
Étude des graphes planaires cofinis selon leurs groupes de symétries

Résumé : Les graphes cofinis constituent une famille de graphes possédant un groupe de symétries non trivial, comme les graphes de Cayley ou les graphes sommet-transitifs. Lorsque ces graphes sont en plus planaires, ces symétries peuvent se traduire de manière simple grâce à des symétries du plan dans lequel les graphes sont dessinés. L'ensemble de ces symétries ou automorphismes permet alors de décrire globalement le graphe à l'aide de données géométriques locales, par des structures appelées schémas d'étiquetage.

Dans cette thèse, nous étudions les groupes de symétries et décrivons les schémas d'étiquetage des graphes planaires cofinis possédant une représentation topologique simple : les graphes planaires localement finis. Nous montrons comment ces schémas permettent de caractériser le graphe et ses plongements. Cette analyse permet d'énumérer cette famille des graphes planaires cofinis, en particulier lorsqu'ils sont de Cayley ou sommet-transitifs.

À partir de ces résultats, nous nous intéressons à la structure des groupes d'automorphismes de cette famille de graphes. Des problèmes de la théorie combinatoire des groupes usuellement indécidables se trouvent devenir décidables dans notre cadre : c'est le cas en particulier des problèmes du mot, simple et généralisé. Les problèmes de décidabilité de la logique permettent de classifier ces graphes en deux grandes familles, selon leur largeur arborescente et la géométrie de leur plongement.

Enfin, la question de l'extension de cette description à une famille de graphes plus généraux est étudiée. La classification de ces graphes en terme de bouts et de points d'accumulation dans les plongements permet d'obtenir des informations sur la forme que peuvent prendre les plongements des graphes planaires cofinis non localement finis. Nous discutons alors des difficultés d'extension de la méthode "localement finie" au cas général.

Mots-clé : graphes de Cayley, graphes planaires, sommet-transitifs, cofinis, groupes d'automorphismes, schéma d'étiquetage, problèmes du mot simple et généralisé

Analysis of the cofinite planar graphs led by their groups of symmetries

Abstract : The cofinite graphs represent a family of graphs possessing a non-trivial group of symmetries, such as the Cayley graphs and the vertex-transitive graphs. When such graphs are planar, these symmetries correspond merely to symmetries of the plan in which the graphs are embedded. This set of symmetries – or, more precisely, automorphisms – can provide a global description of the graph from local data, by means of structures called labeling schemes.

In this thesis, we study the groups of symmetries and describe the labeling schemes of the planar cofinite graphs possessing a simple topological representation : the planar locally finite graphs. We prove how a labeling scheme allows to characterize the graph and its embeddings. This analysis allows the enumeration of this family of the planar cofinite graphs, in particular when they are vertex-transitive or Cayley graphs.

With these results, it is possible to analyze the structure of the groups of automorphisms of this family of graphs. There exist problems of the combinatorial group theory unsolvable in general that become solvable within this framework. That is the case in particular of the simple and generalized word problems. Problems of decidability of logics allow for the classification of these graphs into two families, depending on their treewidth and the geometry of their embedding.

Finally, we raise the question of the extension to the more general family of the cofinite planar graphs. The classification of these graphs in terms of number of ends and of accumulation points in their embeddings provides information on the structure of the embeddings of these more general graphs. We discuss the problems raised by the extension of the "locally finite" method to the general case.

Keywords : Cayley graphs, planar graphs, vertex-transitive, cofinite, automorphisms group, labeling scheme, simple and generalized word problem