

---

# Représentation graphique de suites réelles appliquée à l'étude de mots infinis

## Mémoire de DEA

sous la direction de Philippe Narbel

---

David RENAULT  
JANVIER – JUIN 2001

### **Résumé**

Certaines familles de mots infinis sont intrinsèquement reliées à des systèmes dynamiques, eux-mêmes correspondant à des suites réelles. Lorsque l'on effectue une étude de la suite réelle, certaines propriétés retombent sur les mots infinis. Ce mémoire décrit deux façons d'étudier graphiquement des suites réelles, et les résultats de structure qui en découlent sur deux familles de mots infinis.

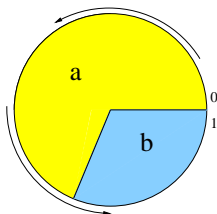
# Table des matières

Table des matières	2
Introduction	4
<b>1 La représentation de Harrison</b>	<b>6</b>
1.1 Le point de vue géométrique . . . . .	7
• Construction informelle. . . . .	7
• Construction de la courbe. . . . .	7
• Algorithme de tracé. . . . .	7
• Quelques explications. . . . .	9
• Aspect de la courbe. . . . .	10
1.2 Le point de vue analytique . . . . .	12
• Paramétrisation. . . . .	12
• Continuité. . . . .	12
1.3 Propriétés intrinsèques . . . . .	13
• Lien avec le développement en fractions continues. . . . .	13
• Auto-similarité. . . . .	15
1.4 Retour sur les mots sturmiens . . . . .	16
• Liens avec les fractions continues. . . . .	16
• Intérêt d'une représentation graphique. . . . .	17
<b>2 La représentation de Mendès-France</b>	<b>18</b>
2.1 Représentation graphique . . . . .	20
• Construction de la courbe. . . . .	20
• Algorithme de tracé. . . . .	20
• Exemples de courbes. . . . .	20
2.2 Une première approche . . . . .	21
2.3 Principe de renormalisation . . . . .	22
• Approximation par une série. . . . .	22
• Méthode de la phase stationnaire. . . . .	23
• Transformation de $\mathcal{S}_L$ . . . . .	23
2.4 Application aux courbes $\mathcal{S}_L$ . . . . .	24
• Étude du système dynamique. . . . .	24
• Effet d'une renormalisation sur la courbe. . . . .	24

2.5	Approche locale . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Génération de mots</b>	<b>27</b>
3.1	Approche dynamique . . . . .	28
	• Définition des mots. . . . .	28
	• Transformation en système dynamique. . . . .	28
	• Principe de conjugaison. . . . .	28
	• Orbites du système. . . . .	29
3.2	Majoration de la complexité . . . . .	29
	• Découpage de $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ . . . . .	29
	• Comptage du nombre de parties. . . . .	30
	• Retour à la complexité. . . . .	31
	• Minoration de la complexité. . . . .	32
3.3	Étude de la renormalisation . . . . .	32
	• Cas rationnel. . . . .	32
	• Cas irrationnel. . . . .	32
3.4	Extension à des cas plus complexes . . . . .	33
	Conclusion	34
	Bibliographie	35

# Introduction

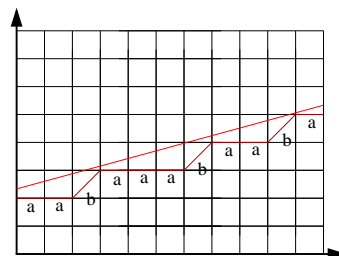
SUPPOSONS vouloir générer des mots infinis sur un alphabet quelconque. Pour ce faire, il existe de nombreuses méthodes : génération par automates, points fixes de morphismes ou d'applications sur les mots, utilisation de systèmes dynamiques réels . . . Les mots générés par systèmes dynamiques acquièrent des propriétés selon celles du système. Parallèlement, les systèmes dynamiques réels sont intimement reliés aux suites réelles qu'ils engendrent. Lorsqu'un langage de mots infinis est généré par un système dynamique réel, trois types d'analyse sont possibles : l'analyse des suites réelles, l'analyse du système dynamique, et l'analyse des mots infinis.



L'un des exemples les plus généraux dans le cadre des mots infinis est celui des *mots sturmiens*. Entre autres propriétés, les mots sturmiens peuvent être générés à l'aide d'un système dynamique réel très simple, lié aux rotations sur le cercle. Considérons le cercle  $\mathbb{S}_1$  et la rotation d'angle  $\tau$ , notée  $r_\tau$ . Elle induit un système dynamique sur  $\mathbb{S}_1$ , qui à un point de départ  $x_0 = \rho$  associe les éléments  $x_n = r_\tau^n(\rho) = \rho + n\tau$ . L'idée consiste à associer à  $x_n$  une lettre : selon que  $x_n \in [0; 1 - \tau]$ , la lettre 'a', sinon la lettre 'b'. Ce système dynamique génère la famille des mots sturmiens. Les mots pour lesquels le

point de départ est  $\rho = 0$  sont appelés *mots caractéristiques*. Ils sont en particulier reliés aux mots de Christoffel (cf. [Ber95]). Formellement, si  $0 \leq \tau < 1$  et  $\rho$  sont deux nombres réels, la suite réelle associée est la suite des  $\langle \tau n + \rho \rangle$ , où  $\langle \cdot \rangle$  correspond à la partie fractionnaire.

La manière la plus géométrique de générer de tels mots consiste à se placer dans la grille  $\mathbb{N}^2$ , et de tracer une droite  $\Delta$  dont la pente, strictement inférieure à 1, correspond au  $\tau$  de la construction précédente. A chaque point où  $\Delta$  rencontre une droite verticale de la grille, on associe le sommet de la grille directement en dessous. Les coordonnées des points associés sont les  $(n, \tau n + \rho)$ . En reliant ces sommets, on obtient une ligne polygonale continue, constituée de segments horizontaux  $\rightarrow$  et de segments en diagonale  $\nearrow$ . Le mot sturmien associé est le mot obtenu en remplaçant chaque  $\rightarrow$  par un 'a' et chaque  $\nearrow$  par un 'b'.



Ce type de construction rejoint les algorithmes d'approximation de droites de Bresenham. La représentation graphique est intimement relié aux trajectoires de la droite  $\Delta$  sur le tore, qui correspond à la première formulation des mots sturmiens par Morse en 1940. Elle rejoint celle des « mots de billard », pour lesquels on lance une bille sur un billard rectangulaire et l'on note la suite des bandes rencontrées, selon qu'elles soient horizontales ou verticales.

Trois approches des mots sturmiens sont donc possibles : par les suites réelles, par les systèmes de rotations sur le cercle, et par les mots infinis.

UNE PROPRIÉTÉ particulière des mots sturmiens est leur complexité. La notion de complexité de mots est rappelée dans [All94]. L'idée consiste à affirmer qu'un mot infini est d'autant plus complexe qu'il possède de nombreux facteurs différents de longueur donnée. Sur l'alphabet  $L$ , prenons un mot infini  $u \in L^\omega$ . On appelle *complexité* de  $u$ , notée  $p_u$  la fonction qui compte le nombre de

facteurs de  $u$  de longueur donnée :  $p_u(n) = \left| \left\{ w \in L^n \text{ tel que } \exists k, w = u_k u_{k+1} \cdots u_{k+n-1} \right\} \right|$

Cette fonction est croissante, et même strictement croissante ou bornée. En effet, si le nombre de facteurs de longueur  $n$  est le même que celui de longueur  $n + 1$ , cela signifie que chaque facteur de longueur  $n$  s'étend de manière unique en un facteur de longueur  $n + 1$ . La génération du mot aboutit donc forcément par un cycle. Donc, lorsque la fonction n'augmente plus, elle devient constante et le mot est périodique. Les mots sturmiens ont la particularité d'être de complexité  $(n + 1)$ , c'est-à-dire la complexité la plus basse possible qui ne soit pas bornée, d'où leur « simplicité ». De plus, parmi les mots sturmiens, il existe une sous-classe de mots encore plus simples, qui sont points fixes de morphismes.

De cette notion de complexité, on peut définir l'entropie sur les mots infinis :

$$h(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log p_u(n)}{n \log |L|} \quad 0 \leq h(u) \leq 1$$

Il est à noter que cette limite existe toujours pour un mot de longueur infinie, de par la sous-additivité du logarithme. Les mots de complexité polynomiale ont une entropie nulle. Cette notion d'entropie sur les mots infinis est à relier à l'entropie sur les suites réelles qui mesure le désordre intervenant dans une suite. L'entropie et la complexité représentent un autre lien entre les suites réelles et les mots infinis.

**P**LUSIEURS TYPES de représentation graphique de suites réelles existent. Lorsque l'on observe de la structure au sein de ce type de représentation, la question qui se pose est la suivante : cette structure a-t'elle un lien avec la suite réelle étudiée, et dans ce cas, peut-on capturer cette structure à l'aide d'outils formels appropriés à l'analyse que l'on fait de cette suite, du système ou des mots associés ? L'étude réalisée dans ce mémoire s'attache aux propriétés de deux types de représentations graphiques connues. Dans un premier temps, le travail de Jenny Harrison, dont la représentation graphique associée à la suite  $\langle n\tau \rangle$  permet de retrouver diverses propriétés des mots sturmiens de manière graphique. Dans un second temps, la représentation de Michel Mendès-France, nous permet de nous attacher à d'autres types de suites et d'étendre l'étude graphique des mots sturmiens, en particulier à l'aide de phénomènes de renormalisation. Au final, on étendra l'étude réalisée sur les mots sturmiens à celle des suites  $\langle n^2\tau \rangle$ , dont on bornera la complexité.

Notations :  $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$  dénomment les ensembles usuels  
 $\mathbb{S}_1$  désigne le cercle  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

$\langle x \rangle$  désigne la partie fractionnaire de  $x$ .  
 $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

$(u_n)$  symbolise une suite réelle à valeurs dans  $[0; 1]$   
 $\tau$  est un paramètre réel non entier.

Un ensemble de Cantor est un sous-ensemble fermé parfait (aucun point isolé), totalement déconnecté, d'un intervalle fermé, habituellement  $[0; 1]$

# La représentation de Harrison

DANS [Har89c], J. Harrison présente une manière générale d'associer à une suite  $(u_n)$  une courbe dans le plan, dont la géométrie reflète certaines propriétés de la suite  $(u_n)$ . Originellement, cette construction fournit des exemples de difféomorphismes corroborant le théorème de Denjoy. Ce théorème affirme que les difféomorphismes  $\in$  du cercle  $\mathbb{S}_1$  qui préservent l'orientation sont topologiquement équivalents à une rotation dont l'angle correspond au nombre de rotations du difféomorphisme. En particulier, la dynamique de tels systèmes est alors entièrement déterminée par celle des rotations.

Cette représentation graphique est utilisée par Harrison dans le cadre des suites  $\langle n\tau \rangle$ . Les propriétés de répartition de telles suites sont en effet bien adaptées à la construction qu'elle met en oeuvre. Ces suites étant reliées aux mots sturmiens et aux systèmes des rotations irrationnelles, cette représentation devient un moyen d'approcher cette famille de mots infinis. Est-il alors possible de mettre en valeur des propriétés graphiques de structure, qui correspondraient aux caractéristiques des mots sturmiens ? La construction de Harrison met en valeur de manière relativement simple des propriétés inhérentes à la suite  $\langle n\tau \rangle$ , telles que le développement en fraction continue de  $\tau$ , ainsi que le caractère périodique de ce développement. Ces propriétés interviennent fréquemment dans l'étude des mots sturmiens.

A FIN D'EXAMINER le travail réalisé par Harrison, nous avons effectué un travail de relecture des articles [Har89c, Har89b, Har89a], ainsi qu'un travail de réécriture de certaines preuves. Afin d'expliquer la structure de ces courbes, nous allons les approcher de deux manières différentes : une description *géométrique*, qui permet d'apprécier la façon dont est construit la courbe pas à pas, et une description *analytique*, qui permet de mettre en valeur les propriétés de la courbe dessinée par Harrison. Au final, on se ramène aux caractéristiques des mots sturmiens, pour expliquer les rapports entre les théorèmes concernant la construction de la courbe et les mots infinis.

## 1.1 Le point de vue géométrique

**Construction informelle.** Donnons nous une suite réelle  $(u_n)$ , dont les valeurs sont prises dans l'intervalle  $[0; 1]$ . L'étude du comportement d'une telle suite pose les questions suivantes : est-elle périodique, dense, uniformément distribuée ? Quel est son comportement asymptotique, sa dynamique ? Dans [Har89c], Harrison présente une méthode de tracé de la suite  $(u_n)$  qui respecte deux critères :

- *l'ordre* dans lequel les termes de la suite apparaissent (information *temporelle*)  
Il doit être possible de distinguer de deux termes celui étant apparu le premier.
- *la valeur* de chaque terme (information *spatiale*)  
Il doit être possible de représenter l'ensemble des valeurs prises par la suite.

Pour cela, l'idée consiste à associer à chaque terme de la suite  $u_n$  une valeur  $f(n)$  significative de son rang. La fonction  $f$  doit être à cet effet injective. De plus, pour que la construction ait un sens lorsque l'on prend de plus en plus de termes, on choisit  $f$  décroissante : les termes les plus éloignés auront moins d'importance. Enfin, si l'on considère maintenant les termes de la suite sous la forme de couples  $(u_n, f(n))$ , il est possible de réordonner les  $u_n$ . Le deuxième élément du couple nous assure que l'on ne perd pas l'information temporelle. Ce procédé nous assure de pouvoir distinguer l'ensemble des valeurs prises par la suite. Si cet ensemble est dense, alors le réordonnement va recouvrir l'ensemble de l'intervalle de travail.

Partant de cette liste ordonnée de termes  $(u_n, f(n))$ , on construit une courbe dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , à l'aide de segments : un segment horizontal qui exprime la distance entre le terme  $u_n$  et le terme  $u_{n-1}$ , et un segment diagonal (à angle fixé avec l'horizontale, vers le haut ou le bas), qui exprime la valeur de  $f(n)$ . De plus, afin d'obtenir une convergence, on choisit d'alterner les sens dans lesquels se font les diagonales selon la parité de  $n$ . Comme  $f$  est décroissante, on obtient une série alternée. Ainsi, la convergence de la courbe est assurée au moins horizontalement et verticalement.

**Construction de la courbe.** La construction part d'une suite  $(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ , d'une fonction nommée fonction d'amortissement  $f$  réelle positive, décroissante et d'un angle  $\theta \in ]0; \pi/2[$  (par simplicité, on peut choisir de fixer  $\theta = \pi/4$ ). Partant de là, étant donné un nombre  $n$  de pas de calculs, on définit deux constantes normalisantes :

$$\mathbf{f}(0) = \sum_{k=1}^n (-1)^k f(k) \quad \mathbf{f} = 1 + \sum_{k=0}^n f(k)$$

Ordonnons les  $n$  premiers termes de la suite  $(u_n)$ , sous la forme  $\{x_{p_0} = 0, x_{p_1}, \dots, x_{p_n}\}$ . Cette suite est alors une suite croissante de  $[0; 1]$ , et l'intervalle tout entier se décompose en sous intervalles  $I_k = [x_{p_k}; x_{p_{k+1}}]$  pour  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . Dans le plan, la courbe part du point  $(0; 0)$ . Pour la construire, on applique alors les points suivants :

1. Tracer un segment partant du point courant, horizontal, vers la droite de longueur  $\mathbf{f} \cdot |I_0|$ .
2. Y attacher une *diagonale* formant un angle  $\theta$  avec l'horizontale, partant vers la gauche, de longueur  $f(p_1)/\cos(\theta)$ , en direction du haut lorsque  $p_1$  est pair, du bas dans le cas contraire.
3. Recommencer avec les  $n$  termes de la suite.

Terminer le tracé avec une diagonale (le dernier tracé ayant été un segment horizontal), de longueur  $\mathbf{f}(0)/\cos(\theta)$  vers le haut, en direction de la gauche. Les premiers pas de la construction avec la suite  $\langle n \cdot \pi \rangle$  sont montrés sur la figure 1.1.

**Algorithme de tracé.** L'algorithme de construction de la courbe est décrit dans [Har89b] et dans l'ALG. 1. Les arguments utilisés sont le nombre de pas  $n$  associé à la courbe, et l'angle  $\theta$  selon lequel les diagonales sont tracées (correspondant uniquement à un facteur homothétique). Sa complexité est en  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ , du fait du tri des termes de la suite.

```

1: Algorithme de tracé ( $n, \theta$ )
2: Initialise_Graphique()
3:  $l_n \leftarrow$  Génération( $n$ )           { Génère les  $n$  premières valeurs de la suite  $(u_n, n)$  }
4:  $l_n \leftarrow$  Sort( $l_n$ )             { Ordonne les valeurs de  $l_n = \{(u_n, n)\}$  selon  $u_n$  croissant }
                                     { Si  $l_n[k] = (u_p, p)$ , alors on note :  $l_n[k]_{\rightarrow 1} = u_p$  et  $l_n[k]_{\rightarrow 2} = p$  }
5:  $x \leftarrow 0$ ;  $y \leftarrow 0$ ; Moveto( $x, y$ )           { Fixe le point courant à l'origine }
6:  $sum \leftarrow$  Sum( $n$ )                       { Constante normalisante }
7: Pour  $k = 0$  à  $n - 1$  faire
8:    $t \leftarrow (l_n[k]_{\rightarrow 2})$            { Rang du  $k$ -ième terme ordonné }
9:    $l \leftarrow |(l_n[k+1]_{\rightarrow 1}) - (l_n[k]_{\rightarrow 1})|$    { Longueur du segment correspondant }
10:   $x \leftarrow x + l \cdot sum$ 
11:  Lineto( $x, y$ )                               { Dessin du segment horizontal }
12:  Si  $t \equiv 0 \pmod{2}$  Alors
13:     $x \leftarrow x - f(t)$ ;  $y \leftarrow y + f(t) \cdot \tan \theta$    { Dessin du segment diagonal }
14:    Lineto( $x, y$ )                               { Vers le haut }
15:  Sinon
16:     $x \leftarrow x - f(t)$ ;  $y \leftarrow y - f(t) \cdot \tan \theta$ 
17:    Lineto( $x, y$ )                               { Vers le bas }
18:  Fin Si
19: Fin Pour
20:  $x \leftarrow x - \text{Sum}_0(n)$ ;  $y \leftarrow y - \tan \theta \cdot \text{Sum}_0(n)$ ;
21: Lineto( $x, y$ )                               { Retour en  $(1, 0)$  }

```

**Algorithme 1:** Tracé de la courbe de Harrison

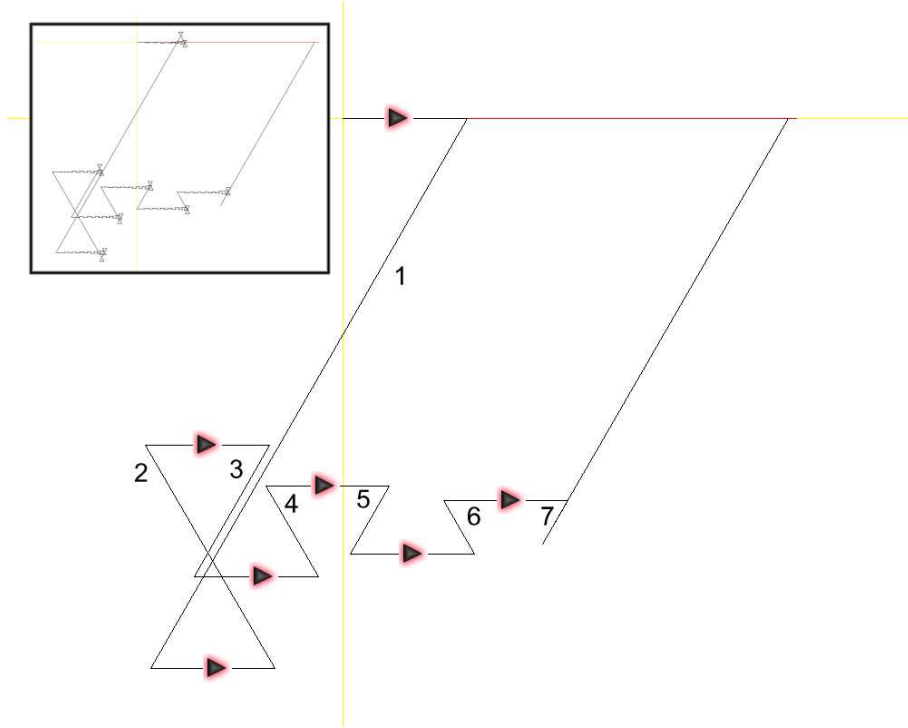


FIG. 1.1 – Construction : les premiers pas  
Suite  $\langle n \cdot \pi \rangle$  aux rangs 7 et 105,  $\theta = 60$ ,  $f(n) = 1/n^\gamma$ ,  $\gamma = 1.3$

**Quelques explications.** Le dernier point de la courbe tombe sur l'axe horizontal du plan. Ce dernier résultat est facile à voir, lorsque l'on regarde le mouvement vertical effectué lors du tracé de chaque diagonale : lorsqu'une diagonale est tracée, si elle correspond à un terme pair, elle ajoute un terme  $+f(2k)$ , et dans le cas contraire, réalise un mouvement relatif  $-f(2k + 1)$ , le tout à une constante multiplicative près. Comme tous les termes de la suite apparaissent pour  $k \in \llbracket 1; n/2 \rrbracket$  après réordonnement, on obtient exactement la hauteur de la dernière verticale, ce qui explique l'intérêt de la constante  $f(0)$ .

La deuxième constante, elle, joue un rôle « horizontal ». En effet, les diagonales se dirigent uniformément vers la gauche, d'une longueur  $f(k)$  pour  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Au final, elles retirent  $\sum f(k)$ . Les segments horizontaux, eux, rajoutent  $\sum f(k) + 1 = f$  chacun. Au final, le point d'arrivée de la courbe a pour abscisse :

$$\left. \begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^{n-1} |I_k| \\ S &= \sum_{k=1}^n f(k) \end{aligned} \right\} \quad x_{\text{stop}} = I \cdot (1 + S) - S = I - S \cdot (1 - I)$$

Il est clair que  $I < 1$ , la valeur de  $S$  étant elle *a priori* positive mais inconnue. Si la suite possède 1 comme valeur d'adhérence, alors  $I \rightarrow 1$  ce qui implique que si l'on augmente le nombre de pas de la courbe, le point d'arrivée tend vers  $(1, 0)$ . Sinon, le point d'arrivée est ramené sur l'axe des abscisses à gauche de ce point.

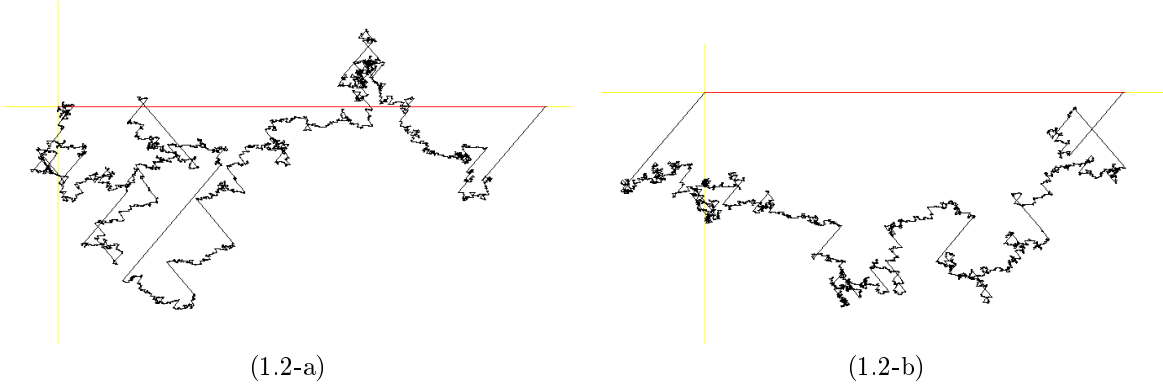


FIG. 1.2 – Tracé de Harrison pour des suites  $\langle g(n)\tau \rangle$  pour des valeurs de  
 (a)  $g(n) = n^3, \tau = \pi, \gamma = 0.9$  (b)  $g(n) = n \cdot \log(n), \tau = \pi, \gamma = 0.7$

**Aspect de la courbe.** La courbe que l'on obtient avec ce type d'algorithme est une courbe polygonale continue (cf. Fig 1.2). Les cas les plus intéressants sont ceux dans lesquels il y a convergence de la construction vers une courbe elle aussi continue. Cette courbe limite, lorsqu'elle existe, est appelée par Harrison le *tracé fractal* de la suite  $(u_n)$ . Cette notion sera expliquée plus tard.

L'aspect graphique de la courbe peut être modifié à l'aide des paramètres de calcul :

- (i) L'angle  $\theta$ , qui permet d'étirer la courbe selon une homothétie verticale. L'aspect global de la courbe n'est aucunement modifié, seule la lisibilité augmente.
- (ii) La fonction d'amortissement  $f$  est le facteur le plus important. Selon que sa décroissance est lente ou rapide, les diagonales des termes éloignés seront plus ou moins grandes. Au final, la courbe sera « touffue » si  $f$  décroît lentement, et « émaciée » sinon. Des problèmes de convergence interviennent lorsque  $f$  ne décroît pas assez rapidement.

La plupart des exemples traités le sont dans le cas particulier des suites  $\langle n \cdot \tau \rangle$ , à l'aide de fonctions de décroissance du type  $f(n) = 1/n^\gamma$  où  $\gamma > 0$ . Parfois, seule la valeur de  $\gamma$  est indiquée sur les courbes. Les axes de la figure sont tracés en jaune, le segment  $[0; 1]$  en rouge. La figure 1.2 décrit certains cas pour lesquels la suite n'est pas celle des mots sturmiens. La figure 1.3 fournit des exemples des cas « sturmiens »  $\langle n \cdot \tau \rangle$ , ainsi que les développements en fractions continues des valeurs de  $\tau$  correspondantes.

Plusieurs points intéressants à remarquer : tout d'abord, la différence importantes entre les courbes de la figure 1.2 et la figure 1.3, et la structure qui apparaît dans les courbes associées aux suites  $\langle n \cdot \tau \rangle$ . Dans cette structure, on peut reconnaître parfois des formes qui se reproduisent à l'infini, qui laissent à penser que si l'on regarde les détails de plus en plus petits, de mêmes formes reviennent sur une même courbe.

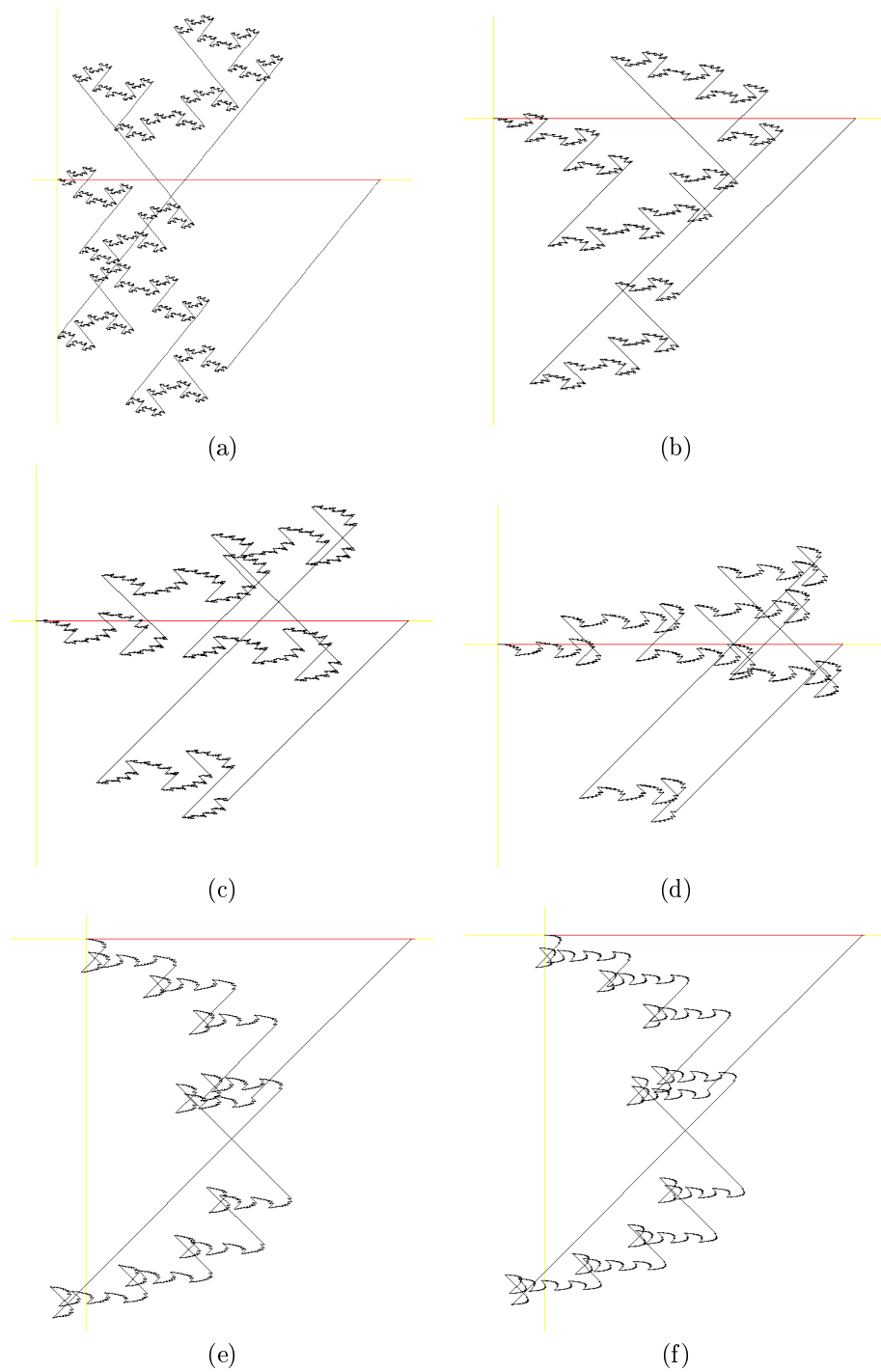
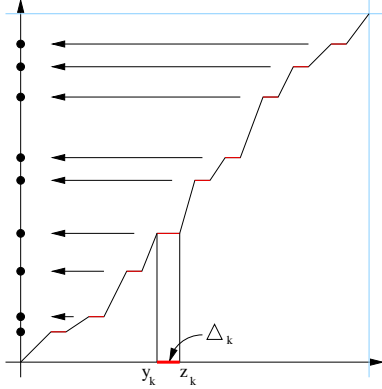


FIG. 1.3 – Diverses courbes de Harrison pour des valeurs de  $\tau$  correspondant aux développements en fractions continues suivants :

- (a) :  $[1,1,1,1,\dots]$     (b) :  $[1,2,1,2,\dots]$   
(c) :  $[1,3,1,3,\dots]$     (d) :  $[1,5,1,5,\dots]$   
(e) :  $[2,4,6,8,\dots]$     (f) :  $[2,4,8,16,\dots]$

## 1.2 Le point de vue analytique

Il est possible de décrire les courbes de Harrison de manière exacte, en paramétrisant son graphe à l'aide de fonctions continues. Cette paramétrisation permet d'une part de prouver la continuité de la courbe limite sous certaines conditions, mais fournit aussi une représentation exacte adaptée aux preuves ultérieures.



Une fonction  $\rho$  adaptée

**Paramétrisation.** Notons  $Q_n$  la courbe-objectif et  $\{x_1, \dots, x_n\}$  les valeurs prises par la suite (pour une suite ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, la courbe ne se modifie plus après les avoir toutes visitées). Prenons  $\rho$  une fonction de  $[0; 1] \rightarrow [0; 1]$ , croissante, continue, surjective. Imposons en plus à la fonction  $\rho$  d'être telle que l'image réciproque d'un  $x_i$  soit un intervalle  $\Delta_i = [y_i; z_i]$ , et d'être bijective sur l'ensemble complémentaire aux  $\Delta_i$ .

À partir de cela, on peut définir une fonction  $\Phi_n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , qui envoie le segment  $[0; 1]$  sur la courbe  $Q_n$ . Soit  $d$  la fonction définie par :

$$d(x) : \begin{cases} (-1)^k f(k) \left| \frac{x - z_k}{y_k - z_k} \right| & \text{si } x \in \Delta_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction  $d$  est une fonction non continue, prenant des valeurs comprises entre  $-f(0)$  et  $f(0)$ . Elle permet d'ajuster de manière continue les sauts de discontinuité qui se produisent lorsque l'on rencontre l'un des  $x_k$  dans le parcours de  $[0; 1]$ . Posons  $W = [0; \rho(x)]$  l'intervalle déjà parcouru à l'instant  $x$ . Par définition, les deux projections de la fonction  $\Phi_n$  sont fournies par les équations :

$$\pi_1 \left( \Phi_n(x) \right) = \mathbf{f}|W| - \sum_{k=0}^n \chi_W(x_k) f(k) - |d(x)| \quad (1.1)$$

$$\pi_2 \left( \Phi_n(x) \right) = \sum_{2k+1 \leq n} \chi_W(x_{2k+1}) f(2k+1) - \sum_{2k \leq n} \chi_W(x_{2k}) f(2k) - d(x) \quad (1.2)$$

La fonction  $\chi_W$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $W$ . À chaque  $x_n$  rencontré, l'une des sommes « saute » d'une valeur  $f(k)$ , saut immédiatement rattrapé par la fonction  $d$ . Cette représentation paramétrique est exacte. La fonction obtenue part de  $[0; 1]$  et décrit la courbe  $Q_n$  de bout en bout, à l'exception de la dernière diagonale.

Quelques questions peuvent se poser, notamment lorsque les valeurs prises par la suite sont infinies. Dans ce cas particulier, la fonction  $\rho$  est un escalier de Cantor, construit à partir des valeurs de la suite. La définition de la fonction reste la même, en changeant les termes de sommation en sommations infinies. Ceci ne pose pas de problèmes de définition, au moins lorsque la somme  $\sum f(n)$  est convergente.

**Continuité.** Grâce à cette reformulation exacte de la courbe, et une fois posée la fonction  $\rho$ , la convergence simple est maintenant assurée, quelle que soit la fonction d'amortissement, tant qu'elle est décroissante. Mais mieux, il est possible de prouver dans certains cas la continuité de la fonction limite, grâce aux théorèmes de convergence uniforme. :

**Théorème 1-1.** [Har89c] *Lorsque la série  $\sum f(n)$  est convergente, la suite de fonctions  $\Phi_n$  converge uniformément vers une fonction continue  $\Phi$ .*

*Preuve :* Décomposons les termes de la somme précédente un à un. Le terme  $f(0)$  qui dépend de  $n$  converge forcément comme série alternée associée à une fonction réelle décroissante. Les termes de sommation sont des produits de fonctions bornées avec des coefficients  $f(k)$  d'une série convergente. La fonction  $d$ , elle, converge uniformément vers la fonction nulle lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Bref, il y a convergence uniforme de chacun des termes selon le critère de Cauchy.  $\square$

Ce cas de continuité est le résultat le plus général que l'on puisse obtenir pour les courbes de Harrison. Néanmoins, la fonction d'amortissement joue un rôle important pour la lisibilité de la courbe, ce qui rend les séries divergentes plus intéressantes. Dans le cas particulier d'Harrison, c'est-à-dire les suites  $\langle n \cdot \tau \rangle$ , du fait des propriétés de répartition de la suite très particulières, on peut améliorer le théorème précédent de manière significative. Un nombre irrationnel  $\alpha$  satisfait une *condition diophantienne*  $\sigma$  lorsque :

$$\exists C, \quad \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^{1+\sigma}} \quad \text{pour tout irrationnel } \frac{p}{q}$$

La borne inférieure des valeurs de  $\sigma$  est appelée le *type diophantien* de  $\alpha$ . Le théorème de Harrison affirme que l'on peut améliorer la convergence selon ce type diophantien :

**Théorème 1-2.** [Har89b] *Si  $\tau$  a un type diophantien  $\delta$ . Si  $\gamma < 1 - 1/(2\delta)$ , alors pour toute fonction  $f(n) < 1/n^\gamma$ , la suite de fonctions  $\Phi_n$  converge uniformément vers une fonction continue  $\Phi$ .*

En fait, le type diophantien exprime la facilité avec laquelle on peut approximer un nombre avec des rationnels. Lorsque  $\delta$  est petit, ce qui est le cas des nombres algébriques irrationnels ( $\delta = 1$ ), le nombre est mal approximé par les rationnels, et  $\gamma$  peut être choisi petit. Pour les nombres de Liouville ( $\delta \rightarrow \infty$ ), il est difficile de réduire la valeur de  $\gamma$ . Ce type de résultat utilise spécifiquement les propriétés des rotations irrationnelles, en particulier en ce qui concerne la répartition des termes dans  $[0; 1]$ .

### 1.3 Propriétés intrinsèques

L'intérêt de la représentation graphique de Harrison consiste à présenter de manière graphique le développement en fractions continues d'un nombre  $\tau$ . Celui-ci est défini par la suite  $[a_0, a_1, \dots]$  suivante :

$$\begin{cases} \tau_0 = \tau \\ \tau_{n+1} = \frac{1}{\langle \tau_n \rangle} \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = \lfloor \tau \rfloor \\ a_n = \lfloor \tau_n \rfloor \end{cases} \quad \text{Forcément } a_k \geq 1 \text{ si } k \geq 1.$$

**Lien avec le développement en fractions continues.** Pour les suites  $(u_n) = \langle n\tau \rangle$ , le graphe associé fournit des renseignements sur le développement en fractions continues de  $\tau$ . Si  $Q$  est la courbe fractale générée par la suite  $(u_n)$ , Harrison l'appelle une fractale continue, dans la mesure où à partir de cette courbe il est possible de déterminer entièrement le développement en fractions continues associé.

Supposons que  $\tau$  ait un développement commençant par  $[a_1, a_2, \dots, a_p, \dots]$ . Considérons dans les premiers termes de la suite  $\langle n\tau \rangle$  ceux inférieurs à 1. Il y en a exactement  $a_1$ , le suivant étant strictement supérieur à 1. Donc le suivant, après réordonnement des termes de la suite, se retrouvera avant la valeur  $\tau$  (qui correspond à la plus grande diagonale). Au final, si l'on compte la série de grandes diagonales décroissantes, en excluant la diagonale finale, on obtient  $a_1$  (cf. Fig. 1.4).

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} & & \tau & & 2\tau & \cdots & a_1\tau \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ (a_1 + 1)\tau & & (a_1 + 2)\tau & & \cdots & & 2 \cdot a_1\tau \end{array} \right]$$

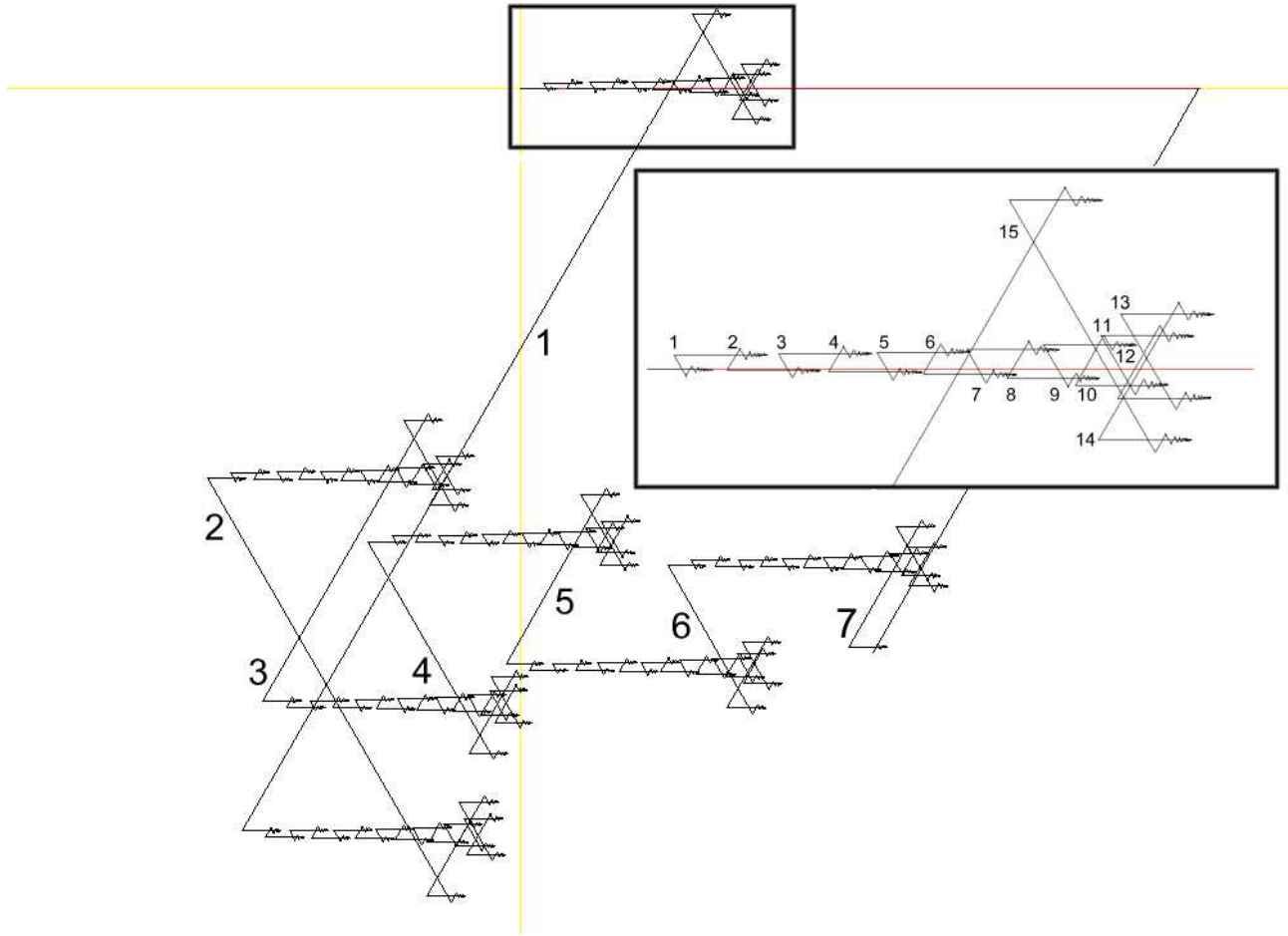


FIG. 1.4 – Premiers éléments du développement

Représentation de la suite  $\langle n \cdot \pi \rangle$  pour laquelle  $\tau = \pi$ ,  $\gamma = 0.9$ . Le développement en fraction continue de  $\pi$  est  $[7; 15; 1; 292; 1; 1; 1; 2; 1; 3; \dots]$ . Les diagonales sont ordonnées dans le sens de dessin de la courbe. Dans le petit encart apparaissent les diagonales de deuxième niveau.

Considérons la partition de  $[0; 1]$  faite par ces  $a_1$  premiers termes. Les termes suivants du développement vont donc se placer  $a_1$  par  $a_1$  dans la liste ordonnée des éléments de la suite, chacun dans une case de cette partition. Il est à noter que dans ces intervalles, les  $a_i$  s'intercalent **en décroissant**. La distance entre deux termes distincts dans ce sous-intervalle de longueur au moins  $l_1 = \tau$  correspond à la valeur  $1 - a_1\tau$ . Elle ne peut se faire qu'un nombre de fois limité, avant que les points ne s'intercalent dans l'intervalle précédent. Et cette valeur vaut :

$$\left\langle \frac{\tau}{1 - a_1\tau} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\frac{1}{\tau} - a_1} \right\rangle = a_2$$

C'est exactement le second terme du développement en fraction continue. Donc, sur chaque intervalle de cette partition, vont se placer  $a_2$  termes de la suite (en se restreignant aux  $a_1 a_2$  premiers termes). Ces termes correspondent à des diagonales sur la figure, diagonales de longueurs décroissantes, qui apparaissent aux bords des « langues » diagonales de la première étape. La décomposition

ainsi obtenue contient  $a_1 a_2$  segments de longueur au moins  $l_2 = 1 - a_1 \tau$ . La distance entre deux termes distincts devient alors  $\tau - a_2(1 - a_1 \tau)$ . Le raisonnement passe à la récurrence.

Pour le nombre  $\tau = \pi$ , la figure 1.4 compte les diagonales pour les deux premiers termes du développement. Pour les nombres dont le développement est périodique, on peut envisager l'auto-similarité de la courbe, la figure pouvant s'envoyer sur une partie d'elle-même.

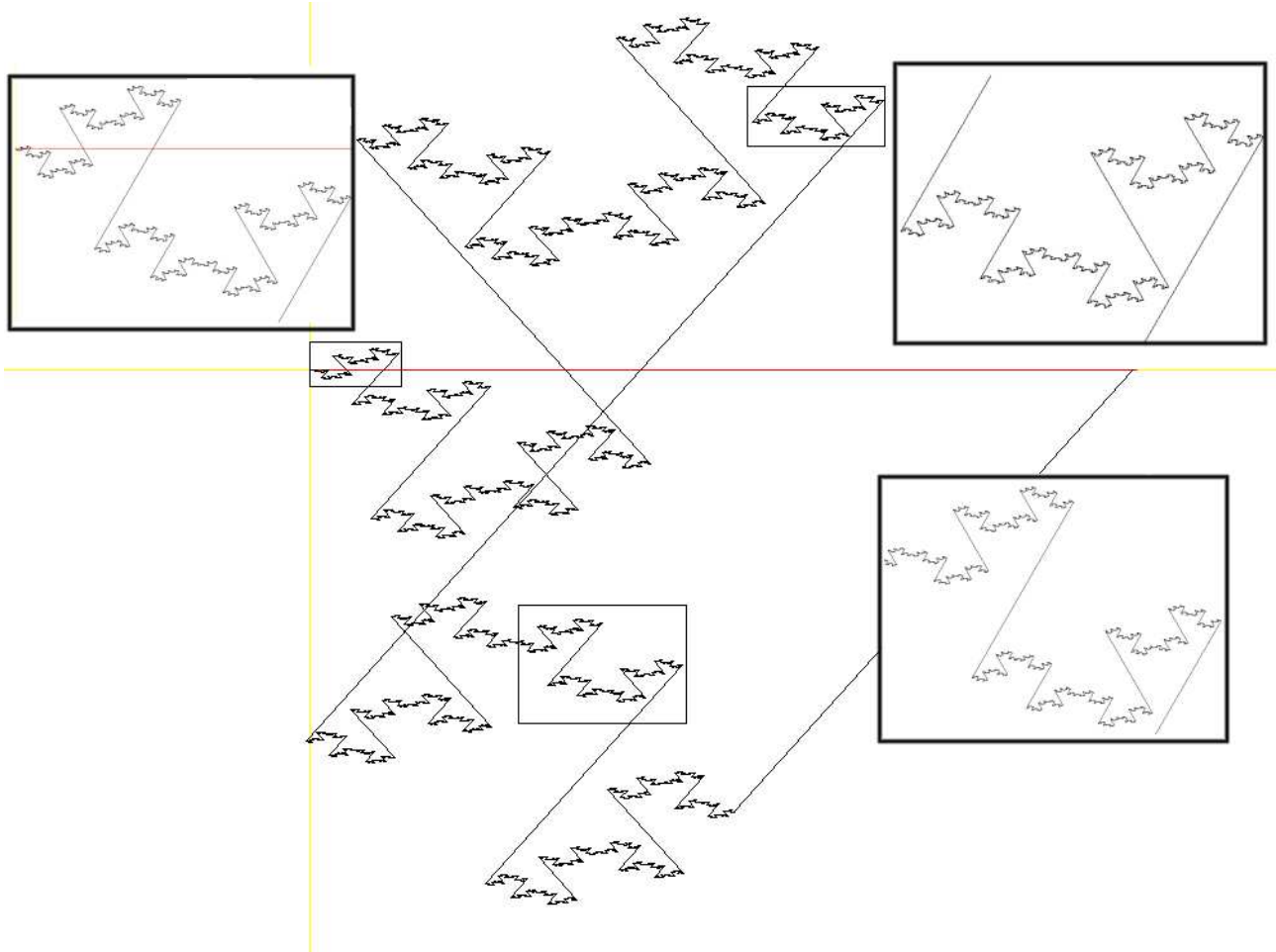


FIG. 1.5 – L'auto-similarité asymptotique

Représentation de la suite  $\langle n \cdot \tau \rangle$  pour laquelle  $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $\gamma = 0.9$ . Le développement en fraction continue de  $\pi$  est  $[7; 15; 1; 292; 1; 1; 1; 2; 1; 3; \dots]$ . Les encarts présentent différents niveaux de détail de la figure qui, à une similitude près, sont à distance de Hausdorff proche.

**Auto-similarité.** L'un des points les plus intéressants des courbes de Harrison est le caractère auto-similaire que peut prendre la courbe, ce qui lui donne cet aspect fractal. Une courbe  $Q \subset \mathbb{R}^2$  est dite *auto-similaire* lorsque elle vérifie :

1.  $\forall \epsilon > 0$ , on peut recouvrir  $Q$  par des arcs fermés de diamètre inférieur à  $\epsilon$ .
2. Chacun de ces arcs s'envoie par une transformation affine sur  $Q$ .

En réalité, la courbe  $Q$  n'est pas exactement auto-similaire, mais plutôt *asymptotiquement auto-similaire*, c'est-à-dire qu'il existe une partie  $S \subset \mathbb{R}^2$  telle que :

1.  $\forall \epsilon > 0$ , on peut recouvrir  $Q$  par des arcs fermés de diamètre inférieur à  $\epsilon$ .
2. Chacun de ces arcs  $Q_i$  s'envoie par une transformation affine sur un autre arc  $S_i$ , la réunion des  $S_i$  convergeant lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  vers l'arc  $S$ , convergence mesurée à l'aide de la métrique de Hausdorff.

Concrètement, la figure  $Q$  n'est pas auto-similaire, mais si on la découpe finement, les morceaux de la partition «ressemblent» de plus en plus à une autre courbe  $S$ . Si l'on ne s'intéresse aux morceaux de la courbe qu'à partir d'un certain niveau de détail, l'auto-similarité est de plus en plus flagrante, dans la mesure où il y a convergence au sens de Hausdorff.

Les courbes de Harrison contiennent toutes un ensemble de Cantor, constitué par la fermeture de l'ensemble des extrémités des diagonales. Le théorème suivant est dû à Harrison [Har89c, Har89a] et montre que cet ensemble est bien un tracé fractal :

**Théorème 1-3.** [Har89b] *L'ensemble de Cantor  $\Gamma$  de la fractale continue  $Q$  générée par la suite  $\langle n\tau \rangle$  avec pour fonction amortissante  $f(n) = 1/n^\gamma$ , est asymptotiquement auto-similaire, lorsque  $\tau$  est un irrationnel quadratique.*

*Esquisse de preuve :* Harrison commence par découper l'ensemble  $[0; 1]$  en sous ensembles adéquats correspondants exactement aux termes de la suite  $\langle n \cdot \tau \rangle$ . Elle démontre ensuite qu'en appliquant la bonne similitude, les parties de la courbe associée sont convergentes vers une courbe limite, selon le critère de Cauchy, ce qui conclut la démonstration.  $\square$

## 1.4 Retour sur les mots sturmiens

**Liens avec les fractions continues.** Le mot sturmien  $\mathbf{c}_\tau$ , reliés à la suite caractéristique  $\langle n\tau \rangle$ , est intimement lié au développement en fraction continue du nombre  $\tau$ . Notons  $[0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  le développement en fraction continue du nombre  $\tau$ , et  $\frac{p_n}{q_n} = [0, a_1, \dots, a_n]$ . Rappelons que les  $a_k$  sont nécessairement non nuls. Alors il est possible de générer le mot sturmien  $\mathbf{c}_\tau$  à l'aide de ce développement de la manière suivante :

**Théorème 1-4.** *Définissons la suite de mots  $(X_n)$  par la récurrence suivante :*

$$\begin{cases} X_0 = 'a' \\ X_1 = 'a^{a_1-1}b' \end{cases} \quad \forall n \geq 1, \quad X_{n+1} = X_n^{a_{n+1}} X_{n-1}$$

alors  $X_n$  représente les  $q_n$  premières lettres du mot  $\mathbf{c}_\tau$ .

**Corollaire.** *Si l'on prend  $X_n$  les  $q_n$  premières lettres du mot sturmien, alors ce mot contient  $p_n$  fois la lettre 'a'.*

L'ensemble de ces résultats sont cités dans [Ber95] et prouvés dans [Bro93]. Le mot sturmien  $\mathbf{c}_\tau$  peut être généré à l'aide d'applications sur les mots dépendant du développement en fraction continue. En particulier, lorsque le développement est périodique, le mot sturmien est point fixe d'une application de  $\mathcal{L}^*$ . Remarquons que cette application n'est pas un morphisme, dans la mesure où tous les mots sturmiens ne sont pas points fixes de morphismes sur les mots.

*Exemple :* Pour le mot de Fibonacci, où  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , le développement en fraction continue est  $[1; 1; 1; \dots]$ . Le mot ainsi généré est le suivant, après avoir interverti les 'a' et les 'b' :

$$\begin{cases} X_0 = 'b' & X_3 = 'aba' \\ X_1 = 'a' & X_4 = 'abaab' & X_6 = 'abaababaabaab' \\ X_2 = 'ab' & X_5 = 'abaababa' & X_7 = 'abaababaabaababaababa' \end{cases}$$

L'application associée consiste à recopier le mot précédent, et à lui adjoindre le pénultième. Elle est différente du morphisme qui génère le mot, par les applications ' $a$ '  $\rightarrow$  ' $ab$ ' et ' $b$ '  $\rightarrow$  ' $a$ '. L'une des applications est locale, l'autre non.

**Intérêt d'une représentation graphique.** Pourquoi tenter de représenter graphiquement les mots sturmiens ? La principale motivation consiste à souligner que d'une représentation graphique donnée, il est possible d'extraire une information par rapport à la suite étudiée. Les représentations usuelles des suites réelles ne sont pas adéquates à ce type d'étude, pas plus que les représentations des mots sturmiens. À partir de la représentation de Harrison, qui est spécifique, il est possible de déterminer deux particularités des mots sturmiens de manière « visuelle » : les premiers coefficients du développement, ainsi que son caractère périodique.

# La représentation de Mendès-France

LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE précédente est particulièrement adaptée à l'étude des suites caractéristiques  $\langle n\tau \rangle$ , mais l'on ne dispose pas d'outils adaptés à l'étude d'autres types de suites. Par exemple, dans le même ordre d'idée, que peut-on tirer de l'étude de suites de la forme  $\langle n^2\tau \rangle$ ? Remarquons tout d'abord que ces suites ne se ramènent pas immédiatement à un système dynamique, dans la mesure où le terme courant ne dépend pas uniquement du terme précédent, mais aussi du rang de la suite. Les propriétés de répartition de cette suite sont néanmoins connues :

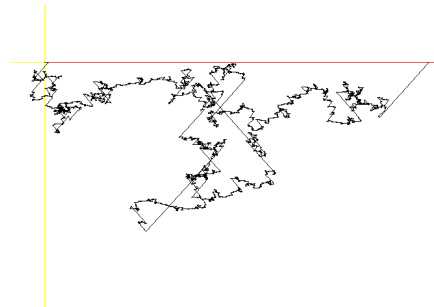
**Théorème 2-1.** (THÉORÈME DE RÉPARTITION DE VAN DER CORPUT)

*Les suites de la forme  $u_n = \langle P(n) \cdot \tau \rangle$ , où  $P$  est un polynôme de  $\mathbb{Z}[X]$ , c'est-à-dire à coefficients entiers, et  $\tau$  un paramètre irrationnel, sont uniformément réparties modulo 1.*

*En particulier, elles sont denses dans  $[0; 1]$ .*

Si l'on associe, comme pour les mots sturmiens, une partie du cercle  $\mathbb{S}_1$  à la lettre 'a' et une autre partie à la lettre 'b', les propriétés de répartition du mot construit, et de ses facteurs, dépendront de cette partition, comme c'est le cas pour les mots sturmiens.

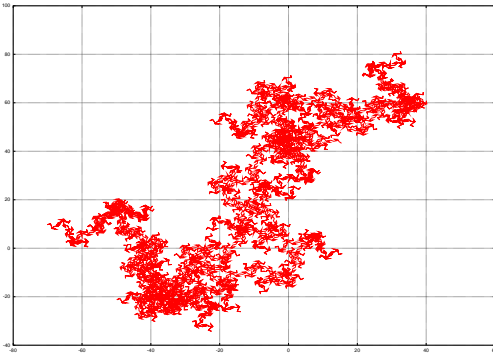
Comment pousser l'étude de tels mots? S'il est possible de représenter les mots sturmiens de manière graphique et d'en retirer des propriétés, est-il possible d'appliquer une méthode graphique afin d'étudier le comportement d'une telle suite? La méthode de Harrison ne dégage pas de propriétés graphiques évidentes, comme le montre la figure ci-contre. Il est alors nécessaire de rechercher un autre type de représentation.



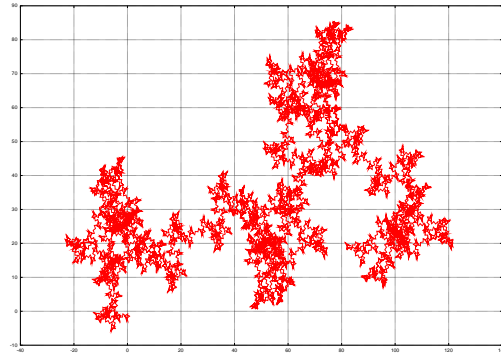
Cas de la suite  $\langle n^2\sqrt{2} \rangle$

DANS [DMF81], M. Mendès-France propose une manière différente d'aborder le problème de la représentation graphique d'une suite réelle. Son étude s'intéresse à la dimension des courbes dans le plan, en particulier dans le cas de suites uniformément réparties modulo 1, et relie ce concept à celui d'entropie [MF81, MvdP89]. Ces notions permettent d'évaluer le degré de « désordre » apparaissant dans une courbe tracée dans le plan. Afin de comprendre cette construction, nous avons effectué un travail de relecture des articles [BG88, MF81, DMF81, MvdP89], et une explicitation des preuves de [BG88] pour les théorèmes.

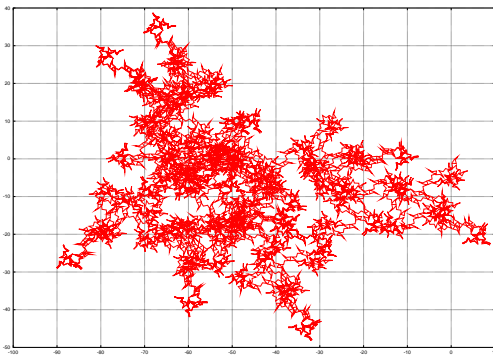
Par la suite, nous allons étudier cette représentation graphique, tout en l'appliquant à la suite  $\langle n^2\tau \rangle$ , et examiner le comportement de la construction obtenue. Des théorèmes de renormalisation permettent de réduire l'étude de la courbe. Connaissant ce comportement, il conviendra alors d'étudier la complexité des mots engendrés par une telle suite, et de comparer les résultats obtenus.



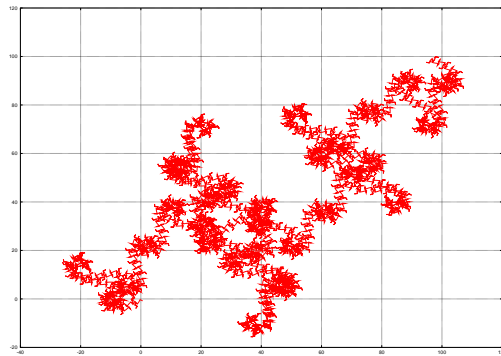
(a)



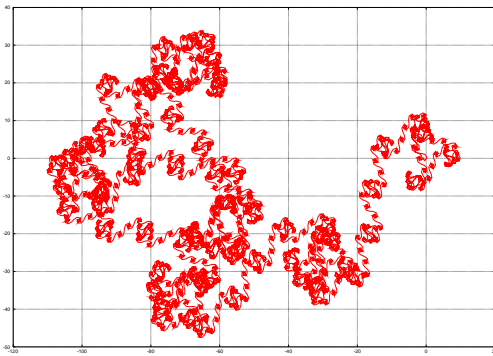
(b)



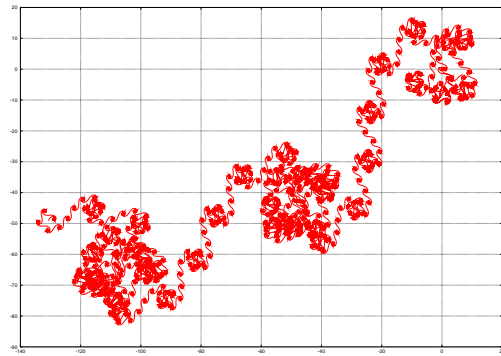
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 2.1 – Diverses courbes de Harrison pour des valeurs de  $\tau$  correspondant aux développements en fractions continues suivants :

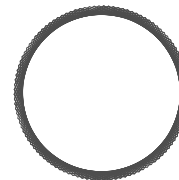
$$\begin{array}{ll}
 \text{(a) : } [1,1,1,1,\dots] & \text{(b) : } [1,2,1,2,\dots] \\
 \text{(c) : } [1,3,1,3,\dots] & \text{(d) : } [1,5,1,5,\dots] \\
 \text{(e) : } [2,5,2,5,\dots] & \text{(f) : } [4,11,4,11,\dots]
 \end{array}$$

## 2.1 Représentation graphique

**Construction de la courbe.** Partant d'une suite  $(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}}$ , Mendès-France propose de construire une courbe au fur et à mesure de l'apparition des valeurs de la suite. Son chemin serait celui tracé par un marcheur partant de l'origine, effectuant à intervalles réguliers des pas de longueur un, dont la direction serait fournie par la suite. Les coordonnées du marcheur à l'instant  $N$  sont données par  $S_N$  :

$$(u_n) \in [0; 1]^{\mathbb{N}} \longrightarrow S_N = \sum_{n=0}^N e^{2i\pi u_n}$$

Si l'on applique ce type de représentation aux mots sturmiens, c'est-à-dire aux suites  $\langle n\tau \rangle$ , comme l'on peut le voir sur la figure ci-contre, on obtient une courbe polygonale qui semble recouvrir un anneau. En fait, pour cette suite, la courbe ainsi tracée est connue de manière exacte, et tous les sommets des segments se situent sur un cercle de diamètre  $1/\sin(\tau\pi)$ .



La suite  $\langle n\tau \rangle$

**Algorithme de tracé.** L'algorithme de tracé est extrêmement simple (cf. ALG. 2), en  $\mathcal{O}(n)$ . Notons toutefois qu'il génère forcément des erreurs de calcul, dans la mesure où l'on ne connaît pas de représentation explicite de la courbe. Et comme les valeurs importantes du nombre de pas sont les plus intéressantes, il est nécessaire de posséder des bibliothèques de calcul sur les grands nombres.

1:	<b>Algorithme de tracé (<math>n</math>)</b>	
2:	$l_n \leftarrow \text{Génération}(n)$	{ Génère les $n$ premières valeurs de la suite $(u_n)$ }
3:	$x \leftarrow 0; \quad y \leftarrow 0;$	{ Pointeurs de position }
4:	$\text{Moveto}(x, y);$	
5:	<b>Pour</b> $k = 1$ à $n$ <b>faire</b>	
6:	$x \leftarrow x + \cos(2\pi \cdot l[k]);$	
7:	$y \leftarrow y + \sin(2\pi \cdot l[k]);$	
8:	$\text{Lineto}(x, y);$	{ Tracé du segment }
9:	<b>Fin Pour</b>	

**Algorithme 2:** Tracé de la courbe de Mendès-France

**Exemples de courbes.** Deux exemples de courbes sont donnés sur la figure 2.2 page 21. Remarquons que lorsque la suite a un mouvement plus rapide (sur le cercle  $\mathbb{S}_1$ ), des phénomènes tels que des spirales apparaissent. Ce phénomène s'accroît au fur et à mesure que la vitesse de la suite augmente. Lorsque le degré devient trop grand (cas 2.2(b)), les spirales disparaissent dans le mouvement, et la figure apparaît chaotique. Le phénomène le plus intéressant ce produit lorsque la suite est  $\langle \tau n^2 \rangle$ , pour lequel les spirales sont les plus visibles (cf. figure 2.1 page 19). Apparemment, la « complexité » de la courbe augmente avec la vitesse de variation de la suite.

Par la suite, nous nous restreindrons à l'étude des suites  $u_n = \langle \tau n^2 \rangle$ , où  $\tau$  est un paramètre réel donné. Pour des raisons de simplicité, on pose :

$$S_L(\tau) = \sum_{k=0}^L e^{i\pi\tau k^2} \quad S_L \text{ est une somme de Gauss généralisée}$$

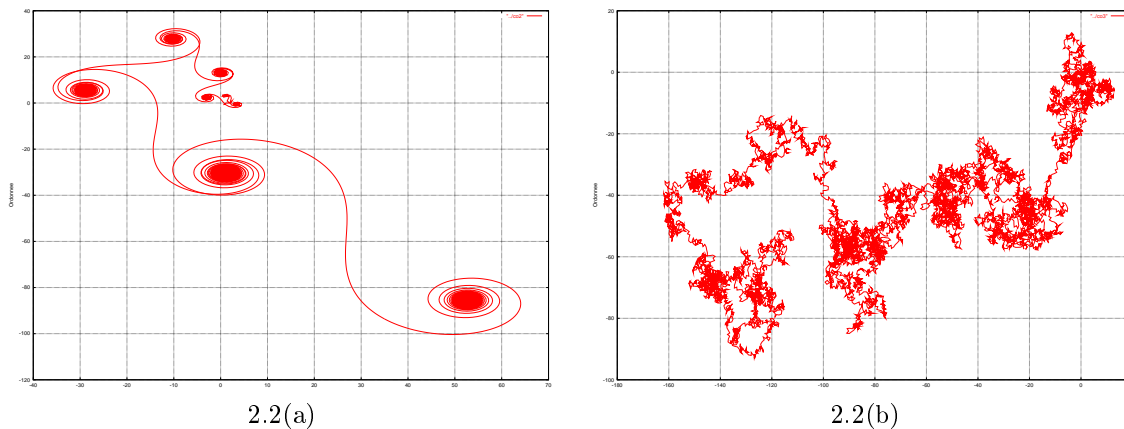


FIG. 2.2 – Exemple de tracé de courbe de Mendès-France – Cas particuliers  
 (a)  $u_n = \tau \cdot n \log(n)$  (b)  $u_n = \tau \cdot n^3$

## 2.2 Une première approche

Une façon immédiate d’interpréter la somme  $S_L$ , c’est comme une somme de Riemann. En effet, si  $\tau$  est suffisamment petit, alors sur les premières valeurs de  $L$ , comprises entre 0 et  $[1/\sqrt{\tau}]$ ,  $S_L$  est approximée par une intégrale de Fresnel dont les projections sont dessinées ci-dessous figure 2.3.

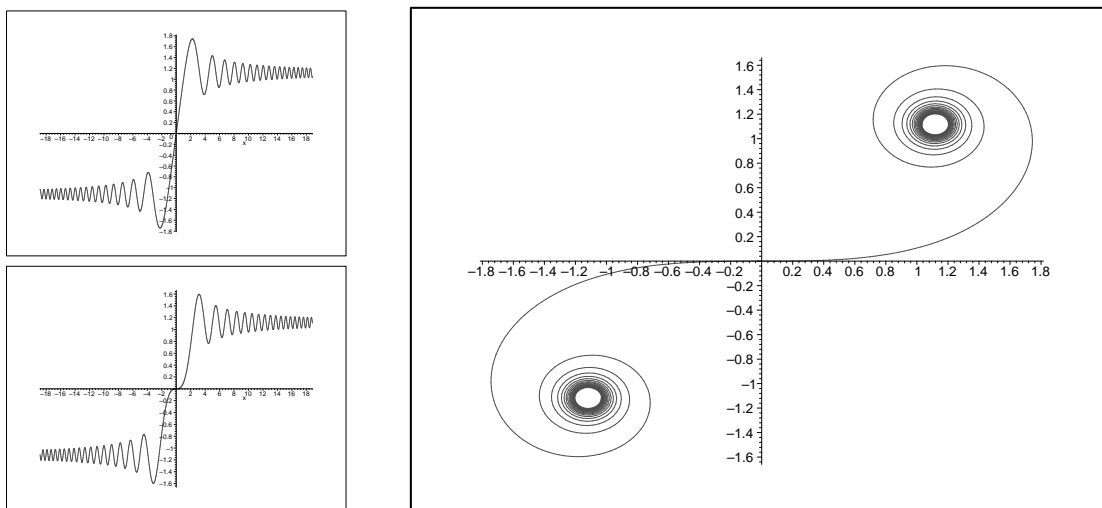


FIG. 2.3 – Intégrales de Fresnel et Spirale de Cornu

Les deux courbes de gauche correspondent respectivement à l’abscisse et à l’ordonnée de la spirale de Cornu. La spirale de Cornu est dessinée à droite.

La spirale obtenue est appelés spirale de Cornu [Dav93] et correspond aux équations suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos(\pi\tau u^2) du \\ y(t) = \int_0^t \sin(\pi\tau u^2) du \end{cases}$$

Ces intégrales sont convergentes, donc la spirale en question est bornée, et pour les valeurs de  $L$  correspondantes, la distance entre la spirale de Cornu et la courbe  $\mathcal{S}_L$  est bornée. Pour des valeurs de  $\tau$  faibles, cette approximation est particulièrement bonne. Néanmoins, elle ne permet d'expliquer le mouvement que d'une partie restreinte de la courbe, et toute étude asymptotique reste hors de question. Il est donc nécessaire de réaliser une étude plus fine.

## 2.3 Principe de renormalisation

Une méthode adéquate pour l'étude de telles sommes a été mise en valeur par Berry et Goldberg [BG88] afin de modéliser des phénomènes physiques tels que l'évolution de spins de particules dans l'hypothèse semi-classique et des problèmes de diffraction de lumière sur un dispositif de Young. Cette méthode qui date du début du siècle, permet, à une approximation près de réduire l'étude d'une somme de Gauss à l'étude d'une autre somme, réputée plus simple :

**Théorème 2-2.** [BG88] (PRINCIPE DE RENORMALISATION)

*Pour des valeurs de  $L$  et de  $\tau \neq 0$  quelconques, la courbe  $\mathcal{S}_L(\tau)$  peut s'envoyer par similitude sur la courbe  $\mathcal{S}_{\lfloor L\tau \rfloor}(-1/\tau)$ , ceci à une approximation près qui est indépendante de  $L$ .*

La technique de renormalisation de la série se passe en trois étapes : approximation de la somme par une série d'intégrales, puis utilisation de la méthode de la phase stationnaire, et enfin utilisation des symétries de  $\mathcal{S}_L(\tau)$ . Les deux résultats suivants sont considérés comme admis :

- Formule de Poisson :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , intégrable et  $\hat{f}$  sa transformée de Fourier.

$$\text{Comme } \hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi ux} dx \quad \text{alors} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

- Méthode de la phase stationnaire :

Soit à étudier une intégrale  $I(t) = \int e^{it\varphi(x)} a(x) dx$  où  $a$  et  $\varphi$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ . On suppose qu'il existe un unique point  $x_0$  où  $\varphi'(x_0) = 0$  s'annule et  $\varphi''(x_0) \neq 0$ . Alors le comportement asymptotique de  $I$  est donné par la formule :

$$I(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \frac{e^{it\varphi(x_0)}}{\sqrt{|\varphi''(x_0)|}} e^{i\frac{\epsilon\pi}{4}} \cdot a(x_0) + o(t^{-\frac{3}{2}}) \quad \text{où} \quad \epsilon = \text{signe}(\varphi''(x_0))$$

**Approximation par une série.** L'approximation à l'aide des sommes de Riemann n'est pas suffisante, dans la mesure où l'intégrale correspondante est bornée. Une idée plus raffinée consiste à utiliser la formule de sommation de Poisson sur une fonction particulière, et donc de remplacer  $\mathcal{S}_L(\tau)$  par une série d'intégrales.

Considérons la fonction  $f_{L,\tau} \in \mathcal{L}^1$  suivante :

$$f_{L,\tau}(x) = \mathbb{1}_{[0;L]}(x) \cdot e^{i\pi\tau x^2} = \begin{cases} e^{i\pi\tau x^2} & \text{si } x \in [0; L] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Appliquons la formule de Poisson à cette fonction. Un des membres correspond exactement à la somme recherchée, et l'autre fournit une série d'intégrales correspondant aux fonctions  $f_{L,\tau}$ , dont on peut réduire les intégrales sur un intervalle fini, c'est-à-dire :

$$\mathcal{S}_L(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{L,\tau}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f_{L,\tau}}(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^L e^{i\pi(\tau x^2 - 2nx)} dx \quad (2.1)$$

La formule ainsi obtenue est exacte, ce qui a son importance comme on pourra le voir plus tard.

**Méthode de la phase stationnaire.** Le type d'intégrales obtenu correspond exactement à ce type de méthode. Par rapport à des propriétés intrinsèques, deux type d'approximations sont acceptables :

1. ignorer les intégrales n'ayant pas de points stationnaires

Si l'on dénote  $(I_n)$  la série d'intégrales dans l'équation (2.1), le point stationnaire correspondant à  $I_n$  est  $x_n = \frac{n}{\tau}$ . Dans la mesure où  $x \in [0; L]$ , les intégrales restantes sont les  $(I_n)$  pour  $n$  variant entre 0 et  $\lfloor L\tau \rfloor$ .

2. étendre les valeurs de l'intégrale aux bornes infinies

L'approximation réalisée dans le développement asymptotique suppose que la valeur principale de l'intégrale réside autour du point stationnaire. Le rajout de bornes infinies est asymptotiquement négligeable.

D'où le résultat après approximation :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_L(\tau) &\approx \sum_{n=1}^{\lfloor L\tau \rfloor} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi(\tau x^2 - 2nx)} dx \\ \mathcal{S}_L(\tau) &\approx \sum_{n=1}^{\lfloor L\tau \rfloor} \frac{e^{i\frac{\text{sgn}(\tau)\pi}{4}}}{\sqrt{|\tau|}} e^{-i\pi\frac{n^2}{\tau}} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(x) = \pi(\tau x^2 - 2nx) \\ \varphi_n(x_n) = -\frac{\pi n^2}{\tau} \\ \varphi_n''(x_n) = 2\pi\tau \end{array} \right.$$

D'où l'équation de renormalisation : 
$$\mathcal{S}_L(\tau) = \frac{e^{i\frac{\text{sgn}(\tau)\pi}{4}}}{\sqrt{|\tau|}} \mathcal{S}_{\lfloor L\tau \rfloor} \left( -\frac{1}{\tau} \right) \quad (2.2)$$

**Transformation de  $\mathcal{S}_L$ .** Il ne reste plus qu'à appliquer les équations de symétrie de  $\mathcal{S}_L$  pour les valeurs de  $\tau$  considérées. La somme  $\mathcal{S}_L(\tau)$  est ainsi approximée par une autre somme  $\mathcal{S}_L(\tau')$ , la transformation effectuée sur  $\tau$  correspondant à un système dynamique rappelant les développements en fractions continues.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_L(\tau + 2) = \mathcal{S}_L(\tau) \\ \mathcal{S}_L(-\tau) = \overline{\mathcal{S}_L(\tau)} \end{array} \right.$$

La première équation décrit la périodicité de la série, la deuxième équation correspond à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses réalisée par la conjugaison complexe. Par ces équations, on peut toujours se ramener au cas où  $\tau \in [0; 1]$ . L'équation de renormalisation (2.2) se ramène alors à considérer deux cas distincts :

- $\lfloor 1/\tau \rfloor$  est pair : il suffit d'effectuer une symétrie par rapport à l'axe des abscisses et :

$$\mathcal{S}_L(\tau) = \frac{e^{i\frac{\text{sgn}(\tau)\pi}{4}}}{\sqrt{|\tau|}} \mathcal{S}_{\lfloor L\tau \rfloor} \left( \frac{1}{\tau} \bmod 1 \right)$$

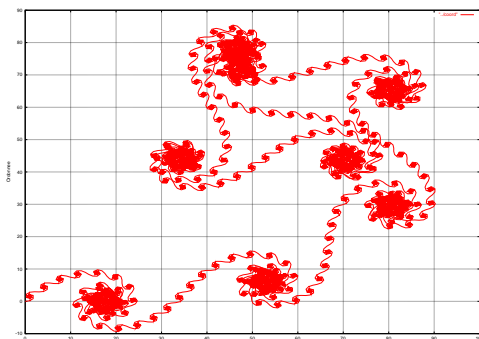
La similitude réalisée est la composée d'une réflexion par rapport à l'axe horizontal et d'une rotation d'angle  $\pi/4$ , c'est-à-dire une réflexion par rapport à la droite passant par l'origine faisant un angle de  $\pi/8$  avec l'horizontale. Elle est évidemment composée avec une homothétie.

- $\lfloor 1/\tau \rfloor$  est impair : en utilisant la périodicité, on se ramène au cas positif avec :

$$\mathcal{S}_L(\tau) = \frac{e^{i\frac{\text{sgn}(\tau)\pi}{4}}}{\sqrt{|\tau|}} \mathcal{S}_{\lfloor L\tau \rfloor} \left( 1 - \frac{1}{\tau} \bmod 1 \right)$$

Dans ce cas, la similitude est simplement une rotation d'angle  $\pi/4$  composée avec une homothétie de rapport  $1/\sqrt{\tau}$ .

2.5-(a)



2.5-(b)

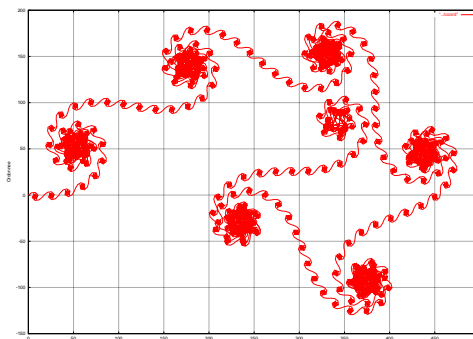


FIG. 2.5 – Courbes auto-similaires  
 $\tau = \sqrt{325} - 18$  pour (a)  $L = 25000$  (b)  $L = 300000$

## 2.4 Application aux courbes $\mathcal{S}_L$

**Étude du système dynamique.** Le système dynamique sur  $\tau$  est donc le suivant :

$$\sigma : \tau \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\tau} \bmod 1 & \text{si } \lfloor \frac{1}{\tau} \rfloor \text{ est pair} \\ 1 - \frac{1}{\tau} \bmod 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce système dynamique n'est pas sans évoquer le système dynamique correspondant aux développements en fractions continues, dont on peut retirer certaines propriétés similaires. Le graphe de la fonction est tracé ci-contre figure 2.4.

Le système dynamique possède une infinité de points fixes, pairs ou impairs, décrits par les équations :

$$\begin{aligned} \tau_k^1 &= \sqrt{k(k+2)} - k & (\text{impair}) \\ \tau_k^2 &= \sqrt{k^2+1} - k & (\text{pair}) \end{aligned}$$

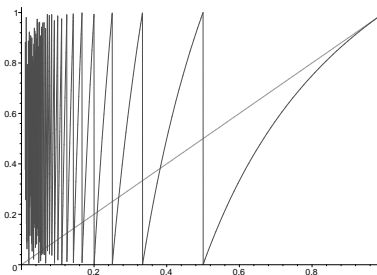


FIG. 2.4 – Renormalisation des spirales

Si  $\tau$  est l'un de ces points fixes, alors la renormalisation envoie la courbe sur elle-même, ce qui la rend asymptotiquement auto-similaire, c'est-à-dire qu'il existe une transformation affine qui envoie la courbe à distance proche d'une partie d'elle-même. Un exemple de ce type d'auto-similarité apparaît ci-dessus figure 2.5. En effet, la courbe (b), à laquelle on applique une symétrie par rapport à la droite d'angle  $\pi/8$ , se renvoie sur la courbe (a).

**Effet d'une renormalisation sur la courbe.** Globalement, la courbe  $S_L(\tau)$  et sa renormalisée  $S_L(\sigma(\tau))$  sont situées à distance bornée l'une de l'autre, indépendante de  $L$ . Elles ont même comportement asymptotique. Notons qu'il n'est nécessaire de sommer  $S_L(\sigma(\tau))$  que sur un intervalle  $[[0; L\tau]]$ , ce qui accélère d'autant les calculs et permet de vérifier les erreurs d'arrondi commises par l'algorithme.

Mais mieux que cela, la renormalisation permet d'examiner le comportement global d'une courbe à l'aide du comportement local d'une autre courbe du même type. En effet, les itérations successives de ce procédé permettent, dans les cas non rationnels, de relier  $S_L(\tau)$  à  $S_{L'}(\tau')$  avec  $L'$  aussi petit que nécessaire. En particulier, lorsque  $\tau$  est un nombre rationnel, les itérations convergent vers 0 (ou un

nombre entier). Selon le cas, la courbe peut être bornée, ou simplement une droite. Le comportement asymptotique de telles courbes est ainsi parfaitement connu dans le cas rationnel et correspond aux *sommes de Gauss* [MvdP89].

Visuellement, les deux courbes suivent le même chemin, mais les spirales qui les parcourent ne sont pas les mêmes. Dans la figure 2.6 ci-dessous, on peut examiner le cas de la renormalisation pour un nombre transcendant  $\pi$  et un nombre rationnel. Constatons que dans le cas rationnel, le mouvement général de la courbe est bien périodique, dirigé selon une droite.

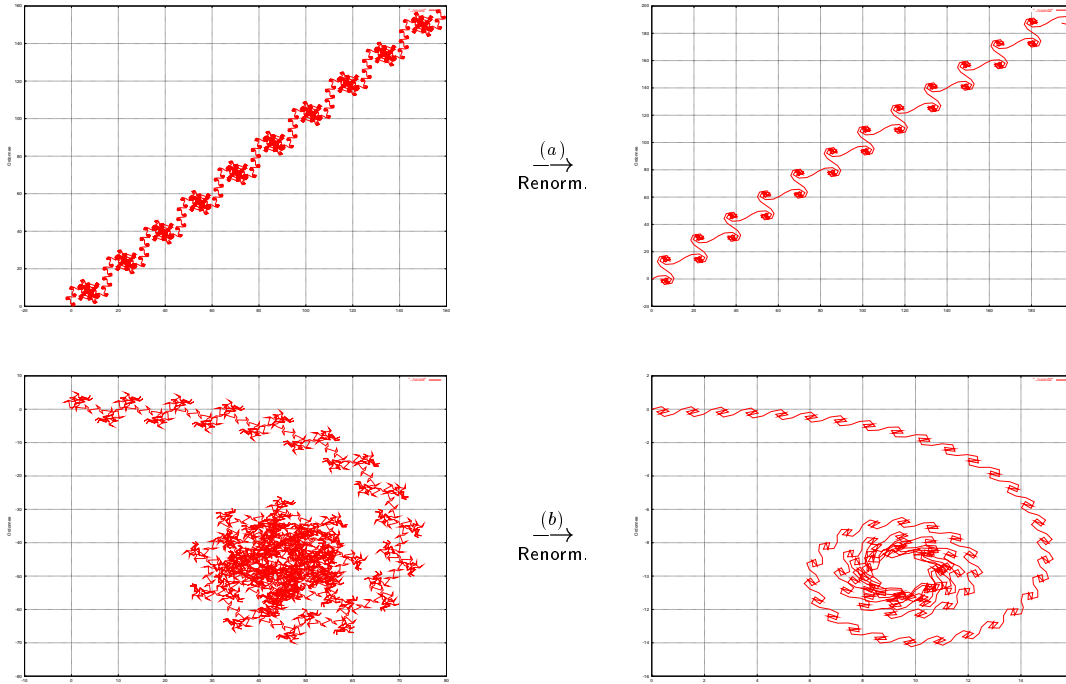


FIG. 2.6 – Effets des renormalisations

(a)  $\tau = \frac{37}{1000}$  (b)  $\tau = \pi$  et  $L \geq 10000$

La courbe de droite correspond à l'application d'une renormalisation sur la courbe de gauche. Les rotations, réflexions et homothéties nécessaires ont été appliquées de façon à ce que les courbes recouvrent le même espace.

## 2.5 Approche locale

L'équation 2.1 page 22 fournit une décomposition de notre somme en une série d'intégrales. Mieux, elle permet de décrire la somme  $S_L$  comme une fonction dépendant continûment de la variable  $L$  et ainsi de prolonger la courbe de Mendès-France. Étudions la fonction :

$$\varphi_n(L) : L \rightarrow \int_0^L e^{i\pi(\tau x^2 - 2nx)} dx$$

$$\text{Remarquons que } \varphi_n(L) = \int_0^L e^{i\pi\tau(x - \frac{n}{\tau})^2} dx \cdot e^{-i\pi\frac{n^2}{\tau}} = \int_{-\frac{n}{\tau}}^{L - \frac{n}{\tau}} e^{i\pi\tau x^2} dx \cdot e^{-i\pi\frac{n^2}{\tau}}$$

Cette fonction correspond donc à un morceau d'intégrale de Cornu, positionné dans une certaine direction. Le "mouvement" principal d'une telle intégrale se situe au niveau de son centre, c'est-à-dire ici lorsque  $\tau L \sim n$ , qui correspondent aux points de phase stationnaire. Cela signifie qu'à un instant  $L$  fixé, la partie principale de la somme  $S_L$  correspond à une somme finie de morceaux de spirales de Cornu.

En fait, le principe de la phase stationnaire nous assure que chaque intégrale influe autour de la valeur critique  $L \approx n/\tau$ . Donc, la suite des  $(n/\tau)$  constitue une liste des endroits où les intégrales influent le plus. Proche de chacun de ces points, on se retrouve au centre d'une des intégrales, donc sur la phase où la vitesse est la plus grande. Ces points correspondent donc *a priori* aux points d'inflexion des spirales.

Au final, deux résultats :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Localement} & S_L \text{ se comporte comme une somme finie de spirales de Cornu.} \\ \text{Globalement} & S_L(\tau) \text{ se comporte comme une courbe } S_L(\sigma(\tau)) \text{ locale.} \end{array} \right.$$

La règle de mouvement locale est valable pour d'autres suites du type  $\langle \tau \cdot n^d \rangle$ , néanmoins pour ces suites la décomposition n'est plus aussi simple, la méthode de la phase stationnaire étant plus complexe (chaque fonction possède plusieurs points critiques, et leur répartition n'est pas aussi simple). En pratique, il est difficile de distinguer les spirales les unes des autres, comme en témoigne la figure 2.7.

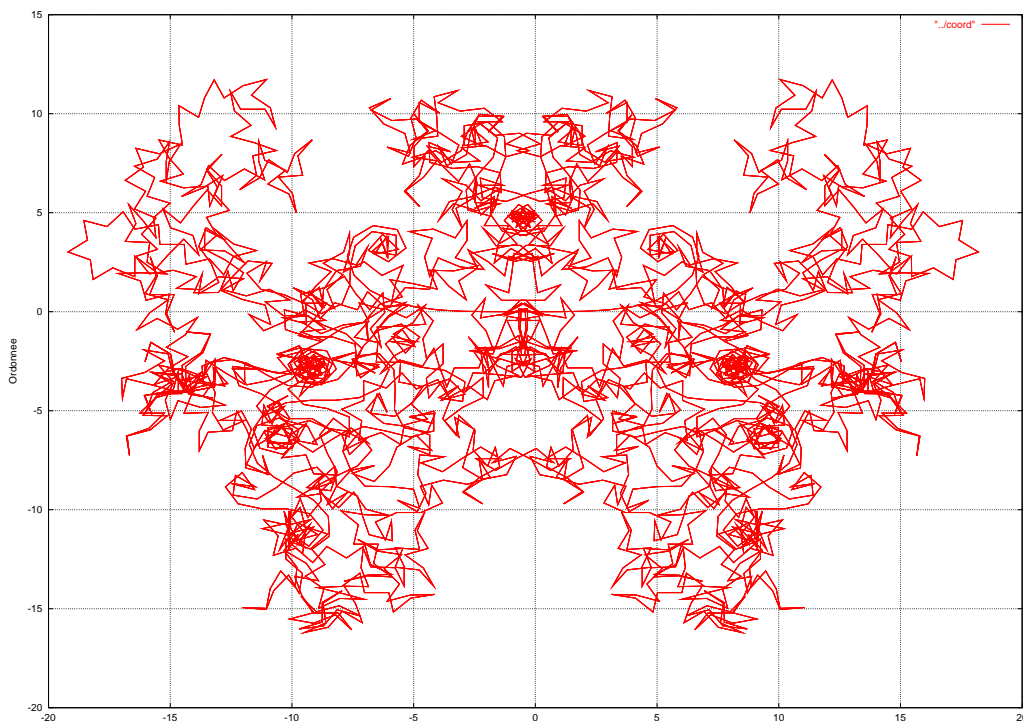


FIG. 2.7 – Le crabe ( $\tau = 0.0004$ ,  $L = 10000$ , degré trois)

De plus, pour de telles suites, le méthode de renormalisation ne fonctionne plus, ce qui rend l'étude plus complexe. Les sommes de Gauss dans le cas rationnel pour des degrés plus complexes sont assez peu connues, et pas étudiées dans le cas général.

# Génération de mots

LES SUITES  $\langle \tau \cdot n^2 \rangle$  présentent donc des aspects intéressants d'un point de vue numérique. Intuitivement, la vitesse de rotation sur le cercle  $\mathbb{S}_1$  augmente au fur et à mesure que le temps passe. Si l'on augmente le degré, on augmente l'accélération de la suite. L'idée qui apparaît d'un point de vue graphique est que la complexité de la suite augmente. Comment quantifier ce type d'information ? Est-il possible d'obtenir des résultats quant à cette complexité ?

POUR POUVOIR RÉPONDRE à ces questions, il nous faut déjà savoir comment définir un mot  $u_\tau$  et l'associer à cette suite de la « bonne façon », façon que l'on déterminera en premier lieu. Pour cela, on s'inspirera de l'étude des mots sturmiens et de leur approche en tant que système dynamique. Cette approche nous permet d'obtenir des propriétés de conjugaison entre les suites réelles et les mots infinis, et ainsi les résultats sur le premier système dynamique influent sur le second.

Ensuite, il s'agira d'appliquer les résultats de l'étude de [AM96], qui nous indique une façon de calculer la complexité de certains types de mots. L'intérêt global consiste à déterminer des bornes pour cette complexité, indépendantes de la constante  $\tau$ . Nous prouvons dans cette partie que cette borne est polynomiale en adaptant la preuve de façon à servir nos besoins.

Enfin, il s'agira d'évaluer l'intérêt de la formule de renormalisation pour ces nouveaux types de mots. Cette formule était en effet appropriée pour l'étude des courbes précédentes, l'est-elle encore pour celle des mots qui lui sont associés ?

### 3.1 Approche dynamique

**Définition des mots.** Considérons toujours le cercle  $\mathbb{S}_1$  découpé en deux parties, comme pour les mots sturmiens. L'idée générale consiste à associer une lettre à l'une des parties, et une autre lettres à la deuxième. On se limite par la suite à des alphabets à deux lettres  $L = \{ 'a', 'b' \}$ . La suite  $u_n = \langle \tau \cdot n^2 \rangle$  n'a pas de comportement évident, d'où l'intérêt de la transformer afin de faciliter son étude.

Par la suite, on se donne une proportion fixée  $\rho \in [0; 1]$ , et l'on associe à la suite  $u_n$  le mot infini  $u_\tau$  défini par la suite de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_\tau[n] = 'a' & \text{lorsque } \tau n^2 \in [0; \rho] \\ u_\tau[n] = 'b' & \text{sinon} \end{cases}$$

La valeur de  $\rho$  est une proportion. Vu que la suite est uniformément répartie modulo 1,  $\rho$  consiste en la proportion limite de lettres 'a' sur les  $n$  premières lettres du mot  $u_\tau$ , lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Recherche une valeur adéquate de  $\rho$  est une des questions à laquelle il faudra répondre plus tard. Pour l'instant, on choisit  $\rho = 1/2$  pour les exemples.

**Transformation en système dynamique.** Afin de mieux pouvoir travailler sur la suite  $u_n$ , l'idée de [AM96] consiste à transformer notre système en un système dynamique. Pour cela, le principe consiste à augmenter la dimension dans laquelle on travaille. En effet, le degré  $n^2$  ne peut être à lui tout seul défini comme par un système dynamique. On va donc s'aider d'une deuxième dimension :

$$\begin{array}{rcccl} (n+1)^2 & = & n^2 & + & 2n & + & 1 \\ & & & & \uparrow & & \\ 2(n+1) & = & (2n) & + & 2 & & \end{array}$$

L'idée consiste à garder la valeur de  $n$  comme valeur locale. Cette valeur augmente avec la deuxième ligne, donc telle un système dynamique. Puis, connaissant cette valeur, il est possible de s'en aider pour calculer la valeur de  $u_{n+1}$  à partir de la valeur de  $u_n$ . L'application que nous allons utiliser est donc la suivante :

$$\begin{cases} x \rightarrow x + y + 1 \\ y \rightarrow y + 2 \end{cases} \quad \text{dont l'itération mène à} \quad \begin{cases} x \rightarrow x + ky + k^2 \\ y \rightarrow y + 2k \end{cases}$$

Plaçons nous dans un espace à deux dimensions,  $\mathbb{R}^2$  par exemple, et définissons l'application affine suivante (la troisième coordonnée correspond à la valeur  $\tau$  qui reste constante) :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ \tau \end{bmatrix} \rightarrow \Phi \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ \tau \end{bmatrix}$$

En appliquant la matrice  $\Phi$  à une valeur initiale spéciale dépendant de  $\tau$ , on obtient exactement la suite  $u_n$  comme projection de la première coordonnée. Reste donc à plonger cette application dans le tore  $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ , afin d'obtenir un système dynamique adéquat.

**Principe de conjugaison.** Pourquoi cette manière est-elle une « bonne » manière de faire ? Si l'on représente les mots de telle façon, alors le système dynamique  $(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1, \Phi)$  est conjugué au système dynamique  $(L^\omega, \sigma)$  où  $\sigma$  représente l'opération de shift à gauche, c'est-à-dire que si  $\text{Code}$  représente le codage ci-dessus, alors :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
L^\omega & \xrightarrow{\sigma} & L^\omega
\end{array}
\quad \sigma \circ \text{Code}(X_0) = \text{Code} \circ \Phi(X_0)$$

Les deux opérations commutent, ce qui rend les systèmes dynamiques conjugués. Les points périodiques de  $(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1, \Phi)$  s'envoient sur des points périodiques de  $(L^\omega, \sigma)$ , les points fixes s'envoient eux aussi par codage... Le seul point noir vient du fait que le codage n'est pas forcément une bijection. Il est clairement injectif, mais la surjectivité risque d'être difficile à prouver, les mots obtenus vérifiant des propriétés de répartition modulo 1 dépendant de  $\rho$ .

**Orbites du système.** Selon un théorème dû à Furstenberg, lorsque  $\tau$  est irrationnel, le système précédent est ergodique. En particulier, les orbites sont denses dans  $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ . C'est-à-dire que partant d'un point initial quelconque, les éléments  $\Phi^n(x)$  recouvrent le carré tout entier, et en particulier tombent dans tout ouvert à partir d'un certain rang. Cette propriété est impérative afin d'appliquer la méthode d'Arnoux et Mauduit.

### 3.2 Majoration de la complexité

**Découpage de  $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ .** Considérons l'application  $\Phi$  définie dans le paragraphe précédent. Elle est affine et bijective. La représenter est possible à l'aide d'un graphe en couleurs, comme celui de la figure 3.1. Sur cette figure,  $\Phi$  envoie une droite de couleur donnée du tore de gauche sur une droite de la même couleur dans le tore de droite. Constatons que le système dynamique  $\Phi$  conserve les aires, dans la mesure où la matrice de  $\Phi$  est de déterminant 1.

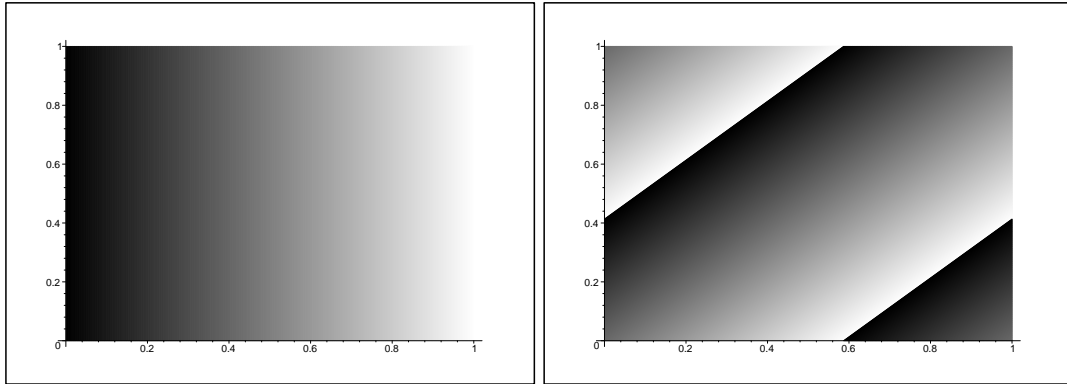


FIG. 3.1 – Application du système dynamique  $\Phi$

Comme  $\Phi$  est une application affine bijective, son inverse  $\Phi^{-1}$  est continue. Supposons que l'on découpe l'espace de travail en deux parties, qui correspondent exactement à la lettre 'a' et à la lettre 'b'. Selon la définition de la section précédente, ces parties sont explicitement :

$$\begin{cases}
P_a : [0; \rho] \times [0; 1] & \longrightarrow \text{'a'} \\
P_b : [\rho; 1] \times [0; 1] & \longrightarrow \text{'b'}
\end{cases}$$

Posons  $X_\tau$  le vecteur défini ci-dessous :

$$X_\tau = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad \Phi^n(X_\tau) = \begin{bmatrix} (n+1)^2\tau \\ 2n\tau \\ \tau \end{bmatrix} = X_n$$

La  $n$ -ième lettre du mot  $u_\tau$  est un  $x$  si et seulement si  $\Phi^n(X_\tau) \in P_x$ . Supposons que l'on continue le raisonnement pour essayer d'obtenir des facteurs plus longs de  $u_\tau$ . Pour cela, on considère les parties  $\Phi^{-1}(P_x)$ . Alors la  $n + 1$ -ième lettre de  $u_\tau$  est un  $x$  si et seulement si  $\Phi^{n+1}(X_\tau) \in P_x$ , ce qui est équivalent par bijection à ce que  $\Phi^n(X_\tau) \in \Phi^{-1}(P_x)$ . Si l'on s'aide des intersections, il est alors possible de déterminer pour un facteur  $v$  la partie du tore correspondante  $P_v$  :

$$P_v = P_{a_1} \cap \Phi^{-1}(P_{a_2}) \cap \dots \cap \Phi^{-n}(P_{a_p}) \quad \text{où} \quad v = a_1 a_2 \dots a_p$$

Lorsque  $\Phi^n(X_\tau) \in P_v$ , cela signifie que le facteur de  $u_\tau$ , constitué des lettres allant de la  $n$ -ième lettre à la  $(n + p - 1)$ -ième lettre est égal à  $v$ , et réciproquement. Il est possible de faire un découpage du tore en parties qui correspondent exactement aux facteurs que l'on recherche.

Si l'on découpe le tore en parties correspondant exactement aux facteurs de longueur  $p$ , on obtient une partition, contenant peut-être des parties vides. Comme le système est ergodique, et que cette partition est une partition en ensembles fermés, il suffit de vérifier que les orbites ne rencontrent pas les murs de séparation des cases  $P_v$ , et que les cases ne se réduisent pas à un ensemble d'intérieur vide. Ces deux conditions vérifiées nous assurent que les orbites rencontrent alors toutes les cases d'intérieur non vide. Pour la première condition, il suffit de prendre la valeur de la proportion  $\rho$  comme étant rationnelle. Vu que l'on travaille avec des valeurs de  $\tau$  irrationnelles, cette condition empêche d'avoir des points  $X_n$  qui tombent sur les droites séparatrices. Mieux, cette condition assure que les points d'intersection des droites ne peuvent correspondre qu'à deux droites, et pas plusieurs. En particulier, les cases  $P_v$  sont forcément soit vides, soit d'intérieur non vide.

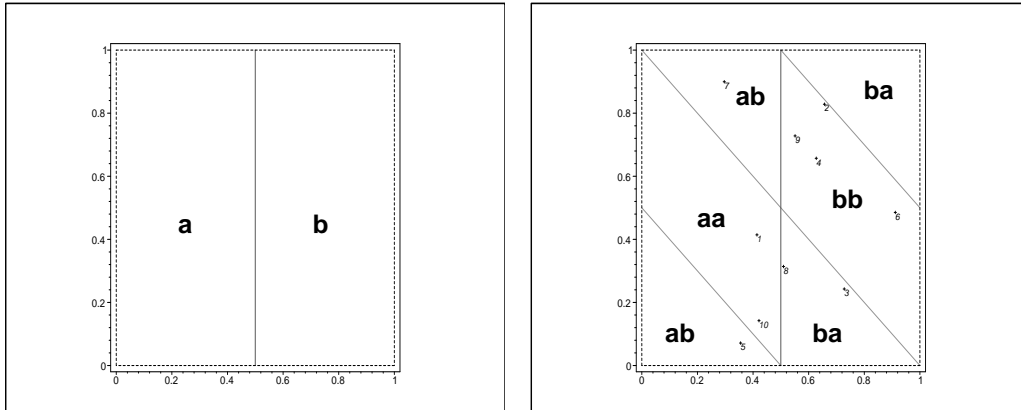


FIG. 3.2 – Facteurs de longueur 1 et 2

Le tableau de gauche correspond à la décomposition de l'espace en deux parties selon  $\rho$  : la partie correspondant à la lettre 'a' et l'autre à la lettre 'b'. Le tableau de droite correspond à l'itération du procédé pour les facteurs de longueur 2. Les points tracés correspondent aux 10 premières itérations du système dynamique.

**Comptage du nombre de parties.** Pour compter le nombre de cases  $P_v$ , on va appliquer le théorème d'Euler pour les graphes planaires. En effet, la décomposition en parties nous fournit un graphe tracé sur le tore. Les arêtes sont définies par les droites séparatrices, les sommets étant les intersections. De plus, comme chaque sommet n'est le point d'intersection que de deux droites, chaque sommet est de degré 4. En particulier, le nombre d'arêtes est égal au double du nombre de sommets.

**Théorème 3-3.** (THÉORÈME D'EULER)

Sur le tore, si l'on considère un graphe qui possède  $A$  arêtes,  $S$  sommets et  $F$  faces. Alors :

$$S + F = A$$

En particulier, comme ici on aura  $A = 2S$ , ceci nous prouve que dans la partition qui nous concerne, le nombre de faces est égal au nombre de sommets. On se ramène donc à compter le nombre de points d'intersection des droites qui constituent la partition.

Les droites d'intersection au rang 0 sont :

$$\Delta_0 : x = 0 \quad \Theta_0 : x = \rho$$

Toutes les autres droites autres qu'horizontales ou verticales :

$$\Delta_n : x + ny + n^2\tau = 0 \quad \Theta_n : x + ny + n^2\tau = \rho$$

On peut en particulier vérifier avec ces équations que les points d'intersection ne peuvent se faire qu'entre deux droites, sinon il serait possible d'éliminer  $x$  et  $y$ , et donc de définir  $\tau$  en fonctions de paramètres rationnels, ce qui serait absurde si l'on choisit  $\tau$  irrationnel. Considérons l'intersection d'une droite  $\Delta_n$  et d'une droite  $\Delta_m$ , pour  $m \neq n$ . Éliminons la valeur de  $x$  en soustrayant les deux équations (la valeur de  $x$  est de toutes façons déterminée de manière unique par la valeur de  $y$ ). Il reste alors :

$$(n - m)y = \tau(n^2 - m^2) \pmod{1}$$

Cette équation dans le tore admet donc  $(n - m)$  solutions lorsque  $n > m$ . De plus, comme l'intersection des droites ne dépend pas vraiment du fait que l'on choisisse  $\Delta$  ou  $\Theta$ . Cela signifie en particulier qu'à chaque couple  $(\Delta, \Delta)$ ,  $(\Delta, \Theta)$ ,  $(\Theta, \Delta)$ , et  $(\Theta, \Theta)$  correspond le même nombre de solutions. Au final, pour  $n > m$ , on obtient  $\boxed{4(n - m)}$  solutions.

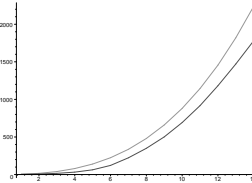
La formule reste juste si l'on essaie d'intersecter des droites correspondant à  $m = n$  (cas  $(\Delta, \Theta)$ ,  $(\Theta, \Delta)$ ). Remarquons que la matrice  $\Phi$  n'a pas été choisie au hasard. En effet, plusieurs matrices de ce type correspondent au même système dynamique. La matrice  $\Phi$  minimise les coefficients obtenus sur la première ligne, et ainsi les calculs modulo 1 ne présentent-ils pas de termes en trop.

Reste à sommer ces points d'intersection pour les valeurs de  $n > m$ . Fixons nous une longueur  $p$  donnée, nous n'avons plus qu'à calculer la somme suivante :

$$\mu_p = \sum_{p \geq n > m \geq 0} 4(n - m) = \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^{n-1} 4(n - m) = 2 \frac{(p + 1)^3 - p - 1}{3} = 2 \frac{p(p + 1)(p + 2)}{3}$$

Les premières valeurs de cette suite sont :

$$\begin{cases} \mu_1 = 4 \\ \mu_2 = 16 \\ \mu_3 = 40 \\ \mu_4 = 80 \end{cases}$$



La courbe supérieure correspond à la borne obtenue par le calcul. La courbe inférieure correspond au nombre de facteurs pour un mot  $u_\tau$ , sur ses 20000 premières lettres.

**Retour à la complexité.** Le nombre de cases de la décomposition est donc en  $\mathcal{O}(n^3)$ . Néanmoins, la complexité de la suite, même si elle est bornée par cette valeur, n'est pas forcément exactement égale à cette valeur, au contraire. En effet, certaines cases correspondent au même facteur. Il est donc nécessaire d'obtenir une minoration de cette complexité afin de vraiment appréhender la difficulté que présente la suite. Toujours est-il que la complexité de  $u_\tau$  est *polynomiale*, et ceci indépendamment du paramètre  $\tau$ . Ce paramètre nous empêche d'ailleurs d'espérer autre chose que des bornes pour la complexité. Les valeurs de  $\rho$ , quant à elles, ne modifient que les facteurs qui interviennent dans le mot. Elles sont donc secondaires à notre étude.

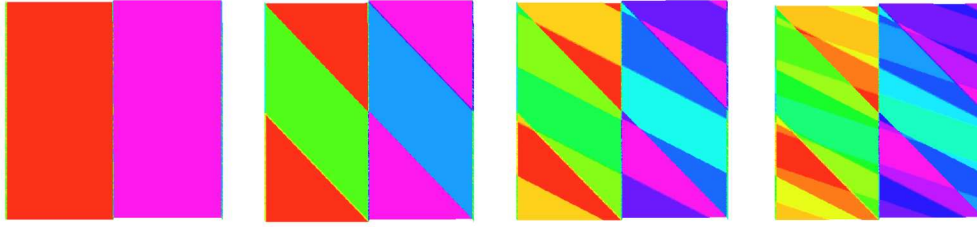


FIG. 3.3 – Premières décompositions du tore pour  $\tau = \sqrt{2}$

**Minoration de la complexité.** Pour l’instant, les questions de minoration de la complexité sont moins faciles à résoudre, et restent des problèmes ouverts. Les calculs effectués sur des suites particulières laissent à penser que la borne précédente est une borne adéquate, mais il n’y a pas de façon simple de le prouver. Pour s’en rendre compte, penser au fait que la différence entre le fait que  $\tau$  soit rationnel ou non implique une complexité bornée ou polynomiale selon le cas, alors que les mots peuvent être aussi proches que nécessaire (au sens de la métrique usuelle sur les mots).

### 3.3 Étude de la renormalisation

Lors de l’étude graphique de la suite, on a vu apparaître une formule 2.2 qui nous permettait de prévoir l’évolution de la courbe à grande distance. Peut-on relier cette équation à un résultat sur l’étude des mots  $u_\tau$  ?

**Cas rationnel.** Dans le cas où  $\tau$  est rationnel, le mot  $u_\tau$  est périodique, tout autant que la suite. Si l’on note  $\tau = p/q$  la décomposition avec  $p \wedge q = 1$ , alors la suite  $u_n$  parcourt des éléments particuliers de l’anneau  $\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z}$  :

$$\text{Périodicité : } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & (q^2 - 1) \\ 0 & \frac{p^2}{q^2} & \frac{4p^2}{q^2} & \dots & \frac{p^2}{q^2} \end{bmatrix}$$

La périodicité de la suite est au plus d’ordre  $q^2$ . Si  $q$  est un nombre pair, alors la périodicité est d’ordre  $q^2/2$ , sinon elle est bien d’ordre  $q^2$ . Comme  $p$  et  $q$  sont supposés premiers entre eux, la multiplication par  $p^2$  est bijective, ce qui nous pousse à nous intéresser aux cas où  $p = 1$ . Dans ces cas, la suite parcourt exactement l’ensemble des carrés.

L’application de la formule de renormalisation modifie la fraction  $p/q$  en une fraction  $q/p$  ou  $(p - q)/p$ . Le signe n’influe que sur le sens de parcours des carrés et n’est *a priori* pas important. L’idée qui s’en suit consiste à dire que la renormalisation va transformer une liste des carrés de  $\mathbb{Z}/q^2\mathbb{Z}$  en une liste des carrés de  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ , à multiplication près par une constante qui est inversible à chaque fois. Le problème étant qu’il n’est pas possible de relier ces deux listes de carrés de manière générale, vu qu’elles dépendent de  $p$  et  $q$ . Le mot  $u_\tau$  se retransforme en un mot  $u_\mu$  selon une application qui n’est pas un morphisme, mais une substitution de mots.

**Cas irrationnel.** Le cas irrationnel est beaucoup moins facile à apprécier. La formule 2.6 transforme  $n$  lettres du mot  $u_\tau$  en  $[n\tau]$  lettres du mot  $u_\mu$ . Le caractère exact de la renormalisation qui apparaissait précédemment est ici beaucoup plus difficile à exprimer, surtout en termes de mots. Le phénomène qui consistait à approximer la courbe à l’aide d’une autre courbe semble particulièrement complexe à relier aux mots infinis.

*Exemple :* Pour une valeur de  $\tau = \sqrt{30} - 5$ , on s'intéresse au mot généré et à son renormalisé, qui correspond à  $\mu = 1/\tau - 2$ . Les valeurs effectives sont :

$$\begin{cases} \tau = .477225575 \\ \mu = 0.095445115 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_\tau = 'ababbaabbbbbbaabbabababbaab...! \\ u_\mu = 'aabbaabbbbbabaabbaa...!' \end{cases}$$

Les 10 premières lettres de  $u_\tau$  sont reliées aux 4.7 premières lettres de  $u_\mu$ . Si l'on ne considère que les 4 premières lettres, cela signifiera que pour les 20 premières de  $u_\tau$ , on n'associe que 8 lettres de  $u_\mu$ . Impossible d'être exact, vu que la renormalisation est un procédé continu, alors que les mots forment un ensemble discret.

### 3.4 Extension à des cas plus complexes

L'étude réalisée avec les suites  $\langle n^2\tau \rangle$  est assez restrictive. Néanmoins, elle est dictée par le fait que la représentation de Mendès-France se prête bien à son étude, et que des phénomènes tels que les spirales apparaissent, qui permettent de faire croire à un certain type d'organisation dans cette suite. Le procédé de renormalisation est à cet égard un résultat assez extraordinaire, qui ne se produit que pour ce type de suites, et qui permet de comprendre leur structure de manière assez directe.

Une étude plus générale devrait prendre en compte des suites de la forme  $\langle \tau \cdot P(n) \rangle$  où  $P \in \mathbb{Z}[X]$  est un polynôme à coefficients entiers. Néanmoins, il existe des limitations à de telles extensions :

$\Rightarrow$  Lorsque  $P$  est un polynôme de degré 1, on en reste aux mots sturmiens, et lorsqu'il est de degré 2, il est possible d'effectuer une étude similaire à celle réalisée précédemment, en particulier en ce qui concerne la complexité, mais aussi d'un point de vue graphique, dans la mesure où la suite se ramène au cas étudié en factorisant le terme carré.

$\Rightarrow$  Supposons que  $P(X) = X^d$ , pour  $d \geq 3$ . Les figures obtenues pour ce type de suites ne permettent pas d'attendre les mêmes résultats, du moins à l'aide de la représentation de Harrison. Le cas des sommes de Gauss pour  $d = 3$  a encore été très peu étudié. D'où le besoin de rechercher encore une fois un nouveau type de représentation. De plus, il est à noter que la recherche de la complexité de telles suites demande de passer en dimension supérieure, ce qui peut poser problème pour le dénombrement des parties du tore. Arnoux et Mauduit fournissent un résultat dans le cas où la partition est constituée d'ensembles convexes, mais tel n'est pas notre cas. Mendès-France a étudié la complexité de ce type de suites.

# Conclusion

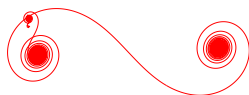
**A** PRÈS AVOIR étudié le problème de la représentation graphique des suites réelles, nous avons pu examiner les résultats existant dans le domaine. Apparemment, pour chaque type de représentation, il existe un type de suites auquel elle est la mieux adaptée. Pour la représentation de Harrison, il s'agit des mots sturmiens, pour celle de Mendès-France des mots que nous avons étudiés.

La représentation de Harrison est particulièrement adaptée à l'étude des mots sturmiens, et permet d'en apprécier certaines particularités de manière graphique. Les résultats obtenus sont particulièrement probants. Néanmoins, l'étude d'autres cas semble beaucoup moins évidente. La représentation de Mendès-France, quant à elle, possède pour elle ses spirales et cette propriété de renormalisation qui permet d'apprécier le comportement asymptotique de la courbe. La structure générale permet d'obtenir quelques idées quant à la vitesse de rotation de la courbe, et ce faisant permettre d'évaluer la complexité.

**N**ÉANMOINS, il nous reste des questions auxquelles nous n'avons pas pu répondre. Comment, en effet, pouvoir mieux étudier la complexité des mots infinis que nous avons introduit ? Pour l'instant, il ne nous est possible que d'obtenir des bornes supérieures. Est-il possible d'obtenir des résultats de complexité pour des suites de degré plus important ?

De plus, la question de la renormalisation des suites n'est pas entièrement résolue. Même si son étude n'est pas évidente, est-il possible de relier ce phénomène à une application sur les mots ? Pour cela, il serait peut-être intéressant de tenter un autre type de codage, afin d'obtenir des systèmes dynamiques conjugués.

**L**ES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES de suites réelles semblent avoir des possibilités intéressantes, qui permettraient d'étudier des systèmes de mots peu évidents au premier abord. Pouvoir extraire des résultats d'une représentation graphique n'est pas un procédé évident, mais doit encore une fois être considéré comme une aide à l'intuition. La question d'une représentation universelle paraît être extrêmement difficile à aborder pour l'instant.



# Bibliographie

- [All94] J. P. Allouche. Sur la complexité des suites infinies. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 1 : 133–143, 1994.
- [AM96] P. Arnoux and C. Mauduit. Complexité de suites engendrées par des récurrences unipotentes. *Acta Arithmetica*, 76(1) : 85–97, 1996.
- [Ber95] J. Berstel. Recent results in sturmian words. (DLT'95), 1995.
- [BG88] M. V. Berry and J. Goldberg. Renormalisation of curlicues. *Nonlinearity*, pages 1–26, 1988.
- [Bro93] T. C. Brown. Descriptions of the characteristic sequence of an irrational. *Canad. Math. Bull.*, 36(1) : 15–21, 1993.
- [Dav93] P. J. David. *Spirals – From Theodorus to Chaos*. Wellesley, MA : A. K. Peters, 1993.
- [DMF81] T. M. Dekking and M. Mendes-France. Uniform distributions modulo one : A geometric viewpoint. *J. fur die reine und angewandte Math.*, 329 : 143–153, 1981.
- [Har89a] J. Harrison. Denjoy fractals. *Topology*, 28(1) : 59–80, 1989.
- [Har89b] J. Harrison. Embedded continued fractals and their Hausdorff dimension. *Constructive Approximation*, 5(1) : 99–115, 1989.
- [Har89c] J. Harrison. Geometry of algebraic continued fractals. In *Number theory and dynamical systems*, 134, pages 117–136. Lond. Math. Soc. Lect. Note, 1989.
- [MF81] M. Mendès-France. Entropy of curves and uniform distribution. In Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, editor, *Topics in classical number theory*, volume 34, pages 1051–1067. 1981.
- [MvdP89] R. R. Moore and A. J. van der Poorten. On the thermodynamics of curves and other curlicues. In M. N. Barber and M. K. Murray, editors, *Miniconference on Geometry and Physics*, volume 22, pages 82–109. Centre for mathematical analysis, australian national university, 1989.