3. $\varphi' \in Cn(A \cup \{\varphi\})$ si et seulement si $\varphi \rightarrow \varphi' \in Cn(A)$

La notation $A \models \varphi$ désigne la propriété $\varphi \in Cn(A)$.

Une base de croyances K est un ensemble de propositions de $\mathcal{L}$. Une base de croyances est dite *close déductivement* si $K = Cn(K)$. Cette propriété est supposée vérifiée pour toutes les bases de croyances évoquées dans ce document. De telles bases de croyances sont également appelées *théories*. La base de croyances triviale $K_\perp$ est la base contenant toutes les formules de $\mathcal{L}$. $K_\top$ désigne la base de croyances contenant uniquement les tautologies. L'ensemble des bases de croyances est noté $\mathcal{K}$.

En logique propositionnelle finie, toute base de croyances K est équivalente à une formule φ, cette formule étant la conjonction des formules de K. On appelle *interprétation* une fonction de $\mathcal{A}$ dans $\{0,1\}$. L'ensemble des interprétations est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation ω est un *modèle* d'une formule propositionnelle φ si ω rend φ vraie étant donné la sémantique usuelle attribuée aux connecteurs. Si ω est un modèle de φ, on note $\omega \models \varphi$. Un *contre-modèle* est une interprétation qui n'est pas un modèle de la formule. L'ensemble des modèles de φ est noté $[\![\varphi]\!]$. Une formule est dite cohérente si elle admet au moins un modèle.

Profil de croyances

Un profil de croyances $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est un multi-ensemble fini et non vide de bases de croyances.

La conjonction des bases de croyances de Ψ est notée $\bigwedge \Psi$, c'est-à-dire : $\bigwedge \Psi = \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$. De plus, on note $\Psi \wedge \varphi$ la base de croyances $\bigwedge \Psi \wedge \varphi$, si φ est une base de croyances. De même, on note pour la disjonction : $\bigvee \Psi = \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$.

$\Psi_1 \sqcup \Psi_2$ désigne l'union des multi-ensembles Ψ_1 et Ψ_2. On accepte les abus de notation suivants : $\Psi \sqcup \varphi$ désigne $\Psi \sqcup \{\varphi\}$ et $\varphi \sqcup \varphi'$ désigne $\{\varphi\} \sqcup \{\varphi'\}$.

Un profil de croyances Ψ est dit cohérent si et seulement si $\bigwedge \Psi$ est cohérent. On notera $[\![\ \Psi]\!]$ l'ensemble $[\![\ \bigwedge \Psi]\!]$, et $I \models \Psi$ signifiera $I \in [\![\ \Psi]\!]$.

Soient Ψ_1 et Ψ_2 deux profils de croyances. Ψ_1 et Ψ_2 sont dits équivalents, noté $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$, si et seulement si il existe une bijection f de $\Psi_1 = \{\varphi_1^1, \ldots, \varphi_1^n\}$ vers $\Psi_2 = \{\varphi_2^1, \ldots, \varphi_2^m\}$ tel que $\models f(\varphi) \Leftrightarrow \varphi$. En particulier, si $\Psi_1 \Leftrightarrow \Psi_2$ alors $m = n$.

On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de croyances cohérentes, et $\mathcal{S}$ l'ensemble des profils de croyances.

Première partie

Révision AGM et fusion contrainte

1 Révision AGM

La révision de croyances a pour objectif de proposer des mécanismes pour incorporer une nouvelle information dans une base de croyances. Le cadre de référence pour la révision de croyances est le cadre AGM (pour Alchourrón, Gärdenfors et Makinson). Celui-ci a permis de mettre en évidence un ensemble de propriétés sur les opérateurs de révision, et ainsi de faire le lien entre les différentes méthodes déjà proposées pour la révision, au travers de théorèmes de représentation.

Comme nous l'avons vu, la fusion itérée utilise un opérateur de révision. Dans le cadre de ce travail, nous imposerons que cet opérateur vérifie les postulats AGM. D'autres cadres relatifs à la révision de croyances sont également présentés en annexe de ce document.

1.1 Expansion-révision-contraction

Les postulats AGM [AGM85, Gär88] caractérisent la révision de croyances. Ceux-ci s'appliquent sur des bases de croyances, qui sont en fait des ensembles déductivement clos de formules d'un certain langage.

Un agent logique ayant comme base de croyances K peut avoir trois attitudes envers une information A :

- ▷ si $A \in K$ alors A est dite *acceptée*.
- ▷ si $\neg A \in K$ alors A est dite *refusée*.
- ▷ si $A \notin K$ et $\neg A \notin K$ alors A est dite *indéterminée* (ou *contingente*).

On peut alors définir les opérations d'expansion, de révision et de contraction comme les changements d'attitude de la base K envers l'information A :

- ▷ le passage de « A indéterminée » à « A acceptée » ou « A refusée » se nomme *expansion*. Dans ce cas l'information A n'entre pas en conflit avec la base, et y est simplement insérée.
- ▷ à l'inverse, le passage de « A acceptée » ou « A refusée » à « A indéterminée » se nomme *contraction*. L'information A est alors retirée de la base (ainsi que d'autres informations, pour maintenir la clôture de la base).
- ▷ enfin le passage de « A acceptée » à « A refusée » (ou l'inverse) se nomme *révision*. Il s'agit d'un changement de croyance à propos de A.

Ces trois types d'opérateurs regroupent, par symétrie, les six changements d'attitude possibles d'une base envers une information. Les postulats AGM caractérisent ces opérateurs de manière rationnelle, chaque propriété possédant une explication intuitive.

1.1.1 Expansion

Comme on l'a vu, l'expansion consiste à ajouter une nouvelle information A à une base de croyances K, A ne contredisant pas la base K. L'*expansion* de K par A notée $K + A$, est une fonction $+$ de $\mathcal{K} \times \mathcal{P}$ vers $\mathcal{K}$ vérifiant :

(K+1) $K + A$ est une théorie
(K+2) $A \in K + A$
(K+3) $K \subseteq K + A$
(K+4) Si $A \in K$, alors $K + A = K$
(K+5) Si $K \subseteq H$, alors $K + A \subseteq H + A$
(K+6) $K + A$ est la plus petite base de croyances satisfaisant (K+1)-(K+5)

Ces axiomes peuvent être interprétés de la manière suivante. (K+1) contraint le résultat de l'expansion à rester une théorie. (K+2) impose que A fasse partie du résultat de l'expansion. (K+3) assure que le résultat de l'expansion contient l'ancienne base, d'où le nom d'expansion. (K+4) exprime le fait qu'il n'y a rien à faire si A est déjà dans la base. (K+5) est le postulat de monotonie de l'expansion. Enfin (K+6) force la nouvelle base à être minimale, et ainsi à ne pas contenir d'informations non justifiées.

On peut noter quatre conséquences intéressantes de ces postulats :

1. $K + A = K + B$ ssi $B \in K + A$ et $A \in K + B$
2. $(K + A) + B = (K + B) + A$
3. Si $\neg A \in K$, alors $K + A = K_\perp$
4. La fonction d'expansion $+$ satisfait les postulats (K+1)-(K+6) ssi $K + A = Cn(K \cup A)$.

1.1.2 Révision

La propriété 3. évoquée ci-dessus montre qu'une information contredisant la base de croyances ne peut y être ajoutée par une expansion, sous peine d'obtenir la base triviale.

L'objectif de la révision est justement de pouvoir introduire une nouvelle information qui contredit la base de croyances, tout en gardant une base cohérente. Pour cela, le cadre AGM privilégie la nouvelle information, et retire le moins possible d'informations de la base (changement minimal).

Ainsi, un opérateur de *révision* $*$ est une fonction de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ vers $\mathcal{K}$ qui, à une base de croyances K et une nouvelle information A, associe une nouvelle base de croyances $K * A$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(K$*$1) $K * A$ est une théorie
(K$*$2) $A \in K * A$
(K$*$3) $K * A \subseteq K + A$
(K$*$4) Si $\neg A \notin K$, alors $K + A \subseteq K * A$
(K$*$5) $K * A = K_\perp$ ssi $\models \neg A$
(K$*$6) Si $A \Leftrightarrow B$, alors $K * A = K * B$
(K$*$7) $K * (A \wedge B) \subseteq (K * A) + B$
(K$*$8) Si $\neg B \notin K * A$, alors $(K * A) + B \subseteq K * (A \wedge B)$

Ces postulats peuvent être interprétés ainsi. (K$*$1) contraint la révision à générer une théorie. (K$*$2) assure la primauté de la nouvelle information. (K$*$3) indique que toute information dans la base révisée est une conséquence logique de la nouvelle information et de l'ancienne base. (K$*$4) précise cela en imposant que si la nouvelle information ne contredit pas la base, alors la révision est en fait une expansion. (K$*$5) indique que le seul cas où la base triviale est obtenue est le cas où la nouvelle information est contradictoire. (K$*$6) exprime l'indépendance syntaxique. Les postulats (K$*$7) et (K$*$8) sont appelés postulats supplémentaires. Ils définissent le principe de minimalité du changement lors de la révision. Ainsi, la révision par une conjonction de deux informations est équivalente à une révision par la première information puis une expansion par la deuxième, dès que la deuxième information ne contredit pas la première révision.

1.1.3 Contraction

L'opération de contraction consiste à supprimer une information de la base de croyances, c'est-à-dire à la rendre « indéterminée » dans cette base. Comme pour la révision, la contraction nécessite une propriété de minimalité, afin de ne retirer que ce qu'il est nécessaire de retirer.

Un opérateur de *contraction* $\div$ est une fonction de $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ vers $\mathcal{K}$ qui, à une base de croyances K et une information A, associe une nouvelle base de croyances $K \div A$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(K÷1) $K \div A$ est une théorie
(K÷2) $K \div A \subseteq K$
(K÷3) Si $A \notin K$, alors $K \div A = K$
(K÷4) Si $\not\models A$, alors $A \notin K \div A$
(K÷5) Si $A \in K$, alors $K \subseteq (K \div A) + A$
(K÷6) Si $A \Leftrightarrow B$, alors $K \div A = K \div B$
(K÷7) $(K \div A) \cap (K \div B) \subseteq K \div (A \wedge B)$
(K÷8) Si $A \notin K \div (A \wedge B)$, alors $K \div (A \wedge B) \subseteq K \wedge A$

(K÷1) contraint le résultat de la contraction à être une théorie. (K÷2) assure qu'aucune information n'est ajoutée à la base pendant la contraction. (K÷3) indique que si l'information à supprimer est déjà indéterminée dans la base, alors la contraction ne fait rien. (K÷4) garantit que la nouvelle information a bien été retirée, à moins qu'elle ne soit une tautologie. (K÷5) indique qu'en effectuant la contraction de l'information, puis l'expansion par celle-ci, on retrouve la base initiale (l'inclusion inverse est une conséquence de (K÷1)-(K÷4)). (K÷6) exprime l'indépendance syntaxique de l'opérateur de contraction. Comme pour la révision, les postulats (K÷7) et (K÷8) sont appelés postulats supplémentaires et assurent la minimalité du changement.

1.2 Identités

Nous venons de voir de quelle manière l'expansion, la révision et la contraction permettaient un changement d'attitude de la base vis-à-vis d'une information. Certaines identités mettent en évidence les liens étroits entre ces trois types d'opérateurs.

Ainsi une révision peut être vue comme la contraction par la négation de l'information, suivie d'une expansion par cette information [Gär88] :

(Identité de Levi) $K * A = (K \div \neg A) + A$

Le théorème suivant montre que l'opérateur ainsi défini est bien un opérateur de révision.

Théorème 1.1. [Gär88] Si l'opérateur de contraction $\div$ satisfait (K÷1)-(K÷4) et (K÷6) et si l'opérateur d'expansion $+$ satisfait (K+1)-(K+6), alors l'opérateur de révision $*$ défini par l'identité de Levi satisfait (K∗1)-(K∗6). De plus, si (K÷7) est satisfait, alors (K∗7) est satisfait pour la révision ainsi définie, et si (K÷8) est satisfait, alors (K∗8) est satisfait pour la révision ainsi définie.

De façon similaire, l'opérateur de contraction peut être défini à partir de l'opérateur de révision.

(Identité de Harper) $K \div A = K \cap (K * \neg A)$

Théorème 1.2. [Gär88] Si l'opérateur de révision $*$ satisfait (K$*$1)-(K$*$6), alors l'opérateur de contraction $\div$ défini par l'identité de Harper satisfait (K$\div$1)-(K$\div$6). De plus, si (K$*$7) est satisfait, alors (K$\div$7) est satisfait pour la contraction ainsi définie, et si (K$*$8) est satisfait, alors (K$\div$8) est satisfait pour la contraction ainsi définie.

Ces résultats nous permettent d'étudier les propriétés de la révision ou de la contraction indépendamment, puisque chacun de ces opérateurs peut être construit à partir de l'autre.

1.3 Théorèmes de représentation

L'ensemble des postulats AGM caractérise les opérateurs de révision, de contraction et d'expansion par des propriétés rationnelles sur ces opérateurs. Mais l'intérêt du cadre AGM est que cette caractérisation correspond à des méthodes de révision (et de contraction) naturelles. Ces méthodes ont en commun l'utilisation d'« ordres de préférence » sur les croyances. Un tel ordre exprime le fait que pour l'agent considéré, une proposition est plus crédible qu'une autre.

On obtient ainsi des méthodes constructives pour effectuer la révision ou la contraction. Pour cette raison, on nomme ces méthodes théorèmes de représentation. Certaines d'entre elles sont présentées en annexe à ce document.

2 Fusion contrainte

La fusion contrainte a été définie par S. Konieczny et R. Pino Perez dans [KP02b]. L'objectif est double. D'une part, proposer des propriétés générales sur les opérateurs de fusion dans un cadre logique. D'autre part, construire des familles d'opérateurs à partir de ces propriétés.

C'est dans ce cadre que nous tenterons de caractériser les opérateurs de fusion itérée, et que nous choisirons l'opérateur d'agrégation utilisé dans l'opérateur de fusion itérée.

Les contraintes d'intégrité sont un ensemble fini de formules, c'est-à-dire une base de croyances. Cette base est notée μ. Les opérateurs de fusion sont des fonctions $\Delta : \mathcal{S} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, pour lesquelles le deuxième argument est vu ici comme les contraintes d'intégrité. La base de croyances $\Delta(\Psi, \mu)$ sera notée $\Delta_\mu(\Psi)$.

2.1 Contraintes d'intégrité

Cette partie donne une définition logique des contraintes d'intégrité pour les opérateurs de fusion. Cet ensemble de postulats doit être vérifié par les opérateurs de fusion pour avoir un comportement correct.

Définition 2.1. Δ est un opérateur de fusion contrainte (*IC merging operator*) si et seulement si il vérifie les postulats suivants :

(IC0) $\Delta_\mu(\Psi) \models \mu$
(IC1) Si μ est cohérent, alors $\Delta_\mu(\Psi)$ est cohérent
(IC2) Si $\bigwedge \Psi$ est cohérent avec μ, alors $\Delta_\mu(\Psi) = \bigwedge \Psi \wedge \mu$
(IC3) Si $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$ et $\mu_1 \Leftrightarrow \mu_2$, alors $\Delta_{\mu_1}(\Psi_1) \Leftrightarrow \Delta_{\mu_2}(\Psi_2)$
(IC4) Si $\varphi \models \mu$ et $\varphi' \models \mu$ et $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi \not\models \perp$ alors $\Delta_\mu(\varphi \sqcup \varphi') \wedge \varphi' \not\models \perp$
(IC5) $\Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2) \models \Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$
(IC6) Si $\Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2)$ est cohérent, alors $\Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \models \Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2)$
(IC7) $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$
(IC8) Si $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi) \models \Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$

L'objectif de ces postulats est de définir une base de croyances $\Delta_\mu(\Psi)$ qui soit intuitivement proche de Ψ et qui satisfasse les contraintes d'intégrité μ. $(IC0)$ exige que le résultat de la fusion vérifie les contraintes d'intégrité. $(IC1)$ précise que si les contraintes d'intégrité sont cohérentes alors le résultat de la fusion doit également l'être. $(IC2)$ impose que, dès que cela est possible, le résultat de la fusion soit simplement la conjonction des bases de croyances avec les contraintes d'intégrité. $(IC3)$ exprime l'indépendance syntaxique de la fusion. $(IC4)$ interdit qu'une base de croyances soit préférée aux autres. $(IC5)$ exprime le fait que, si deux profils de croyances ont des résultats communs, ces résultats sont inclus dans la fusion de ces deux profils. Le postulat $(IC6)$, ajouté au postulat $(IC5)$, indique que la fusion de ces deux profils est exactement l'ensemble de ces résultats communs, s'ils existent. $(IC7)$ et $(IC8)$ expriment des conditions sur les conjonctions de contraintes d'intégrité.

D'autres postulats sont également définis, exprimant d'autres notions intuitives.

Le premier est le postulat d'*itération*. Celui-ci exprime le fait que si on ajoute toujours la même base de croyances dans le profil de croyances à fusionner, cette base sera à un certain moment une conséquence de la fusion. Il est à noter que ce postulat n'est pas lié à la notion d'itération mentionnée dans l'intitulé de ce document (et de ce stage). Cependant, cette caractérisation pourra nous inspirer par la suite et définit bien l'attitude d'un opérateur de fusion contrainte lorsque l'on itère la fusion.

Pour exprimer ce postulat, on définit la suite $\langle \Delta_\mu^n(\Psi, \varphi) \rangle_{n \geq 1}$ par :

$$\Delta_\mu^1(\Psi, \varphi) = \Delta_\mu(\Psi \sqcup \varphi)$$
$$\text{et } \Delta_\mu^{n+1}(\Psi, \varphi) = \Delta_\mu(\Delta_\mu^n(\Psi, \varphi) \sqcup \varphi)$$

La propriété d'*itération* est la suivante :

(IC$_{it}$) Si $\varphi \models \mu$ alors $\exists n\ \Delta_\mu^n(\Psi, \varphi) \models \varphi$

Les postulats suivants permettent de définir des sous-classes parmi les opérateurs de fusion : les opérateurs de fusion majoritaire, et les opérateurs d'arbitrage.

Un opérateur de fusion majoritaire est un opérateur de fusion contrainte vérifiant le postulat de *majorité* :

(Maj) $\exists n\ \Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \underbrace{\Psi_2 \sqcup \ldots \sqcup \Psi_2}_{n}) \models \Delta_\mu(\Psi_2)$

Le concept exprimé par cette propriété est bien celui de majorité : si une opinion se retrouve un grand nombre de fois dans l'ensemble des opinions, alors celle-ci sera retenue par l'opérateur de fusion.

Un opérateur d'*arbitrage* est un opérateur de fusion contrainte vérifiant :

$$\text{(Arb)}\quad \text{Si} \begin{cases} \Delta_{\mu_1}(\varphi_1) \equiv \Delta_{\mu_2}(\varphi_2) \\ \Delta_{\mu_1 \Leftrightarrow \neg\mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \equiv (\mu_1 \Leftrightarrow \neg\mu_2) \\ \mu_1 \not\models \mu_2 \\ \mu_2 \not\models \mu_1 \end{cases} \quad \text{alors } \Delta_{\mu_1 \vee \mu_2}(\varphi_1 \sqcup \varphi_2) \equiv \Delta_{\mu_1}(\varphi_1)$$

Une vision plus intuitive de cette propriété sera présentée grâce aux assignements syncrétiques justes (définition 2.4). L'arbitrage consiste en fait à préférer les choix possibles médians.

Une forme affaiblie du postulat (IC6) est également définie, et sera utilisée par la suite.

(IC6') Si $\Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2)$ est cohérent, alors $\Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \models \Delta_\mu(\Psi_1) \vee \Delta_\mu(\Psi_2)$

Définition 2.2. On appelle opérateur de quasi-fusion un opérateur satisfaisant (IC0)-(IC5), (IC6'), (IC7) et (IC8).

2.2 Assignements syncrétiques

Une axiomatisation logique des opérateurs de fusion étant définie, il devient intéressant d'en étudier des représentations.

Les représentations proposées par Konieczny et Pino Perez dans [KP02b] sont basées sur des pré-ordres sur les mondes possibles, représentant des relations de préférence entre croyances. Formellement, on introduit la notion d'*assignement syncrétique*.

Définition 2.3. Un assignement syncrétique est une fonction qui fait correspondre à chaque profil de croyances Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$ sur les interprétations, tel que pour tous profils de croyances Ψ, Ψ_1, Ψ_2 et pour toutes bases de croyances φ, φ' les conditions suivantes sont vérifiées :
(1) Si $\omega \models \Psi$ et $\omega' \models \Psi$, alors $\omega \simeq_\Psi \omega'$
(2) Si $\omega \models \Psi$ et $\omega' \not\models \Psi$, alors $\omega <_\Psi \omega'$
(3) Si $\Psi_1 \Leftrightarrow \Psi_2$, alors $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$
(4) $\forall \omega \models \varphi \; \exists \omega' \models \varphi' \; \omega' \leq_{\varphi \sqcup \varphi'} \omega$
(5) Si $\omega \leq_{\Psi_1} \omega'$ et $\omega \leq_{\Psi_2} \omega'$, alors $\omega \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} \omega'$
(6) Si $\omega <_{\Psi_1} \omega'$ et $\omega \leq_{\Psi_2} \omega'$, alors $\omega <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} \omega'$

(1) et (2) assurent que les modèles du profil de croyances (s'ils existent) sont les interprétations les plus plausibles (i.e. les éléments minimaux) pour le pré-ordre associé au profil de croyances. (3) indique que deux profils de croyances équivalents ont les mêmes pré-ordres associés. (4) précise que pour le pré-ordre associé à un profil de croyances composé de deux bases de croyances, pour chaque modèle de l'une, on peut trouver un modèle de l'autre qui est au moins aussi bon. (5) indique que si ω est une interprétation au moins aussi plausible que ω' pour les profils de croyances Ψ_1 et Ψ_2, alors elle l'est aussi pour le résultat de la fusion de Ψ_1 et Ψ_2. La condition (6) renforce la condition précédente en indiquant que si ω est strictement plus plausible que ω' dans l'un des profils de croyances, alors ω est strictement plus plausible que ω' dans le résultat de la fusion des deux profils.

Pour obtenir des théorèmes de représentation pour les opérateurs de fusion majoritaire et d'arbitrage, les assignements syncrétiques suivants sont définis.

Définition 2.4. Un assignement syncrétique majoritaire est un assignement syncrétique vérifiant :

(7) Si $\omega <_{\Psi_2} \omega'$, alors $\exists n \; \omega <_{\Psi_1 \sqcup \underbrace{\Psi_2 \sqcup \ldots \sqcup \Psi_2}_{n}} \omega'$

Un assignement syncrétique juste est un assignement syncrétique vérifiant :

$$(8) \begin{cases} \omega <_{\varphi_1} \omega' \\ \omega <_{\varphi_2} \omega'' \\ \omega' \simeq_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} \omega'' \end{cases} \Rightarrow \; \omega <_{\varphi_1 \sqcup \varphi_2} \omega'$$

La condition (7) indique que si l'interprétation ω est strictement préférée à l'interprétation ω' dans Ψ_2, alors il en est de même dans $\Psi_1 \sqcup \underbrace{\Psi_2 \sqcup \ldots \sqcup \Psi_2}_{n}$, pour un certain n, d'où le lien avec la notion de majorité. La condition (8) exprime le fait que si une interprétation ω est strictement plus plausible qu'une interprétation ω' dans une base de croyances φ_1, que ω est strictement plus plausible que ω'' dans φ_2, et que cette interprétation ω'' est équivalente à ω' dans le profil de croyances $\varphi_1 \sqcup \varphi_2$, alors ω est strictement préférée à ω' dans $\varphi_1 \sqcup \varphi_2$.

On définit également une condition alternative à la condition (6), correspondant au postulat $(IC6')$.

Définition 2.5. Un assignement quasi-syncrétique est un assignement vérifiant les conditions (1)-(5) et (6'), où (6') est la condition suivante :

(6') Si $\omega <_{\Psi_1} \omega'$ et $\omega <_{\Psi_2} \omega'$, alors $\omega <_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} \omega'$

2.3 Théorèmes de représentation

On peut désormais utiliser les assignements syncrétiques pour caractériser les opérateurs de fusion contrainte.

Théorème 2.1. [Kon99] Un opérateur Δ est un opérateur de fusion contrainte si et seulement si il existe un assignement syncrétique qui associe à chaque profil de croyances Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$ tel que

$$mod(\Delta_\mu(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi)$$

On dit alors que cet assignement représente l'opérateur.

Si l'on considère le postulat $(IC6')$ à la place du postulat $(IC6)$, on obtient :

Théorème 2.2. [Kon99] Un opérateur Δ est un opérateur de quasi-fusion si et seulement si il peut être représenté par un assignement quasi-syncrétique.

Concernant les propriétés de majorité et d'arbitrage, les résultats sont les suivants :

Théorème 2.3. [Kon99] Un opérateur Δ est un opérateur de fusion majoritaire si et seulement si il peut être représenté par un assignement syncrétique majoritaire.

Théorème 2.4. [Kon99] Un opérateur Δ est un opérateur d'arbitrage si et seulement si il peut être représenté par un assignement syncrétique juste.

2.4 Opérateurs de fusion usuels

Cette partie présente quelques opérateurs de fusion usuels. Ceux-ci sont basés sur des distances entre interprétations.

Définition 2.6.

- Une pseudo-distance d entre interprétations est une fonction de $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{W}$:
  1. $d(\omega_1, \omega_2) = d(\omega_2, \omega_1)$
  2. $d(\omega_1, \omega_2) = 0$ si et seulement si $\omega_1 = \omega_2$
- Une distance entre interprétations est une pseudo-distance vérifiant l'inégalité triangulaire, *ie* : $\forall \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathcal{W}, d(\omega_1, \omega_2) \leq (\omega_1, \omega_3) + d(\omega_3, \omega_2)$.
- d induit une « distance » entre une interprétation ω et une formule propositionnelle φ :

$$d(\omega, \varphi) \;=\; min_{\omega' \models \varphi} d(\omega, \omega')$$

- d induit également une « distance » entre deux formules propositionnelles φ et φ' :

$$d(\varphi, \varphi') \;=\; min_{\omega \models \varphi, \omega' \models \varphi'} d(\omega, \omega')$$

On peut déjà définir quelques distances usuelles. La distance drastique et la distance de Hamming (également appelée distance de Dalal) sont des distances classiques pour la fusion de croyances. La distance de Hamming pondérée permet de donner plus d'importance à certaines variables propositionnelles.

Définition 2.7. Soient deux interprétations $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{W}$.

- La distance drastique d_D est définie par :
  $d_D(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 0 \text{ si } \omega_1 = \omega_2 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$
- La distance de Hamming d_H est définie par $d_H(\omega_1, \omega_2) = |\{x \in PS \mid \omega_1(x) \neq \omega_2(x)\}|$
- Soit $q : PS \rightarrow \mathbb{N}^*$. La fonction de Hamming pondérée d_{H_q} induite par q est définie par : $d_{H_q}(\omega_1, \omega_2) = \Sigma_{x \in PS | \omega_1(x) \neq \omega_2(x)} q(x)$

2.4.1 Les opérateurs Σ

Les opérateurs $\Delta^{d,\Sigma}$ sont typiquement des opérateurs majoritaires. Leur principe est d'élir les interprétations qui minimisent la somme des distances aux bases. Ils sont définis de la façon suivante :

Définition 2.8. Soit d une distance entre interprétations. La distance $d_{\Sigma,d}$ entre un profil de croyances Ψ et une interprétation ω vaut :

$$d_{\Sigma,d}(\omega, \Psi) = \Sigma_{\varphi \in \Psi} d(\omega, \varphi)$$

Le pré-ordre associé est alors :

$$\omega \leq^{\Sigma}_{\Psi} \omega' \textit{ si et seulement si } d_{\Sigma,d}(\omega, \Psi) \leq d_{\Sigma,d}(\omega', \Psi)$$

L'opérateur de fusion $\Delta^{d,\Sigma}$ est alors défini ainsi :

$$mod(\Delta^{d,\Sigma}_{\mu}(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq^{\Sigma}_{\Psi})$$

Il s'agit bien ici d'une famille d'opérateurs puisque la distance d entre interprétations peut varier. L'opérateur $\Delta^{d,\Sigma}$ associé avec la distance drastique est un exemple classique d'opérateur de fusion ([LM99],[Rev93]). Comme indiqué précédemment, on a le résultat suivant :

Théorème 2.5. [Kon99] $\Delta^{d,\Sigma}$ est un opérateur de fusion majoritaire.

La propriété d'itération nécessite une condition supplémentaire sur la pseudo-distance d.

Théorème 2.6. Si d est une distance, alors $\Delta_{d,\Sigma}$ satisfait (IC_{it}).

2.4.2 Les opérateurs Max

Les opérateurs $\Delta^{d,Max}$ élisent les interprétations qui minimisent la plus grande distance aux bases. Ils ne peuvent satisfaire tous les postulats de la fusion contrainte, mais sont tout de même des opérateurs de quasi-fusion.

Définition 2.9. Soit d une distance entre interprétations. La distance $d_{Max,d}$ entre un profil de croyances Ψ et une interprétation ω vaut :

$$d_{Max,d}(\omega, \Psi) = max_{\varphi \in \Psi} d(\omega, \varphi)$$

Le pré-ordre associé est alors :

$$\omega \leq^{Max}_{\Psi} \omega' \textit{ si et seulement si } d_{Max,d}(\omega, \Psi) \leq d_{Max,d}(\omega', \Psi)$$

L'opérateur de fusion $\Delta^{d,Max}$ est alors défini ainsi :

$$mod(\Delta^{d,Max}_{\mu}(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq^{Max}_{\Psi})$$

De tels opérateurs vérifient :

Théorème 2.7. [Kon99] $\Delta^{d,Max}$ est un opérateur de quasi-fusion. Il satisfait également (Arb), (IC_{it}) et (MI), et ne peut pas satisfaire (IC6) et (Maj).

2.4.3 Les opérateurs GMax

Les opérateurs $\Delta^{d,GMax}$ raffinent les opérateurs Max, afin de satisfaire les postulats de fusion contrainte. Plutôt que d'utiliser uniquement le « Max », on prend en considération un vecteur trié dans l'ordre lexicographique.

Définition 2.10. Soient $\Psi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un profil de croyances et d une distance entre interprétations. Pour chaque interprétation ω on construit le vecteur $(d_1^\omega, \dots, d_n^\omega)$ des distances entre cette interprétation et les bases de croyances, c'est-à-dire $d_j^\omega = d(\omega, \varphi_j)$. Soit $d_{GMax,d}(\omega, \Psi)$ le vecteur obtenu en triant $(d_1^\omega, \dots, d_n^\omega)$ dans l'ordre décroissant. On note $\leq_{lex}$ l'ordre lexicographique sur les vecteurs d'entiers (de même taille). Le pré-ordre associé est :

$$\omega \leq_\Psi^{GMax} \omega' \text{ si et seulement si } d_{GMax,d}(\omega, \Psi) \leq_{lex} d_{GMax,d}(\omega', \Psi)$$

L'opérateur de fusion $\Delta^{d,GMax}$ est alors défini ainsi :

$$mod(\Delta_\mu^{d,GMax}(\Psi)) = min(mod(\mu), \leq_\Psi^{GMax})$$

Les opérateurs GMax vérifient :

Théorème 2.8. [Kon99] $\Delta^{d,GMax}$ est un opérateur de fusion contrainte. Plus précisément, $\Delta^{d,GMax}$ est un opérateur d'arbitrage. De plus, $\Delta^{d,GMax}$ satisfait le postulat (IC_{it}).

2.4.4 Exemple

L'exemple suivant sert d'exemple récurrent dans ce document, et permet ainsi de comparer les différents opérateurs de fusion qui y sont évoqués.

Quatre co-propriétaires logent dans une résidence. Il leur est proposé trois décisions pour l'année à venir : la construction d'une piscine, d'un court de tennis et d'un parking privé, ce que nous notons respectivement S,T et P. Si au moins deux des trois décisions sont choisies, alors le loyer subit une forte augmentation, ce qui est noté I. Cette contrainte se note : $\mu \equiv ((S \wedge T) \vee (S \wedge P) \vee (T \wedge P)) \rightarrow I$.

Parmi ces quatre co-propriétaires, deux souhaitent la réalisation des trois options et ne se soucient pas de l'augmentation de loyer : $\varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv S \wedge T \wedge P$. Un troisième s'oppose à toute construction de peur de voir un jour le loyer augmenter : $\varphi_3 \equiv \neg S \wedge \neg T \wedge \neg P \wedge \neg I$. Enfin, le quatrième souhaite la construction d'un court de tennis et d'un parking privé, mais refuse une augmentation de loyer : $\varphi_4 \equiv T \wedge P \wedge \neg I$.

On considère les quatre variables propositionnelles S,T,P et I dans cet ordre pour les interprétations. Le tableau 2.1 donne, pour chaque interprétation, sa distance à chacune des quatre bases de croyances, et sa distance au profil de croyances $\Psi = \langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \rangle$ selon les fonctions Σ, Max et $GMax$ que nous venons de décrire. La distance utilisée est la distance de Hamming. Les lignes grisées correspondent aux contre-modèles de μ, ces interprétations ne peuvent donc pas être choisies par la fusion.

ω	$d(\omega,\varphi_1)$	$d(\omega,\varphi_2)$	$d(\omega,\varphi_3)$	$d(\omega,\varphi_4)$	$d_{\Sigma,d_H}(\omega,\Psi)$	$d_{Max,d_H}(\omega,\Psi)$	$d_{GMax,d_H}(\omega,\Psi)$
(0,0,0,0)	3	3	0	2	8	3	(3,3,2,0)
(0,0,0,1)	3	3	1	3	10	3	(3,3,3,1)
(0,0,1,0)	2	2	1	1	6	**2**	**(2,2,1,1)**
(0,0,1,1)	2	2	2	2	8	**2**	(2,2,2,2)
(0,1,0,0)	2	2	1	1	6	**2**	**(2,2,1,1)**
(0,1,0,1)	2	2	2	2	8	**2**	(2,2,2,2)
(0,1,1,0)	1	1	2	0	4	2	(2,1,1,0)
(0,1,1,1)	1	1	3	1	6	3	(3,1,1,1)
(1,0,0,0)	2	2	1	2	7	**2**	(2,2,2,1)
(1,0,0,1)	2	2	2	3	9	3	(3,2,2,2)
(1,0,1,0)	1	1	2	1	5	2	(2,1,1,1)
(1,0,1,1)	1	1	3	2	7	3	(3,2,1,1)
(1,1,0,0)	1	1	2	1	5	2	(2,1,1,1)
(1,1,0,1)	1	1	3	2	7	3	(3,2,1,1)
(1,1,1,0)	0	0	3	0	3	3	(3,0,0,0)
(1,1,1,1)	0	0	4	1	**5**	4	(4,1,0,0)

TAB. 2.1 – Exemple des co-propriétaires avec les opérateurs $\Delta_\mu^{d_H,f}$

Les modèles de la fusion des trois bases sont indiqués en gras. On remarque que chacune des méthodes d'agrégation donne un résultat différent des deux autres.

L'opérateur $\Delta^{d_H,\Sigma}$ donne pour résultat la construction des trois éléments et l'augmentation du loyer. Cela illustre le caractère majoritaire de cet opérateur. L'inconvénient de ce type d'opérateurs apparait ici : le troisième co-propriétaire doit se plier aux choix des trois autres et accepter une option qui est à l'opposé de la sienne.

Le résultat obtenu grâce à $\Delta^{d_H,Max}$ est de ne pas augmenter le loyer et de construire l'un des trois éléments, ou alors d'augmenter le loyer et de construire soit le court de tennis, soit le parking privé. Cela montre que le choix effectué par $\Delta^{d_H,Max}$ n'est pas assez précis, d'où l'intérêt de $\Delta^{d_H,GMax}$.

En effet, l'opérateur $\Delta^{d_H,GMax}$ sélectionne certains choix parmi ceux de $\Delta^{d_H,Max}$. Ici, la décision est de construire soit le court de tennis, soit le parking privé, et de ne pas augmenter le loyer.

2.5 AGM et la fusion contrainte

Intuitivement, la fusion contrainte sélectionne parmi les modèles des contraintes d'intégrité les informations les plus proches des informations de base. Du point de vue de la révision, on sélectionne dans la nouvelle information les informations les plus proches des informations de base. Cette observation conduit au résultat suivant :

Théorème 2.9. [Kon99] Soit Δ un opérateur de fusion contrainte. L'opérateur $\circ$, défini par $\varphi \circ \mu = \Delta_\mu(\varphi)$ est un opérateur de révision AGM.

Définir un opérateur de fusion à partir d'un opérateur de révision est plus complexe, car la révision seule ne permet pas d'agréger les préférences individuelles en une relation de préférence globale. En se donnant un telle méthode d'agrégation (par exemple à la $\Delta^{d,\Sigma}$), on peut espérer définir un opérateur de fusion.

Konieczny propose dans [Kon99] la méthode suivante pour construire l'opérateur Δ°_{μ} à partir d'un opérateur de révision $\circ$ et d'une méthode d'agrégation donnés :

Définition 2.11.
- On définit $f^{\circ}_{\varphi}(\omega) = n$ où n est le niveau où l'interprétation ω apparaît dans le pré-ordre $\leq_{\varphi}$. Plus formellement, n est la taille de la plus longue chaîne d'inégalités strictes $\omega_0 < \ldots < \omega_n$ avec $\omega_0 \models \varphi$ et $\omega_n = \omega$.
- On définit $f^{\circ}_{\Psi}(\omega)$ avec la méthode d'agrégation choisie (par exemple $f^{\circ}_{\Psi}(\omega) = \sum_{\varphi \in \Psi} f^{\circ}_{\varphi}(\omega)$ si la méthode choisie est Σ).
- On définit $\omega \leq_{\Psi} \omega'$ ssi $f^{\circ}_{\Psi}(\omega) \leq f^{\circ}_{\Psi}(\omega')$.
- Finalement $mod(\Delta^{\circ}_{\mu}(\Psi)) = \min(mod(\mu), \leq_{\Psi})$

Définition 2.12. Un opérateur de révision $\circ$ est défini à partir d'une distance d ssi :

1. d est une distance
2. soient φ une base de croyances et ω une interprétation :
   $d(\omega, \varphi) = min\{d(\omega, \omega') : \omega' \models \varphi\}$
3. $\omega \leq_{\varphi} \omega'$ ssi $d(\omega, \varphi) \leq d(\omega', \varphi)$
4. $[\![\varphi \circ \mu]\!] = min([\![\mu]\!], \leq_{\varphi})$

Théorème 2.10. [Kon99] Un opérateur de fusion Δ défini à partir d'un opérateur de révision $\circ$ et de la méthode d'agrégation Σ ou $GMax$ (selon la définition 2.11) est un opérateur de fusion contrainte si et seulement si $\circ$ est défini à partir d'une distance.

Deuxième partie

Fusion itérée crédule

3 Définitions et propriétés

Deux types de fusion itérée sont étudiés à travers ce travail : la fusion itérée crédule et la fusion itérée sceptique. Cette partie décrit l'étude de la fusion itérée crédule. Celle-ci est ainsi nommée car elle correspond, à chaque itération, à la révision des anciennes croyances de chaque agent par le résultat de la fusion à l'itération précédente. Ainsi, chaque agent privilégie les croyances mises en commun à ses propres croyances.

3.1 Définitions et notations

L'opérateur de fusion itérée crédule est noté ${}^*\Delta_\mu$. Décrivons désormais formellement cet opérateur.

Définition 3.1. Soit E un profil de croyances. On note $*$ l'opérateur de révision défini à partir de l'opérateur de fusion contrainte Δ_μ par : $\varphi * \varphi' = \Delta_{\varphi'}(\varphi)$.

- On définit la suite $(E^i)_i$ par :
  - $E^0 = E$
  - $E^{i+1} = E^i * \Delta_\mu(E^i)$ où $\langle K_1, \dots, K_n\rangle * \varphi = \langle K_1 * \varphi, \dots K_n * \varphi\rangle$
- On désigne par i^* l'itération à partir de laquelle le point fixe sur les profils est atteint, c'est-à-dire :

  $$i^* = \min\{i : \forall i' > i, E^{i'} = E^i\}$$

  On note :

  $$K_j^* = K_j^{i^*} \text{ et } E^* = \langle K_1^*, \dots, K_n^*\rangle$$

- Par définition :

  $${}^*\Delta_\mu(E) = \Delta_\mu(E^*)$$

L'existence d'un tel point fixe sera discutée ultérieurement. Avec $m = i^*$, on dit que le processus de fusion itérée *converge en m itérations*. Ce nombre d'itérations peut être vu comme le nombre de fois où le profil change d'une étape à la suivante au cours de ce processus.

En utilisant la définition de l'opérateur de révision $*$ utilisé dans le cadre de ce travail et la définition de la suite $(E^i)_i$, on trouve :

$$K_j^{i+1} \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^i)}(K_j^i)$$

Si l'opérateur d'agrégation est défini à partir d'une distance, alors pour une base K_j^i donnée, le passage à l'itération $i+1$ consiste à sélectionner les modèles de $\Delta_\mu(E^i)$ les plus proches de K_j^i.

3.1.1 Opérateurs de fusion itérée usuels

La partie 2.4 avait introduit la distance drastique d_D et la distance de Hamming d_H entre interprétations, ainsi que les fonctions d'agrégation Σ, Max et $GMax$. Cela nous avait permis de définir les opérateurs de fusion usuels Δ^{Σ}, Δ^{Max} et Δ^{GMax}.

De la même manière, nous pouvons définir les opérateurs de fusion itérée crédule correspondants, que nous appellerons opérateurs de fusion itérée crédule « usuels ». Ainsi, nous notons ${}^*\Delta_\mu^{d,f}$ l'opérateur de fusion itérée crédule utilisant l'opérateur d'agrégation $\Delta_\mu^{d,f}$. Par exemple, ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ désigne l'opérateur de fusion itérée crédule défini à partir de l'opérateur de fusion contrainte $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ utilisant la distance de Hamming et Σ pour fonction d'agrégation.

3.1.2 Propriétés

Nous pouvons dès à présent définir certaines propriétés qui permettront de caractériser le comportement des opérateurs de fusion itérée.

La fusion itérée crédule d'un profil E^0 est dite *monotone* à l'itération i si tout modèle de $\Delta_\mu(E^{i+1})$ est modèle de $\Delta_\mu(E^i)$. Il s'agit donc de la monotonie entre deux agrégations successives. Formellement,

$$\Delta_\mu(E^{i+1}) \models \Delta_\mu(E^i) \qquad \text{(Monotonie)}$$

L'*anti-monotonie* à l'itération i correspond à la monotonie dans l'autre sens : tout modèle de $\Delta_\mu(E^i)$ est modèle de $\Delta_\mu(E^{i+1})$. Ceci correspond à la propriété :

$$\Delta_\mu(E^i) \models \Delta_\mu(E^{i+1}) \qquad \text{(Anti-monotonie)}$$

Un *point de consensus* est atteint lorsqu'aucun modèle de μ n'est commun à toutes les bases du profil initial, et qu'un tel modèle commun apparait à une itération i. Ceci correspond à la propriété suivante :

$$(\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv \bot) \wedge (\mu \wedge \bigwedge_j K_j^i \not\equiv \bot) \qquad \text{(Point de consensus)}$$

3.2 Un premier exemple

Observons dès à présent comment fonctionne un tel opérateur de fusion, en l'appliquant à l'exemple des quatre co-propriétaires que nous avons abordé au paragraphe 2.4.4. Comme dans cet exemple, nous utilisons ici la distance de Hamming.

3.2.1 Distance de Hamming, fonction d'agrégation Σ

Le tableau 3.1 permet de visualiser le processus de fusion itérée pour l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$. Il reprend la même structure que le tableau 2.1, en particulier les lignes grisées représentent les contre-modèles des contraintes d'intégrité. La différence réside dans le fait que les colonnes, au lieu de contenir uniquement les distances des interprétations à une base, contiennent désormais ces distances pour chaque itération, séparées par des virgules.

Analysons en détail ce premier exemple.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_\Sigma(\omega, E^i)$
(0,0,0,0)	3,4	3,4	0,4	2,4	8, 16
(0,0,0,1)	3,3	3,3	1,3	3,3	10, 12
(0,0,1,0)	2,3	2,3	1,3	1,3	6, 12
(0,0,1,1)	2,2	2,2	2,2	2,2	8, 8
(0,1,0,0)	2,3	2,3	1,3	1,3	6, 12
(0,1,0,1)	2,2	2,2	2,2	2,2	8, 8
(0,1,1,0)	1,2	1,2	2,2	0,2	4, 8
(0,1,1,1)	1,1	1,1	3,1	1,1	6, 4
(1,0,0,0)	2,3	2,3	1,3	2,3	7, 12
(1,0,0,1)	2,2	2,2	2,2	3,2	9, 8
(1,0,1,0)	1,2	1,2	2,2	1,2	5, 8
(1,0,1,1)	1,1	1,1	3,1	2,1	7, 4
(1,1,0,0)	1,2	1,2	2,2	1,2	5, 8
(1,1,0,1)	1,1	1,1	3,1	2,1	7, 4
(1,1,1,0)	0,1	0,1	3,1	0,1	3, 4
(1,1,1,1)	0,0	0,0	4,0	1,0	5, **0**

TAB. 3.1 – Exemple des co-propriétaires avec l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$

- Le profil initial est le même que dans l'exemple des quatre co-propriétaires. Ce profil se retrouve dans les quatre colonnes $d(\omega, K_j^i)$ en première position (avant la virgule) puisqu'on y trouve la distance de chaque interprétation à KB_j^0. On a ainsi :
  $[\![K_1^0]\!] = \{(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$
  $[\![K_2^0]\!] = \{(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$
  $[\![K_3^0]\!] = \{(0,0,0,0)\}$
  $[\![K_4^0]\!] = \{(0,1,1,0),(1,1,1,0)\}$
- Ensuite, l'agrégation par la fonction Σ est effectuée. On retrouve ces distances dans la colonne $d_\Sigma(\omega, E^i)$, avant la virgule. On détermine alors les modèles de $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ en prenant parmi les modèles de μ ceux dont la distance calculée est minimale. On trouve :
  $[\![\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E^0)]\!] = \{(1,1,1,1)\}$
- L'étape suivante est la révision de chaque base du profil initial par $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E^0)$. Ici, comme $K_j^1 = \Delta_{\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E^0)}(KB_j^0)$, cela consiste à sélectionner les modèles de $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E^0)$ les plus proches de K_j^0, c'est-à-dire ceux pour lesquels la distance $d(\omega, K_j^0)$ (affichée avant la virgule) est la plus petite. Ici, $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E^0)$ n'a qu'un modèle, donc c'est celui-là qui sera le modèle de chaque base du profil E^1. On obtient donc :
  $[\![K_1^1]\!] = [\![K_2^1]\!] = [\![K_3^1]\!] = [\![K_4^1]\!] = \{(1,1,1,1)\}$
- A nouveau, on calcule l'agrégation du profil (ici E^1) par Σ, afin de former $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E^1)$. Cette base se trouve dans la colonne $d_\Sigma(\omega, E^i)$, après la virgule :
  $[\![\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E^1)]\!] = \{(1,1,1,1)\}$
- Enfin, le calcul de E^2 obtenu en révisant chaque base de E^1 par $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E^1)$ donne trivialement $E^2 = E^1$. En effet chaque base de E^1 est déjà équivalente à $\Delta_\mu(E^1)$. Le point fixe sur les profils est donc atteint en une itération. Par souci de clarté, E^2 (identique à E^1) n'est pas affiché dans le tableau.
- Le résultat de la fusion itérée crédule ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ sur cet exemple est donc :
  $[\![{}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E^0)]\!] = \{(1,1,1,1)\}$

En comparant ce résultat à celui de l'opérateur $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$, on observe que les résultats obtenus sont identiques, c'est-à-dire que le résultat de la fusion consiste à construire les trois éléments et à augmenter le loyer. Nous verrons sur d'autres exemples qu'il n'en est pas toujours ainsi. On remarque également qu'au point fixe les quatre bases du profil ont un modèle commun alors qu'elles n'en avaient pas initialement, c'est-à-dire qu'il y a un point de consensus.

3.2.2 Distance de Hamming, fonction d'agrégation Max

Comparons désormais l'opérateur de fusion itérée crédule ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$ avec l'opérateur $\Delta_\mu^{d_D,Max}$. Le tableau 3.2 résume le processus de fusion itérée crédule pour l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$ sur l'exemple des quatre co-propriétaires, avec les mêmes conventions que précédemment.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)$
(0,0,0,0)	3,1,1	3,1,1	0,1,1	2,1,1	3,1,1
(0,0,0,1)	3,1,2	3,1,2	1,2,2	3,2,2	3,2,2
(0,0,1,0)	2,0,0	2,0,0	1,0,0	1,0,0	2,0,**0**
(0,0,1,1)	2,0,1	2,0,1	2,1,1	2,1,1	2,1,1
(0,1,0,0)	2,0,0	2,0,0	1,0,0	1,0,0	2,0,**0**
(0,1,0,1)	2,0,1	2,0,1	2,1,1	2,1,1	2,1,1
(0,1,1,0)	1,1,1	1,1,1	2,1,1	0,1,1	2,1,1
(0,1,1,1)	1,1,2	1,1,2	3,2,2	1,2,2	3,2,2
(1,0,0,0)	2,0,2	2,0,2	1,0,2	2,2,2	2,2,2
(1,0,0,1)	2,1,3	2,1,3	2,1,3	3,3,3	3,3,3
(1,0,1,0)	1,1,1	1,1,1	2,1,1	1,1,1	2,1,1
(1,0,1,1)	1,1,2	1,1,2	3,2,2	2,2,2	3,2,2
(1,1,0,0)	1,1,1	1,1,1	2,1,1	1,1,1	2,1,1
(1,1,0,1)	1,1,2	1,1,2	3,2,2	2,2,2	3,2,2
(1,1,1,0)	0,2,2	0,2,2	3,2,2	0,2,2	3,2,2
(1,1,1,1)	0,2,3	0,2,3	4,3,3	1,3,3	4,3,3

TAB. 3.2 – Exemple des co-propriétaires avec l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$

La convergence de $(E^i)_i$ est obtenue en deux itérations. On trouve :

$[\![{}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}(E^0)]\!] = \{(0,0,1,0),(0,1,0,0)\}$

C'est donc un sous-ensemble des modèles de $\Delta_\mu^{d_H,Max}(E^0)$. Cela correspond d'ailleurs au résultat de $\Delta_\mu^{d_H,GMax}(E^0)$. Nous verrons par la suite que ce n'est pas toujours le cas. Là aussi, un point de consensus est atteint et correspond à la construction soit du court de tennis, soit du parking (sans augmentation de loyer).

3.2.3 Distance de Hamming, fonction d'agrégation $GMax$

Considérons maintenant l'opérateur de fusion itérée crédule ${}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}$. Le tableau 3.2 détaille le processus de fusion itérée crédule pour cet opérateur sur l'exemple des quatre co-propriétaires.

La suite $(E^i)_i$ converge en une itération, et donne :

$[\![{}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}(E^0)]\!] = \{(0,0,1,0),(0,1,0,0)\}$

On obtient ici le même résultat que pour l'opérateur $\Delta_\mu^{d_H,GMax}$, ce qui ne sera pas toujours le cas. On observe également un point de consensus, comme dans les cas précédents. Pour cet exemple, les fonctions d'agrégation Max et $GMax$ donnent donc le même résultat, nous verrons qu'il n'en est pas toujours ainsi.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_{GMax}(\omega, E^i)$
(0,0,0,0)	3,1	3,1	0,1	2,1	(3,3,2,0),(1,1,1,1)
(0,0,0,1)	3,2	3,2	1,2	3,2	(3,3,3,1),(2,2,2,2)
(0,0,1,0)	2,0	2,0	1,0	1,0	(2,2,1,1),**(0,0,0,0)**
(0,0,1,1)	2,1	2,1	2,1	2,1	(2,2,2,2),(1,1,1,1)
(0,1,0,0)	2,0	2,0	1,0	1,0	(2,2,1,1),**(0,0,0,0)**
(0,1,0,1)	2,1	2,1	2,1	2,1	(2,2,2,2),(1,1,1,1)
(0,1,1,0)	1,1	1,1	2,1	0,1	(2,1,1,0),(1,1,1,1)
(0,1,1,1)	1,2	1,2	3,2	1,2	(3,1,1,1),(2,2,2,2)
(1,0,0,0)	2,2	2,2	1,2	2,2	(2,2,2,1),(2,2,2,2)
(1,0,0,1)	2,3	2,3	2,3	3,3	(3,2,2,2),(3,3,3,3)
(1,0,1,0)	1,1	1,1	2,1	1,1	(2,1,1,1),(1,1,1,1)
(1,0,1,1)	1,2	1,2	3,2	2,2	(3,2,1,1),(2,2,2,2)
(1,1,0,0)	1,1	1,1	2,1	1,1	(2,1,1,1),(1,1,1,1)
(1,1,0,1)	1,2	1,2	3,2	2,2	(3,2,1,1),(2,2,2,2)
(1,1,1,0)	0,2	0,2	3,2	0,2	(3,0,0,0),(2,2,2,2)
(1,1,1,1)	0,3	0,3	4,3	1,3	(4,1,0,0),(3,3,3,3)

TAB. 3.3 – Exemple des co-propriétaires avec l'opérateur $^*\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$

4 Convergence et monotonie

Dans ce chapitre nous étudions les propriétés liées à la convergence et à la monotonie pour les opérateurs de fusion itérée crédule. La propriété de convergence est primordiale puisque de celle-ci dépend le bien-fondé de la fusion itérée crédule.

4.1 Premières propriétés

Les propriétés suivantes sont les conséquences directes de la définition de la fusion itérée crédule. Ces propriétés sont valables pour tous les opérateurs de fusion itérée crédule dont l'opérateur d'agrégation est un opérateur de fusion contrainte. Ces opérateurs ne sont pas nécessairement définis à partir de distances. Cette distinction est importante car le problème de savoir si tout opérateur de fusion contrainte peut être défini à partir d'une distance est un problème ouvert.

La propriété *i*) énonce que les modèles d'une base sont inclus dans les modèles du résultat de l'agrégation à l'itération précédente. La propriété *ii*) indique qu'après la première itération, toutes les bases sont « dans les contraintes ». On peut ainsi voir la première itération de la fusion itérée crédule comme une « entrée dans les contraintes ». Enfin, la propriété *iii*) montre que si une base à l'itération i est cohérente avec l'agrégation à cette même itération, alors la base reste identique lors du passage de l'itération i à l'itération $i+1$.

Théorème 4.1.
i) $\forall i, \forall j, K_j^{i+1} \models \Delta_\mu(E^i)$
ii) $\forall i > 0, \forall j, K_j^i \models \mu$
iii) $\forall i, \forall j$, si $K_j^i \wedge\ \Delta_\mu(E^i)$ est cohérent, alors $K_j^{i+1} \equiv K_j^i \wedge\ \Delta_\mu(E^i)$.

Démonstration.
i) L'opérateur de révision étant défini à partir de l'opérateur d'agrégation, on a $K_j^{i+1} \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^i)}(K_j^i)$. D'après le postulat (IC0) de la fusion contrainte pour l'opérateur d'agrégation Δ_μ, $K_j^{i+1} \models \Delta_\mu(E^i)$.
ii) D'après le théorème 4.1 i), $K_j^{i+1} \models \Delta_\mu(E^i)$. Or, d'après le postulat (IC0) de la fusion contrainte, $\Delta_\mu(E^i) \models \mu$, d'où $K_j^{i+1} \models \mu$.
iii) On sait que $K_j^{i+1} \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^i)}(K_j^i)$. D'après le postulat (IC2) de la fusion contrainte, si $\Delta_\mu(E^i) \wedge\ K_j^i$ est cohérent, alors $\Delta_{\Delta_\mu(E^i)}(K_j^i) \equiv \Delta_\mu(E^i) \wedge\ K_j^i$.

□

4.2 Propriétés sur la convergence

Nous pouvons maintenant établir des liens entre la convergence de la suite des profils $(E^i)_i$ et la suite des résultats des agrégations $(\Delta_\mu(E^i))_i$, ainsi qu'un lien entre anti-monotonie et convergence. Les résultats donnés dans ce paragraphe, comme le précédent, sont valables pour tous les opérateurs de fusion itérée crédule, qu'il soient définis à partir d'une distance ou non.

4.2.1 Convergence des profils et convergence de la fusion itérée crédule

Nous montrons ici l'équivalence entre la convergence de la suite des profils $(E^i)_i$ et la convergence de la suite $(\Delta_\mu(E^i))_i$.

Théorème 4.2. La convergence de $(\Delta_\mu(E^i))_i$ entraîne la convergence des profils $(E^i)_i$. Formellement, si $\Delta_\mu(E^{i+1}) \equiv \Delta_\mu(E^i)$, alors $E^{i+1} = E^*$.

Démonstration. Supposons que $\Delta_\mu(E^{i+1}) \equiv \Delta_\mu(E^i)$. Montrons que $E^{i+2} = E^{i+1}$. Etant donné j, on sait que $K_j^{i+2} \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^{i+1})}(K_j^{i+1}) \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^i)}(K_j^{i+1})$. De plus, d'après le théorème 4.1 i), $K_j^{i+1} \models \Delta_\mu(E^i)$, d'où $K_j^{i+2} \equiv K_j^{i+1}$. $\square$

Ainsi, il ne peut pas y avoir de cas tel que la suite $(\Delta_\mu(E^i))_i$ converge alors que les profils $(E^i)_i$ continuent de changer à chaque itération. La réciproque est évidente.

Théorème 4.3. La convergence des profils $(E^i)_i$ entraîne la convergence des $(\Delta_\mu(E^i))_i$.

4.2.2 Anti-monotonie et convergence

Pour la fusion itérée crédule, l'anti-monotonie est une propriété très importante puisqu'elle assure la convergence immédiate de la suite $(E^i)_i$, donc l'existence de ${}^*\Delta_\mu(E)$.

Théorème 4.4. Si la propriété d'anti-monotonie est vérifiée à l'étape i, alors le point fixe de la suite $(E^i)_i$ est atteint à l'étape $i+1$. Formellement, si $\Delta_\mu(E^i) \models \Delta_\mu(E^{i+1})$, alors $\Delta_\mu(E^{i+1}) \equiv {}^*\Delta_\mu(E)$.

Démonstration. On sait que, pour j donné, $K_j^{i+1} \models \Delta_\mu(E^i)$ (théorème 4.1 i)), et donc ici $K_j^{i+1} \models \Delta_\mu(E^{i+1})$. D'après le théorème 4.1 iii), $K_j^{i+2} \equiv K_j^{i+1} \wedge \Delta_\mu(E^{i+1}) \equiv K_j^{i+1}$. On obtient ainsi la convergence sur les profils, ce qui, d'après le théorème 4.3, entraîne la convergence de $(\Delta_\mu(E^i))_i$. $\square$

L'exemple suivant (tableau 4.1) montre un cas d'anti-monotonie. Ici, nous utilisons l'opérateur de fusion itérée crédule ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ avec $\mu \equiv \top$.

4.2.3 Cycles

La seule raison en logique propositionnelle pour laquelle la convergence ne serait pas assurée est l'existence de cycles, c'est-à-dire que le profil à une certaine itération est identique à celui d'une itération précédente. Le théorème ci-dessous montre que les propriétés de fusion contrainte sur l'opérateur d'agrégation interdisent certains de ces cycles. Plus précisément, ce résultat indique qu'il ne peut exister un cycle tel que deux bases du profil s'échangent un de leurs modèles mutuellement

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_\Sigma(\omega, E^i)$
(0,0,0)	0,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	3,4,**4**
(0,0,1)	0,0,0	1,2,2	0,0,0	1,1,2	**2**,3,**4**
(0,1,0)	0,2,2	2,2,2	0,1,2	1,1,2	3,6,8
(0,1,1)	1,1,1	1,3,3	0,0,1	0,0,3	**2**,4,8
(1,0,0)	1,2,2	0,0,0	1,1,2	0,0,0	**2**,**3**,**4**
(1,0,1)	1,1,1	0,1,1	1,1,1	1,1,1	3,4,**4**
(1,1,0)	1,3,3	1,1,1	0,0,3	0,0,1	**2**,4,8
(1,1,1)	2,2,2	0,2,2	1,1,2	0,1,2	3,6,8

TAB. 4.1 – Cas d'anti-monotonie avec ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$

entre deux itérations. Si tel était le cas, cela pourrait avoir pour conséquence, par exemple, que deux bases permutent leurs modèles indéfiniment, empêchant ainsi la convergence.

Théorème 4.5. On se place dans le cas d'un profil initial E^0 quelconque. Soient deux bases $K_{j_1}^0$ et $K_{j_2}^0$ parmi les bases de ce profil. On ne peut pas avoir à la fois : $\omega_1 \in [\![K_{j_1}^i]\!] \cap [\![K_{j_2}^{i+1}]\!]$, $\omega_2 \in [\![K_{j_2}^i]\!] \cap [\![K_{j_1}^{i+1}]\!]$, $\omega_1 \notin [\![K_{j_2}^i]\!] \cup [\![K_{j_1}^{i+1}]\!]$ et $\omega_2 \notin [\![K_{j_1}^i]\!] \cup [\![K_{j_2}^{i+1}]\!]$.

Démonstration. Supposons qu'un tel cycle existe. On sait que $K_j^{i+1} \models \Delta_\mu(E_i)$, donc $\omega_1 \models \Delta_\mu(E^i)$ et $\omega_2 \models \Delta_\mu(E^i)$. On a ainsi $\omega_1 \models K_{j_1}^i \wedge \Delta_\mu(E^i)$. D'après le théorème 4.1 iii), $\omega_1 \models K_{j_1}^{i+1}$, ce qui est contradictoire. □

4.3 Monotonie et anti-monotonie

L'idée la plus simple pour prouver la convergence de $(E^i)_i$ repose sur la notion de monotonie. En effet, si les modèles de chaque base j à l'itération $i+1$ étaient inclus dans ceux de la base j à l'itération i, la convergence serait systématique. De même, nous avons vu que la convergence de $(\Delta_\mu(E^i))_i$ implique la convergence des profils, donc si la propriété de monotonie était vérifiée à chaque itération, la convergence serait acquise.

Malheureusement, il n'en est pas ainsi. Nous avons d'ailleurs déjà vu un contre-exemple de la propriété de monotonie dans l'exemple d'anti-monotonie (tableau 4.1). On a en effet dans ce cas : $[\![\Delta_\mu(E^2)]\!] \subsetneq [\![\Delta_\mu(E^1)]\!]$.

4.3.1 Non-monotonie et anti-monotonie

A la vue des premiers contre-exemples de monotonie obtenus par un programme testant de nombreuses instances, il semblait possible que toute non-monotonie à une itération donnée soit suivie d'une anti-monotonie à l'itération suivante. Nous savons d'après le théorème 4.4 que cette condition est suffisante pour obtenir la convergence pour cette instance.

Là encore cette propriété n'est pas assez fine. Les tableaux 4.2, 4.3 et 4.4 en présentent quelques contre-exemples avec la distance de Hamming. On voit ici que les ensembles des modèles de $\Delta_\mu(E^{i+1})$ et de $\Delta_\mu(E^i)$ peuvent être totalement disjoints.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d_\Sigma(\omega, E^i)$
(0,0,0,0)	0,1,1,0	1,1,1,1	2,2,2,2	3,4,**4**,3
(0,0,0,1)	0,0,0,1	1,2,2,2	1,1,3,3	2,**3**,5,6
(0,0,1,0)	0,2,2,1	2,2,2,2	1,1,1,1	3,5,5,4
(0,0,1,1)	1,1,1,2	1,3,3,3	0,0,2,2	2,4,6,7
(0,1,0,0)	0,1,2,1	2,2,2,2	1,1,1,1	3,4,5,4
(0,1,0,1)	0,0,1,2	1,3,3,3	1,2,2,2	2,5,6,7
(0,1,1,0)	1,2,3,2	1,1,1,1	0,0,0,0	2,**3**,**4**,3
(0,1,1,1)	1,1,2,3	2,2,2,2	0,1,1,1	3,4,5,6
(1,0,0,0)	1,2,2,1	0,0,0,0	1,1,2,2	2,**3**,**4**,3
(1,0,0,1)	1,1,1,2	0,1,1,1	2,2,3,3	3,4,5,6
(1,0,1,0)	1,3,3,2	1,1,1,1	0,0,1,1	2,4,5,4
(1,0,1,1)	2,2,2,3	0,2,2,2	1,1,2,2	3,5,6,7
(1,1,0,0)	1,2,3,2	1,1,1,1	1,1,1,1	3,4,5,4
(1,1,0,1)	1,1,2,3	0,2,2,2	2,2,2,2	3,5,6,7
(1,1,1,0)	2,3,4,3	0,0,0,0	0,0,0,0	2,**3**,**4**,3
(1,1,1,1)	2,2,3,4	1,1,1,1	1,1,1,1	4,4,5,6

TAB. 4.2 – Contre-exemple de non-monotonie et d'anti-monotonie avec ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)$
(0,0,0)	0,1,2,1	2,2,2,1	0,1,2,1	2,2,2,1
(0,0,1)	0,0,1,0	1,1,1,0	1,2,1,0	1,2,**1**,0
(0,1,0)	1,1,1,2	1,2,3,2	0,0,1,2	1,2,3,2
(0,1,1)	0,0,0,1	1,1,2,1	1,1,0,1	1,**1**,2,1
(1,0,0)	1,2,3,2	1,1,1,2	0,0,1,2	1,2,3,2
(1,0,1)	1,1,2,1	0,0,0,1	1,1,0,1	1,**1**,2,1
(1,1,0)	2,2,2,1	0,1,2,1	0,1,2,1	2,2,2,1
(1,1,1)	1,1,1,0	0,0,1,0	1,2,1,0	1,2,**1**,0

TAB. 4.3 – Contre-exemple de non-monotonie et d'anti-monotonie avec ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d_{GMax}(\omega, E^i)$
(0,0,0,0)	0,1,1,0	1,1,1,0	2,2,1,0	(2,1,0),(2,1,1),**(1,1,1)**,(0,0,0)
(0,0,0,1)	0,0,0,1	1,2,2,1	1,1,0,1	(1,1,0),**(2,1,0)**,(2,0,0),(1,1,1)
(0,0,1,0)	0,2,2,1	2,2,2,1	1,1,2,1	(2,1,0),(2,2,1),(2,2,2),(1,1,1)
(0,0,1,1)	1,1,1,2	1,3,3,2	0,0,1,2	(1,1,0),(3,1,0),(3,1,1),(2,2,2)
(0,1,0,0)	0,1,2,1	2,2,2,1	1,1,2,1	(2,1,0),(2,1,1),(2,2,2),(1,1,1)
(0,1,0,1)	0,0,1,2	1,3,3,2	1,2,1,2	(1,1,0),(3,2,0),(3,1,1),(2,2,2)
(0,1,1,0)	1,2,3,2	1,3,3,2	0,0,3,2	(1,1,0),(3,2,0),(3,3,3),(2,2,2)
(0,1,1,1)	1,1,2,3	2,4,4,3	0,1,2,3	(2,1,0),(4,1,1),(4,2,2),(3,3,3)
(1,0,0,0)	1,2,2,1	0,0,0,1	1,1,0,1	(1,1,0),**(2,1,0)**,(2,0,0),(1,1,1)
(1,0,0,1)	1,1,1,0	0,1,1,0	2,2,1,0	(2,1,0),(2,1,1),**(1,1,1)**,(0,0,0)
(1,0,1,0)	1,3,3,2	1,1,1,2	0,0,1,2	(1,1,0),(3,1,0),(3,1,1),(2,2,2)
(1,0,1,1)	2,2,2,1	0,2,2,1	1,1,2,1	(2,1,0),(2,2,1),(2,2,2),(1,1,1)
(1,1,0,0)	1,2,3,2	1,1,1,2	1,2,1,2	(1,1,1),(2,2,1),(3,1,1),(2,2,2)
(1,1,0,1)	1,1,2,1	0,2,2,1	2,3,2,1	(2,1,0),(3,2,1),(2,2,2),(1,1,1)
(1,1,1,0)	2,3,4,3	0,2,2,3	0,1,2,3	(2,0,0),(3,2,1),(4,2,2),(3,3,3)
(1,1,1,1)	2,2,3,2	1,3,3,2	1,2,3,2	(2,1,1),(3,2,2),(3,3,3),(2,2,2)

TAB. 4.4 – Contre-exemple de non-monotonie et d'anti-monotonie avec ${}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}$

4.3.2 Renversement de situation

Il arrive parfois que les contre-modèles de la base $\Delta_\mu(E^i)$ deviennent exactement les modèles de $\Delta_\mu(E^{i+1})$, c'est-à-dire que deux agrégations à des itérations successives vérifient $\Delta_\mu(E^{i+1}) \equiv \neg\Delta_\mu(E^i)$. Nous appelons ce cas un *renversement de situation*. Le tableau 4.5 en présente un exemple.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)$
(0,0,0)	0,1,1,0	2,2,2,1	0,1,1,0	2,2,**2**,1
(0,0,1)	0,0,2,1	1,1,1,0	1,2,1,0	1,2,**2**,1
(0,1,0)	0,0,0,1	1,1,3,2	1,1,0,1	1,**1**,3,2
(0,1,1)	1,1,1,0	0,0,2,1	1,2,1,0	1,2,**2**,1
(1,0,0)	1,2,2,1	1,1,1,0	0,0,1,0	1,2,**2**,1
(1,0,1)	1,1,3,2	0,0,0,1	1,1,0,1	1,**1**,3,2
(1,1,0)	1,1,1,0	1,2,2,1	0,0,1,0	1,2,**2**,1
(1,1,1)	2,2,2,1	0,1,1,0	0,1,1,0	2,2,**2**,1

TAB. 4.5 – Exemple de renversement de situation avec ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$

4.3.3 A la recherche d'une quantité décroissante

Comme nous l'avons vu, les propriétés de monotonie et d'anti-monotonie ne sont pas vérifiées pour la distance de Hamming. La monotonie n'est pas non plus vérifiée pour les bases du profil, comme le montre le tableau 4.4.

Dans le cas de la distance de Hamming associée à une fonction d'agrégation usuelle, la recherche d'une quantité décroissante (ou d'un invariant) dans les profils successifs ou dans la suite $(\Delta_\mu(E^i))_i$ n'a pas abouti. Cependant, la convergence de $(E^i)_i$ a été testée sur des milliards d'instances et a toujours été vérifiée, en un nombre d'itérations toujours raisonnable. Des statistiques sur ces tests sont jointes à ce document. Nous conjecturons que :

Conjecture 4.1. ${}^*\Delta_\mu^{d_H,f}(E)$ est bien défini pour tout profil E et pour $f \in \{\Sigma, Max, GMax\}$.

La convergence de $(E^i)_i$ a par contre pu être démontrée pour la distance drastique avec les fonctions d'agrégation usuelles. Cela sera détaillé au paragraphe 4.5.

Quelques résultats sur la convergence du processus de fusion itérée crédule ont pu être démontrés dans le cas de distances vérifiant l'inégalité triangulaire et sous certaines conditions. De plus, nous verrons dans le paragraphe concernant la caractérisation par les postulats de fusion contrainte (voir le corollaire 5.4.1) que la convergence est assurée en au plus une itération s'il existe un modèle commun à toutes les bases du profil initial, et cela quelle que soit la pseudo-distance utilisée.

4.4 Distance

4.4.1 Profil contenant deux bases, fonction d'agrégation Σ

Le théorème suivant montre la convergence de $(E^i)_i$ pour le processus de fusion itérée crédule utilisant une distance d et la fonction d'agrégation Σ dans le cas où le profil ne contient que deux bases.

Théorème 4.6. Si un opérateur de fusion itérée crédule :
- utilise une distance (l'inégalité triangulaire est vérifiée),
- utilise la fonction d'agrégation Σ,
- opère sur un profil contenant deux bases,

alors :

i) $\forall j \in \{1,2\}, K_j^2 \equiv K_j^1 \wedge \Delta_\mu(E^1)$

ii) le point fixe de la suite $(E^i)_i$ est atteint en au plus deux itérations.

Démonstration.

On note $d(K_1^1, K_2^1) = \min_{\omega_1 \models K_1^1, \omega_2 \models K_2^1} d(\omega_1, \omega_2)$.

i) Prenons $j = 1$ (par exemple). D'après le théorème 4.1 iii), il suffit de montrer que $K_1^1 \wedge \Delta_\mu(E^1)$ est cohérent. Soit $\omega \models \Delta_\mu(E^1)$. Si $\omega \models K_1^1$ alors c'est immédiat. Dans le cas contraire, $\omega \not\models K_1^1$. Soit $\omega_1 \models K_1^1$ tel que $d(\omega, \omega_1) = d(\omega, K_1^1)$ (par définition, ω_1 existe). On a : $d_\Sigma(\omega_1, E^1) = d(\omega_1, K_2^1)$. Soit $\omega_2 \models K_2^1$ tel que $d(\omega_2, \omega) = d(\omega, K_2^1)$ (par définition, ω_2 existe). D'après l'inégalité triangulaire, $d(\omega_1, \omega_2) \leq d(\omega_1, \omega) + d(\omega, \omega_2)$, d'où : $d(\omega_1, \omega_2) \leq d(\omega, K_1^1) + d(\omega, K_2^1)$. Or $d(\omega_1, K_2^1) = \min_{\omega' \models K_2^1} d(\omega_1, \omega')$, donc $d(\omega_1, K_2^1) \leq d(\omega, K_1^1) + d(\omega, K_2^1)$. Cette inégalité ne peut être stricte, car dans ce cas on aurait $d_\Sigma(\omega_1, E^1) < d_\Sigma(\omega, E^1)$, d'où $\omega \not\models \Delta_\mu(E^1)$ (étant donné que $K_1^1 \models \mu$ d'après le théorème 4.1 ii)), ce qui est absurde. Ainsi, $d_\Sigma(\omega_1, E^1) = d_\Sigma(\omega, E^1)$, et donc $\omega_1 \models K_1^1 \wedge \Delta_\mu(E^1)$

ii) Montrons que $\min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^1) = \min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^2)$.
D'après *i)* $K_j^2 \models K_j^1$, d'où $\forall \omega, d(\omega, K_j^2) \geq d(\omega, K_j^1)$ et $\min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^1) \leq \min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^2)$. Pour montrer que $\min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^1) \geq \min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^2)$, prenons $\omega_1 \models K_1^2$. D'après *i)*, $\omega_1 \models K_1^1 \wedge \Delta_\mu(E^1)$. Soit $\omega_2 \models K_2^1$ tel que $d(\omega_1, \omega_2) = d(\omega_1, K_2^1)$ (par définition, ω_2 existe). Alors $d_\Sigma(\omega_2, E^1) = d(\omega_2, K_1^1) \leq d(\omega_1, \omega_2)$. Or $d(\omega_1, \omega_2) = d(\omega_1, K_2^1) = d_\Sigma(\omega_1, E^1) = \min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^1)$ (puisque $\omega_1 \models K_1^1 \wedge \Delta_\mu(E^1)$), donc $\omega_2 \models \Delta_\mu(E^1) \wedge K_2^1$, d'où $\omega_2 \models K_2^2$ (cf i)). Ainsi $d_\Sigma(\omega_1, E^2) = d(\omega_1, K_2^2) \leq d(\omega_1, \omega_2) = \min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^1)$, donc $\min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^1) \geq \min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^2)$.
Montrons que $\Delta_\mu(E^2) \equiv \Delta_\mu(E^1)$.
Sachant que $\forall \omega, d(\omega, K_j^2) \geq d(\omega, K_j^1)$, on sait que $\forall \omega, d_\Sigma(\omega, E^2) \geq d_\Sigma(\omega, E^1)$. Soit $\omega' \models \Delta_\mu(E^2)$. On a : $d_\Sigma(\omega', E^1) \leq d_\Sigma(\omega', E^2) = \min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^2) = \min_{\omega \models \mu} d_\Sigma(\omega, E^1)$, d'où $\omega' \models \Delta_\mu(E^1)$ (puisque $\omega' \models \Delta_\mu(E^2) \models \mu$). Ainsi $\Delta_\mu(E^2) \models \Delta_\mu(E^1)$. Montrons maintenant que $\Delta_\mu(E^1) \models \Delta_\mu(E^2)$. Soit $\omega \models \Delta_\mu(E^1)$. Soient $\omega_1 \models K_1^1$ et $\omega_2 \models K_2^1$ tels que $d(\omega, \omega_1) = d(\omega, K_1^1)$ et $d(\omega, \omega_2) = d(\omega, K_2^1)$. Alors $d_\Sigma(\omega_1, E^1) = d(\omega_1, K_2^1) \leq d(\omega_1, \omega) + d(\omega, K_2^1)$ (inégalité triangulaire sur tous les modèles de K_2^1), ce qui donne $d_\Sigma(\omega_1, E^1) \leq d_\Sigma(\omega, E^1) = \min_{\omega' \models \mu} d_\Sigma(\omega', E^1)$. Donc $\omega_1 \models K_1^1 \wedge \Delta_\mu(E^1)$, d'où $\omega_1 \models K_1^2$. De même $\omega_2 \models K_2^2$. Ainsi $d_\Sigma(\omega, E^2) \leq d_\Sigma(\omega, E^1) = \min_{\omega' \models \mu} d_\Sigma(\omega', E^1) = \min_{\omega' \models \mu} d_\Sigma(\omega', E^2)$, donc $\omega \models \Delta_\mu(E^2)$.

□

4.4.2 Profil contenant deux bases, fonction d'agrégation Max

Nous avons également essayé de prouver la convergence de $(E^i)_i$ pour la fusion itérée crédule avec les mêmes hypothèses que le théorème 4.6, mais en remplaçant la fonction d'agrégation Σ par Max. Malheureusement la démonstration n'a pas abouti.

L'une des idées pour prouver cela était de distinguer les cas où la distance $a_1 = d(K_1^1, K_2^1)$ est paire des cas où elle est impaire. Dans le cas où a_1 est paire, notre première idée était qu'une fois que la première itération était passée (c'est-à-dire que chaque base était dans les contraintes), les modèles sélectionnés par l'agrégation seraient les modèles de μ les plus proches du *milieu*. Le milieu désigne ici les interprétations ω telles que leur distance à chacune des bases vaut $\frac{a_1}{2}$:

$M^1 = \{\omega | d(\omega, K_1^1) = d(\omega, K_2^1) = \frac{a_1}{2}\}$. L'idée était donc de montrer que $[\![\Delta_\mu(E^1)]\!] = \{\omega \models \mu | d(\omega, M^1) = \min_{\omega' \models \mu} d(\omega', M^1)\}$.

Cette idée s'est révélée fausse et le tableau suivant en montre un contre-exemple. Ici, les modèles de $\Delta_\mu(E^1)$ sont en gras, et les modèles de μ les plus proches de M^1 sont ceux pour lesquels $d(\omega, M^1) = 1$. On voit que ces interprétations ne correspondent pas. Par exemple, $\omega = (0,0,1,0,0,0)$ est modèle de $\Delta_\mu(E^1)$ et n'est pas l'un des plus proches modèles de M^1 parmi $[\![\mu]\!]$.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)$	$d_{Max}(\omega, M^1)$
(0,0,0,0,0,0)	0,0,0	1,2,2	1,**2**,2	1
(0,0,0,0,0,1)	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0
(0,0,0,0,1,0)	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0
(0,0,0,0,1,1)	1,2,2	0,0,0	1,**2**,2	1
(0,0,0,1,0,0)	1,1,1	2,3,3	2,3,3	2
(0,0,0,1,0,1)	1,2,2	1,2,2	1,**2**,2	1
(0,0,0,1,1,0)	1,2,2	1,2,2	1,**2**,2	1
(0,0,0,1,1,1)	2,3,3	1,1,1	2,3,3	2
(0,0,1,0,0,0)	1,1,1	2,2,3	2,**2**,3	2
(0,0,1,0,0,1)	1,2,2	1,2,2	1,**2**,2	1
(0,0,1,0,1,0)	1,2,2	1,2,2	1,**2**,2	1
(0,0,1,0,1,1)	2,3,3	1,1,1	2,3,3	2
(0,0,1,1,0,0)	2,2,2	3,3,4	3,3,4	3
(0,0,1,1,0,1)	2,3,3	2,3,3	2,3,3	2
(0,0,1,1,1,0)	2,3,3	2,3,3	2,3,3	2
(0,0,1,1,1,1)	2,2,4	2,2,2	2,**2**,4	3
(0,1,0,0,0,0)	1,1,1	2,2,3	2,**2**,3	2
(0,1,0,0,0,1)	1,2,2	1,2,2	1,**2**,2	1
(0,1,0,0,1,0)	1,2,2	1,2,2	1,**2**,2	1
(0,1,0,0,1,1)	2,3,3	1,1,1	2,3,3	2
(0,1,0,1,0,0)	2,2,2	3,3,4	3,3,4	3
(0,1,0,1,0,1)	2,3,3	2,3,3	2,3,3	2
(0,1,0,1,1,0)	2,3,3	2,3,3	2,3,3	2
(0,1,0,1,1,1)	2,2,4	2,2,2	2,**2**,4	3
(0,1,1,0,0,0)	2,2,2	1,1,4	2,**2**,4	3
(0,1,1,0,0,1)	1,3,3	2,2,3	2,3,3	2
(0,1,1,0,1,0)	2,3,3	2,2,3	2,3,3	2
(0,1,1,0,1,1)	2,2,4	2,2,2	2,**2**,4	3
(0,1,1,1,0,0)	3,3,3	2,2,5	3,3,5	4
(0,1,1,1,0,1)	2,2,4	3,3,4	3,3,4	3
(0,1,1,1,1,0)	2,2,4	1,3,4	2,3,4	3
(0,1,1,1,1,1)	1,1,5	2,3,3	2,3,5	4
(1,0,0,0,0,0)	1,1,1	2,2,3	2,**2**,3	2
(1,0,0,0,0,1)	1,2,2	1,2,2	1,**2**,2	1
(1,0,0,0,1,0)	1,2,2	1,2,2	1,**2**,2	1
(1,0,0,0,1,1)	2,3,3	1,1,1	2,3,3	2
(1,0,0,1,0,0)	2,2,2	3,3,4	3,3,4	3
(1,0,0,1,0,1)	2,3,3	2,3,3	2,3,3	2
(1,0,0,1,1,0)	2,3,3	2,3,3	2,3,3	2
(1,0,0,1,1,1)	2,2,4	2,2,2	2,**2**,4	3
(1,0,1,0,0,0)	2,2,2	1,1,4	2,**2**,4	3
(1,0,1,0,0,1)	1,3,3	2,2,3	2,3,3	2

(suite du tableau à la page suivante...)

(suite...)

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)$	$d_{Max}(\omega, M^1)$
(1,0,1,0,1,0)	2,3,3	2,2,3	2,3,3	2
(1,0,1,0,1,1)	2,2,4	2,2,2	2,**2**,4	3
(1,0,1,1,0,0)	3,3,3	2,2,5	3,3,5	4
(1,0,1,1,0,1)	2,2,4	3,3,4	3,3,4	3
(1,0,1,1,1,0)	2,2,4	1,3,4	2,3,4	3
(1,0,1,1,1,1)	1,1,5	2,3,3	2,3,5	4
(1,1,0,0,0,0)	2,2,2	1,1,4	2,**2**,4	3
(1,1,0,0,0,1)	1,3,3	2,2,3	2,3,3	2
(1,1,0,0,1,0)	2,3,3	2,2,3	2,3,3	2
(1,1,0,0,1,1)	2,2,4	2,2,2	2,**2**,4	3
(1,1,0,1,0,0)	3,3,3	2,2,5	3,3,5	4
(1,1,0,1,0,1)	2,2,4	3,3,4	3,3,4	3
(1,1,0,1,1,0)	2,2,4	1,3,4	2,3,4	3
(1,1,0,1,1,1)	1,1,5	2,3,3	2,3,5	4
(1,1,1,0,0,0)	1,3,3	0,0,5	1,3,5	4
(1,1,1,0,0,1)	0,2,4	1,1,4	1,2,4	3
(1,1,1,0,1,0)	2,2,4	1,1,4	2,**2**,4	3
(1,1,1,0,1,1)	1,1,5	2,2,3	2,**2**,5	4
(1,1,1,1,0,0)	2,2,4	1,1,6	2,**2**,6	5
(1,1,1,1,0,1)	1,1,5	2,2,5	2,**2**,5	4
(1,1,1,1,1,0)	1,1,5	0,2,5	1,2,5	4
(1,1,1,1,1,1)	0,0,6	1,3,4	1,3,6	5

4.5 Distance drastique

La distance drastique d_D a peu été évoquée jusqu'ici. La raison en est que les opérateurs de fusion itérée crédule usuels utilisant la distance drastique ont pu être entièrement caractérisés, et que la convergence de la suite $(E^i)_i$ est obtenue en très peu d'itérations. Ainsi les aspects de monotonie avaient peu d'intérêt avec cette distance.

Cette partie montre que tous les opérateurs de fusion itérée crédule usuels basés sur la distance drastique sont bien définis.

4.5.1 Distance drastique, agrégation Max

Dans le cadre de la fusion itérée crédule utilisant la distance drastique et la fonction d'agrégation Max, la suite $(E^i)_i$ converge en au plus deux itérations, quels que soient le profil initial et les contraintes d'intégrité. ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$ est distinct de l'opérateur « non itéré » $\Delta_\mu^{d_D,Max}$.

Théorème 4.7. Le point fixe de la suite $(E^i)_i$ dans le cas de la fusion itérée crédule utilisant la distance drastique et la fonction d'agrégation Max existe et est atteint en au plus 2 itérations.

Démonstration.

- si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \not\equiv \bot$, on utilise le postulat (IC2) pour l'opérateur d'agrégation $\Delta_\mu^{d_D,Max}$.
- si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv \bot$

  $\Delta_\mu(E^0) \equiv \mu$ puisque $\forall\omega, d_{Max}(\omega, E^0) = 1$

Pour j donné, $K_j^1 \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^0)}(K_j^0) \equiv \Delta_\mu(K_j^0) \equiv \begin{cases} \mu \wedge K_j^0 \text{ si } \mu \wedge K_j^0 \not\equiv \bot \\ \mu \text{ sinon} \end{cases}$

Calculons maintenant $\Delta_\mu(E^1)$.

▷ Si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^1 \not\equiv \bot$, alors en raisonnant comme pour le postulat (IC2), on a $\Delta_\mu(E^1) \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^1$ et $\forall j, K_j^3 = K_j^2$.

▷ Sinon, $\Delta_\mu(E^1) \equiv \mu$. Etant donné j, on a $K_j^2 \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^1)}(K_j^1) \equiv \Delta_\mu(K_j^1) \equiv K_j^1$ car $K_j^1 \models \mu$

□

4.5.2 Distance drastique, agrégations Σ et $GMax$

L'opérateur de fusion contrainte utilisant la distance drastique et la fonction d'agrégation Σ est identique à l'opérateur de fusion contrainte utilisant la distance drastique et la fonction d'agrégation $GMax$ [KP02a]. Cela a pour conséquence immédiate l'égalité correspondante pour la fusion itérée crédule : ${}^*\Delta_\mu^{d_D,\Sigma} = {}^*\Delta_\mu^{d_D,GMax}$. Aussi, il suffira de se reporter aux résultats obtenus sur l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_D,GMax}$ pour avoir les résultats concernant ${}^*\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$.

La convergence de la suite $(E^i)_i$ est également vérifiée pour l'opérateur de fusion itérée crédule ${}^*\Delta_\mu^{d_D,GMax}$, pour tout profil initial et pour toutes contraintes d'intégrité.

Théorème 4.8. Le point fixe de la suite $(E^i)_i$ dans le cas de la fusion itérée crédule utilisant la distance drastique et la fonction d'agrégation $GMax$ existe et est atteint en au plus 1 itération.

Démonstration.

– si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \not\equiv \bot$, on utilise le postulat (IC2) de la fusion contrainte pour l'opérateur d'agrégation $\Delta_\mu^{d_D,GMax}$.

– si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv \bot$

$[\![\Delta_\mu(E^0)]\!] = \{\omega \models \mu : \nexists \omega' : card(\{j : \omega' \models K_j^0\}) > card(\{j : \omega \models K_j^0\})\}$

Etant donné j, on a : $K_j^1 \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^0)}(K_j^0)$

▷ si $K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \not\equiv \bot$ alors

$$K_j^1 \equiv K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \tag{*}$$

▷ si $K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \equiv \bot$ alors $\forall \omega \models \Delta_\mu(E^0), d(\omega, K_j^0) = 1$ d'où $K_j^1 \equiv \Delta_\mu(E^0)$

Calculons $\Delta_\mu(E^1)$. Soit $\omega \models \mu$.

▷ si $\omega \models \Delta_\mu(E^0)$: soit j donné, alors :

→ si $\omega \models K_j^0$ alors $\omega \models K_j^1$

→ si $\omega \not\models K_j^0$ alors $\omega \models K_j^1$ ssi $K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \equiv \bot$

▷ si $\omega \not\models \Delta_\mu(E^0)$: $d_{GMax}(\omega, E^1) = (1, \ldots, 1)$ donc $\omega \not\models \Delta_\mu(E^1)$ (les bases du profil initial sont toujours supposées cohérentes). Ceci permet de conclure que, dans tous les cas, $\Delta_\mu(E^1) \models \Delta_\mu(E^0)$.

Plus précisément :

▷ si $\nexists j, K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \equiv \bot$, alors

→ $\Delta_\mu(E^1) \equiv \Delta_\mu(E^0)$

→ Etant donné j, $K_j^2 \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^1)}(K_j^1) \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^0)}(K_j^1)$, or $K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \not\equiv \bot$ donc, d'après (*), $K_j^1 \equiv K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0)$, ce qui donne $K_j^2 \equiv K_j^1$

▷ si $\exists j, K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \equiv \bot$

Pour $\omega \models \Delta_\mu(E^0)$ et j donnés, on a :

→ si $K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \equiv \bot$, alors $d(\omega, K_j^0) = 1$ et $d(\omega, K_j^1) = 0$

$\rightarrow$ si $K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \not\equiv \perp$, alors $d(\omega, K_j^0) = d(\omega, K_j^1)$
donc $\forall \omega, \omega' \models \Delta_\mu(E^0), d_{GMax}(\omega, E^1) = d_{GMax}(\omega', E^1)$, d'où $\Delta_\mu(E^1) \equiv \Delta_\mu(E^0)$. Le théorème 4.2 permet alors de conclure.

□

4.6 Distance de Hamming

A la différence de la distance drastique, la convergence de $(E^i)_i$ pour la fusion itérée crédule utilisant la distance de Hamming n'a pas pu être démontrée dans le cas général. Comme nous l'avons déjà évoqué au paragraphe 4.3.3, la recherche d'une quantité décroissante entre deux itérations n'a pas aboutie.

Le seul résultat que nous pouvons appliquer ici est le cas d'un profil contenant deux bases, avec la fonction d'agrégation Σ.

Théorème 4.9. Dans le cas de la fusion itérée crédule utilisant la distance de Hamming et la fonction d'agrégation Σ, la suite $(E^i)_i$ converge en au plus 2 itérations lorsque le profil E contient 2 bases.

Démonstration. La distance de Hamming vérifiant l'inégalité triangulaire, le théorème 4.6 s'applique. □

Dans la suite de ce document, nous supposerons donc la convergence vérifiée pour les opérateurs de fusion itérée crédule utilisant la distance de Hamming, afin de pouvoir en étudier les propriétés (postulats de fusion contraintes, etc).

4.7 Approche expérimentale

Comme nous l'avons déjà évoqué, une implantation des opérateurs de fusion itérée nous a permis de conduire des tests sur de grandes quantités d'instances. Cela fût un bon moyen d'observer le nombre d'itérations avant la convergence en fonction du nombre de modèles par base, de tester des postulats (fusion contrainte, monotonie, anti-monotonie) et des conjectures, d'en trouver parfois des contre-exemples.

Ces tests prennent toute leur importance avec la distance de Hamming, puisque la convergence de celle-ci n'a pu être prouvée. Toutes les instances testées jusqu'à aujourd'hui ont convergé, en un nombre d'itérations toujours raisonnable. Il faut en effet souligner que toutes les statistiques récoltées concernant le nombre d'itérations avant la convergence montrent une grande régularité. Nous n'avons pas trouvé d'instances particulières qui convergent en un grand nombre d'itérations. Ce nombre d'itérations dépend fortement du nombre de modèles dans les bases du profil initial.

La figure 4.1 en est une bonne illustration. Le contexte de cette figure est le suivant. L'opérateur de fusion itérée crédule est ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$. Les contraintes d'intégrité correspondent à la tautologie : $\mu \equiv \top$. Le profil initial contient trois bases : $E^0 = \langle K_1^0, K_2^0, K_3^0 \rangle$. La première base, K_1^0, contient un seul modèle. Le nombre de modèles des bases K_2^0 et K_3^0 constitue les axes des abscisses et des ordonnées. Ici, le nombre de variables du langage est de trois, donc le nombre de modèles de ces bases varie de 1 (les bases initiales sont toujours supposées cohérentes) à 8. Les calculs ont consisté à tester toutes les combinaisons possibles vérifiant ces contraintes (le modèle de K_1^0 est également variable). Pour toutes ces instances, le nombre d'itérations pour obtenir la convergence varie entre 0 (le profil reste inchangé) et 3. Nous avons représenté deux surfaces : celle réprésentant le nombre d'instances convergeant en 1 itération, et celle représentant le nombre d'instances convergeant en 2 itérations. Les courbes pour 0 et 3 itérations n'ont pas été représentées car le nombre d'instances convergeant en 0 ou 3 itérations est négligeable par rapport au nombre d'instances convergeant en 1 ou 2 itérations, et par souci de clarté.

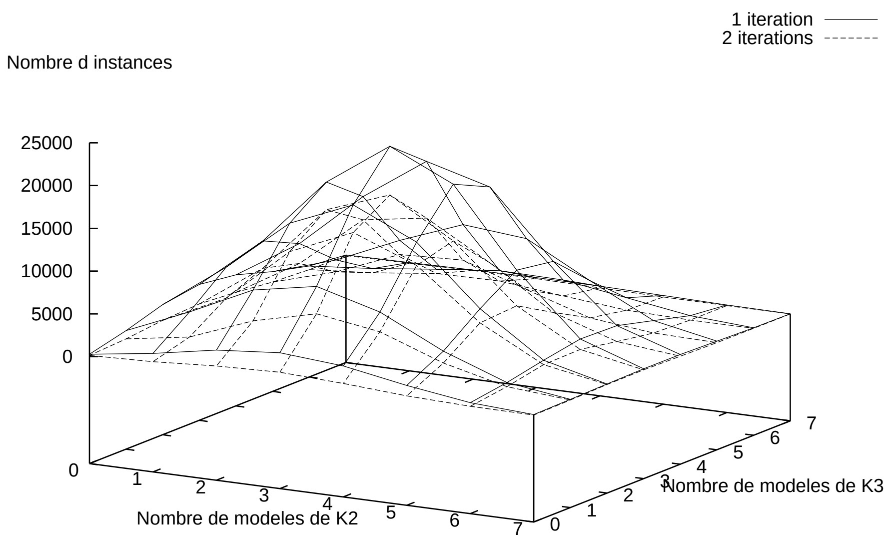

FIG. 4.1 – Statistiques concernant ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$ pour 3 variables et 3 bases

On peut observer que ces deux courbes forment des collines régulières emboitées. Cette forme de colline s'explique par le fait qu'il y a davantage d'instances ayant, par exemple, 4 modèles dans K_2^0 et 4 dans K_3^0, que d'instances ayant 1 seul modèle dans chacune de ces bases. Ce phénomène est statistique et n'est pas lié au phénomène de convergence dont nous discutons ici. Cependant, ceci concerne la courbe représentant l'ensemble des instances, c'est-à-dire la somme de nos quatre courbes. Ce qu'il est intéressant de remarquer est que le nombre d'instances convergeant en 2 itérations pour un nombre de modèles par bases donné est presque proportionnel au nombre d'instances convergeant en 3 itérations. On a ainsi deux collines presqu'identiques, à une échelle différente. Cela montre l'absence de cas « pathologiques » dans ces conditions.

Cette régularité s'est retrouvée dans tous les tests effectués, et pour tous les opérateurs de fusion itérée crédule usuels. La plupart des tests ont été effectués avec $\mu \equiv \top$. Cependant, même les tests avec des contraintes d'intégrité non tautologiques ont montré cette régularité dans la convergence. Cela a son importance car certains comportements se retrouvent en présence de contraintes non tautologiques, et pas avec $\mu \equiv \top$.

La figure 4.2 représente les résultats obtenus dans les mêmes conditions que précédemment, mais cette fois-ci avec l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$. On observe que dans ces conditions la suite $(E^i)_i$ converge la plupart du temps en deux itérations.

On peut également citer ici le cas de la distance drastique. Nous avons montré que pour l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$ la convergence de $(E^i)_i$ est atteinte en au plus une itération. Cela se retrouve

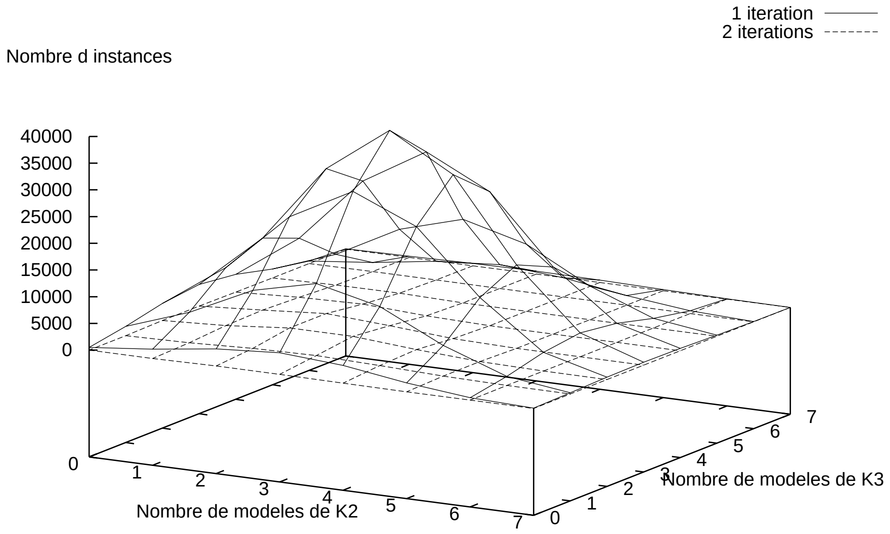

FIG. 4.2 – Statistiques concernant ${}^*\Delta_{\mu}^{d_H,\Sigma}$ pour 3 variables et 3 bases

sur la figure 4.3, là aussi obtenue dans le cadre de 3 variables, 3 bases et $\mu \equiv \top$. Nous voyons ici que pour la grande majorité des instances, $(E^i)_i$ converge en une itération.

Les tests complets ont pu être effectués pour un nombre de bases et un nombre de variables inférieurs ou égaux à 3. Au delà de ces valeurs, le nombre d'instances (et donc le temps de calcul) augmente très fortement. Quelques optimisations ont été faites (en exploitant des symétries) pour réduire le nombre d'instances à calculer, mais n'empêchent pas l'explosion combinatoire de ce nombre par rapport au nombre de variables et de bases. Par exemple, pour l'opérateur ${}^*\Delta_{\top}^{d_H,\Sigma}$ avec 4 variables et 3 bases, le temps de calcul s'élèverait à plusieurs années sur un Pentium III, alors que ce calcul nécessite quelques minutes pour 3 variables et 3 bases. On remarque cependant que le nombre maximum d'itérations n'augmente pas inconsidérément puisqu'il passe de 5 à 10 (pour les instances calculées jusqu'ici).

Toutes ces statistiques sont stockées sur un support numérique joint à ce document. De plus, l'annexe B présente l'implantation que nous avons réalisé de ces opérateurs, et qui a fourni ces statistiques.

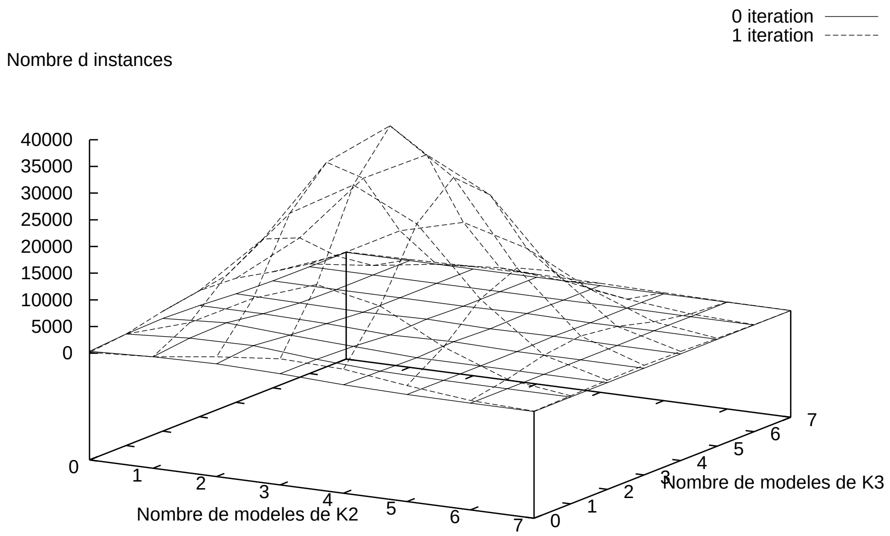

FIG. 4.3 – Statistiques concernant ${}^*\Delta_{\mu}^{d_D,\Sigma}$ pour 3 variables et 3 bases

5 Caractérisation des opérateurs

La convergence ayant été démontrée dans certains cas, nous pouvons désormais tenter de caractériser plus précisément les opérateurs de fusion itérée crédule et de conjecturer dans le cas général. Nous commençons par décrire ces opérateurs sans passer par un processus itératif. Nous en étudions ensuite les propriétés et les comparons aux opérateurs de fusion usuels.

5.1 Caractérisation non itérative de la fusion itérée crédule

Cette partie a pour objectif la description du résultat des opérateurs de fusion itérée crédule sans passer par un processus itératif. Ces résultats nécessitent d'avoir prouvé la convergence, donc n'ont pu être trouvés pour les opérateurs de fusion itérée crédule utilisant la distance de Hamming. En revanche, ces résultats ont été démontrés pour la distance drastique.

5.1.1 Distance drastique, agrégation Max

L'opérateur ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_D,Max}$ ne correspond pas à un opérateur de fusion usuel. On peut tout d'abord étudier ce que devient le profil au point fixe.

Théorème 5.1. Pour tout j, la base K_j^* obtenue après la fusion itérée crédule ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_D,Max}$ vaut :

$$\begin{cases} \textit{si } \mu \wedge \displaystyle\bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \textit{ est cohérent, alors} & K_j^* = \mu \wedge \displaystyle\bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \\ \textit{sinon,} & K_j^* = \begin{cases} \mu \wedge K_j^0 & \textit{si } \mu \wedge K_j^0 \textit{ est cohérent} \\ \mu & \textit{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Démonstration.

– Supposons que $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \not\equiv \bot$. D'après la preuve du théorème 5.4, pour tout j, $K_j^* \equiv K_j^1 \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0$. Or ici toutes les bases K_j^0 sont telles que $\mu \wedge K_j^0 \not\equiv \bot$, donc $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \not\equiv \bot$. On est donc dans le premier cas de la définition, et on a bien : $K_j^* \equiv K_j^1 \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv \mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0$

– Supposons maintenant que $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv \bot$.

  - si $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \not\equiv \bot$, alors dans ce cas $\bigwedge_j K_j^1 \not\equiv \bot$, car : $K_j^1 \equiv \begin{cases} \mu \wedge K_j^0 \text{ si } \mu \wedge K_j^0 \not\equiv \emptyset \\ \mu \text{ sinon} \end{cases}$

    Donc, d'après la preuve du théorème 4.7, $\forall j, K_j^* \equiv K_j^2 \equiv \bigwedge_j K_j^1$. On en déduit que $K_j^* \equiv \mu \wedge \displaystyle\bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0$.

- si $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \equiv \bot$, cette fois-ci, $\bigwedge_j K_j^1 \equiv \bot$ donc, d'après la preuve du théorème 4.7, $K_j^* \equiv K_j^1$. On a donc $K_j^* \equiv \begin{cases} \mu \wedge K_j^0 \text{ si } \mu \wedge K_j^0 \not\equiv \bot \\ \mu \text{ sinon} \end{cases}$

□

Il est alors possible de calculer le résultat de la fusion itérée crédule utilisant la distance drastique et l'agrégation Max. Celui-ci ne correspond pas à un opérateur de fusion usuel.

Théorème 5.2. Le résultat de la fusion itérée crédule ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$ vaut :

$${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E^0) \equiv \begin{cases} \mu \wedge \bigwedge\limits_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \text{ si } \mu \wedge \bigwedge\limits_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \not\equiv \bot \\ \mu \text{ sinon} \end{cases}$$

Démonstration.

– si $\mu\wedge \bigwedge_j K_j^0 \not\equiv \bot$, alors d'après le postulat (IC2) pour l'opérateur d'agrégation, $\Delta_\mu^{d_D,Max}(E^*) \equiv \mu\wedge \bigwedge_j K_j^0$. De plus, comme dans la preuve du théorème 5.1, $\mu\wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \equiv \mu\wedge \bigwedge_j K_j^0$

– si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv \bot$, alors :

  - si $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \not\equiv \bot$, alors dans ce cas $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^1 \equiv \mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \not\equiv \bot$ (voir la preuve du théorème 5.1), et d'après la preuve du théorème 4.7, $\Delta_\mu^{d_D,Max}(E^*) \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^1 \equiv \mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0$
  - si $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \bot} K_j^0 \equiv \bot$, alors d'après la preuve du théorème 5.1, $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^1 \equiv \bot$ donc, d'après la preuve du théorème 4.7, $\Delta_\mu^{d_D,Max}(E^*) \equiv \Delta_\mu^{d_D,Max}(E^1) \equiv \mu$

□

5.1.2 Distance drastique, agrégation $GMax$

Contrairement au cas de l'agrégation Max, la fusion itérée crédule utilisant la distance drastique et la fonction d'agrégation $GMax$ est identique à l'opérateur « non itéré » correspondant, c'est-à-dire $\Delta_\mu^{d_D,GMax}$.

Théorème 5.3. ${}^*\Delta_\mu^{d_D,GMax} = \Delta_\mu^{d_D,GMax}$

Démonstration. Le théorème 4.8 montre que le point fixe est atteint en au plus une itération, donc l'opérateur de fusion contrainte crédule correspond à l'opérateur $\Delta_\mu^{d_D,GMax}$ □

5.2 Inclusions

Maintenant que certains opérateurs de fusion itérée crédule sont définis, nous pouvons les comparer aux opérateurs « non itérés ». On dit qu'un opérateur Δ_1 raffine un opérateur Δ_2 si, pour tout profil E, $\Delta_1(E) \models \Delta_2(E)$.

5.2.1 Distance drastique

Le tableau 5.1 montre quels liens d'inclusion existent entre les opérateurs. Par convention, le symbole « $\surd$ » signifie que l'inclusion est vérifiée, « x » qu'elle ne l'est pas, et « ? » que cette inclusion reste une question ouverte. Ces conventions sont valables dans toute la suite de ce document.

	raffine $\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$	est raffiné par $\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$	raffine $\Delta_\mu^{d_D,Max}$	est raffiné par $\Delta_\mu^{d_D,Max}$	raffine $\Delta_\mu^{d_D,GMax}$	est raffiné par $\Delta_\mu^{d_D,GMax}$
${}^*\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	x	$\surd$	$\surd$
${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$	x	x	$\surd$	x	x	x
${}^*\Delta_\mu^{d_D,GMax}$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	x	$\surd$	$\surd$

TAB. 5.1 – Inclusions pour les opérateurs ${}^*\Delta_\mu^{d_D,f}$

Nous avons déjà vu que ${}^*\Delta_\mu^{d_D,\Sigma} = {}^*\Delta_\mu^{d_D,GMax} = \Delta_\mu^{d_D,\Sigma} = \Delta_\mu^{d_D,GMax}$. D'autre part, l'exemple des quatre co-propriétaires dans le cas drastique (tableaux 5.2 et 5.3) montre que ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$ ne raffine pas $\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$, et que ${}^*\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$ n'est pas raffiné par $\Delta_\mu^{d_D,Max}$.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_\Sigma(\omega, E^i)$
(0,0,0,0)	1,1	1,1	0,1	1,1	3,4
(0,0,0,1)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(0,0,1,0)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(0,0,1,1)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(0,1,0,0)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(0,1,0,1)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(0,1,1,0)	1,1	1,1	1,1	0,1	3,4
(0,1,1,1)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(1,0,0,0)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(1,0,0,1)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(1,0,1,0)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(1,0,1,1)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(1,1,0,0)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(1,1,0,1)	1,1	1,1	1,1	1,1	4,4
(1,1,1,0)	0,1	0,1	1,1	0,1	1,4
(1,1,1,1)	0,0	0,0	1,0	1,0	2,**0**

TAB. 5.2 – Exemple des co-propriétaires avec l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$

Le tableau 5.4 présente un cas où l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$ n'est pas raffiné par $\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$. Le tableau 5.5 présente, quant à lui, un exemple indiquant que ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$ n'est pas raffiné par $\Delta_\mu^{d_D,Max}$.

L'opérateur $\Delta_\mu^{d_D,Max}$ est l'opérateur de fusion par intersection totale, c'est-à-dire :

$$\Delta_\mu^{d_D,Max}(E^0) = \begin{cases} \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 & \textit{si cohérent} \\ \mu & \textit{sinon} \end{cases}$$

Nous verrons (théorème 5.4) que ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$ et ${}^*\Delta_\mu^{d_D,GMax}$ vérifient les postulats de fusion contrainte (IC0) et (IC2). Ceci a pour conséquence immédiate que ces opérateurs raffinent $\Delta_\mu^{d_D,Max}$.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)$
(0,0,0,0)	1,1	1,1	0,0	1,0	1,**1**
(0,0,0,1)	1,1	1,1	1,1	1,0	1,**1**
(0,0,1,0)	1,1	1,1	1,1	1,0	1,**1**
(0,0,1,1)	1,1	1,1	1,1	1,0	1,**1**
(0,1,0,0)	1,1	1,1	1,1	1,0	1,**1**
(0,1,0,1)	1,1	1,1	1,1	1,0	1,**1**
(0,1,1,0)	1,1	1,1	1,1	0,1	1,1
(0,1,1,1)	1,1	1,1	1,1	1,0	1,**1**
(1,0,0,0)	1,1	1,1	1,1	1,0	1,**1**
(1,0,0,1)	1,1	1,1	1,1	1,0	1,**1**
(1,0,1,0)	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
(1,0,1,1)	1,1	1,1	1,1	1,0	1,**1**
(1,1,0,0)	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
(1,1,0,1)	1,1	1,1	1,1	1,0	1,**1**
(1,1,1,0)	0,1	0,1	1,1	0,1	1,1
(1,1,1,1)	0,0	0,0	1,1	1,0	1,**1**

TAB. 5.3 – Exemple des co-propriétaires avec l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)$	$d_\Sigma(\omega, E^0)$
(0)	0	1	1	**1**	2
(1)	1	0	0	**1**	**1**

TAB. 5.4 – ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$ n'est pas raffiné par $\Delta_\mu^{d_D,\Sigma}$

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)$	$d_{Max}(\omega, E^0)$
(0,0)	1,0,1	1,1,1	1,1	**1**
(0,1)	1,0,0	0,0,0	1,**0**	**1**
(1,0)	0,1,1	0,1,1	0,1	0
(1,1)	1,0,1	1,1,1	1,1	**1**

TAB. 5.5 – ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$ n'est pas raffiné par $\Delta_\mu^{d_D,Max}$

5.2.2 Distance de Hamming

Les opérateurs usuels de fusion itérée crédule utilisant la distance de Hamming n'ayant pu être caractérisés, les inclusions ne peuvent être prouvés. Cependant, des contre-exemples permettent d'établir qu'aucune inclusion n'existe entre ces opérateurs et leurs homologues « non itérés ».

Le tableau 4.1 montre que ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ ne raffine pas (et n'est pas raffiné par) $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$. Les autres comparaisons pour cet opérateur sont montrées dans le tableau 5.6. Le tableau 5.7 montre, quant à lui, que ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$ n'est raffiné par (et ne raffine) aucun des opérateurs non itérés usuels. Enfin, le tableau 4.4 montre que ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ ne raffine pas et n'est raffiné par aucun opérateur de fusion usuel utilisant la distance de Hamming.

ω	$d(\omega,K_1^i)$	$d(\omega,K_2^i)$	$d(\omega,K_3^i)$	$d_\Sigma(\omega,E^i)$	$d_{Max}(\omega,E^0)$	$d_{GMax}(\omega,E^0)$
(0,0,0)	2,2	2,2	2,2	6,6	2	(2,2,2)
(0,0,1)	3,3	3,3	1,3	7,9	3	(3,3,1)
(0,1,0)	1,1	1,1	3,1	5,3	3	(3,1,1)
(0,1,1)	2,2	2,2	2,2	6,6	2	(2,2,2)
(1,0,0)	1,1	1,1	1,1	3,3	**1**	**(1,1,1)**
(1,0,1)	2,2	2,2	0,2	4,6	2	(2,2,0)
(1,1,0)	0,0	0,0	2,0	2,**0**	2	(2,0,0)
(1,1,1)	1,1	1,1	1,1	3,3	**1**	**(1,1,1)**

TAB. 5.6 – ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ ne raffine pas (et n'est pas raffiné par) $\Delta_\mu^{d_H,Max}$ ni $\Delta_\mu^{d_H,GMax}$

ω	$d(\omega,K_1^i)$	$d(\omega,K_2^i)$	$d(\omega,K_3^i)$	$d_{Max}(\omega,E^i)$	$d_\Sigma(\omega,E^0)$	$d_{Max}(\omega,E^0)$	$d_{GMax}(\omega,E^0)$
(0,0,0)	1,1,2	2,3,2	0,1,2	2,3,2	3	2	(2,1,0)
(0,0,1)	0,0,1	1,2,1	1,0,1	1,2,1	**2**	**1**	**(1,1,0)**
(0,1,0)	2,2,1	2,2,1	1,2,1	2,2,1	5	2	(2,2,1)
(0,1,1)	1,1,0	1,1,0	2,1,0	2,1,**0**	4	2	(2,1,1)
(1,0,0)	1,2,1	1,2,1	1,0,1	1,2,1	3	**1**	(1,1,1)
(1,0,1)	0,1,0	0,1,0	2,1,0	2,1,**0**	**2**	2	(2,0,0)
(1,1,0)	2,3,2	1,1,2	0,1,2	2,3,2	3	2	(2,1,0)
(1,1,1)	1,2,1	0,0,1	1,0,1	1,2,1	**2**	**1**	**(1,1,0)**

TAB. 5.7 – ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$ ne raffine pas (et n'est pas raffiné par) $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ ni $\Delta_\mu^{d_H,Max}$ ni $\Delta_\mu^{d_H,GMax}$

5.3 Postulats de fusion contrainte

Une autre manière de caractériser les opérateurs de fusion est de vérifier s'ils respectent les postulats de fusion contrainte. Nous verrons que nous obtiendrons par cette caractérisation les résultats les plus intéressants pour la fusion itérée crédule utilisant la distance de Hamming.

5.3.1 Cas général

Comme nous l'avons vu dans la partie 2, les postulats (IC0)-(IC8) permettent de caractériser les opérateurs de fusion contrainte.

En supposant que l'opérateur d'agrégation Δ est lui-même un opérateur de fusion contrainte, l'opérateur de fusion itérée crédule associé vérifie certains de ces postulats. Il est à noter que le résultat ci-dessous est valable pour tous les opérateurs de fusion itérée crédule et pas seulement ceux définis à partir de distance.

Théorème 5.4. Si l'opérateur d'agrégation Δ est un opérateur de fusion contrainte, alors l'opérateur de fusion itérée crédule correspondant vérifie les postulats (IC0)-(IC3), (IC7) et (IC8).

Démonstration.

(IC0) Comme l'opérateur d'agrégation est un opérateur de fusion contrainte, on a : $\forall i, \Delta_\mu(E^i) \models \mu$, et en particulier pour $E^i = E^*$.

(IC1) Si μ est cohérent, alors comme Δ est un opérateur de fusion contrainte, $\Delta_\mu(E^*)$ est cohérent.

(IC2) Supposons que $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \not\equiv \bot$ et que l'opérateur d'agrégation est un opérateur de fusion contrainte. D'après le postulat (IC2) pour l'opérateur d'agrégation, $\Delta_\mu(E^0) \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0$. Ce qui donne, pour un j donné, $K_j^1 \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^0)}(K_j^0) \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0$. On peut appliquer une nouvelle fois ce raisonnement puisque $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^1 \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \not\equiv \bot$, d'où : $\Delta_\mu(E^1) \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^1 \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv \Delta_\mu(E^0)$. On peut maintenant connaître, pour j donné, K_j^2 : $K_j^2 \equiv \Delta_{\Delta_\mu(E^1)}(K_j^1) \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^1 \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv K_j^1$.

(IC3) La définition de l'opération de fusion itérée est entièrement basée sur les modèles de μ et des K_j^0, donc (IC3) est évidente.

(IC7) Si Δ est un opérateur de fusion contrainte, alors pour tout profil E, $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$. Ainsi, pour un profil E donné, on a : $\Delta_{\mu_1}(E^*) \wedge \mu_2 \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E^*)$, c'est-à-dire ${}^*\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models {}^*\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$.

(IC8) Si Δ est un opérateur de fusion contrainte, alors pour tout profil E, si $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$. En prenant $E = E^*$, cette propriété reste vraie et prouve (IC8) pour l'opérateur de fusion itérée crédule.

□

Ainsi, dans le cas où il existe un modèle commun à toutes les bases du profil, et que ce modèle est également un modèle des contraintes, la fusion itérée crédule converge.

Corollaire 5.4.1. Si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0$ est cohérent, alors la convergence se fait en au plus une itération.

5.3.2 Distance drastique

Nous savons maintenant caractériser les opérateurs de fusion itérée crédule utilisant la distance drastique. Nous pouvons donc vérifier s'ils satisfont les postulats de fusion contrainte.

Théorème 5.5. L'opérateur de fusion itérée crédule ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}$ vérifie (IC0)-(IC5), (IC7)-(IC8) et (Arb), et ne vérifie pas (IC6) et (Maj).

Démonstration.

Pour simplifier l'écriture, les indices j_1 désignent les bases K_{j_1} de E_1, et j_2 les bases K_{j_2} de E_2.

(IC0)-(IC3),(IC7)-(IC8) Cela a été démontré dans le théorème 5.4

(IC4) Supposons que $K_1 \models \mu$, $K_2 \models \mu$. Supposons également que $\mu \not\equiv \bot$ (dans le cas contraire, le résultat est immédiat). On connaît la valeur de ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(K_1 \sqcup K_2)$ par le théorème 5.2.

– Si $\mu \wedge \bigwedge_{j:K_j \not\equiv \bot} K_j \not\equiv \bot$, alors, d'après les hypothèses précédentes, $\mu \wedge \bigwedge_j K_j$ est cohérent. En utilisant la propriété (IC2) (théorème 5.4), on a : ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(K_1 \sqcup K_2) \wedge K_1 \equiv K_1 \wedge K_2 \equiv {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(K_1 \sqcup K_2) \wedge K_2 \not\models \bot$.

– Sinon, ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(K_1 \sqcup K_2) \equiv \mu$. Ainsi, ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(K_1 \sqcup K_2) \wedge K_1 \equiv K_1 \not\models \bot$ et ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(K_1 \sqcup K_2) \wedge K_2 \equiv K_2 \not\models \bot$

(IC5) Grâce au théorème 5.2, on connaît ce que valent ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1)$, ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2)$, et ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1 \sqcup E_2)$.

– Si $\mu \wedge \bigwedge_{j_1:\mu\wedge K_{j_1} \not\equiv \bot} K_{j_1}$ est cohérent, et si $\mu \wedge \bigwedge_{j_2:\mu\wedge K_{j_2} \not\equiv \bot} K_{j_2}$ est également cohérent, alors ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1) \equiv \mu \wedge \bigwedge_{j_1:\mu\wedge K_{j_1} \not\equiv \bot} K_{j_1}$, et ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2) \equiv \mu \wedge \bigwedge_{j_2:\mu\wedge K_{j_2} \not\equiv \bot} K_{j_2}$. Si $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j \not\equiv \bot} K_j$ est cohérent, alors ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1 \sqcup E_2) \equiv \mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j \not\equiv \bot} K_j \equiv {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1) \wedge {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2)$ (associativité du $\wedge$). Sinon, ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1) \wedge {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2)$ n'est pas cohérent, donc (IC5) est vérifiée.

– Sinon, $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j \not\equiv \bot} K_j$ n'est pas cohérent, d'où ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1 \sqcup E_2) \equiv \mu$. Comme ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1) \wedge {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2) \models \mu$ (propriété (IC0), cf théorème 5.4), (IC5) est encore vérifiée.

(IC6) Supposons que E_1 et E_2 sont tels que : $\mu \wedge \bigwedge_{j_1:\mu\wedge K_{j_1} \not\equiv \bot} K_{j_1}$ n'est pas cohérent, et $\mu \wedge \bigwedge_{j_2:\mu\wedge K_{j_2} \not\equiv \bot} K_{j_2}$ est cohérent, sans être équivalent à μ. μ étant cohérent, cette situation existe. Dans ce cas, on a ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1) \equiv \mu$ et ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2) \equiv \mu \wedge \bigwedge_{j_2:\mu\wedge K_{j_2} \not\equiv \bot} K_{j_2}$, donc ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1) \wedge {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2) \equiv {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2)$ (d'après (IC0)). Comme $\mu \wedge \bigwedge_{j_2:\mu\wedge K_{j_2} \not\equiv \bot} K_{j_2}$ est cohérent sans être équivalent à μ, $\mu \not\models {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1) \wedge {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2)$.De plus, $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j \not\equiv \bot} K_j$ n'est pas cohérent (à cause de E_1), donc ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1 \sqcup E_2) \equiv \mu$. Ainsi (IC6) n'est pas vérifiée.

(Maj) De façon générale, si la fonction d'agrégation « Max » est utilisée, alors on prouve par une récurrence immédiate que $\forall m, {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{m}) \equiv {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1 \sqcup E_2)$. Ainsi, en prenant E_1 et E_2 tels que ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1 \sqcup E_2) \not\models {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2)$, on a : $\forall m, {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{m}) \not\models {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2)$. Par exemple, en prenant 2 variables $\{a, b\}$ et deux bases $K_1 \equiv \neg a \wedge \neg b$ et $K_2 \equiv \neg a \wedge b$, avec $\mu \equiv \top$, on a : ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{m}) \equiv {}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_1 \sqcup E_2) \equiv \top$, et ${}^*\Delta_\mu^{d_D,Max}(E_2) \equiv \neg a \wedge b$.

(Arb) Supposons que ${}^*\Delta_{\mu_1}^{d_D,Max}(K_1) \equiv {}^*\Delta_{\mu_2}^{d_D,Max}(K_2)$, ${}^*\Delta_{\mu_1 \Leftrightarrow \neg\mu_2}^{d_D,Max}(K_1 \sqcup K_2) \equiv (\mu_1 \Leftrightarrow \neg\mu_2)$, $\mu_1 \not\models \mu_2$, et que $\mu_2 \not\models \mu_1$. On a alors : $\mu_1 \wedge K_1 \not\equiv \bot$. En effet, dans le cas contraire, on aurait : ${}^*\Delta_{\mu_1}^{d_D,Max}(K_1) \equiv \mu_1$, et comme ${}^*\Delta_{\mu_1}^{d_D,Max}(K_1) \equiv {}^*\Delta_{\mu_2}^{d_D,Max}(K_2)$, on aurait $\mu_1 \models \mu_2$. De même, on a : $\mu_2 \wedge K_2 \not\equiv \bot$. On en déduit, par le théorème 5.2, que $\mu_1 \wedge K_1 \equiv {}^*\Delta_{\mu_1}^{d_D,Max}(K_1) \equiv {}^*\Delta_{\mu_2}^{d_D,Max}(K_2) \equiv \mu_2 \wedge K_2$. On peut en déduire que $\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge K_1 \wedge K_2 \not\equiv \bot$. Pour montrer que ${}^*\Delta_{\mu_1 \vee \mu_2}^{d_D,Max}(K_1 \sqcup K_2) \equiv {}^*\Delta_{\mu_1}^{d_D,Max}(K_1)$, il reste à montrer que $(\mu_1 \oplus \mu_2) \wedge K_1 \wedge K_2 \equiv \bot$ (c'est-à-dire que tous les cas de consensus initiaux sont des modèles de $\mu_1 \wedge \mu_2$). Il suffit de remarquer que $\mu_1 \wedge \neg\mu_2 \wedge K_1 \wedge K_2 \equiv \mu_2 \wedge \neg\mu_2 \wedge K_2 \equiv \bot$, de même pour $\neg\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge K_1 \wedge K_2$.

□

Théorème 5.6. L'opérateur de fusion itérée crédule ${}^*\Delta_\mu^{d_D,GMax}$ vérifie les postulats (IC0)-(IC8), (Maj) et (Arb).

Démonstration. Nous avons vu que ${}^*\Delta_\mu^{d_D,GMax} = \Delta_\mu^{d_D,GMax}$. La démonstration pour cet opérateur est faite dans [Kon99], théorème 95 p162. □

5.3.3 Distance de Hamming

La caractérisation des opérateurs de fusion itérée crédule utilisant la distance de Hamming ne s'appuie jusqu'ici que sur très peu de résultats. Nous avons vu que le résultat de la fusion n'avait pas pu être calculé simplement, et qu'aucune inclusion avec les opérateurs de fusion usuels n'existait. Nous allons voir que les postulats de rationalité vont permettre cette fois-ci une caractérisation intéressante pour ces opérateurs.

Théorème 5.7. L'opérateur de fusion itérée crédule ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ vérifie le postulat (Maj), mais pas les postulats (IC5), (IC6) et (Arb).

Démonstration.

(IC5) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (IC5). On se place dans le cadre d'un langage à trois variables $\{a, b, c\}$. On prend $E_1 = \langle K_1, K_2\rangle$, $E_2 = \langle K_3, K_4\rangle$, et $E = E_1 \sqcup E_2$.

$\omega \setminus d(\omega, .)$	K_1^i	K_2^i	K_3^i	K_4^i	E^i	K_1^i	K_2^i	E_1^i	K_3^i	K_4^i	E_2^i
(0,0,0)	2,1,1	3,2,2	0,1,1	1,1,1	6,5,5	2,1	3,2	5,3	0,0,0	1,1,1	1,1,1
(0,0,1)	1,0,0	2,1,1	1,0,0	0,0,0	4,1,1	1,0	2,1	3,1	1,1,1	0,0,0	1,1,1
(0,1,0)	1,0,2	2,3,3	1,0,2	0,0,2	4,3,9	1,0	2,1	3,1	1,1,1	0,0,0	1,1,1
(0,1,1)	0,1,1	1,2,2	1,1,1	1,1,1	3,5,5	0,1	1,2	1,3	1,2,2	1,1,1	2,3,3
(1,0,0)	3,2,2	2,1,1	1,1,1	1,1,1	7,5,5	3,2	2,1	5,3	1,1,1	1,1,2	2,2,3
(1,0,1)	2,1,1	1,0,0	1,0,0	0,0,0	4,1,1	2,1	1,0	3,1	1,2,2	0,0,1	1,2,3
(1,1,0)	2,1,3	1,2,2	1,1,2	1,1,2	5,5,9	2,1	1,0	3,1	1,2,2	1,1,1	2,3,3
(1,1,1)	1,2,2	0,1,1	0,1,1	1,1,1	2,5,5	1,2	0,1	1,3	0,3,3	1,1,2	1,4,5

Ainsi, l'interprétation $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ est modèle de ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E_1) \wedge {}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E_2)$, mais pas de ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E_1 \sqcup E_2)$.

(IC6) L'exemple ci-dessus tient également lieu de contre-exemple pour le postulat (IC6), puisque l'interprétation $(a, b, c) = (1, 0, 1)$ est modèle de ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E_1 \sqcup E_2)$ mais pas de ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E_1) \wedge {}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}(E_2)$.

(Maj) Soient E_1 et E_2 deux profils donnés. Pour ω donné, on a : $\forall i, d_\Sigma(\omega, E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}) = d_\Sigma(\omega, E_1^i) + m.d_\Sigma(\omega, E_2^i)$. Donc pour m suffisamment grand (par exemple pour $m > \max_{\omega,\omega' \in \mathcal{W}} d(\omega, \omega')$), on a $\forall i, \Delta_\mu(E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}) \equiv \Delta_\mu(E_2^i)$. En prenant i suffisamment grand (tel que la convergence de $(\Delta_\mu(E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}))_i$ et la convergence de $(\Delta_\mu(E_2^i))_i$ soient atteintes), on obtient le postulat (Maj).

(Arb) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (Arb). On se place dans le cadre d'un langage à trois variables. On note $E = \langle K_1, K_2\rangle$.

$\omega \setminus d(\omega, .)$	μ_1	μ_2	K_1^i	K_2^i	E^i	${}^*\Delta_{\mu_1}^{d_H,\Sigma}(K_1)$	${}^*\Delta_{\mu_2}^{d_H,\Sigma}(K_2)$
(0,0,0)	0	0	1	0	1	0	0
(0,0,1)	0	0	2	1	3	1	1
(0,1,0)	1	0	0	1	1	1	1
(0,1,1)	1	1	1	2	3	2	2
(1,0,0)	0	1	2	1	3	1	1
(1,0,1)	0	0	3	2	5	2	2
(1,1,0)	0	0	1	0	1	0	0
(1,1,1)	1	1	2	1	3	1	1

□

Théorème 5.8. L'opérateur de fusion itérée ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}$ ne vérifie pas les postulats (IC5), (IC6), (Maj) et (Arb).

Démonstration.

(IC5) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (IC5). On se place dans le cadre d'un langage à deux variables $\{a, b\}$. On prend $E_1 = \langle K_1, K_2\rangle$, $E_2 = \langle K_3, K_4\rangle$, et $E = E_1 \sqcup E_2$.

$\omega \setminus d(\omega, .)$	K_1^i	K_2^i	K_3^i	K_4^i	E^i	K_1^i	K_2^i	E_1^i	K_3^i	K_4^i	E_2^i
(0,0)	0,1,0	2,1,0	1,1,0	0,1,0	2,1,0	0,1	2,1	2,1	1,1,1	0,0,0	1,1,1
(0,1)	1,0,1	1,0,1	0,0,1	1,2,1	1,2,1	1,0	1,0	1,0	0,0,0	1,1,1	1,1,1
(1,0)	1,0,1	1,0,1	1,2,1	0,0,1	1,2,1	1,0	1,0	1,0	1,2,2	0,0,1	1,2,2
(1,1)	2,1,2	0,1,2	0,1,2	1,1,2	2,1,2	2,1	0,1	2,1	0,1,1	1,1,2	1,1,2

Ainsi, l'interprétation $(a, b) = (0, 1)$ est modèle de ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_1) \wedge {}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_2)$, mais pas de ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_1 \sqcup E_2)$.

(IC6) L'exemple ci-dessus tient également lieu de contre-exemple pour le postulat (IC6), puisque l'interprétation pour laquelle $(a, b) = (0, 0)$ est modèle de ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_1 \sqcup E_2)$ mais pas de ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_1) \wedge {}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_2)$.

(Maj) De façon générale, si la fonction d'agrégation Max est utilisée, alors on prouve par une récurrence immédiate que $\forall n, {}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}) \equiv {}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_1 \sqcup E_2)$. Ainsi, en prenant E_1 et E_2 tels que ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_1 \sqcup E_2) \not\models {}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_2)$, on a : $\forall m, {}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}) \not\models {}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_2)$. Par exemple, en prenant 2 variables a et b, et deux bases $K_1 \equiv \neg a \wedge \neg b$ et $K_2 \equiv \neg a \wedge b$, avec $\mu \equiv \top$, on a ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}) \equiv {}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_1 \sqcup E_2) \equiv \neg a$, et ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,Max}(E_2) \equiv \neg a \wedge b$.

(Arb) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (Arb). On se place dans le cadre d'un langage à trois variables. On note $E = \langle K_1, K_2\rangle$.

$\omega \setminus d(\omega, .)$	μ_1	μ_2	K_1^i	K_2^i	E^i	${}^{*}\Delta_{\mu_1}^{d_H,Max}(K_1)$	${}^{*}\Delta_{\mu_2}^{d_H,Max}(K_2)$
(0,0,0)	0	0	1	0	1	0	0
(0,0,1)	0	0	2	1	2	1	1
(0,1,0)	1	0	0	1	1	1	1
(0,1,1)	1	1	1	2	2	2	2
(1,0,0)	0	1	2	1	2	1	1
(1,0,1)	0	0	3	2	3	2	2
(1,1,0)	0	0	1	0	1	0	0
(1,1,1)	1	1	2	1	2	1	1

□

Théorème 5.9. L'opérateur de fusion itérée crédule ${}^{*}\Delta_{\mu}^{d_H,GMax}$ ne vérifie pas les postulats (IC5), (IC6), (Maj) et (Arb).

Démonstration.

(IC5) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (IC5). On se place dans le cadre d'un langage à deux variables $\{a, b\}$. On prend $E_1 = \langle K_1, K_2\rangle$, $E_2 = \langle K_3, K_4\rangle$, et $E = E_1 \sqcup E_2$.

$\omega \setminus d(\omega, .)$	K_1^i	K_2^i	K_3^i	K_4^i	E^i
(0,0)	0,1,0	2,1,0	1,1,0	0,1,0	(2,1,0,0),(1,1,1,1),(0,0,0,0)
(0,1)	1,0,1	1,0,1	0,0,1	1,2,1	(1,1,1,0),(2,0,0,0),(1,1,1,1)
(1,0)	1,0,1	1,0,1	1,2,1	0,0,1	(1,1,1,0),(2,0,0,0),(1,1,1,1)
(1,1)	2,1,2	0,1,2	0,1,2	1,1,2	(2,1,0,0),(1,1,1,1),(2,2,2,2)

$\omega \setminus d(\omega,.)$	K_1^i	K_2^i	E_1^i	K_3^i	K_4^i	E_2^i
(0,0)	0,1	2,1	(2,0),(1,1)	1,1,1	0,0,0	(1,0),(1,0),(1,0)
(0,1)	1,0	1,0	(1,1),(0,0)	0,0,0	1,1,1	(1,0),(1,0),(1,0)
(1,0)	1,0	1,0	(1,1),(0,0)	1,2,2	0,0,1	(1,0),(2,0),(2,1)
(1,1)	2,1	0,1	(2,0),(1,1)	0,1,1	1,1,2	(1,0),(1,1),(2,1)

Ainsi, l'interprétation $(a,b) = (0,1)$ est modèle de ${}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}(E_1) \wedge {}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}(E_2)$, mais pas de ${}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}(E_1 \sqcup E_2)$.

(IC6) L'exemple ci-dessus tient également lieu de contre-exemple pour le postulat (IC6), puisque l'interprétation pour laquelle $(a,b) = (0,0)$ est modèle de ${}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}(E_1 \sqcup E_2)$ mais pas de ${}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}(E_1) \wedge {}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}(E_2)$.

(Maj) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (Maj). On se place dans le cadre d'un langage à deux variables. On note $E = \langle K_1, \underbrace{K_2, \ldots, K_2}_{m} \rangle$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	K_1^i	K_2^i	...	K_2^i	$E^i_{\Delta_\mu(E^i)}$	K_2^i	$K^i_{2\Delta_\mu(K_2^i)}$
(0,0)	2,2	0,2	...	0,2	$(2,0,...,0)_2,(2,2,...,2)_2$	0,0	$0_0,0_0$
(0,1)	1,1	1,1	...	1,1	$(1,1,...,1)_1,(1,1,...,1)_1$	1,1	$1_1,1_1$
(1,0)	1,1	0,1	...	0,1	$(1,0,...,0)_1,(1,1,...,1)_1$	0,1	$0_1,1_1$
(1,1)	0,0	1,0	...	1,0	$(1,...,1,0)_0,(0,0,...,0)_0$	1,2	$1_2,2_2$

Ainsi, dans cet exemple, on a : $\forall m, {}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}(E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}) \not\models {}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}(E_2)$.

(Arb) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (Arb). On se place dans le cadre d'un langage à trois variables. On note $E = \langle K_1, K_2 \rangle$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	μ_1	μ_2	K_1^i	K_2^i	E^i	${}^*\Delta_{\mu_1}^{d_H,GMax}(K_1)$	${}^*\Delta_{\mu_2}^{d_H,GMax}(K_2)$
(0,0,0)	0	0	1	0	(1,0)	0	0
(0,0,1)	0	0	2	1	(2,1)	1	1
(0,1,0)	1	0	0	1	(1,0)	1	1
(0,1,1)	1	1	1	2	(2,1)	2	2
(1,0,0)	0	1	2	1	(2,1)	1	1
(1,0,1)	0	0	3	2	(3,2)	2	2
(1,1,0)	0	0	1	0	(1,0)	0	0
(1,1,1)	1	1	2	1	(2,1)	1	1

□

Il est à noter que le postulat (IC4) n'a pas pu être démontré ou démenti pour ces trois opérateurs. Nous conjecturons toutefois que ces opérateurs vérifient le postulat (IC4). Cela a été testé sur une grande quantité d'instances et a toujours été vérifié expérimentalement. De plus, ce postulat énonce le fait que la fusion contrainte ne privilégie aucune base du profil, ce qui parait raisonnable ici. La démonstration de ce postulat nécessite malheureusement de connaître le résultat de la fusion itérée crédule pour ces opérateurs, ce qui n'est pas le cas ici.

5.3.4 Tableau récapitulatif

Le tableau 5.8 résume les propriétés de fusion contrainte vérifiées par les opérateurs de fusion itérée crédule utilisant la distance drastique et la distance de Hamming.

	drastique			Hamming		
	Σ	Max	GMax	Σ	Max	GMax
(IC0)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(IC1)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(IC2)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(IC3)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(IC4)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	?	?	?
(IC5)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	x	x	x
(IC6)	$\surd$	x	$\surd$	x	x	x
(IC7)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(IC8)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(Maj)	$\surd$	x	$\surd$	$\surd$	x	x
(Arb)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	x	x	x

Tab. 5.8 – Postulats de fusion contrainte pour la fusion itérée crédule

5.4 Points de consensus

Un autre moyen de caractériser les opérateurs de fusion itérée crédule est d'étudier les cas où un point de consensus est atteint entre les agents. Rappelons qu'un point de consensus est atteint lorsque toutes les bases du profil possèdent un modèle commun parmi les modèles de μ à l'itération i alors qu'elles n'en possédaient pas initialement. Cela peut être vu comme une capacité à « mettre tous les agents d'accord » pour ces opérateurs. Nous venons de voir que le postulat (IC2) est vérifié pour les opérateurs de fusion itérée crédule. Ce postulat assure la convergence si un point de consensus apparait. Cela montre l'intérêt que l'on peut porter à cette propriété.

5.4.1 Distance drastique

Les opérateurs de fusion itérée crédule usuels utilisant la distance drastique étant entièrement caractérisés, nous pouvons déterminer les cas menant à l'apparition d'un point de consensus.

Théorème 5.10. Pour l'opérateur ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$, un point de consensus est atteint si et seulement si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0$ n'est pas cohérent et si :
$(\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \perp} K_j^0$ est cohérent) ou ($\forall j, \mu \wedge K_j^0$ n'est pas cohérent)
Dans le premier cas, les modèles du point de consensus sont les modèles de $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \perp} K_j^0$.
Dans le second, les modèles du point de consensus sont les modèles de μ.

Démonstration. Pour qu'un point de consensus apparaisse, il faut qu'il n'y ait pas de consensus au départ. Il faut donc que $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv \perp$.

- Si $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \perp} K_j^0$ est cohérent, alors d'après le théorème 5.1, $K_j^* \equiv \mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \perp} K_j^0$ ce qui constitue le point de consensus.
- Si $\forall j, \mu \wedge K_j^0$ n'est pas cohérent, alors d'après le théorème 5.1 $\forall j, K_j^* \equiv \mu$

Réciproquement, supposons que $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \perp} K_j^0$ n'est pas cohérent et que $\exists j, \mu \wedge K_j^0$ est cohérent. Pour qu'il y ait consensus, il faut qu'il existe ω tel que $\omega \models \bigwedge_j K_j^*$.

Or $K_j^* \equiv \begin{cases} \mu \wedge K_j^0 \text{ si } \mu \wedge K_j^0 \text{ est cohérent} \\ \mu \text{ sinon} \end{cases}$

Soit $\omega \models \mu$ (on sait que $\bigwedge_j K_j^* \models \mu$).

- ▷ Si $\omega \not\models \bigvee_j K_j^0$, on sait qu'il existe j' tel que $\mu \wedge K_{j'}^0$ est cohérent, et donc $K_{j'}^* \equiv \mu \wedge K_{j'}^0$, d'où $\omega \not\models K_{j'}^*$.
- ▷ Si $\omega \models \bigvee_j K_j^0$, il existe j'' tel que $\omega \not\models K_{j''}^0$ et $\mu \wedge K_{j''}^0 \not\equiv \perp$ (sinon $\mu \wedge \bigwedge_{j:\mu\wedge K_j^0 \not\equiv \perp} K_j^0$ devient cohérent). On a alors $K_{j''}^* \equiv \mu \wedge K_{j''}^0$, d'où $\omega \not\models K_{j''}^*$.

□

Corollaire 5.10.1. Si $\mu \equiv \top$, alors il ne peut pas y avoir de point de consensus.

Démonstration. On sait, par définition de l'opérateur de fusion itérée, que $\forall j, K_j^0$ est cohérent, ce qui donne immédiatement le résultat. □

Théorème 5.11. L'opérateur de fusion itérée crédule ${}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}$ atteint un point de consensus si et seulement si il n'y a pas de consensus initial et si $\mu \wedge \bigwedge\limits_{j:K_j^0\wedge \Delta_\mu(E^0)\not\equiv\perp} K_j^0$ est cohérent ou si $\forall j, K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0)$ n'est pas cohérent.

Démonstration.

- Si $\mu \wedge \bigwedge_{j:K_j^0\wedge \Delta_\mu(E^0)\not\equiv\perp} K_j^0 \not\equiv \perp$, prenons $\omega \models \mu \wedge \bigwedge_{j:K_j^0\wedge \Delta_\mu(E^0)\not\equiv\perp} K_j^0$. Par définition de l'opérateur « GMax », $\omega \models \Delta_\mu(E^0)$.
  - ▷ Pour tout j tel que $K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \not\equiv \perp$, on sait que $\omega \models K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0)$, donc d'après le théorème 4.1 iii), $\omega \models K_j^1$.
  - ▷ Pour tout j tel que $K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \equiv \perp$, on a : $\forall \omega' \models \Delta_\mu(E^0), d(\omega', K_j^0) = 1$ donc $K_j^1 \equiv \Delta_\mu(E^0)$. Comme $\omega \models \Delta_\mu(E^0)$, $\omega \models K_j^1$.

  Donc $\omega \models \bigwedge_j K_j^1$, c'est un point de consensus.
- Si $\forall j, K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \equiv \perp$ alors $\forall j, K_j^1 \equiv \Delta_\mu(E^0)$, ce qui correspond à un point de consensus.

Réciproquement, supposons que $\mu \wedge \bigwedge_{j:K_j^0\wedge \Delta_\mu(E^0)\not\equiv\perp} K_j^0 \equiv \perp$ et que $\exists j, K_j^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \not\equiv \perp$. Soit ω' tel que $\omega' \models \Delta_\mu(E^0)$. On sait qu'il existe j' tel que $K_{j'}^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \not\equiv \perp$ et $\omega' \not\models K_{j'}^0$. Comme $K_{j'}^0 \wedge \Delta_\mu(E^0) \not\equiv \perp$, il existe ω'' tel que $\omega'' \models K_{j'}^0 \wedge \Delta_\mu(E^0)$. Ainsi, on aura : $\omega' \not\models K_{j'}^1$ et $\omega'' \models K_{j'}^1$. Ceci montre qu'aucun modèle de $\Delta_\mu(E^0)$ ne peut être modèle d'un point de consensus, et donc qu'un tel point ne peut exister. □

5.4.2 Distance de Hamming

La caractérisation des opérateurs de fusion itérée crédule usuels utilisant la distance de Hamming n'ayant pu aboutir, il n'a pas été possible de déterminer un critère pour l'apparition de points de consensus. Nous nous contenterons de donner ici un exemple de point de consensus pour chacun de ces opérateurs. Nous avons déjà rencontré des points de consensus pour ces opérateurs. Nous pouvons citer ici l'exemple des quatre co-propriétaires, qui donne lieu à un point de consensus pour les trois opérateurs : ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$, ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$ et ${}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}$. Les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3 détaillent ces instances.

Troisième partie

Fusion itérée sceptique

6 Définitions et propriétés

La fusion itérée crédule consistait pour chaque agent, à chaque itération, à réviser ses croyances par le résultat de l'agrégation obtenu à l'itération précédente. Dans cette partie, nous allons définir et étudier un autre type de fusion itérée : la fusion itérée sceptique. Celle-ci se différencie de la fusion itérée crédule par le fait que chaque agent effectue la révision « dans l'autre sens », c'est-à-dire qu'il révise le résultat de l'agrégation par ses croyances. Cette approche confère des propriétés bien différentes aux opérateurs ainsi définis.

6.1 Définitions et notations

Les opérateurs de fusion itérée sceptique seront notés Δ_μ^*. Les notations adoptées dans cette partie seront identiques à celles utilisées pour la fusion itérée crédule (dans le paragraphe 3.1) à l'exception de ce qui suit.

Définition 6.1. Soit E un profil de croyances. On note $*$ l'opérateur de révision défini à partir de l'opérateur de fusion contrainte Δ_μ par : $\varphi * \varphi' = \Delta_{\varphi'}(\varphi)$.

- On définit la suite $(E^i)_i$ par :
  - $E^0 = E$
  - $E^{i+1} = \Delta_\mu(E^i) * E^i$ où $\varphi * \langle K_1, \ldots, K_n \rangle = \langle \varphi * K_1, \ldots, \varphi * K_n \rangle$
- On désigne par i^* l'itération à partir de laquelle le point fixe sur les profils est atteint, c'est-à-dire :

$$i^* = \min\{i : \forall i' > i, E^{i'} = E^i\}$$

  On note :

$$K_j^* = K_j^{i^*} \text{ et } E^* = \langle K_1^*, \ldots, K_n^* \rangle$$

- Par définition :

$$\Delta_\mu^*(E) = \Delta_\mu(E^*)$$

Les définitions de $*$ et de $(E^i)_i$ ont pour conséquence que les modèles de K_j^{i+1} sont les modèles de K_j^i les plus proches de $\Delta_\mu(E^i)$:

$$K_j^{i+1} \equiv \Delta_{K_j^i}(\Delta_\mu(E^i))$$

6.2 L'exemple des co-propriétaires

Observons dès à présent le comportement de ces opérateurs sur l'exemple des quatre co-propriétaires. Nous utilisons ici la distance de Hamming et les fonctions d'agrégation usuelles.

Les tableaux 6.1, 6.2 et 6.3 détaillent les calculs de la fusion itérée sceptique pour les opérateurs ${\Delta_\mu^*}^{d_H,\Sigma}$, ${\Delta_\mu^*}^{d_H,Max}$ et ${\Delta_\mu^*}^{d_H,GMax}$ sur l'exemple des co-propriétaires. Nous utilisons dans cette partie les mêmes conventions pour représenter les exemples de fusion itérée sceptique que pour le cas crédule. La seule différence se situe dans la colonne des $d(\omega, E^i)$, dans laquelle on précise en indice les distances des interprétations à $\Delta_\mu(E^i)$. Cette information est nécessaire dans le cas sceptique puisque pour déterminer les modèles de K_j^{i+1}, on choisit les modèles de K_j^i les plus proches de $\Delta_\mu(E^i)$. Les modèles de ${\Delta_\mu^*}^{d,f}$ sont donc les interprétations pour lesquelles la distance $d(\omega, \Delta_\mu(E^i))$ (indiquée en indice) dans la dernière colonne est nulle.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_\Sigma(\omega, E^i)_{d(\omega,\Delta_\mu(E^i))}$
(0,0,0,0)	3,3	3,3	0,0	2,3	8_4, 9_1
(0,0,0,1)	3,4	3,4	1,1	3,4	10_3,13_2
(0,0,1,0)	2,2	2,2	1,1	1,2	6_3, 7_0
(0,0,1,1)	2,3	2,3	2,2	2,3	8_2, 11_1
(0,1,0,0)	2,2	2,2	1,1	1,2	6_3, 7_0
(0,1,0,1)	2,3	2,3	2,2	2,3	8_2, 11_1
(0,1,1,0)	1,1	1,1	2,2	0,1	4_2 5_1
(0,1,1,1)	1,2	1,2	3,3	1,2	6_1, 9_1
(1,0,0,0)	2,2	2,2	1,1	2,2	7_3, 7_0
(1,0,0,1)	2,3	2,3	2,2	3,3	9_2, 11_1
(1,0,1,0)	1,1	1,1	2,2	1,1	5_2 5_1
(1,0,1,1)	1,2	1,2	3,3	2,2	7_1, 9_1
(1,1,0,0)	1,1	1,1	2,2	1,1	5_2 5_1
(1,1,0,1)	1,2	1,2	3,3	2,2	7_1, 9_1
(1,1,1,0)	0,0	0,0	3,3	0,0	3_1 3_1
(1,1,1,1)	0,1	0,1	4,4	1,1	5_0, 7_0

TAB. 6.1 – Exemple des co-propriétaires avec l'opérateur ${\Delta_\mu^*}^{d_H,\Sigma}$

On observe que, contrairement à la fusion itérée crédule, il n'y a pas d'« entrée dans les contraintes » à la première itération. Les modèles de K_j^i pour $i > 0$ ne sont plus forcément modèles de μ.

Ici, les résultats obtenus avec ${\Delta_\mu^*}^{d_H,Max}$ et ${\Delta_\mu^*}^{d_H,GMax}$ sont identiques à ceux de ${}^*\Delta_\mu^{d_H,Max}$ et ${}^*\Delta_\mu^{d_H,GMax}$, mais il n'en est pas toujours ainsi. De même, les modèles de ${}^*\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$ sont inclus dans ceux de ${\Delta_\mu^*}^{d_H,\Sigma}$, mais ce n'est pas la règle générale.

Ici, les résultats de la fusion pour les opérateurs ${\Delta_\mu^*}^{d_H,Max}$ et ${\Delta_\mu^*}^{d_H,GMax}$ sont identiques (c'est un cas particulier). Ces deux opérateurs choisissent le cas où l'on construit soit le court de tennis, soit le parking privé. L'opérateur ${\Delta_\mu^*}^{d_H,\Sigma}$ sélectionne ici soit la construction de l'un des trois éléments (sans augmentation de loyer), soit la construction des trois éléments (et l'augmentation du loyer).

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)_{d(\omega,\Delta_\mu(E^i))}$
(0,0,0,0)	3,3	3,3	0,0	2,2	3_1,3_1
(0,0,0,1)	3,4	3,4	1,1	3,3	3_1,4_2
(0,0,1,0)	2,2	2,2	1,1	1,1	2_0,2_0
(0,0,1,1)	2,3	2,3	2,2	2,2	2_0,3_1
(0,1,0,0)	2,2	2,2	1,1	1,1	2_0,2_0
(0,1,0,1)	2,3	2,3	2,2	2,2	2_0,3_1
(0,1,1,0)	1,1	1,1	2,2	0,0	2_1,2_1
(0,1,1,1)	1,2	1,2	3,3	1,1	3_1,3_2
(1,0,0,0)	2,2	2,2	1,1	2,3	2_0,3_2
(1,0,0,1)	2,3	2,3	2,2	3,4	3_1,4_3
(1,0,1,0)	1,1	1,1	2,2	1,2	2_1,2_1
(1,0,1,1)	1,2	1,2	3,3	2,3	3_1,3_2
(1,1,0,0)	1,1	1,1	2,2	1,2	2_1,2_1
(1,1,0,1)	1,2	1,2	3,3	2,3	3_1,3_2
(1,1,1,0)	0,0	0,0	3,3	0,1	3_2,3_2
(1,1,1,1)	0,1	0,1	4,4	1,2	4_2,4_3

TAB. 6.2 – Exemple des co-propriétaires avec l'opérateur $\Delta_\mu^{*\ d_H,Max}$

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_{GMax}(\omega, E^i)_{d(\omega,\Delta_\mu(E^i))}$
(0,0,0,0)	3,3	3,3	0,0	2,2	$(3,3,2,0)_1$,$(3,3,2,0)_1$
(0,0,0,1)	3,4	3,4	1,1	3,3	$(3,3,3,1)_2$,$(4,4,3,1)_2$
(0,0,1,0)	2,2	2,2	1,1	1,1	$(2,2,1,1)_0$,$(2,2,1,1)_0$
(0,0,1,1)	2,3	2,3	2,2	2,2	$(2,2,2,2)_1$,$(3,3,2,2)_1$
(0,1,0,0)	2,2	2,2	1,1	1,1	$(2,2,1,1)_0$,$(2,2,1,1)_0$
(0,1,0,1)	2,3	2,3	2,2	2,2	$(2,2,2,2)_1$,$(3,3,2,2)_1$
(0,1,1,0)	1,1	1,1	2,2	0,0	$(2,1,1,0)_1$,$(2,1,1,0)_1$
(0,1,1,1)	1,2	1,2	3,3	1,1	$(3,1,1,1)_2$,$(3,2,2,1)_2$
(1,0,0,0)	2,2	2,2	1,1	2,3	$(2,2,2,1)_2$,$(3,2,2,1)_2$
(1,0,0,1)	2,3	2,3	2,2	3,4	$(3,2,2,2)_3$,$(4,3,3,2)_3$
(1,0,1,0)	1,1	1,1	2,2	1,2	$(2,1,1,1)_1$,$(2,2,1,1)_1$
(1,0,1,1)	1,2	1,2	3,3	2,3	$(3,2,1,1)_2$,$(3,3,2,2)_2$
(1,1,0,0)	1,1	1,1	2,2	1,2	$(2,1,1,1)_1$,$(2,2,1,1)_1$
(1,1,0,1)	1,2	1,2	3,3	2,3	$(3,2,1,1)_2$,$(3,3,2,2)_2$
(1,1,1,0)	0,0	0,0	3,3	0,1	$(3,0,0,0)_2$,$(3,1,0,0)_2$
(1,1,1,1)	0,1	0,1	4,4	1,2	$(4,1,0,0)_3$,$(4,2,1,1)_3$

TAB. 6.3 – Exemple des co-propriétaires avec l'opérateur $\Delta_\mu^{*\ d_H,GMax}$

7 Convergence et monotonie

Dans ce chapitre nous étudions les propriétés liées à la monotonie et à la convergence des suites $(E^i)_i$ et $(\Delta_\mu(E^i))_i$ pour les opérateurs de fusion itérée sceptique. Nous verrons que ces propriétés exhibent les différences majeures entre les approches crédules et sceptiques.

7.1 Propriétés de monotonie

7.1.1 Monotonie dans les profils

Sauf mention contraire, les résultats de ce paragraphe sont valables pour tous les opérateurs de fusion itérée sceptique, et pas seulement ceux définis à partir de distances.

Une première propriété concerne la monotonie des bases du profil, c'est-à-dire que tout modèle de K_j^{i+1} est déjà modèle de K_j^i. Celle-ci est une conséquence directe de la définition de la fusion itérée sceptique, et constitue une différence majeure par rapport au cas crédule.

Théorème 7.1. $\forall i, \forall j, K_j^{i+1} \models K_j^i$

Démonstration. Par définition, $K_j^{i+1} = \Delta_{K_j^i}(\Delta_\mu(E^i))$. D'après le postulat (IC0) pour l'opérateur d'agrégation, on a $K_j^{i+1} \models K_j^i$. □

Cela a pour conséquence d'empêcher l'apparition de point de consensus. La seule possibilité pour qu'il y ait un consensus final est que celui-ci existe déjà dans le profil initial.

Corollaire 7.1.1. Il ne peut pas y avoir de point de consensus avec un opérateur de fusion itérée sceptique.

Si l'ancienne base et le résultat de l'agrégation sont cohérents, alors leurs modèles communs seront modèles de cette base lors de la prochaine itération.

Théorème 7.2. $\forall i, \forall j, K_j^i \wedge \Delta_\mu(E^i) \models K_j^{i+1}$

Démonstration. Par définition de la fusion itérée sceptique, on a $K_j^{i+1} \equiv \Delta_{K_j^i}(\Delta_\mu(E^i))$, ce qui donne le résultat. □

L'équivalence est même vérifiée si l'opérateur de fusion itérée sceptique est défini à partir d'une distance.

Théorème 7.3. $\forall i, \forall j$, si $K_j^i \wedge \Delta_\mu(E^i)$ est cohérent alors $K_j^{i+1} \equiv K_j^i \wedge \Delta_\mu(E^i)$.

Démonstration. D'après le théorème 7.2, $K_j^i \wedge \Delta_\mu(E^i) \models K_j^{i+1}$. Soit $\omega \models K_j^{i+1}$. Le théorème 7.1 donne : $\omega \models K_j^i$. Supposons que $\omega \not\models \Delta_\mu(E^i)$. Comme $K_j^i \wedge \Delta_\mu$ est cohérent, il existe $\omega' \models K_j^i \wedge \Delta_\mu(E^i)$. On a alors : $d(\omega', \Delta_\mu(E^i)) = 0 < d(\omega, \Delta_\mu(E^i))$, donc, comme $\omega, \omega' \models K_j^i$, on trouve que $\omega \not\models K_j^{i+1}$, ce qui est contradictoire. □

Dans ce cas, on sait également que les distances augmentent dans les bases du profil, du fait de l'inclusion des modèles.

Théorème 7.4. $\forall i, \forall j, \forall \omega, d(\omega, K_j^{i+1}) \geq d(\omega, K_j^i)$

Démonstration. C'est la conséquence immédiate du théorème 7.1 et du fait que (par définition de la distance) $d(\omega, K_j^i) = \min_{\omega' \models K_j^i} d(\omega, \omega')$. □

7.1.2 Non-monotonie et anti-monotonie

Nous venons de voir qu'un certain nombre de résultats peuvent être établis et exploités à propos de la monotonie des modèles des bases des profils. Malheureusement, il n'en est pas ainsi pour la monotonie de la suite $(\Delta_\mu(E^i))_i$. Ce paragraphe en montre quelques contre-exemples. Certains contre-exemples montreront également que la conjecture selon laquelle la monotonie entraîne l'anti-monotonie est fausse.

Le tableau 7.1 montre un cas de non-monotonie pour l'opérateur ${\Delta_\mu^*}^{d_H,\Sigma}$.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_\Sigma(\omega, E^i)_{d(\omega,\Delta_\mu(E^i))}$
(0,0,0)	1,1	1,1	1,1	1,1	4_1,4_0
(0,0,1)	2,2	2,2	0,0	0,2	4_2,6_1
(0,1,0)	1,2	0,0	2,2	0,0	3_0,4_0
(0,1,1)	2,3	1,1	1,1	1,1	5_1,6_1
(1,0,0)	0,0	1,2	2,2	0,0	3_0,4_0
(1,0,1)	1,1	2,3	1,1	1,1	5_1,6_1
(1,1,0)	0,1	0,1	3,3	1,1	4_1,6_1
(1,1,1)	1,2	1,2	2,2	2,2	6_2,8_2

TAB. 7.1 – Exemple de non-monotonie avec ${\Delta_\mu^*}^{d_H,\Sigma}$

Concernant ${\Delta_\mu^*}^{d_H,Max}$, le tableau 7.2 présente un cas de non-monotonie et d'anti-monotonie. Le tableau 7.3 illustre quant à lui un cas de « renversement de situation », et donc de non-monotonie et de non-anti-monotonie.

Le tableau 7.4 exhibe un cas de non-monotonie et de non-anti-monotonie pour l'opérateur ${\Delta_\mu^*}^{d_H,GMax}$.

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)_{d(\omega,\Delta_\mu(E^i))}$	$d_{GMax}(\omega, E^0)$	$d_\Sigma(\omega, E^0)$
(0,0,0)	0,1,2	2,2,2	0,1,1	2_1,2_2,2_0	(2,0,0)	**2**
(0,0,1)	1,1,1	1,2,3	0,0,0	1_0,2_1,3_1	**(1,1,0)**	**2**
(0,1,0)	0,0,1	1,1,1	1,2,2	1_0,2_1,2_0	**(1,1,0)**	**2**
(0,1,1)	0,0,0	1,1,2	1,1,1	1_0,1_0,2_0	**(1,1,0)**	**2**
(1,0,0)	1,2,3	1,1,1	0,0,0	1_0,2_1,3_1	**(1,1,0)**	**2**
(1,0,1)	2,2,2	0,1,2	0,1,1	2_1,2_2,2_0	(2,0,0)	**2**
(1,1,0)	1,1,2	0,0,0	1,1,1	1_0,1_0,2_0	**(1,1,0)**	**2**
(1,1,1)	1,1,1	0,0,1	1,2,2	1_0,2_1,2_0	**(1,1,0)**	**2**

TAB. 7.2 – Non-monotonie et anti-monotonie avec ${\Delta_\mu^*}^{d_H,Max}$

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)_{d(\omega,\Delta_\mu(E^i))}$
(0,0,0)	0,1,1	2,2,2	0,1,1	2_1,2_1,2_0
(0,0,1)	0,0,2	1,1,1	1,2,2	1_0,2_1,2_0
(0,1,0)	0,0,0	1,1,3	1,1,1	1_0,1_0,3_1
(0,1,1)	1,1,1	0,0,2	1,2,2	1_0,2_1,2_0
(1,0,0)	1,2,2	1,1,1	0,0,0	1_0,2_1,2_0
(1,0,1)	1,1,3	0,0,0	1,1,1	1_0,1_0,3_1
(1,1,0)	1,1,1	1,2,2	0,0,0	1_0,2_1,2_0
(1,1,1)	2,2,2	0,1,1	0,1,1	2_1,2_1,2_0

TAB. 7.3 – Renversement de situation avec ${\Delta_\mu^*}^{d_H,Max}$

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d_{GMax}(\omega, E^i)_{d(\omega,\Delta_\mu(E^i))}$
(0,0,0)	0,1,1	2,2,2	0,1,1	$(2,0,0)_1$,$(2,1,1)_1$,$(2,1,1)_1$
(0,0,1)	0,0,0	1,1,3	1,1,1	$(1,1,0)_0$,$(1,1,0)_0$,$(3,1,0)_1$
(0,1,0)	0,0,2	1,1,1	1,2,2	$(1,1,0)_0$,$(2,1,0)_1$,$(2,2,1)_2$
(0,1,1)	1,1,1	0,0,2	1,2,2	$(1,1,0)_0$,$(2,1,0)_1$,$(2,2,1)_2$
(1,0,0)	1,2,2	1,1,1	0,0,0	$(1,1,0)_0$,$(2,1,0)_1$,$(2,1,0)_0$
(1,0,1)	1,1,1	1,2,2	0,0,0	$(1,1,0)_0$,$(2,1,0)_1$,$(2,1,0)_0$
(1,1,0)	1,1,3	0,0,0	1,1,1	$(1,1,0)_0$,$(1,1,0)_0$,$(3,1,0)_1$
(1,1,1)	2,2,2	0,1,1	0,1,1	$(2,0,0)_1$,$(2,1,1)_1$,$(2,1,1)_1$

TAB. 7.4 – Non-monotonie et non-anti-monotonie avec ${\Delta_\mu^*}^{d_H,GMax}$

7.2 Convergence

Nous avons vu que nous disposons de résultats de monotonie plus intéressants que dans le cas crédule. Cela va nous permettre de montrer la convergence dans tous les cas de la suite $(E^i)_i$ pour les opérateurs de fusion itérée sceptique.

7.2.1 Théorèmes de convergence

Considérons tout d'abord le lien entre la convergence des profils et la convergence des résultats des agrégations successives. Comme pour le cas crédule, il y a équivalence entre ces deux convergences, et celles-ci se font au pire à une itération d'écart.

Théorème 7.5. La convergence de $(\Delta_\mu(E^i))_i$ entraîne la convergence des profils $(E^i)_i$. Formellement, si $\Delta_\mu(E^{i+1}) \equiv \Delta_\mu(E^i)$, alors $E^{i+1} = E^*$.

Démonstration. Supposons que $\Delta_\mu(E^{i+1}) \equiv \Delta_\mu(E^i)$. Notons $a_j^i = \min_{\omega \models K_j^i} d(\omega, \Delta_\mu(E^i))$. Par définition de la fusion itérée sceptique, $\omega \models K_j^{i+1}$ si et seulement si $d(\omega, \Delta_\mu(E^i)) = a_j^i$ et si $\omega \models K_j^i$. On peut en conclure que $a_j^{i+1} = \min_{\omega \models K_j^{i+1}} d(\omega, \Delta_\mu(E^i)) = a_j^i$,et que tout modèle de K_j^{i+1} est à une distance a_j^i de $\Delta_\mu(E^{i+1})$. Ainsi, $K_j^{i+2} \equiv K_j^{i+1}$. □

La réciproque est évidente.

Théorème 7.6. La convergence des profils $(E^i)_i$ entraîne la convergence de $(\Delta_\mu(E^i))_i$.

On peut dès lors montrer la convergence dans tous les cas de la fusion itérée sceptique. Ainsi nous montrons que la fusion itérée sceptique est bien définie. Nous exhibons également un majorant pour le nombre d'itérations avant la convergence. Celui-ci dépend du nombre de modèles des bases du profil. Le tableau 8.3 présente un exemple d'une convergence atteignant cette borne avec ${\Delta_\mu^*}^{d_H, Max}$.

Théorème 7.7. Quels que soient l'opérateur de fusion contrainte Δ_μ et la distance d utilisés :

i) l'opérateur de fusion itérée sceptique est défini,
ii) le point fixe de la suite $(E^i)_i$ est atteint en au plus $\sum_j card([\![K_j^0]\!]) - n$ itérations (n étant le nombre de bases).

Démonstration.

i) Considérons la suite $(u_i)_i$, où u_i est le nombre total de modèles dans le profil E^i, c'est-à-dire : $u_i = \sum_j card([\![K_j^i]\!])$. Le théorème 7.1 indique que cette suite est décroissante. Etant positive, elle converge.
ii) D'après le théorème 7.1, chaque modèle de K_j^{i+1} est un modèle de K_j^i, et le théorème 7.6 indique que si $E^{i+1} = E^i$ alors le point fixe est atteint, donc on peut affirmer que $(u_i)_i$ est strictement décroissante jusqu'au point fixe i^*. On sait que ce point fixe contient au moins un modèle par base, d'où un nombre maximum d'itérations de $\sum_j card([\![K_j^0]\!]) - n$.

□

7.2.2 Distance drastique

Les résultats suivants montrent que les opérateurs de fusion itérée sceptique usuels définis à partir de la distance drastique convergent en une itération. Par ailleurs, on a, comme pour le cas crédule, $\Delta_\mu^{*\ d_D,\Sigma} = \Delta_\mu^{*\ d_D,GMax}$.

Théorème 7.8. Pour la fusion itérée sceptique $\Delta_\mu^{*\ d_D,Max}$, le point fixe de la suite $(E^i)_i$ est atteint en au plus 1 itération.

Démonstration.
- Si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0$ est cohérent, alors d'après la propriété (IC2) (théorème 8.2), le point fixe est atteint en au plus une itération.
- Sinon $\Delta_\mu(E^0) \equiv \mu$, donc si $K_j^0 \wedge \mu$ est cohérent, alors $K_j^1 \equiv K_j^0 \wedge \mu$, sinon $K_j^1 \equiv K_j^0$. On en déduit que $\forall \omega \models \mu, d(\omega, K_j^0) = d(\omega, K_j^1)$. Ceci étant vrai pour tout j, on a : $\Delta_\mu(E^1) \equiv \Delta_\mu(E^0)$, et $K_j^2 \equiv K_j^1$.

□

Théorème 7.9. Pour la fusion itérée sceptique $\Delta_\mu^{*\ d_D,GMax}$, le point fixe de la suite $(E^i)_i$ est atteint en au plus 1 itération.

Démonstration.
- Si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0$ est cohérent, alors d'après la propriété (IC2) (théorème 8.2), le point fixe est atteint en au plus une itération.
- Sinon, $E^2 = E^1$. En effet, si $K_j^0 \wedge \mu \equiv \bot$, alors $\forall \omega \not\models \mu, d(\omega, K_j^0) = 1$, et donc $\forall i, K_j^i \equiv K_j^0$. Sinon, $K_j^1 \equiv \Delta_\mu(E^0) \wedge K_j^0$. Ainsi, on a : $\forall \omega \models \Delta_\mu(E^0), d_{GMax}(\omega, E^1) = d_{GMax}(\omega, E^0)$. D'après le théorème 7.4, on peut conclure que $\Delta_\mu(E^1) \equiv \Delta_\mu(E^0)$. Par conséquent, d'après le théorème 7.5, $E^1 = E^*$.

□

8 Caractérisation des opérateurs

Nous venons de voir que la fusion itérée converge dans tous les cas. Nous allons maintenant étudier ces opérateurs pour tenter de les caractériser.

8.1 Caractérisation non itérative de la fusion itérée sceptique

8.1.1 Distance drastique

Les théorèmes 7.8 et 7.9 ont montré que les opérateurs de fusion itérée sceptique usuels convergent en (au plus) une itération. Par conséquent, ils sont égaux aux opérateurs « non itérés » associés, ce qui en limite l'intérêt.

Théorème 8.1. $\Delta_\mu^{*\,d_D,Max} = \Delta_\mu^{d_D,Max}$ et $\Delta_\mu^{*\,d_D,\Sigma} = \Delta_\mu^{*\,d_D,GMax} = \Delta_\mu^{d_D,\Sigma} = \Delta_\mu^{d_D,GMax}$

8.1.2 Distance de Hamming

Malgré les résultats de convergence et la monotonie dans les bases du profil, le résultat de la fusion itérée sceptique usuelle n'a pas pu être caractérisé. La fusion itérée sceptique usuelle ne sélectionne pas, comme on pourrait le penser, les modèles les plus proches entre eux. Il faut noter que l'existence d'un critère permettant de dire, à partir du profil initial, quels seront les modèles du résultat de la fusion n'est pas assurée. Il se peut que l'on soit obligé de passer par un processus itératif pour obtenir une caractérisation.

8.2 Inclusions

Les exemples qui suivent montrent qu'aucun lien d'inclusion n'existe entre les opérateurs de fusion itérée sceptique usuels et les opérateurs de fusion contrainte usuels pour la distance de Hamming. Nous venons de voir qu'une telle étude n'avait pas lieu d'être pour la distance drastique.

Les tableaux 8.1 et 8.2 montrent qu'aucune inclusion n'a lieu entre $\Delta_\mu^{*\,d_H,\Sigma}$ et les opérateurs de fusion contrainte usuels, ni entre $\Delta_\mu^{*\,d_H,GMax}$ et les opérateurs de fusion contrainte usuels.

Le tableau 7.2 (présentant un exemple de non-monotonie et de non-anti-monotonie) montre que $\Delta_\mu^{*\,d_H,Max}$ ne raffine pas $\Delta_\mu^{d_H,Max}$ et $\Delta_\mu^{d_H,GMax}$, et qu'il n'est pas raffiné par $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$, $\Delta_\mu^{d_H,Max}$ et $\Delta_\mu^{d_H,GMax}$. Le tableau 8.3 montre qu'il ne raffine pas $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$. Ce tableau illustre également une convergence en un nombre maximum d'itérations compte tenu du nombre de modèles par base dans le profil initial (voir le théorème 7.7 *ii*)).

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d(\omega, K_4^i)$	$d_\Sigma(\omega, E^i)_{d(\omega,\Delta_\mu(E^i))}$	$d_{GMax}(\omega, E^0)$
(0,0,0)	0,0,0	0,0,0	2,2,2	1,1,2	3_0,3_0,4_0	$(2,1,0,0)_1$
(0,0,1)	1,1,1	1,1,1	1,3,3	0,0,3	3_0,5_1,8_1	$(1,1,1,0)_0$
(0,1,0)	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	4_1,4_1,4_0	$(1,1,1,1)_2$
(0,1,1)	0,2,2	1,1,2	2,2,2	1,1,2	4_1,6_2,8_1	$(2,1,1,0)_1$
(1,0,0)	1,1,1	1,1,1	1,1,1	1,1,1	4_1,4_1,4_0	$(1,1,1,1)_2$
(1,0,1)	2,2,2	1,1,2	0,2,2	1,1,2	4_1,6_2,8_1	$(2,1,1,0)_1$
(1,1,0)	2,2,2	1,1,2	0,0,0	0,0,0	3_0,3_0,4_0	$(2,1,0,0)_1$
(1,1,1)	1,3,3	0,0,3	1,1,1	1,1,1	3_0,5_1,8_1	$(1,1,1,0)_0$

Tab. 8.1 – Contre-exemple d'inclusions pour ${\Delta_\mu^*}^{d_H,\Sigma}$

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d_{GMax}(\omega, E^i)_{d(\omega,\Delta_\mu(E^i))}$	$d_\Sigma(\omega, E^0)$	$d_{Max}(\omega, E^0)$
(0,0,0)	0,0	2,2	1,1	$(2,1,0)_1$,$(2,1,0)_0$	3	2
(0,0,1)	0,0	1,1	2,2	$(2,1,0)_1$,$(2,1,0)_0$	3	2
(0,1,0)	1,1	1,3	0,0	$(1,1,0)_0$,$(3,1,0)_1$	**2**	**1**
(0,1,1)	1,1	2,2	1,1	$(2,1,1)_1$,$(2,1,1)_1$	4	2
(1,0,0)	1,1	1,1	2,2	$(2,1,1)_1$,$(2,1,1)_1$	4	2
(1,0,1)	1,1	0,0	1,3	$(1,1,0)_0$,$(3,1,0)_1$	**2**	**1**
(1,1,0)	2,2	0,2	1,1	$(2,1,0)_1$,$(2,2,1)_2$	3	2
(1,1,1)	2,2	1,1	0,2	$(2,1,0)_1$,$(2,2,1)_2$	3	2

Tab. 8.2 – Contre-exemple d'inclusions pour ${\Delta_\mu^*}^{d_H,GMax}$

ω	$d(\omega, K_1^i)$	$d(\omega, K_2^i)$	$d(\omega, K_3^i)$	$d_{Max}(\omega, E^i)_{d(\omega,\Delta_\mu(E^i))}$
(0,0,0,0)	0,0,0,0,0,0,0,0,0,0	0,0,0,0,0,0,0,0,0,0	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0
(0,0,0,1)	0,0,0,0,0,0,0,0,0,1	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	1,1,1,1,1,1,1,1,2,2	1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,2_1,2_1
(0,0,1,0)	0,0,0,1,1,1,1,1,1,1	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	1,1,2,2,2,2,2,2,2,2	1_0,1_0,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1
(0,0,1,1)	1,1,1,1,1,1,1,1,1,2	1,2,2,2,2,2,2,2,2,2	0,0,1,1,1,2,2,2,3,3	1_0,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,3_2,3_2
(0,1,0,0)	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	2,2,2,2,2,2,2,2,2,2	2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1
(0,1,0,1)	0,0,0,0,0,0,1,1,1,2	1,1,1,1,1,1,1,2,2,2	1,1,1,1,1,2,2,2,3,3	1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,2_1,2_1,2_1,3_2,3_2
(0,1,1,0)	1,1,1,2,2,2,2,2,2,2	0,0,0,0,2,2,2,2,2,2	1,1,1,1,1,3,3,3,3,3	1_0,1_0,1_0,2_1,2_2,3_2,3_2,3_2,3_2,3_2
(0,1,1,1)	1,1,1,1,1,1,2,2,2,3	1,1,1,1,2,2,2,3,3,3	0,0,0,0,0,3,3,3,4,4	1_0,1_0,1_0,1_0,2_1,3_2,3_2,3_2,4_3,4_3
(1,0,0,0)	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	0,0,0,0,0,0,0,0,0,0	1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0
(1,0,0,1)	1,1,1,1,1,1,1,1,1,2	1,1,1,1,1,1,1,2,2,2	0,0,0,0,0,0,0,0,1,1	1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,2_1,2_1,2_1
(1,0,1,0)	1,1,1,2,2,2,2,2,2,2	1,2,2,2,2,2,2,2,2,2	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	1_0,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1
(1,0,1,1)	2,2,2,2,2,2,2,2,2,3	0,2,2,2,2,2,2,3,3,3	1,1,1,1,1,1,1,1,2,2	2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,3_2,3_2,3_2
(1,1,0,0)	2,2,2,2,2,2,2,2,2,2	1,1,1,1,1,1,1,2,2,2	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1	2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1
(1,1,0,1)	1,1,1,1,1,1,2,2,2,3	0,0,0,0,0,0,0,3,3,3	1,1,1,1,1,1,1,1,2,2	1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,1_0,2_1,3_2,3_2,3_2
(1,1,1,0)	2,2,2,3,3,3,3,3,3,3	1,1,1,1,2,2,2,3,3,3	2,2,2,2,2,2,2,2,2,2	2_1,2_1,2_1,3_2,3_2,3_2,3_2,3_2,3_2,3_2
(1,1,1,1)	2,2,2,2,2,2,3,3,3,4	1,1,1,1,1,1,1,4,4,4	1,1,1,1,1,2,2,2,3,3	2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,2_1,3_2,4_3,4_3,4_3

Tab. 8.3 – ${\Delta_\mu^*}^{d_H,Max}$ ne raffine pas $\Delta_\mu^{d_H,\Sigma}$

8.3 Postulats de fusion contrainte

Nous allons maintenant tenter de caractériser les opérateurs de fusion itérée sceptique grâce aux postulats de fusion contrainte.

8.3.1 Postulats de fusion contrainte

Le théorème suivant montre que certains postulats de fusion contrainte sont vérifiés par tous les opérateurs de fusion itérée sceptique.

8.3.2 Propriétés communes

Théorème 8.2. Les opérateurs de fusion itérée sceptique vérifient les postulats (IC0)-(IC3), (IC7) et (IC8).

Démonstration.

(IC0) voir la preuve du théorème 5.4

(IC1) voir la preuve du théorème 5.4

(IC2) Supposons que $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \not\equiv \bot$ et que l'opérateur d'agrégation est un opérateur de fusion contrainte. On sait que $\bigwedge_j K_j^0$ est cohérent, donc d'après le postulat (IC2) pour l'opérateur d'agrégation, $\Delta_\mu(E^0) \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0$. Ce qui donne, pour un j donné, $K_j^1 \equiv \Delta_{K_j^0}(\Delta_\mu(E^0)) \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0$. On peut appliquer une nouvelle fois ce raisonnement puisque $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^1 \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \not\equiv \bot$, d'où : $\Delta_\mu(E^1) \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^1 \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv \Delta_\mu(E^0)$. On peut maintenant connaître, pour j donné, K_j^2 : $K_j^2 \equiv \Delta_{K_j^1}(\Delta_\mu(E^1)) \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^1 \equiv \mu \wedge \bigwedge_j K_j^0 \equiv K_j^1$.

(IC3) La définition de l'opération de fusion itérée est entièrement basée sur les modèles de μ et des K_j^0, donc est indépendante de la syntaxe.

(IC7) Si Δ est un opérateur de fusion contrainte, alors pour tout profil E, $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2 \models \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E)$, et en particulier pour $E = E^*$.

(IC8) Si Δ est un opérateur de fusion contrainte, alors pour tout profil E, si $\Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$ est cohérent, alors $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(E) \models \Delta_{\mu_1}(E) \wedge \mu_2$. En prenant $E = E^*$, cette propriété reste vraie pour les opérateurs de fusion itérée.

□

Dans le cas où il existe au moins un modèle commun à toutes les bases du profil initial, la convergence de la suite $(E^i)_i$ est assurée en au plus une itération.

Corollaire 8.2.1. Si $\mu \wedge \bigwedge_j K_j^0$ est cohérent, la convergence de la suite $(E^i)_i$ est obtenue en au plus une itération.

8.3.3 Distance drastique

Nous avons vu que les opérateurs de fusion itérée sceptique usuels basés sur la distance drastique étaient identiques aux opérateurs de fusion non-itérée correspondants. Or ces derniers ont été étudiés dans [Kon99], dont nous reportons ici les résultats.

Théorème 8.3. L'opérateur de fusion itérée sceptique $\Delta_\mu^{*\ d_D,Max}$ vérifie les postulats (IC4), (IC5) et (Arb), mais ne vérifie pas (IC6) et (Maj).

Démonstration.
- pour (IC4)-(IC6), cf. [Kon99], théorème 87 p. 151 (puisque la fusion itérée correspond ici à la fusion par intersection totale).
- pour (Maj) et (Arb), cf. [Kon99], théorème 89 p. 154 (puisqu'ici la fusion itérée correspond à la fusion non-itérée).

□

Théorème 8.4. L'opérateur de fusion itérée sceptique $\Delta_\mu^{*\ d_D,GMax}$ vérifie les postulats (IC4)-(IC6), (Maj) et (Arb).

Démonstration. cf. [Kon99], théorème 87 p. 151 (puisque $\Delta_\mu^{*\ d_D,GMax} = \Delta_\mu^{d_D,GMax}$). □

8.3.4 Distance de Hamming

Comme dans le cas crédule, les postulats de fusion contrainte sont ici un bon moyen de caractériser les opérateurs de fusion itérée sceptique usuels utilisant la distance de Hamming.

Théorème 8.5. L'opérateur de fusion itérée sceptique $\Delta_\mu^{*\ d_H,\Sigma}$ vérifie le postulat (Maj), mais ne vérifie pas les postulats (IC5), (IC6) et (Arb).

Démonstration.

(IC5) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (IC5). On se place dans le cadre d'un langage à deux variables. On prend $E_1 = \langle K_1, K_2\rangle$, $E_2 = \langle K_3, K_4\rangle$, et $E = E_1 \sqcup E_2$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	K_1^i	K_2^i	K_3^i	K_4^i	$E^i_{\Delta_\mu(E^i)}$	K_1^i	K_2^i	$E^i_{1\Delta_\mu(E_1^i)}$	K_3^i	K_4^i	$E^i_{2\Delta_\mu(E_2^i)}$
(0,0)	1,1	1,2	0,1	0,1	2_1,5_1	1,1	1,1	2_1,2_0	0	0	0_0
(0,1)	0,0	1,1	0,0	0,0	1_0,1_0	0,0	1,2	1_0,2_0	0	0	0_0
(1,0)	1,2	0,1	1,2	1,2	3_2,7_2	1,2	0,0	1_0,2_0	1	1	2_1
(1,1)	0,1	0,0	1,1	1,1	2_1,3_1	0,1	0,1	0_1,2_1	1	1	2_1

Dans ce cas, on a : $\Delta_\mu^{*\ d_H,\Sigma}(E_1) \wedge\ \Delta_\mu^{*\ d_H,\Sigma}(E_2) \not\models \Delta_\mu^{*\ d_H,\Sigma}(E_1 \sqcup E_2)$.

(IC6) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (IC6). On se place dans le cadre d'un langage à deux variables. On prend $E_1 = \langle K_1, K_2\rangle$, $E_2 = \langle K_3, K_4\rangle$, et $E = E_1 \sqcup E_2$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	K_1^i	K_2^i	K_3^i	K_4^i	$E^i_{\Delta_\mu(E^i)}$	K_1^i	K_2^i	$E^i_{1\Delta_\mu(E_1^i)}$	K_3^i	K_4^i	$E^i_{2\Delta_\mu(E_2^i)}$
(0,0)	0	1	1	0	2_0	0	1	1_0	1,1,1	0,0,0	1_0,1_0,1_0
(0,1)	1	0	1	0	2_0	1	0	1_0	1,2,2	0,0,1	1_0,2_1,3_1
(1,0)	1	2	0	1	4_1	1	2	3_1	0,0,0	1,1,1	1_0,1_0,1_0
(1,1)	2	1	0	1	4_1	2	1	3_1	0,1,1	1,1,2	1_1,2_1,3_1

Ici, $\Delta_\mu^{*\ d_H,\Sigma}(E_1)\wedge \Delta_\mu^{*\ d_H,\Sigma}(E_2)$ est cohérent et $\Delta_\mu^{*\ d_H,\Sigma}(E_1 \sqcup E_2) \not\models \Delta_\mu^{*\ d_H,\Sigma}(E_1)\wedge \Delta_\mu^{*\ d_H,\Sigma}(E_2)$.

(Maj) Soient E_1 et E_2 deux profils donnés. Pour ω donné, on a : $\forall i, d(\omega, E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}) = d(\omega, E_1^i) + m.d(\omega, E_2^i)$. Donc pour m suffisamment grand (par exemple pour $m > \max_{\omega,\omega' \in \mathcal{W}} d(\omega,\omega')$), on a $\forall i, \Delta_\mu(E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}) \equiv \Delta_\mu(E_2^i)$. En prenant i suffisamment grand (tel que la convergence de $(\Delta_\mu(E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}))_i$ et la convergence de $(\Delta_\mu(E_2^i))_i$ soient atteintes), on obtient le postulat (Maj).

(Arb) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (Arb). On se place dans le cadre d'un langage à trois variables. On note $E = \langle K_1, K_2 \rangle$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	μ_1	μ_2	K_1	K_2	$E_{\Delta^{*\ d_H,\Sigma}_{\mu_1 \vee \mu_2}(E)}$	$\Delta^{*\ d_H,\Sigma}_{\mu_1}(K_1)$	$\Delta^{*\ d_H,\Sigma}_{\mu_2}(K_2)$
(0,0,0)	0	0	1	0	1_0	0	0
(0,0,1)	0	0	2	1	3_1	1	1
(0,1,0)	1	0	0	1	1_0	1	1
(0,1,1)	1	1	1	2	3_1	2	2
(1,0,0)	0	1	2	1	3_1	1	1
(1,0,1)	0	0	3	2	5_2	2	2
(1,1,0)	0	0	1	0	1_0	0	0
(1,1,1)	1	1	2	1	3_1	1	1

□

Théorème 8.6. L'opérateur de fusion itérée sceptique $\Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu}$ ne vérifie pas les postulats (IC5)-(IC6), (Maj) et (Arb).

Démonstration.

(IC5) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (IC5). Prenons un langage à trois variables, et notons $E_1 = \langle K_1, K_2 \rangle$, $E_2 = \langle K_3, K_4 \rangle$, et $E = E_1 \sqcup E_2$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	K_1^i	K_2^i	K_3^i	K_4^i	$E^i_{\Delta_\mu(E^i)}$	$E^i_{1\Delta_\mu(E_1^i)}$	$E^i_{2\Delta_\mu(E_2^i)}$
(0,0,0)	0,0	3,3	1,1	1,1	3_1,3_1	3_1	1_0
(0,0,1)	1,1	2,2	0,0	2,2	2_0,2_0	2_0	2_1
(0,1,0)	1,1	2,2	2,2	0,0	2_0,2_0	2_0	2_1
(0,1,1)	2,2	1,1	1,1	1,1	2_1,2_1	2_1	1_2
(1,0,0)	1,1	2,2	2,2	2,2	2_0,2_0	2_0	2_1
(1,0,1)	2,2	1,1	1,1	1,3	2_0,3_1	2_0	1_0
(1,1,0)	2,2	1,1	3,3	1,1	3_1,3_1	2_0	3_2
(1,1,1)	3,3	0,0	2,2	0,2	3_1,3_2	3_1	2_1

On trouve donc que $\Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu}(E_1) \wedge \Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu}(E_2) \not\models \Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu}(E_1 \sqcup E_2)$.

(IC6) En voici un contre-exemple, en prenant $E_1 = \langle K_1 \rangle$, $E_2 = \langle K_2 \rangle$, et $[\![\mu]\!] = \mathcal{W} \setminus \{\omega_3, \omega_7\}$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	K_1^i	K_2^i	$E^i_{\Delta_\mu(E^i)}$	$\Delta_\mu(K_1^i)$	$\Delta_\mu(K_2^i)$
(0,0,0)	2,2	0,1	2_1,2_1	1	0
(0,0,1)	1,1	0,0	1_0,1_0	0	0
(0,1,0)	1,1	1,2	1_0,2_2	0	1
(0,1,1)	0,0	1,1	1_1,1_1	1	1
(1,0,0)	2,2	1,2	2_1,2_1	1	1
(1,0,1)	1,1	1,1	1_0,1_0	0	1
(1,1,0)	1,1	2,3	2_1,3_2	0	2
(1,1,1)	0,0	2,2	2_1,2_1	1	2

(Maj) La fonction d'agrégation étant le « Max », on sait que $\forall m, \Delta_\mu(E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}) \equiv \Delta_\mu(E_1 \sqcup E_2)$. De façon triviale, cette propriété persiste à chaque itération, et on a donc $\forall m, \Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu}(E_1^i \sqcup \underbrace{E_2^i \sqcup \ldots \sqcup E_2^i}_{m}) \equiv \Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu}(E_1 \sqcup E_2)$. Le contre-exemple de la propriété (IC6) ci-dessus montre un cas où $\Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu}(E_1 \sqcup E_2) \not\models \Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu}(E_2)$.

(Arb) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (Arb). On se place dans le cadre d'un langage à trois variables. On note $E = \langle K_1, K_2 \rangle$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	μ_1	μ_2	K_1	K_2	$E_{\Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu_1 \vee \mu_2}(E)}$	$\Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu_1}(K_1)$	$\Delta^{*\ d_H,Max}_{\mu_2}(K_2)$
(0,0,0)	0	0	1	0	1_0	0	0
(0,0,1)	0	0	2	1	2_1	1	1
(0,1,0)	1	0	0	1	1_0	1	1
(0,1,1)	1	1	1	2	2_1	2	2
(1,0,0)	0	1	2	1	2_1	1	1
(1,0,1)	0	0	3	2	3_2	2	2
(1,1,0)	0	0	1	0	1_0	0	0
(1,1,1)	1	1	2	1	2_1	1	1

□

Théorème 8.7. L'opérateur de fusion itérée sceptique $\Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}$ ne vérifie pas les postulats (IC5),(IC6), (Maj) et (Arb).

Démonstration.

(IC5) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (IC5). On se place dans le cadre d'un langage à deux variables. On prend $E_1 = \langle K_1, K_2\rangle$, $E_2 = \langle K_3, K_4\rangle$, et $E = E_1 \sqcup E_2$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	K_1^i	K_2^i	K_3^i	K_4^i	$E^i_{\Delta_\mu(E^i)}$
(0,0)	1,1	1,1	1,1	0,1	$(1,1,1,0)_1$,$(1,1,1,1)_0$
(0,1)	0,0	0,0	0,0	1,2	$(1,0,0,0)_0$,$(2,0,0,0)_1$
(1,0)	0,0	0,0	1,2	0,0	$(1,0,0,0)_0$,$(2,0,0,0)_1$
(1,1)	1,1	1,1	0,1	1,1	$(1,1,1,0)_1$,$(1,1,1,1)_2$

$\omega \setminus d(\omega,.)$	K_1^i	K_2^i	$E^i_{1\Delta_\mu(E_1^i)}$	K_3^i	K_4^i	$E^i_{2\Delta_\mu(E_2^i)}$
(0,0)	1	1	$(1,1)_1$	1,1,1	0,0,0	$(1,0)_0$,$(1,0)_0$,$(1,0)_0$
(0,1)	0	0	$(0,0)_0$	0,0,0	1,1,1	$(1,0)_0$,$(1,0)_0$,$(1,0)_0$
(1,0)	0	0	$(0,0)_0$	1,2,2	0,0,1	$(1,0)_0$,$(2,0)_1$,$(2,1)_1$
(1,1)	1	1	$(1,1)_1$	0,1,1	1,1,2	$(1,0)_1$,$(1,1)_1$,$(2,1)_1$

Dans ce cas, on a : $\Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}(E_1) \wedge \Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}(E_2) \not\models \Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}(E_1 \sqcup E_2)$.

(IC6) L'exemple précédent est également un contre-exemple pour le postulat (IC6). En effet, $\Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}(E_1)\wedge \Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}(E_2)$ est cohérent, et $\Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}(E_1 \sqcup E_2) \not\models \Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}(E_1)\wedge \Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}(E_2)$.

(Maj) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (Maj). On se place dans le cadre d'un langage à deux variables. On note $E = \langle K_1, \underbrace{K_2, \ldots, K_2}_{m}\rangle$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	K_1^i	K_2^i	$\ldots$	K_2^i	$E^i_{\Delta_\mu(E^i)}$	K_2^i	$\langle K_2^i\rangle_{\Delta_\mu(K_2^i)}$
(0,0)	2,2	0,1	$\ldots$	0,1	$(2,0,...,0)_2$,$(2,1,...,1)_2$	0,0	0_0,0_0
(0,1)	1,1	1,2	$\ldots$	1,2	$(1,1,...,1)_1$,$(2,...,2,1)_1$	1,1	1_1,1_1
(1,0)	1,1	0,0	$\ldots$	0,0	$(1,0,...,0)_1$,$(1,0,...,0)_1$	0,1	0_1,1_1
(1,1)	0,0	1,1	$\ldots$	1,1	$(1,...,1,0)_0$,$(1,...,1,0)_0$	1,2	1_2,2_2

Ainsi, dans cet exemple, on a : $\forall m, \Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}(E_1 \sqcup \underbrace{E_2 \sqcup \ldots \sqcup E_2}_{m}) \not\models \Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu}(E_2)$.

(Arb) L'exemple suivant est un contre-exemple du postulat (Arb). On se place dans le cadre d'un langage à trois variables. On note $E = \langle K_1, K_2\rangle$.

$\omega \setminus d(\omega,.)$	μ_1	μ_2	K_1	K_2	$E_{\Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu_1 \vee \mu_2}(E)}$	$\Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu_1}(K_1)$	$\Delta^{*\ d_H,GMax}_{\mu_2}(K_2)$
(0,0,0)	0	0	1	0	$(1,0)_0$	0	0
(0,0,1)	0	0	2	1	$(2,1)_1$	1	1
(0,1,0)	1	0	0	1	$(1,0)_0$	1	1
(0,1,1)	1	1	1	2	$(2,1)_1$	2	2
(1,0,0)	0	1	2	1	$(2,1)_1$	1	1
(1,0,1)	0	0	3	2	$(3,2)_2$	2	2
(1,1,0)	0	0	1	0	$(1,0)_0$	0	0
(1,1,1)	1	1	2	1	$(2,1)_1$	1	1

$\square$

Le postulat (IC4) n'a pas pu être démontré, car cela nécessite de connaître le résultat de la fusion. Les tests tendent à laisser penser que ce postulat est vérifié pour les opérateurs de fusion itérée sceptique utilisant la distance de Hamming.

8.3.5 Tableau récapitulatif

Le tableau 8.4 indique de manière synthétique quels postulats sont vérifiés par les opérateurs de fusion itérée sceptique usuels.

	drastique			Hamming		
	Σ	Max	GMax	Σ	Max	GMax
(IC0)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(IC1)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(IC2)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(IC3)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(IC4)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	?	?	?
(IC5)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	x	x	x
(IC6)	$\surd$	x	$\surd$	x	x	x
(IC7)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(IC8)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$
(Maj)	$\surd$	x	$\surd$	$\surd$	x	x
(Arb)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	x	x	x

Tab. 8.4 – Postulats de fusion contrainte pour la fusion itérée sceptique

On peut remarquer que ce tableau est identique à celui qui avait été établi pour la fusion itérée crédule (tableau 5.8). Cela est en partie dû au fait que certains de ces postulats ne sont pas très sensibles à l'itération, mais davantage à l'opérateur d'agrégation. C'est le cas des propriétés (IC0)-(IC3) et (IC7)-(IC8). Il est quelque peu décevant que les opérateurs de fusion itérée utilisant la distance de Hamming ne vérifient pas (IC5)-(IC6), car ces postulats capturent des propriétés importantes pour les opérateurs de fusion.

Conclusion

L'idée initiale de ce travail était de prolonger la fusion traditionnelle en révisant le profil initial par le résultat de cette fusion, et en itérant ce processus. On pouvait ainsi s'attendre à des comportements qui n'apparaissent pas lors de la fusion « non itérée » classique, et donc à trouver de nouvelles caractérisations pour ces opérateurs. En outre, le fait d'itérer la fusion peut laisser penser que cela permet davantage de « négociation » entre agents, ou encore que le résultat obtenu tendra à se rapprocher le plus possible d'un consensus entre agents.

Nous avons vu que de cette idée pouvaient être définis deux types d'opérateurs de fusion itérée : les opérateurs de fusion itérée crédule et les opérateurs de fusion itérée sceptique.

L'étude que nous avons conduite montre que ces opérateurs ont des comportements bien différents. Cependant, cette différence est assez difficile à caractériser. Ainsi les propriétés d'inclusion et les postulats de fusion contrainte n'ont pas permis de les différencier. La différence majeure que nous pouvons affirmer est la propriété de monotonie sur les bases du profil. Celle-ci est vérifiée pour la fusion itérée sceptique mais pas pour la fusion itérée crédule. C'est une propriété de première importance puisqu'elle énonce que chaque agent, d'une itération à la suivante, sélectionne parmi ses modèles ceux qu'il va garder. Il n'y a jamais apparition de nouveaux modèles pour les agents. Cette différence majeure a permis de prouver la convergence des opérateurs de fusion itérée sceptique dans le cas général, à la différence des opérateurs de fusion itérée crédule.

Nous savons donc que les opérateurs de fusion itérée sceptiques sont bien définis, ce que nous n'avons pas réussi à prouver pour les opérateurs de fusion itérée crédule.

En effet, peu de propriétés de monotonie sont vérifiées par ces deux types d'opérateurs. De plus, pour le cas crédule, aucune quantité décroissante au cours de l'itération n'a pu être trouvée, ce qui empêche de prouver la convergence de ce processus dans le cas général. Nous sommes cependant convaincus que ces opérateurs n'ont pas un comportement chaotique et qu'une telle quantité décroissante existe. Les statistiques que nous avons obtenues sur machine nous confortent dans cette idée.

Parallèlement à cette étude formelle, nous avons en effet pu tester sur machine plusieurs propriétés et conjectures sur les opérateurs de fusion itérée. Cela nous a permis dans un premier temps d'observer le comportement de ces opérateurs, de chercher des cas pathologiques, et dans un deuxième temps de trouver certains contre-exemples à nos conjectures et de tester des postulats qui se trouvent jusqu'à aujourd'hui vérifiés.

Il convient maintenant d'observer les perspectives de ce travail.

Celles-ci sont tout d'abord liées aux limitations que nous nous sommes imposées dans le cadre de ce travail. Bien que quelques postulats aient été prouvés dans un cadre général (y compris pour des opérateurs de fusion itérée qui ne seraient pas définis à partir de distances), notre étude s'est principalement limitée aux opérateurs de fusion itérée utilisant la distance drastique ou la distance de Hamming. De plus, nous avons toujours pris comme opérateur de révision celui défini à partir de l'opérateur d'agrégation, ce dernier étant lui-même un opérateur de fusion contrainte. Une étude plus vaste pourrait être faite avec d'autres types d'opérateurs de révision et de fusion, comme par exemple ceux présentés dans l'étude bibliographique en annexe de ce document.

Cela étant, nous avons vu que même dans le cadre restreint que nous avons étudié, les difficultés ne manquent pas. Des questions d'une grande importance restent ouvertes. C'est le cas de la convergence de la fusion itérée crédule. Il serait également très intéressant de pouvoir caractériser de façon non constructive le résultat de la fusion itérée.

Au delà de ces questions, il serait également d'un grand intérêt de trouver des postulats vérifiés par ces opérateurs de fusion itérée et pas par les opérateurs de fusion usuels. Ceci permettrait d'en justifier tout l'intérêt, car il faut noter que le calcul de la fusion itérée est plus complexe que celui de la fusion « non itérée » correspondante.

Je tiens à remercier ici Pierre Marquis et Sébastien Konieczny pour le temps qu'ils m'ont accordé et la qualité professionnelle et humaine de leur collaboration. Cela m'a permis de garder un intérêt constant pour ce travail. Merci également aux étudiants du DEA « Systèmes intelligents et applications » 2003-2004 pour la bonne ambiance (de travail...) quotidienne.

Table des figures

Liste des tableaux

A Autres travaux sur la révision et la fusion de croyances

Le cadre AGM, la fusion contrainte et la fusion à partir de distances définissent le cadre dans lequel ce travail s'inscrit. Ceux-ci ont été traités dans la première partie de ce document. Cette partie présente d'autres travaux portant sur la révision et la fusion de croyances.

A.1 Révision

La révision de croyances propose des moyens d'intégrer une nouvelle information dans une base de croyances. Son cadre de référence, le cadre AGM, a été abordé dans le chapitre 1. Nous présentons ici d'autres travaux relatifs à la révision de croyances.

A.1.1 Contraction par intersection partielle

La méthode étudiée ici est celle des fonctions de contraction par intersection partielle. Elle a été définie par les fondateurs du cadre AGM (Alchóurron, Gärdenfors et Makinson) dans [AGM85]. L'objectif de cette méthode est de définir l'opération de contraction à partir de l'intersection d'ensembles maximaux cohérents n'incluant pas la nouvelle information.

Sous-théories maximales

L'ensemble des sous-théories maximales de K qui n'impliquent pas A est noté $K \bot A$.

Etant donné une théorie A et une formule propositionnelle A, on définit $K \bot A$ comme l'ensemble des K' vérifiant :

1. $K' \subseteq K$
2. $K' \not\models A$
3. Si $K' \subset K'' \subseteq K$ alors $K'' \models A$

La contraction consiste alors à choisir parmi les ensembles de $K \bot A$ ceux qui constitueront la nouvelle base de croyances.

Contraction à choix maximal

Une première façon de choisir parmi les ensembles de $K \perp A$ est d'en choisir un seul parmi ceux-ci. Un tel opérateur est appelé opérateur de contraction à *choix maximal* (*maxichoice*).

De tels opérateurs ont été étudié par Alchourrón et Makinson dans [AM82]. De plus, Alchourrón, Gärdenfors et Makinson montrent dans [AGM85] les caractérisations suivantes pour les opérateurs de contraction à choix maximal.

($\div$F) *Si* $B \in K$ *et* $B \notin K \div A$, *alors* $(\neg B \vee A) \in K \div A$
($\div$Q) $\forall B, C \in K$ *et* $\forall A$, *si* $(B \vee C) \in K \div A$, *alors* $B \in K \div A$ *ou* $C \in K \div A$

Théorème A.1. [AGM85] Si $\div$ est fonction de contraction par intersection partielle, alors :
($\div$F) $\Leftrightarrow$ ($\div$Q) $\Leftrightarrow$ ($\div$ est une fonction de contraction à choix maximal).

Contraction par intersection totale

Une autre façon d'effectuer ce choix est de considérer l'intersection des ensembles de $K \perp A$. Cette méthode est appelée *contraction par intersection totale* (*(full) meet contraction*).

L'opérateur de *contraction par intersection totale* est défini par :

$$K \div_f A = \begin{cases} Cn(\cap(K \perp A)) \text{ si } K \perp A \text{ n'est pas vide, et} \\ K \text{ sinon} \end{cases}$$

Cependant l'opérateur ainsi défini ne possède pas les bonnes propriétés. L'intersection élimine trop d'informations.

Ainsi, si $A \in K$, alors $K \div_f A = K \cap Cn(\neg A)$. C'est-à-dire que la contraction par A est l'ensemble des propositions de K qui sont conséquences de $\neg A$.

Si l'on considère l'opérateur de contraction associé, par l'identité de Levi, on obtient le résultat suivant : si $\neg A \in K$ alors $K * A = Cn(A)$. C'est-à-dire que dans le cadre d'une révision classique (changement d'attitude à propos d'une information), le résultat de la révision est l'ensemble des conséquences logiques de la nouvelle information. Toutes les informations de la base différentes de la nouvelle information sont oubliées.

Malgré ce comportement inadéquat, l'opérateur de contraction partielle a une utilité. Il sert de « limite inférieure » aux opérateurs de contraction. Tout opération de contraction se doit de contenir le résultat de la contraction par intersection totale : $K \div_f A \subseteq K \div A$.

Contraction par intersection partielle

L'objectif est donc de définir des opérateurs de contraction qui sélectionnent un sous-ensemble de $K \perp A$. Un tel opérateur doit se situer entre l'intersection totale (qui n'est pas assez sélective) et le choix maximal (qui l'est trop). On définit formellement une fonction de sélection γ sur $K \perp A$ comme suit.

Définition A.1.

– Une fonction de sélection est une fonction qui associe à chaque proposition A l'ensemble $\gamma(K\bot A)$, tel que :

$$\gamma(K\bot A) = \begin{cases} \text{un sous-ensemble non vide de } K\bot A \text{ si } K\bot A \text{ n'est pas vide, et} \\ \{K\} \text{ sinon} \end{cases}$$

– La *fonction de contraction par intersection partielle sur K déterminée par* γ est définie par : $K \div A = Cn(\cap\gamma(K\bot A))$

On retrouve bien les deux cas limites cités ci-dessus. Si γ sélectionne toujours un singleton, on retrouve la contraction à choix maximal. Si γ sélectionne l'ensemble $K\bot A$ entier, alors on retombe sur la contraction à intersection totale. On définit la *révision par intersection partielle* à partir d'une contraction à intersection partielle et de l'identité de Levi.

Contraction par intersection partielle et cadre AGM

Alchourrón, Gärdenfors et Makinson ont montré que les opérateurs de contraction par intersection partielle vérifient les postulats AGM de base pour la contraction [AGM85].

Théorème A.2. Tout opérateur de contraction par intersection partielle $\div$ vérifie les propriétés (K$\div$1)-(K$\div$6), et son opérateur de révision par intersection partielle associé $*$ vérifie (K$*$1)-(K$*$6).

On a de plus l'équivalence suivante.

Théorème A.3. Soit $\div$ un opérateur. Pour toute théorie K, $\div$ est un opérateur de contraction par intersection partielle sur K si et seulement si $\div$ vérifie les postulats (K$\div$1)-(K$\div$6) pour la contraction sur K.

Postulats supplémentaires

On a également les résultats suivants concernant les postulats supplémentaires du cadre AGM [AGM85]. Il faut noter que l'un des deux sens de l'équivalence est vérifié par tous les opérateurs de contraction (voir le théorème 1.1).

Théorème A.4. [AGM85] Soit $\div$ un opérateur de contraction par intersection partielle. Alors $\div$ satisfait (K$\div$7) si et seulement si son opérateur de révision associé (par l'identité de Levi) vérifie (K$*$7).

Théorème A.5. [AGM85] Soit $\div$ un opérateur de contraction par intersection partielle. Alors $\div$ satisfait (K$\div$8) si et seulement si son opérateur de révision associé (par l'identité de Levi) vérifie (K$*$8).

Alchourrón, Gärdenfors et Makinson ont également montré que ces équivalences sont liées aux propriétés suivantes :

($\div$ P) $\forall A, B\ (K \div A) \cap Cn(A) \ \subseteq\ K \div (A \wedge B)$
($\div$ C) $\forall A, B\ K \div (A \wedge B) \subseteq (K \div A)$ *ou* $K \div (A \wedge B) \subseteq (K \div B)$

Théorème A.6. [AGM85] Soit $\div$ une opération de contraction par intersection partielle. Alors $\div$ satisfait (K$\div$7) si et seulement si elle satisfait ($\div$P). De plus, $\div$ satisfait (K$\div$8) si et seulement si elle satisfait ($\div$C).

Contraintes relationnelles

Les conditions de satisfaction des postulats (K÷7) et (K÷8) peuvent également être exprimées par des contraintes relationnelles. Une relation ainsi définie porte alors sur les bases de croyances.

Définition A.2. Une fonction de sélection γ est dite relationnelle si et seulement si pour tout K il existe une relation $\leq$ sur K^2 telle que

$$\gamma(K\perp A) = \{K' \in K\perp A \mid K'' \leq K',\ \forall K'' \in K\perp A\}$$

Si la relation $\leq$ est transitive alors γ est dite relationnelle transitive (*transitively relational*). Si $\leq$ est totale alors γ est dite totale.

Dès lors, une fonction de contraction par intersection partielle $\div$ sera dite relationnelle si et seulement si sa fonction de sélection γ associée est relationnelle. De même, $\div$ sera dite relationnelle transitive si et seulement si sa fonction de sélection est relationnelle transitive.

Pour faire le lien avec les postulats (K÷7) et (K÷8), les propriétés suivantes sont introduites :

(γ7) $\forall A, B\ \gamma(K\perp(A \wedge B)) \ \subseteq\ \gamma(K\perp A) \vee \gamma(K\perp B)$
(γ8) $Si\ K\perp A \cap \gamma(K\perp(A \wedge B)) \neq \emptyset,\ alors\ \gamma(K\perp A) \subseteq \gamma(K\perp(A \wedge B))$

Grâce à ces propriétés, on obtient les résultats suivants :

Théorème A.7. [AGM85] Soit $\div$ un opérateur de contraction par intersection partielle, dont la fonction de sélection associée est γ. On a alors les résultats suivants.
Si γ satisfait (γ7), alors $\div$ satisfait (K÷7).
Si γ satisfait (γ8), alors $\div$ satisfait (K÷8).
Si γ est relationnelle, alors γ satisfait (γ7).
Si γ est relationnelle transitive, alors γ satisfait (γ8).

On en déduit le théorème suivant, faisant directement la relation entre les postulats supplémentaires AGM et les contraintes relationnelles sur les fonctions de sélection γ.

Théorème A.8. [AGM85] Soit $\div$ une fonction de contraction par intersection partielle. $\div$ est relationnelle transitive si et seulement si $\div$ satisfait (K÷7) et (K÷8).

On obtient également un lien direct entre ces postulats supplémentaires et les propriétés (γ7) et (γ8).

Théorème A.9. [AGM85] Un opérateur de contraction par intersection partielle $\div$ satisfait (K÷7) si et seulement si sa fonction de sélection associée γ vérifie (γ7). $\div$ satisfait (K÷8) si et seulement si γ vérifie (γ8).

Les auteurs du paradigme AGM ont également montré que la propriété de transitivité relationnelle souhaitée pour pouvoir satisfaire (K÷7) et (K÷8) revenait à avoir une relation transitive et totale.

Théorème A.10. [AGM85] Une fonction de contraction par intersection partielle $\div$ est relationnelle transitive si et seulement si elle est transitive et totale.

A.1.2 Assignement fidèle

La contraction par intersection partielle a introduit des relations sur les formules des bases de croyances lors des théorèmes de représentation [AGM85]. Katsuno et Mendelzon [KM91] ont proposé d'utiliser des pré-ordres sur les interprétations, et montré que cela correspondait également au cadre de la révision AGM.

Postulats pour la révision

L'idée de Katsuno et Mendelzon est de représenter une base de croyances K par une formule propositionnelle φ telle que $K = \{\phi | \varphi \models \phi\}$. La révision de φ par μ sera alors notée $\varphi \circ \mu$.

Les postulats suivants permettent de caractériser ce type de révision :

(R1) $\varphi \circ \mu \models \mu$
(R2) Si $\varphi \wedge \mu$ est cohérent, alors $\varphi \circ \mu \equiv \varphi \wedge \mu$
(R3) Si μ est cohérent, alors $\varphi \circ \mu$ est cohérent
(R4) Si $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\varphi_1 \circ \mu_1 \equiv \varphi_2 \circ \mu_2$
(R5) $(\varphi \circ \mu) \wedge \phi \models \varphi \circ (\mu \wedge \phi)$
(R6) Si $(\varphi \circ \mu) \wedge \phi$ est satisfaisable, alors $\varphi \circ (\mu \wedge \phi) \models (\varphi \circ \mu) \wedge \phi$

Ces postulats se justifient de la façon suivante : garantir que la nouvelle information a été retenue (R1), imposer que la fusion choisie est la plus évidente (conjonction) lorsque cela est possible (R2), garantir le maintien de la cohérence (R3) et l'indépendance à la syntaxe (R4), faire le bon choix parmi les modèles de φ à garder (R5)-(R6).

Les postulats (R1)-(R6) sont équivalents aux postulats de révision AGM, (R5) et (R6) correspondant aux posulats supplémentaires. Plus exactement, on a le résultat suivant.

Théorème A.11. [KM91] Soit $*$ un opérateur de révision, et $\circ$ l'opérateur associé. $*$ satisfait (K$*$1)-(K$*$6) si et seulement si $\circ$ satisfait (R1)-(R4). De plus, $*$ satisfait (K$*$7) et (K$*$8) si et seulement si $\circ$ satisfait (R5) et (R6).

Théorème de représentation

Le théorème de représentation associé à cette nouvelle caractérisation du cadre AGM est basée sur les *assignements fidèles*.

Définition A.3. Un assignement fidèle est une fonction qui associe à chaque formule propositionnelle φ un pré-ordre $\leq_\varphi$ sur l'ensemble des interprétations, tel que :

1. Si $I \models \varphi$ et $I' \models \varphi$ alors $I \not<_\varphi I'$.
2. Si $I \models \varphi$ et $I' \not\models \varphi$ alors $I <_\varphi I'$.
3. Si $\varphi \Leftrightarrow \varphi'$ alors $\leq_\varphi = \leq_{\varphi'}$.

Le théorème de représentation associé est le suivant.

Théorème A.12. [KM91] Un opérateur de révision $\circ$ satisfait les postulats (R1)-(R6) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque base de croyances φ un pré-ordre total $\leq_\varphi$ tel que $[\![\, \varphi \circ \mu]\!] = min([\![\, \mu]\!], \leq_\varphi)$.

Katsuno et Mendelzon ont également étudié :
- de nombreux opérateurs de révision déjà proposés, et les ont confronté à leur approche,
- la possibilité d'utiliser des pré-ordres partiels et non plus totaux. Dans ce cas le postulat (R6) n'est plus vérifié et doit être affaibli (on perd l'équivalence AGM),

- la révision « par point » (*pointwise revision*), qui consiste à attribuer un pré-ordre à chaque interprétation.
- l'intégration de contraintes d'intégrité dans la révision. Typiquement, ils définissent : $\varphi \circ^{IC} \mu \Leftrightarrow \varphi \circ (\mu \wedge IC)$.

A.1.3 Enracinements épistémiques

Une autre approche est de classer les formules de la base de croyances par « couches » superposées, représentant leur importance dans la base. Ainsi cela permet de savoir quelles formules doivent être retirées prioritairement lors d'une contraction ou d'une révision. Cette approche a été proposée par Gärdenfors dans [Gär88]. Une telle structure est appelée « enracinement épistémique » (*epistemic entrenchment*).

Définition A.4. Soient A et B deux formules propositionnelles. $\leq$ est un enracinement épistémique s'il satisfait les postulats suivants :

(EE1) Pour toute formule C, si $A \leq B$ et $B \leq C$, alors $A \leq C$
(EE2) Si $A \models B$, alors $A \leq B$
(EE3) $A \leq A \wedge B$ ou $B \leq A \wedge B$
(EE4) Si $K \neq K_{\perp}$, alors $A \notin K$ ssi $\forall B, A \leq B$
(EE5) Si $\forall B, B \leq A$ alors $\models A$

Si $A \leq B$, cela signifie que « B est au moins aussi enraciné que A », donc que B est au moins aussi « important » que A. Le postulat (EE2) semble contre-intuitif mais est bien fondé, car si l'on souhaite retirer B il faudra également retirer A. (EE3) énonce que pour retirer $A \wedge B$ il suffit de retirer A ou B. (EE4) assure que les formules les moins enracinées sont celles qui ne sont pas dans K, et (EE5) force les tautologies à être les formules les plus enracinées.

Le lien avec les opérateurs de contraction AGM est le suivant [Gär88] :

Théorème A.13. Une fonction de contraction $\div$ satisfait (K$\div$1)-(K$\div$8) si et seulement si $\leq$ satisfait (EE1)-(EE5), où $B \leq A$ ssi $B \notin K \div A \wedge B$.

A.1.4 Révision itérée

Une des limitations du cadre AGM est qu'il ne tient pas compte de l'itération pour les opérations de révision, de contraction. En particulier ces opérateurs ne tiennent pas compte des informations conditionnelles de la base. C'est pourquoi Darwiche et Pearl ont proposé un cadre plus riche pour prendre en compte ces aspects. Nous étudierons dans cette partie d'autres travaux concernant la révision itérée : la révision naturelle de Boutilier, les fonctions ordinales conditionnelles (OCF) de Spohn, et la révision rangée de Lehmann.

Postulats de Darwiche et Pearl

Darwiche et Pearl [DP97] ont introduit la notion d'*état épistémique* afin d'étendre le cadre AGM. Un état épistémique est la représentation abstraite des croyances d'un agent. Il peut être vu comme la donnée d'un couple (base de croyances, ensemble d'informations conditionnelles). La base de croyances de Φ, notée $Bel(\Phi)$, représente l'ensemble des croyances de Φ. Les informations conditionnelles associées à Φ sont les informations du type « Si l'information A était vraie, alors l'information B le serait aussi ». Ces informations conditionnelles peuvent être représentées de différentes façons : enracinement épistémique, pré-ordre total sur les interprétations... Les modèles d'un état épistémique Φ sont les modèles de sa base de croyances : $[\![\Phi]\!] = [\![Bel(\Phi)]\!]$. Les notations $Bel(\Phi) \models \mu$, $Bel(\Phi) \wedge \mu$ et $I \models Bel(\Phi)$ seront remplacées respectivement par $\Phi \models \mu$, $\Phi \wedge \mu$ et $I \models \Phi$. Il y a deux niveaux d'équivalence pour les états épistémiques :

Définition A.5. Soient Φ et Φ' deux états épistémiques.
Ils sont dits équivalents, noté $\Phi \equiv \Phi'$, ssi $Bel(\Phi) \equiv Bel(\Phi')$.
Ils sont dits égaux, noté $\Phi = \Phi'$, ssi ils sont identiques.

Les postulats AGM peuvent être redéfinis pour les états épistémiques. Ici, Φ désigne un état épistémique et μ une formule. Darwiche et Pearl ont adapté les postulats de Katsuno et Mendelzon plutôt que les postulats AGM de base.

Définition A.6.
(R*1) $\Phi \circ \mu \models \mu$
(R*2) Si $\Phi \wedge \mu$ est cohérent, alors $\Phi \circ \mu \equiv \Phi \wedge \mu$
(R*3) Si μ est cohérent, alors $\Phi \circ \mu$ est cohérent
(R*4) Si $\Phi_1 = \Phi_2$ et $\mu_1 \equiv \mu_2$, alors $\Phi_1 \circ \mu_1 = \Phi_2 \circ \mu_2$
(R*5) $(\Phi \circ \mu) \wedge \varphi \models \Phi \circ (\mu \wedge \varphi)$
(R*6) Si $(\Phi \circ \mu) \wedge \varphi$ est cohérent, alors $\Phi \circ (\mu \wedge \varphi) \models (\Phi \circ \mu) \wedge \varphi$

Les postulats supplémentaires étant :
(C1) Si $\alpha \models \mu$, alors $(\Phi \circ \mu) \circ \alpha \equiv \Phi \circ \alpha$
(C2) Si $\alpha \models \neg\mu$, alors $(\Phi \circ \mu) \circ \alpha \equiv \Phi \circ \alpha$
(C3) Si $\Phi \circ \alpha \models \mu$, alors $(\Phi \circ \mu) \circ \alpha \models \mu$
(C4) Si $\Phi \circ \alpha \not\models \neg\mu$, alors $(\Phi \circ \mu) \circ \alpha \not\models \neg\mu$

Darwiche et Pearl ont également donné un théorème de représentation qui permet de bien visualiser le comportement d'opérateurs vérifiant ces postulats. Il nous faut redéfinir les assignements fidèles pour les états épistémiques.

Définition A.7. Une fonction qui associe à chaque état épistémique Φ un pré-ordre $\leq_\Phi$ sur les interprétations est un assignement fidèle si :

1. Si $I \models \Phi$ et $J \models \Phi$, alors $I \simeq_\Phi J$
2. Si $I \models \Phi$ et $J \not\models \Phi$, alors $I <_\Phi J$
3. Si $\Phi_1 = \Phi_2$, alors $\leq_{\Phi_1} = \leq_{\Phi_2}$

Théorème A.14. [DP97]
- Un opérateur de révision $\circ$ satisfait les postulats (R*1)-(R*6) si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque état épistémique Φ un pré-ordre total $\leq_\Phi$ tel que : $[\![\Phi \circ \mu]\!] = min([\![\mu]\!], \leq_\Phi)$
- Si $\circ$ vérifie (R*1)-(R*6), alors $\circ$ vérifie (C1)-(C4) si et seulement si $\circ$ et l'assignement fidèle associé vérifient :
  (CR1) Si $I \models \mu$ et $J \models \mu$, alors $I \leq_\Phi J$ ssi $I \leq_{\Phi\circ\mu} J$
  (CR2) Si $I \models \neg\mu$ et $J \models \neg\mu$, alors $I \leq_\Phi J$ ssi $I \leq_{\Phi\circ\mu} J$
  (CR3) Si $I \models \mu$ et $J \models \neg\mu$, alors $I <_\Phi J$ ssi $I <_{\Phi\circ\mu} J$
  (CR4) Si $I \models \mu$ et $J \models \neg\mu$, alors $I \leq_\Phi J$ ssi $I \leq_{\Phi\circ\mu} J$

Cela peut être vu comme une « descente » des modèles de la nouvelle information par rapport à ses contre-modèles, tout en gardant l'interclassement des modèles entre eux, et l'interclassement des contre-modèles entre eux. La figure A.1 illustre cette idée. Ces figures représentent respectivement le pré-ordre total $\leq_\Phi$ sur les interprétations, image de l'assignement fidèle de Φ, et le pré-ordre total $\leq_{\Phi\circ\mu}$ sur les interprétations. L'ovale grisé représente les modèles de la nouvelle information μ. Par exemple, la condition $[\![\Phi \circ \mu]\!] = min([\![\mu]\!], \leq_\Phi)$ est bien respectée ici car les modèles minimaux de μ pour $\leq_\Phi$ sont les modèles minimaux de $\leq_{\Phi \circ \mu}$.

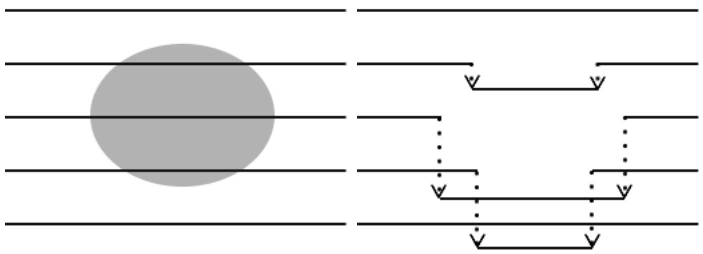

Fig. A.1 – Révision selon Darwiche et Pearl : $\leq_\Phi$ et $\leq_{\Phi\circ\mu}$

Révision naturelle

Nous avons vu précédemment que l'idée de changement minimal des croyances lors d'une révision était importante. Boutilier a appliqué ce principe à la révision itérée [Bou96], en proposant l'opérateur de *révision naturelle*. Un changement minimal correspond ici à ne modifier que les modèles minimaux de la nouvelle information, en les rendant minimaux après révision (voir la figure A.2). Aux niveaux syntaxique et sémantique, on a les propriétés suivantes.

Définition A.8.
(CB) Si $\Phi \circ \Psi \models \neg\mu$, alors $(\Phi \circ \Psi) \circ \mu \equiv \Phi \circ \mu$
(CBR) Si $I \models \neg(\Phi \circ \mu)$ et $J \models \neg(\Phi \circ \mu)$, alors $I \leq_\Phi J$ ssi $I \leq_{\Phi\circ\mu} J$

Théorème A.15. [DP97]
- Soit $\circ$ un opérateur de révision satisfaisant (R*1)-(R*6). $\circ$ vérifie (CB) si et seulement si $\circ$ et l'assignement fidèle associé vérifient (CBR).
- Si $\circ$ vérifie (R*1)-(R*6) et (CB), alors il vérifie (C1)-(C4).

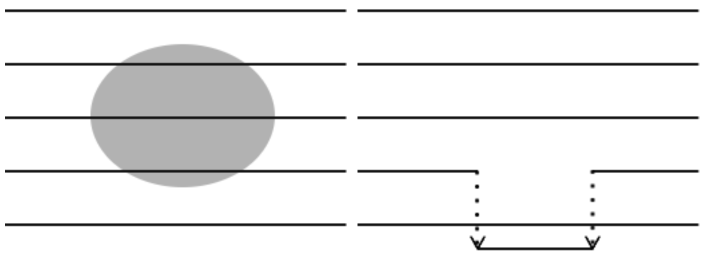

Fig. A.2 – Révision naturelle

Fonctions ordinales conditionnelles

Spohn [Spo87] a proposé d'associer à chaque interprétation I un ordinal $\kappa(I)$ représentant le degré d'incrédulité de cette interprétation. Cela permet de représenter l'état épistémique d'un agent à l'aide d'une fonction, appelée *fonction ordinale conditionnelle* (*Ordinal Conditional Function*, ou *OCF*). Plus précisément, une fonction ordinale conditionnelle κ est une fonction de l'ensemble des mondes possibles $\mathcal{W}$ vers la classe des ordinaux telle que au moins un monde est associé à 0. On étend cette fonction aux formules par : $\kappa(\varphi) = min_{I \models \varphi}\kappa(I)$. Si $\kappa(\varphi)$ est nul, cela signifie que la formule est crue.

Spohn a défini la révision d'un OCF par l'opération d'$(\varphi, \alpha) -$ *conditionnalisation de* κ, où φ est une nouvelle information de degré de confiance α.

Comme l'illustre la figure A.3, les opérateurs ainsi définis sont des cas particuliers des opérateurs de Darwiche et Pearl. La particularité de cette révision est qu'elle préserve l'ordre relatif des modèles et des contre-modèles de la nouvelle information.

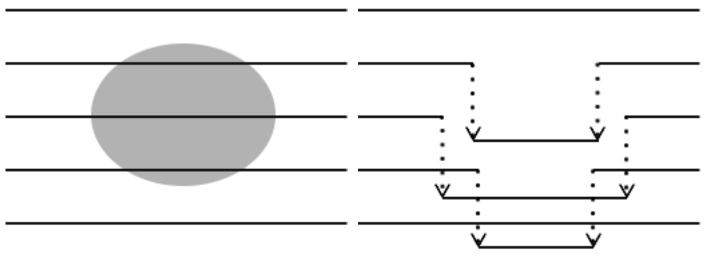

FIG. A.3 – Révision par OCF

Révision rangée

Une alternative aux postulats de Darwiche et Pearl a été proposée par Lehmann [Leh95]. Celui-ci utilise des séquences de révisions pour représenter les états épistémiques.

Définition A.9. Soient Φ et Φ' deux suites de révision (i.e. $\Phi = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n$), et φ et μ deux formules cohérentes.

(I1) $Bel(\Phi)$ est une théorie cohérente
(I2) $\Phi \circ \varphi \models \varphi$
(I3) Si $\Phi \circ \varphi \models \mu$, alors $\Phi \models \varphi \to \mu$
(I4) Si $\Phi \models \mu$, alors $\Phi \circ \Phi' \equiv \Phi \circ \mu \circ \Phi'$
(I5) Si $\varphi \models \mu$, alors $\Phi \circ \mu \circ \varphi \circ \Phi' \equiv \Phi \circ \varphi \circ \Phi'$
(I6) Si $\Phi \circ \varphi \not\models \neg\mu$, alors $\Phi \circ \varphi \circ \mu \circ \Phi' \equiv \Phi \circ \varphi \circ (\varphi \wedge \mu) \circ \Phi'$
(I7) $\Phi \circ \neg\varphi \circ \varphi \subseteq Cn(Bel(\Phi) \cup \{\varphi\})$

L'aspect sémantique de la révision rangée se base sur la notion de *modèle rangé*. Cette structure est un ensemble de strates, dont chacune contient celle qui lui est inférieure, et chaque interprétation appartient à au moins une strate. On associe à chaque strate un ordinal (de $\mathcal{N}$) correspondant au degré d'implausibilité de la strate.

Définition A.10. Soit $\mathcal{N}$ un segment initial de la classe des ordinaux. Un modèle rangé est une fonction M : $\mathcal{N} \mapsto 2^{\mathcal{W}} \setminus \emptyset$ telle que :

1. $\forall n, m \in \mathcal{N}$, si $n \leq m$ alors $M(n) \subseteq M(m)$
2. $\forall I \in \mathcal{W}$, $\exists n \in \mathcal{N}$ tel que $I \in M(n)$

La révision est une procédure par induction sur la longueur de la suite de révision Φ. On a alors le théorème de représentation suivant.

Théorème A.16. [Leh95] Un opérateur de révision est défini par un modèle rangé (par la procédure inductive évoquée) si et seulement si il vérifie les postulats (I1)-(I7).

Le changement opéré sur le pré-ordre entre interprétations est visualisé à la figure A.4.

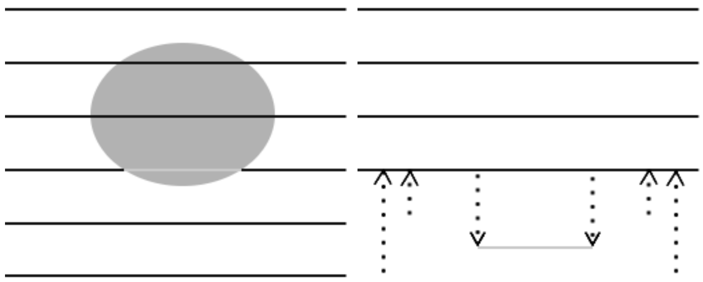

FIG. A.4 – Révision rangée

A.2 Fusion

La fusion trouve un intérêt dès lors que des raisonnements doivent être effectués à partir de bases de croyances multiples. Le développement des systèmes distribués démontre que cette problématique prend une importance toujours grandissante.

En toute généralité, le domaine de la fusion ne dispose pas d'un cadre consensuel, comme AGM pour la révision. Plusieurs approches ont été proposées jusqu'ici pour caractériser les « bons » opérateurs de fusion, et les classer entre eux.

Les travaux de S. Konieczny et R. Pino Perez sur la fusion contrainte [KP02b] ont été présentés dans le chapitre 2. Nous présentons ici ceux de S. Konieczny, J. Lang et P. Marquis sur la fusion à partir de distances [KLM02]. Un cadre différent a été proposé par Maynard-Reid III et Lehmann [ML00]. Enfin, d'autres approches seront brièvement décrites.

La fusion porte ici sur un multi-ensemble $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de bases de croyances.

A.2.1 Fusion à partir de distances

Comme nous l'avons vu précédemment, la fusion contrainte repose sur la notion de pré-ordre pour représenter la préférence entre des interprétations possibles. Une autre approche a été étudiée par Konieczny, Lang et Marquis dans [KLM02], basée cette fois-ci sur la notion de distances entre interprétations.

Une telle fusion s'opère en deux étapes. Tout d'abord une fonction d'agrégation f est appliquée à chaque base de croyances, permettant ainsi de prendre en compte la syntaxe, et de traiter l'incohérence des bases de croyances. Une seconde fonction d'agrégation g est ensuite utilisée pour fusionner les résultats de la première agrégation, c'est-à-dire les informations provenant des différentes sources.

Distances, fonctions d'agrégation, fusion

Définir un opérateur de fusion nécessite de fixer uniquement trois paramètres : une distance d et deux fonctions d'agrégation f et g.

Définition A.11. Soit f une fonction qui à chaque tuple fini d'entiers naturels associe un entier naturel. f est une fonction d'agrégation si et seulement si :

1. f est non-décroissante en chaque argument, c'est-à-dire que si $x \leq y$ alors $f(x_1, \ldots, x, \ldots, x_n) \leq f(x_1, \ldots, y, \ldots, x_n)$
2. $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si $x_1 = \ldots = x_n = 0$
3. $f(x) = x$

Une « fonction d'agrégation » est en fait une famille de fonctions, puisqu'une fonction d'agrégation peut prendre un nombre quelconque (fini) d'arguments.

La fusion à partir de distances peut désormais être définie :

Définition A.12. Soit d une distance et soient f et g deux fonctions d'agrégation. Pour chaque profil de croyances $\Psi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ et chaque base de contraintes d'intégrité μ, $\Delta_\mu^{d,f,g}(\Psi)$ est défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \llbracket\, \Delta_\mu^{d,f,g}(\Psi\rrbracket\,) &= \{\omega \in \llbracket\, \mu \rrbracket \mid d(\omega, \Psi) \textit{ est minimal}\} \\ \text{avec : } d(\omega, \Psi) &= g(d(\omega, \varphi_1), \ldots, d(\omega, \varphi_n)) \\ \text{et pour chaque } \varphi_i = \{\varphi_{i,1}, \ldots, \varphi_{i,n_i}\},\ \ d(\omega, \varphi_i) &= f(d(\omega, \varphi_{i,1}), \ldots, d(\omega, \varphi_{i,n})) \end{aligned}$$

Opérateurs usuels

On définit les fonctions d'agrégation suivantes :

Définition A.13.
- Soit $q : \{1, \ldots, n\} \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que $q(1) = 1$ si $n = 1$. La somme pondérée WS_q induite par q est définie par $WS_q(e_1, \ldots, e_n) = \Sigma_{i=1}^n q(i)e_i$.
- Soit $q : \{1, \ldots, n\} \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que $q(1) = 1$ si $n = 1$ et $q(1) \neq 0$ dans tous les cas. La somme pondérée ordonnée OWS_q induite par q est définie par $OWS_q(e_1, \ldots, e_n) = \Sigma_{i=1}^n q(i)e_{\sigma(i)}$ où σ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $e_{\sigma(1)} \geq \ldots \geq e_{\sigma(n)}$.
- Si $q(i) = 1\ \forall i$, alors WS_q correspond à la somme usuelle, notée *sum*.
- Si $q(1) = 1$ et $q(i) = 0\ \forall i \geq 2$, alors $OWS_q(e_1, \ldots, e_n) = max(e_1, \ldots, e_n)$, ce qui sera noté *max*.
- Si M est tel que pour tout $(e_1, \ldots, e_n)$, $e_i < M$, et que $q(i) = M^{n-i}$, alors le pré-ordre induit par OWS_q est le pré-ordre leximax sur les vecteurs, noté *lex*.

On peut retrouver les opérateurs de fusion usuels définis précédemment en n'utilisant pas f, c'est-à-dire en utilisant des bases de croyance singletons. Dans ce cas, $\Delta^\Sigma = \Delta^{d_H,f,sum}$, $\Delta^{Max} = \Delta^{d_H,f,max}$ et $\Delta^{GMax} = \Delta^{d_H,f,lex}$.

De nombreux opérateurs de fusion peuvent être créés dans ce cadre, combinant des critères syntaxiques au niveau de f, et des critères sémantiques au niveau de g.

Les opérateurs de fusion à partir de distances ne sont en général pas des opérateurs de fusion contrainte, puisque la fonction d'agrégation f remet en question l'indépendance à la syntaxe (IC3). Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème A.17. [KLM02] Les opérateurs $\Delta^{d,f,g}$ satisfont tous (IC0)-(IC2) et (IC7),(IC8). Les autres propriétés ne sont pas satisfaites dans le cas général.

Konieczny, Lang et Marquis [KLM02] ont étudié précisément quels sont les postulats de fusion contrainte vérifiés par $\Delta^{d,f,g}$ où f et g sont choisis parmi *max*, *sum*, *lex*, WS_q, OWS_q, et d parmi d_D, d_H et d_{H_q}. De plus, ils ont indiqué dans quelles classes de complexité chacune de ses opérations de fusion se trouvait.

A.2.2 Maynard-Reid III et Lehmann

Maynard-Reid III et Lehmann [ML00] ont récemment proposé une approche en deux étapes pour agréger les croyances. Tout d'abord par l'agrégation des informations provenant des différentes sources (de fiabilités différentes) au niveau de chaque agent, puis l'agrégation des bases de croyances des agents.

Nous avons vu (partie A.1.2) que le cadre AGM correspondait à l'utilisation de pré-ordres totaux sur les interprétations pour les ordonner selon leur adéquation par rapport au monde réel d'après les croyances d'un agent. La théorie du choix social, quant à elle, utilise des relations quasi-transitives (dont font partie les pré-ordres totaux) pour décrire les préférences d'un agent, mais est confrontée au théorème d'impossibilité d'Arrow.

Etats de croyance généralisés

Maynard-Reid III et Lehmann proposent d'utiliser des relations modulaires et transitives, et définissent des « états de croyance généralisés » (*generalized belief states*).

Définition A.14.
– Un état de croyance généralisé $\prec$ est une relation modulaire et transitive sur $\mathcal{W}$.

On notera :
– $\mathcal{G}$ l'ensemble des états de croyance généralisés
– $\omega_1 \sim \omega_2$ si et seulement si $\omega_1 \not\prec \omega_2$ et $\omega_2 \not\prec \omega_1$ (égale ressemblance, agnosticisme)
– $\omega_1 \bowtie \omega_2$ si et seulement si $\omega_1 \prec \omega_2$ et $\omega_2 \prec \omega_1$ (conflit)

L'ensemble $\mathcal{T}$ des pré-ordres totaux et l'ensemble $\mathcal{T}_<$ de leurs restrictions asymétriques sont inclus dans $\mathcal{G}$, plus précisément :

Théorème A.18. [ML00]
– $\mathcal{T}_<$ est l'ensemble des relations irréflexives de $\mathcal{G}$.
– $\mathcal{T}$ est l'ensemble des relations réflexives de $\mathcal{G}$.
– $\prec \in \mathcal{G}$ si et seulement si il existe une partition $W = \langle W_0, \ldots, W_n \rangle$ de $\mathcal{W}$ telle que :

1. Si $\omega_1 \in W_i$, $\omega_2 \in W_j$ et $i \neq j$ alors $i < j$ si et seulement si $\omega_1 \prec \omega_2$
2. Chaque W_i est soit totalement connecté ($\omega \prec \omega'\ \forall \omega, \omega' \in W_i$), soit totalement déconnecté ($\omega \not\prec \omega'\ \forall \omega, \omega' \in W_i$).

Construction de la base de croyances d'un agent

On introduit les notations suivantes.

Définition A.15.
– Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de sources. A chaque source $s \in \mathcal{S}$ on associe un état de croyance $<^s \in \mathcal{G}$.
– $\mathcal{R}$ est un ensemble fini totalement ordonné de rangs (typiquement, des entiers).
– La fonction $rang\ :\ \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ associe un rang à chaque source. Pour $S \subseteq \mathcal{S}$, on note $rangs(S) = \{r \in \mathcal{R}\ :\ \exists$ s $\in$ S rang(s)=r $\}$.
– Le pré-ordre total sur $\mathcal{S}$ induit par l'ordre sur $\mathcal{R}$ sera noté $\sqsupseteq$. Ainsi $s \sqsupseteq s'$ ssi $rang(s) \geq rang(s')$; cela signifie que s est au moins aussi crédible que s'.
– La restriction de $\sqsupseteq$ à $S \subseteq \mathcal{S}$ sera notée $\sqsupseteq_S$.

– On note $\sqsupset$ (resp. $\equiv$) la restriction asymétrique (resp. symétrique) de $\sqsupseteq$.

Maynard-Reid III et Lehmann définissent tout d'abord l'opérateur AGR^*, qui combine les sources de même rang en utilisant $AGRUn$, puis agrège les résultats strictement rangés en utilisant $AGRRf$. Malheureusement cet opérateur n'a pas le comportment espéré. L'opérateur AGR suivant est donc utilisé. Le principe est proche d'un ordre lexicographique : les sources de rang bas « raffinent » les états de croyance des sources de haut rang.

Définition A.16.
– Soit $S \in \mathcal{S}$. $Un(S)$ désigne la relation $\bigcup_{s \in S} <^s$. $AGRUn(S) = Un(S)^+$.
– $AGRRf(S) = \{(\omega_1, \omega_2) \ : \ \exists s \in S \ : \ (\omega_1 <^s \omega_2) \wedge (\forall s' \in \ S \ (s' \sqsupset_S \ s) \rightarrow (\omega_1 \sim^{s'} \omega_2))\}$
– $AGR(S) = AGRRf(S)^+$.

Théorème A.19. [ML00]
Pour $S \subseteq \mathcal{S}$, $AGR(S) \in \mathcal{G}$.
Si $\sqsupseteq_S$ est totalement connecté, alors $AGR(S) = AGRUn(S)$ (sources de même rang)
Si $\sqsupseteq_S$ est un ordre total, alors $AGR(S) = AGRRf(S)$ (sources strictement rangées)

Fusion

L'agrégation concernait jusqu'à présent l'agrégation de sources pour constituer l'état de croyance généralisé d'un agent. On s'intéresse désormais à la fusion des états de croyance généralisés de plusieurs agents. Cette partie rejoint donc le cadre de ce travail.

Définition A.17. Soit $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un ensemble d'agents. Chaque agent A_i est informé par un ensemble de sources $S_i \subseteq \mathcal{S}$. La fusion de $\mathcal{A}$, notée $\oplus(\mathcal{A})$, est un agent informé par $S = \bigcup_{i=1,n} S_i$.

Pour calculer efficacement la fusion de $\mathcal{A}$, l'idéal serait de ne prendre en compte que les états de croyance des agents, sans considérer les relations de préférence de chaque source. Malheureusement cela n'est possible que pour des sources strictement rangées. Dans le cas général, il faut tenir compte des états de préférence des sources. On introduit la notion d'*état de croyance pédigré*.

Définition A.18. Soit A un agent informé par un ensemble de sources $S \subseteq \mathcal{S}$. L'état de croyance pédigré de A est le couple $(\prec, l)$, où $\prec = AGRRf(S)$ et $l : \prec \rightarrow \mathcal{R}$ tel que $l((\omega_1, \omega_2)) = max(\{rang(s) : \omega_1 <^s \omega_2, s \in S\})$. On note $\prec_r^A$ pour désigner la restriction à r de l'état de croyance pédigré, c'est-à-dire $\prec_r^A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \prec : l((\omega_1, \omega_2)) = r\}$.

Plus précisément :

Théorème A.20. [ML00] Soit A un agent informé par un ensemble de sources $S \in \mathcal{S}$ avec l'état de croyance pédigré $(\prec, l)$. Alors $\prec_r^A$ est la relation

$$\{(x, y) : \exists s \in S : (x <^s y) \wedge (r = rank(s)) \wedge (\forall s' \in S \ (s' \sqsupset s) \rightarrow (x \sim^{s'} y))\}$$

L'état de croyance induit par l'état de croyance pédigré $(\prec, l)$ est en fait la fermeture transitive de $\prec$. On peut à présent définir la fusion, appelée *fusion pédigrée*.

Définition A.19. Soient $\mathcal{A}$ et S décrits dans la définition A.17, $\sqsupseteq_S$ un pré-ordre total, et $\mathcal{P}_\mathcal{A}$ l'ensemble des états de croyance pédigrés des agents de $\mathcal{A}$.
La fusion pédigrée de $\mathcal{P}_\mathcal{A}$, notée $\oplus_{pedigre}(\mathcal{P}_\mathcal{A})$ est $(\prec, l)$ où :

1. $\prec$ est la relation
$\{(\omega_1, \omega_2) : \exists A_i \in \mathcal{A} \ , r \in \mathcal{R} : (x \prec_r^{A_i}) \wedge (\forall A_j \in \mathcal{A} \ , r' \in \mathcal{R} : (r' > r) \rightarrow (\omega_1 \sim_{r'}^{A_j} \omega_2))\}$

2. $l : \prec \rightarrow \mathcal{R}$ tel que $l((\omega_1, \omega_2)) = max(\{r : \omega_1 \prec_r^{A_i} \omega_2, A_i \in \mathcal{A}\})$.

Théorème A.21. [ML00] En prenant $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}_\mathcal{A}$, S et $\sqsupset_S$ de la definition A.19, $\oplus_{pedigre}(\mathcal{P}_\mathcal{A})$ est l'état de croyance pédigré de $\oplus(\mathcal{A})$.

Intuitivement, on ne tient pas compte des opinions dérivées de la clôture transitive avant la fusion, pour éviter des conflits lors de la fusion. La clôture est faite après fusion (ce qui n'est pas nécessaire pour les sources strictement rangées). Maynard-Reid et Lehmann justifient cette approche par un gain en complexité au niveau de l'espace mémoire consommé, et également au niveau du temps de calcul, car pour chaque couple d'interprétations considéré, on considère les croyances des agents et non pas toutes les sources des combinaisons possibles d'informants.

Introduction du vote

L'approche présentée ci-dessus possède une limitation importante, puisqu'elle ne tient pas compte du nombre de sources qui préfèrent une interprétation à une autre. Par exemple la situation où $\omega_1 < \omega_2$ pour mille sources et $\omega_2 < \omega_1$ pour une source est identique (du point de vue de la procédure précédente) à la situation où $\omega_2 < \omega_1$ pour mille source et $\omega_1 < \omega_2$ pour une source. L'idée est d'introduire la notion de *vote* d'une source pour $\omega_1 < \omega_2$, par exemple. Plus précisément, on compare des couples d'interprétations, selon une méthode proche de celle de Condorcet.

Définition A.20. Soit $S \subseteq \mathcal{S}$.
- $count_S(x, y) = ||\{s \in S : x <^s y\}||$
- Soit $p \in [0, 1]$. La fonction de vote pour p est définie par :
  $vt_p(S) = \{(x, y) : count_S(x, y) > 0 \text{ } et \text{ } \frac{count_S(x,y)}{||S||} \geq p\}$

Cependant, les relations vt_p ainsi définies ne sont pas forcément des états de croyance généralisés. Pour remédier à ce problème, il convient d'introduire la *fermeture modulaire transitive* d'une relation.

Définition A.21.
- Le niveau de $\omega \in \mathcal{W}$ dans une relation transitive $\preceq$ sur $\mathcal{W}$, noté $lev_\preceq(\omega)$, est

$$lev_\preceq(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } \omega \in min(\mathcal{W}, \preceq) \\ 1 + max_{\omega' \in \mathcal{W}}(lev_\preceq(\omega') : \omega' \prec \omega) \text{ sinon} \end{cases}$$

- La fermeture modulaire $MC(\preceq)$ d'une relation transitive $\preceq$ sur $\mathcal{W}$ est la relation telle que $(\omega_1, \omega_2) \in MC(\preceq)$ ssi
  1. $lev_\preceq(\omega_1) < lev_\preceq(\omega_2)$ ou
  2. $lev_\preceq(\omega_1) = lev_\preceq(\omega_2)$ et $\exists \omega_1', \omega_2' : lev_\preceq(\omega_1') = lev_\preceq(\omega_2') = lev_\preceq(\omega_1) \wedge (\omega_1' \bowtie \omega_2')$
- La fermeture modulaire transitive $MT(\preceq)$ d'une relation $\preceq$ sur $\mathcal{W}$ est la relation $MC(\preceq^+)$.

On peut désormais intégrer le vote dans le processus d'agrégation des sources pour donner l'état de croyance d'un agent.

Définition A.22. Soit $S \subseteq \mathcal{S}$ et $p \in [0, 1]$.
- $AGRRf_p(S) = \{(\omega_1, \omega_2) : \exists s \in S : (\omega_1 <^s \omega_2) \wedge ((\omega_1, \omega_2) \in vt_p(\{s' \in S : s' \equiv_S s\})) \wedge (\forall s' \in S : (s' \sqsupset_S s) \rightarrow (\omega_1 \sim^{s'} \omega_2))\}$
- $AGR_p(S) = MT(AGRRf_p(S))$

Ce qui conduit au résultat escompté suivant :

Théorème A.22. [ML00] Soit $S \in \mathcal{S}$ et $p \in [0,1]$. $AGR_p(S) \in \mathcal{G}$.

Enfin, on intègre la notion de vote au sein du processus de fusion. Les états de croyance généralisés des agents sont supposés être le résultat de l'opérateur AGR_p.

Définition A.23. Soit A un agent informé par un ensemble de sources $S \in \mathcal{S}$.
- L'état de croyance pédigré support de A est le triplet $(l, sup, rtab)$ où :
  - l : $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{R} \cup \{\clubsuit\}$ tel que $l(\omega_1, \omega_2) = max(\{rang(s) : \omega_1 \not\prec^s \omega_2, s \in S\} \cup \{\clubsuit\})$ où $\clubsuit \notin \mathcal{R}$ et $\clubsuit < r$ pout tout $r \in \mathcal{R}$,
  - sup : $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow 2^S$ tel que $sup(x, y) = \{s \in S : rang(s) = l(\omega_1, \omega_2), \omega_1 <^s \omega_2\}$, et
  - rtab : $rang(S) \rightarrow 2^S$ tel que $rtab(r) = \{s \in S : rang(s) = r\}$.
- Soient S et $\mathcal{A}$ de la définition A.17, $\sqsupseteq_S$ un pré-ordre total, et $\mathcal{P}_\mathcal{A}$ l'ensemble des états de croyance pédigrés support des agents de $\mathcal{A}$. La fusion pédigrée support de $\mathcal{P}_\mathcal{A}$, notée $\oplus_{sup}(\mathcal{P}_\mathcal{A})$ est le triplet $(l, sup, rtab)$ où :
  - l : $\prec \rightarrow \mathcal{R}$ tel que $l((\omega_1, \omega_2)) = max(\{l'(\omega_1, \omega_2) : (l', sup', rtab') \in \mathcal{P}_\mathcal{A}\})$,
  - sup : $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow 2^S$ tel que $sup(\omega_1, \omega_2) = \bigcup_{(l', sup', rtab') \in \mathcal{P}_\mathcal{A}, l'(\omega_1, \omega_2) = l(\omega_1, \omega_2)} sup'(\omega_1, \omega_2)$,
  - rtab : $rang(S) \rightarrow 2^S$ tel que $rtab(r) = \bigcup_{(l', sup', rtab') \in \mathcal{P}_\mathcal{A}, r \in range(rtab')} rtab'(r)$.

Le résultat suivant montre le bien fondé de ces définitions.

Théorème A.23. [ML00]
- Soit A un agent informé par un ensemble de sources $S \subseteq \mathcal{S}$, avec un état de croyance pédigré support $(l, sup, rtab)$, et utilisant la fonction d'agrégation AGR_p avec $p \in [0, 1]$. L'état de croyance de A est la relation :

$$MT(\{(\omega_1, \omega_2) : ||sup(\omega_1, \omega_2)|| > 0 \ et \ ||sup(\omega_1, \omega_2)|| / ||rtab(l(\omega_1, \omega_2))|| \geq p\})$$

- Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}_\mathcal{A}$, S et $\sqsupseteq_S$ de la définition A.23. Alors $\oplus_{sup}(\mathcal{P}_\mathcal{A})$ est l'état de croyance pédigré support de $\oplus(\mathcal{P}_\mathcal{A})$.

Les gains de temps et d'espace évoqués précédemment ont toujours lieu, puisque pour une opinion donnée, seules les opinions de rang supérieur sont considérées.

Application dans le cadre de ce travail

Le cadre défini par Maynard-Reid III et Lehmann est différent des autres cadres étudiés dans ce document. Il peut cependant être intéressant, si l'on considère le sujet de notre travail.

On peut ainsi penser à prendre pour sources de chaque base de croyances l'ensemble des bases de croyances des agents à l'itération précédente. Dans ce cas l'étape de fusion n'a plus lieu d'être puisqu'elle est faite directement lors de l'agrégation des croyances des différentes sources.

Il est alors intéressant de voir ce que donne le cadre précédent si les sources sont de même rang, c'est-à-dire lorsque l'on considère qu'elles ont la même fiabilité.

Le théorème suivant montre que l'opérateur $AGRUn$ représente l'agrégation des sources, alors que l'opérateur Un n'est pas suffisant.

Théorème A.24. [ML00] Supposons que toutes les sources sont de même rang ($\sqsupseteq_S$ totalement connecté). Alors, dans le cadre d'une agrégation sans vote :
- $Un(S)$ est modulaire mais pas nécessairement transitive.
- $AGR(S) = AGRUn(S)$.

et dans le cadre d'une agrégation comportant un vote :

– $AGR_p(S) = AGREq_p(S)$.

On voit donc que l'agrégation sans vote est assez pauvre puisqu'il s'agit simplement de la fermeture transitive de l'union des bases de croyances.

A.2.3 Autres approches pour la fusion

Revesz : *model fitting*

Revesz a proposé [Rev93, Rev97] des opérateurs de fusion inspirés du cadre AGM, appelés opérateurs de *model fitting* (*adéquation sémantique*).

Ces opérateurs sont proches des opérateurs de fusion contrainte évoqués précédemment. La principale différence réside dans le fait que Revesz représente les profils de croyances par des ensembles de bases de croyances, et non pas des multi-ensembles. La notion d'équivalence entre profils de croyances devient :

Définition A.24. Soient deux profils de croyances Ψ_1 et Ψ_2.
$\Psi_1 \Rightarrow \Psi_2$ si et seulement si $\forall \varphi_2 \in \Psi_2\ \exists \varphi_1 \in \Psi_1$ tel que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$.
$\Psi_1 \Leftrightarrow \Psi_2$ si et seulement si $\Psi_1 \Rightarrow \Psi_2$ et $\Psi_2 \Rightarrow \Psi_1$.

Revesz définit les opérateurs de model-fitting par un ensemble de sept postulats, proches des postulats (IC0)-(IC8) de la fusion contrainte.

Le théorème de représentation correspondant est également proche des assignements syncrétiques. Revesz définit les *assignements loyaux* par quatre propriétés, les trois premières étant identiques aux trois premières propriétés des assignements syncrétiques, et la quatrième étant :

4. *Si* $\omega \leq_{\Psi_1} \omega'$ *et* $\omega \leq_{\Psi_2} \omega'$, *alors* $\omega \leq_{\Psi_1 \sqcup \Psi_2} \omega'$

Revesz définit alors des opérateurs d'*arbitrage par model fitting*. Ces opérateurs ont pour objectif de minimiser l'insatisfaction individuelle. D'autre part, ces opérateurs ne peuvent pas être des opérateurs majoritaires (c'est-à-dire satisfaire la propriété (Maj)). Pour pallier cette faiblesse, Revesz introduit les opérateurs de *model fitting* pondérés. De tels opérateurs ne seront pas étudiés ici, car il n'entrent pas dans le cadre de ce travail.

Liberatore et Schaerf : révision commutative

Liberatore et Schaerf [LS95, LS98] ont défini des opérateurs de fusion apelés *opérateurs de révision commutative*. L'idée est de définir un opérateur de fusion $\diamond$ vérifiant :

$$\varphi_1 \diamond \varphi_2 = (\varphi_1 \circ \varphi_2) \vee (\varphi_2 \circ \varphi_1)$$

$\circ$ étant un opérateur de révision AGM. Il s'agit en fait d'une généralisation des propriétés des opérateurs de révision pour leur imposer d'être commutatifs.

Les opérateurs de révision commutative vérifient la propriété suivante :

Théorème A.25. [LS98] Si φ_1 et φ_2 sont deux formules complètes, alors $\varphi_1 \diamond \varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$

Le théorème de représentation associé aux opérateurs de révision commutative a pour particularité de prendre en considération des ensembles d'interprétations, et non pas des interprétations.

La principale limitation de cette approche est que les opérateurs de révision commutative sont des relations binaires, et il n'est pas possible de fusionner plus de deux bases de croyances.

Lin et Mendelzon : fusion majoritaire

Lin et Mendelzon [Lin95, LM98, LM99] ont défini des opérateurs de fusion appelés opérateurs de *fusion majoritaire*, et définis par quatre postulats. L'originalité de leur approche réside dans le quatrième postulat :

Soit l un littéral. Si $|\{\varphi \in \Psi : \varphi \models l\}| > |\{\varphi \in \Psi : \varphi \models \neg l\}| + |\{\varphi \in \Psi \ : \ \varphi \triangleright \neg l\}|$, alors $\Delta(\Psi)$ implique l.

Ce postulat exprime l'idée d'un vote des différentes bases pour ou contre l. Pour que l soit accepté par la fusion, il faut que le nombre de voix explicite en faveur de l soit supérieur au nombre de voix explicites et implicites (cf l'opérateur $\triangleright$) en faveur de $\neg l$.

A.2.4 Liens entre révision et fusion

La révision commutative proposée par Liberatore et Schaerf a montré le lien fort entre révision et fusion. Cependant leur approche limite la fusion à deux bases de croyances. Cette partie montre que d'autres liens peuvent être faits entre révision et fusion. Ces rapprochements entre révision et fusion ont beaucoup d'importance dans le cadre de la fusion itérée, puisque celle-ci mêle fusion et révision. Définir l'opérateur de révision à partir d'un opérateur de fusion nous permet par exemple de n'avoir qu'à préciser l'opérateur de fusion.

Le lien entre la révision AGM et la fusion contrainte a déjà été traité au début de ce document, au paragraphe 2.5.

Révision commutative et fusion contrainte

Le lien entre la révision commutative proposée par Liberatore et Schaerf (voir partie A.2.3) et la fusion contrainte a été étudié par Konieczny [Kon99]. Le problème est de définir un opérateur de révision commutatif $\diamond_\Delta$ à partir d'un opérateur de fusion contrainte Δ. Soit $\circ$ l'opérateur de révision associé à Δ, comme décrit dans la partie précédente.

Théorème A.26. [Kon99]
Si Δ est un opérateur de fusion contrainte, alors il satisfait

$$\Delta_{\varphi\vee\mu}(\varphi \sqcup \mu) \Leftrightarrow \Delta_\varphi(\mu) \vee \Delta_\mu(\varphi)$$

Ce qui peut se formuler également : $\Delta_{\varphi\vee\mu}(\varphi \sqcup \mu) \Leftrightarrow \mu \circ \varphi \vee \varphi \circ \mu$
où $\circ$ est l'opérateur de révision AGM associé à Δ (i.e. $\varphi \circ \mu = \Delta_\mu(\varphi)$).

Ainsi, on associe l'opérateur de révision commutative $\diamond_\Delta$ à l'opérateur de fusion contrainte Δ par :

$$\varphi \diamond_\Delta \mu = \Delta_{\varphi\vee\mu}(\varphi \sqcup \mu)$$

Un tel opérateur ne vérifie pas nécessairement la condition (LS6) pour être un opérateur de révision commutative. On doit ajouter une propriété supplémentaire sur $\circ$.

Théorème A.27. [Kon99] Un opérateur $\diamond$ défini à partir d'un opérateur de révision $\circ$ par $\varphi \diamond \mu = \mu \circ \varphi \vee \varphi \circ \mu$ satisfait (LS1)-(LS8) si et seulement si $\circ$ satisfait la propriété suivante :

$$(\mu \vee \theta) \circ \varphi = \begin{cases} \mu \circ \varphi \text{ si } \varphi \circ (\mu \vee \theta) \models \neg\theta \\ \theta \circ \varphi \text{ si } \varphi \circ (\mu \vee \theta) \models \neg\mu \\ \mu \circ \varphi \vee \theta \circ \varphi \text{ sinon} \end{cases}$$

On dispose également d'un théorème de représentation.

Définition A.25. Un assignement fidèle commutatif est un assignement fidèle vérifiant la propriété :

$$min(\llbracket \varphi \rrbracket , \leq_{\mu\vee\theta}) = \begin{cases} min(\llbracket \varphi, \leq_\mu \rrbracket) \text{ si } \mu <_\varphi \theta \\ min(\llbracket \varphi, \leq_\theta \rrbracket) \text{ si } \theta <_\varphi \mu \\ min(\llbracket \varphi, \leq_\mu \rrbracket) \cup min(\llbracket \varphi, \leq_\theta \rrbracket) \text{ sinon} \end{cases}$$

où $\mu \leq_\varphi \theta$ est défini par : $\mu \leq_\varphi \theta$ ssi $\exists\omega \models \theta \forall\omega' \models \theta \omega \leq_\varphi \omega'$.

Théorème A.28. [Kon99] L'opérateur $\diamond$ vérifie (LS1)-(LS8) si et seulement si il existe un assignement fidèle commutatif qui associe à chaque base de croyances φ un pré-ordre $\leq_\varphi$ tel que :

$$mod(\varphi \diamond \varphi') = min(\llbracket \varphi \rrbracket , \leq_{\varphi'}) \cup min(\llbracket \varphi' \rrbracket , \leq_\varphi)$$

La propriété requise sur $\circ$ exige en fait que $\circ$ vérifie $\varphi \circ \mu = (\mu \circ \varphi) \circ \mu$. Cette propriété est vérifiée par les opérateurs de révision définis à partir d'une distance.

B Implantation de l'opérateur de fusion itérée

Ce chapitre décrit l'implantation des opérateurs de fusion itérée usuels. Celle-ci a été réalisée sous Java, et a permis de tester la convergence ainsi que plusieurs propriétés sur un grand nombre d'instances. Cette implantation ne représente pas l'objectif principal de ce stage, il s'agit plutôt d'un outil. Ainsi nous n'en détaillerons pas toute la conception. Nous nous contenterons d'expliquer les choix effectués et la structure principale de celle-ci. Quelques portions de code intéressantes seront également présentées. L'intégralité du code se trouve dans le support numérique joint à ce document, ainsi que les statistiques obtenues grâce à cet outil.

B.1 Analyse du problème

Le cadre de ce projet est celui de la logique propositionnelle classique. L'objectif est de pouvoir tester les opérateurs de fusion itérée usuels dans tous les cas possibles, c'est-à-dire pour tous les profils E^0 possibles. Le raffinage a donc été fait ainsi :

- `generer_nb_modeles` génère le nombre de modèles de chaque base du profil. Par exemple, il génère le tableau $[2, 5, 6]$, ce qui signifie que K_1^0 contient 2 modèles, K_2^0 en contient 5, et que K_3^0 en contient 6. Cette fonction génère tous les vecteurs possibles de ce type dont les composantes sont croissantes (puisque l'ordre des bases n'importe pas) et dont chaque composante est inférieure à $2^{nombre\ de\ variables}$. Pour chacun de ces vecteurs, la fonction `generer_modeles` est appelée.
- `generer_modeles` prend en paramètre un vecteur contenant le nombre de modèles par base, et génère toutes les instances (c'est-à-dire tous les profils) correspondantes. Pour chacune de ces instances, la fonction `fusion_iteree` puis la fonction `test_proprietes` sont appelées.
- `fusion_iteree` réalise la fusion itérée. Celle-ci fait donc appel aux fonctions `revision` (plus précisément `cred_scept` qui appelle `revision` dans le sens correspondant au cas crédule ou sceptique) et `fusion`.
- `test_proprietes` lance les tests sur le resultat de la fusion itérée, plus exactement ceux que l'on désire effectuer.

Ces appels de fonction peuvent être visualisés comme ceci :

```
generer_nb_modeles
    generer_modeles
        fusion_iteree
            fusion
            cred_scept
                revision
        test_proprietes
```

B.2 Conception

B.2.1 Structures de données

Les structures de données utilisées sont volontairement simples afin d'améliorer le temps de calcul. Il aurait été plus élégant de définir davantage de structures pour les données (classes pour les profils, les bases, etc) mais cela aurait ralenti l'exécution des tests.

Nous avons donc utilisé un tableau d'entier pour représenter une base. Chaque interprétation est numérotée selon la numérotation usuelle allant de 0 (pour l'interprétation $(0, \ldots, 0)$) à $2^{nombre\ de\ variables} - 1$ (pour $(1, \ldots, 1)$). Pour calculer la distance entre interprétations, nous utilisons également un tableau de booléens pour coder une interprétation. Ensuite, un profil est représenté par un objet `Vector` composé de tableaux d'entiers (les bases du profil). Les contraintes d'intégrité μ sont également représentées par un tableau d'entiers.

B.2.2 Diagramme de classes

Ici aussi un compromis entre efficacité et structuration du code a dû être trouvé. Ainsi, la classe principale du projet, `FusionIteree`, reste monolithique alors qu'elle aurait pu être davantage structurée, mais alors moins performante. Cela dit, ce choix permet tout de même de partager un maximum de code commun aux différents types de fusion. Ainsi cette classe est abstraite et possède deux méthodes abstraites : `cred_scept` qui indique dans quel sens s'effectue la révision, et une autre fonction propre à l'affichage des résultats. Cette classe abstraite est implémentée par les classes `FusionItereeCredule` et `FusionItereeSceptique`. Ensuite, les classes `TestFusionItereeCredule` et `TestFusionItereeSceptique` permettent de lancer les tests sur ces classes. La figure B.1 présente le diagramme des classes UML pour ce projet.

B.3 Implantation

Nous citons ci-dessous la fonction `fusion_iteree`, celle-ci étant au cœur de notre programme. Pour davantage de documentation, veuillez consulter le code source et la javadoc associée sur le support numérique joint à ce document.

```
/**
 * Fusion iteree proprement dite
 * @param  bases les modeles de chaque base
 * @param  mu    les contraintes d'integrite
 * @param  tests un booleen qui indique si on effectue les tests,
 * @return le resultat de la fusion iteree (une base de connaissance)
 */
public int[] fusion_iteree( Vector bases, int[] mu, boolean tests ) {
int    nbases     = bases.size();
Vector bases_prec = new Vector();
Vector bases_cour = new Vector();
Vector tab        = new Vector();
int[]  delta_i    = new int[0];
int[]  delta_i_prec;
int    j;
// on initialise la base courante et la base précédente
for ( j=0; j<nbases; j++ ) {
    bases_prec.add(j, new int[0]);
```

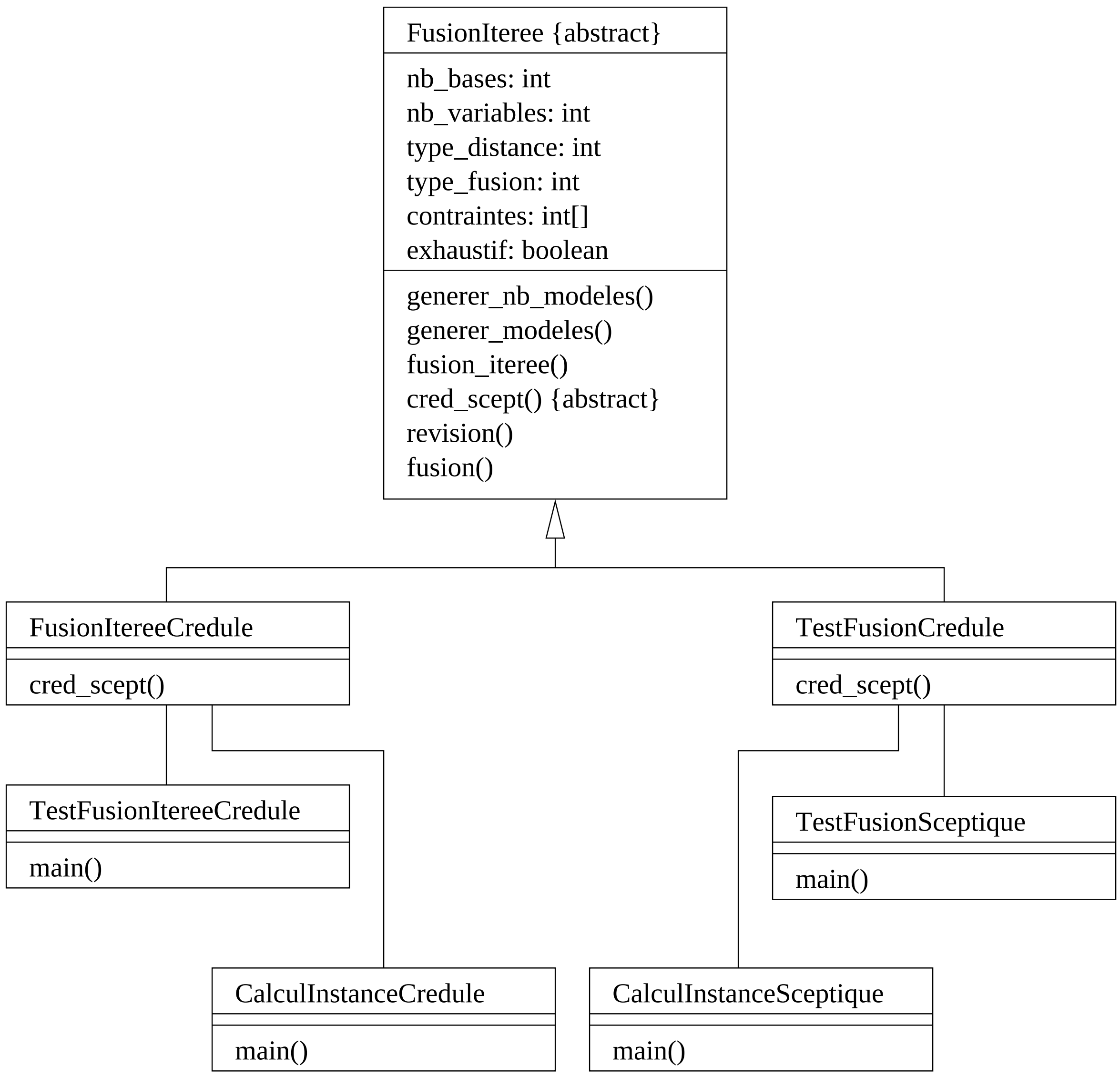

Fig. B.1 – Diagramme des classes pour l'implantation de la fusion itérée

```
    bases_cour.add(j, bases.get(j));
}
// si on affiche le detail d'une instance, alors on initialise tab
if ( gen_tab )
    generer_tab_init( tab, bases );
// Fusion itérée !
it = 0;
    while ( !(egal_kbs(bases_prec,bases_cour)) ) {
    // on sauvegarde l'ancienne base
    for (j=0; j<nbases; j++)
    bases_prec.set(j, bases_cour.get(j));
    // on fusionne
    delta_i_prec = delta_i;
    delta_i = fusion( bases_cour, mu, type_fusion, type_distance );
    // on teste la monotonie
    if ( tests && (it>1) ) {
    // remarque : on ne la teste pas a la premiere iteration
    // car pour la fusion iteree credule, cette non-monotonie
    // est normale : on entre dans les contraintes
    test_inclusion_delta_i( delta_i, delta_i_prec, bases );
    }
    // on revise de facon credule ou sceptique
    cred_scept( bases_cour, bases_prec, delta_i, type_distance );
    it++;
    // si on affiche le detail d'une instance, on met a jour le tableau
    if ( gen_tab )
    update_tab( tab, bases_cour,
            fusion(bases_cour,mu,type_fusion,type_distance));
}
if ( gen_tab )
    joli_print( tab );
nb_consensus += test_consensus( bases, bases_cour );
return delta_i;
}
```

Bibliographie

[AGM85] C.E. Alchourrón, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[AM82] C.E. Alchourrón and D. Makinson. On the logic of theory change : Contraction functions and their associated revision functions. *Theoria*, 48 :14–37, 1982.

[Bou96] Craig Boutilier. Iterated revision and minimal change on conditional beliefs. *Journal of Philosophical Logic*, 25(3) :263–305, 1996.

[DP97] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial Intelligence*, 89 :1–29, 1997.

[Gär88] P. Gärdenfors. Knowledge in flux. *MIT Press*, 1988.

[Gär90] P. Gärdenfors. Belief revision and nonmonotonic logic : two sides of the same coin ? In *Proceeding of the Ninth European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'90)*, pages 768–773, 1990.

[KLM02] S. Konieczny, J. Lang, and P. Marquis. Distance-based merging : a general framework and some complexity results. In *KR2002 : Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 97–108, 2002.

[KM91] H. Katsuno and A.O. Mendelzon. Propositional knowledge base revision and minimal change. *Artificial Intelligence*, 52 :263–294, 1991.

[Kon99] Sébastien Konieczny. Sur la logique du changement : révision et fusion de bases de connaissance. *Thèse de doctorat. Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille*, 1999.

[KP02a] S. Konieczny and R. Perez. On the frontier between arbitration and majority. In *Proceedings of the Eigth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'02), 2002.*, pages 109–118, 2002.

[KP02b] S. Konieczny and R. Pino Perez. Merging information under constraints : a qualitative framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.

[Leh95] D. Lehmann. Belief revision, revised. In *Proceedings of the Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1534–1540, 1995.

[Lin95] J. Lin. Frameworks for dealing with conflicting information and applications. phd thesis, university of toronto, 1995.

[LM98] Jinxin Lin and Alberto O. Mendelzon. Merging databases under constraints. *International Journal of Cooperative Information Systems*, 7(1) :55–76, 1998.

[LM99] J. Lin and A. O. Mendelzon. Knowledge base merging by majority. *Dynamic Worlds : From the Frame Problem to Knowledge Management. Kluwer*, 1999.

[LS95] Paolo Liberatore and Marco Schaerf. Arbitration : A commutative operator for belief revision. In *WOCFAI*, pages 217–228, 1995.

[LS98] Paolo Liberatore and Marco Schaerf. Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1) :76–90, 1998.

[ML00] Pedrito Maynard-Reid III and Daniel Lehmann. Representing and aggregating conflicting beliefs. In Anthony G. Cohn, Fausto Giunchiglia, and Bart Selman, editors, *KR2000 : Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 153–164, San Francisco, 2000. Morgan Kaufmann.

[Rev93] Peter Z. Revesz. On the semantics of theory change : Arbitration between old and new information. In *Proceedings of the 12th ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Databases*, pages 71–82, 1993.

[Rev97] P. Z. Revesz. On the Semantics of Arbitration. *Journal of Algebra and Computation*, 7 (2) :133–160, 1997.

[Spo87] W. Spohn. Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic states. In *W. L. Harper and B. Skyrms, editors, Causation in Decision, Belief Change, and Statistics, volume 2*, pages 105–134, 1987.