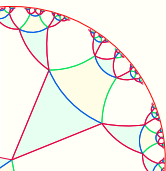


Étude des graphes planaires cofinis selon leurs groupes de symétries

David RENAULT

LaBRI, Université Bordeaux 1
29 décembre 2004



Domaine de travail :

- Considérer des graphes possédant un **groupe de symétries** non trivial.
- Se restreindre aux graphes planaires, pour leur **structure géométrique**.

⇒ les graphes planaires localement finis

Objectifs :

- Capturer la structure géométrique **globale** de ces graphes.
- Représenter cette structure par des informations **locales**.

Exploitation :

- Caractérisation et étude d'une famille de graphes.
- Applications possibles à la théorie des groupes et des surfaces.

Domaine de travail :

- Considérer des graphes possédant un **groupe de symétries** non trivial.
- Se restreindre aux graphes planaires, pour leur **structure géométrique**.

⇒ les graphes planaires localement finis

Objectifs :

- Capturer la structure géométrique **globale** de ces graphes.
- Représenter cette structure par des informations **locales**.

Exploitation :

- Caractérisation et étude d'une famille de graphes.
- Applications possibles à la théorie des groupes et des surfaces.

Domaine de travail :

- Considérer des graphes possédant un **groupe de symétries** non trivial.
- Se restreindre aux graphes planaires, pour leur **structure géométrique**.

⇒ les graphes planaires localement finis

Objectifs :

- Capturer la structure géométrique **globale** de ces graphes.
- Représenter cette structure par des informations **locales**.

Exploitation :

- Caractérisation et étude d'une famille de graphes.
- Applications possibles à la théorie des groupes et des surfaces.

- 1 Graphes planaires localement finis
- 2 Invariants géométriques
- 3 Schémas d'étiquetage
- 4 Applications

- 1 Graphes planaires localement finis
 - Définitions et Généralités
 - Graphes localement finis
 - Simplification des plongements
 - Connexité et automorphismes
 - Propriétés des plongements
- 2 Invariants géométriques
- 3 Schémas d'étiquetage
- 4 Applications

Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe est un couple $\Gamma = (V, E)$

constitué d'un ensemble :

- V de sommets ;
- $E \subset V \times V$ d'arêtes.

Conventions :

- Pas d'arêtes doubles ;
- Pas de boucles ;



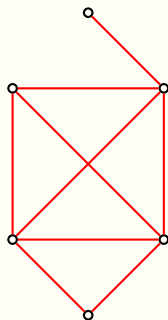
Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe est un couple $\Gamma = (V, E)$ constitué d'un ensemble :

- V de sommets ;
- $E \subset V \times V$ d'arêtes.

Conventions :

- Pas d'arêtes doubles ;
- Pas de boucles ;



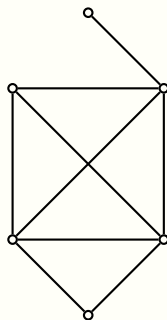
Qu'est-ce qu'un graphe ?

Un graphe est un couple $\Gamma = (V, E)$ constitué d'un ensemble :

- V de sommets ;
- $E \subset V \times V$ d'arêtes.

Conventions :

- Pas d'arêtes doubles ;
- Pas de boucles ;



Qu'est-ce qu'un plongement ?

Un **plongement** d'un graphe dans le plan consiste à se donner :

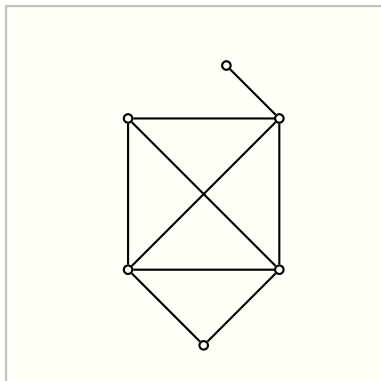
- pour chaque sommet $u \in V$, un point du plan ;
- pour chaque arête $e = (u, v) \in E$, un chemin tracé dans le plan reliant les points associés aux sommets u et v .

Un graphe est dit **planaire** lorsque il existe un plongement de ce graphe dans le plan tel que :

- les sommets sont des points distincts dans le plan ;
- les arêtes ne se recoupent que sur leurs extrémités.

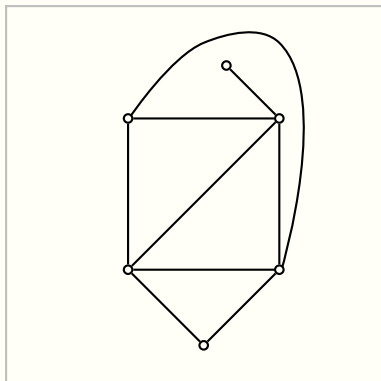
Exemples de graphes planaires

Un plongement non planaire



Exemples de graphes planaires

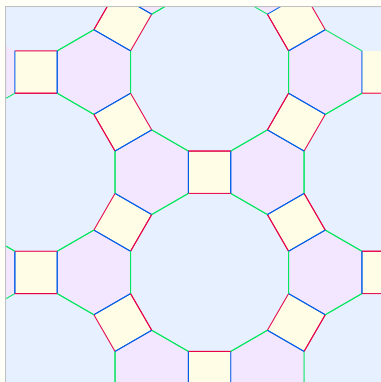
Un plongement planaire



Qu'est-ce qu'une face ?

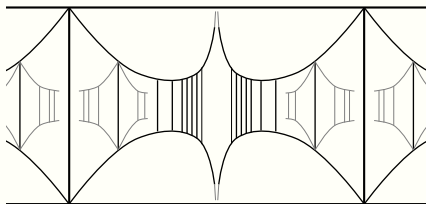
Une **face** d'un graphe planaire est une composante connexe du complémentaire du graphe dans le plan.

Exemple : des polygones réguliers



Pour les graphes infinis . . .

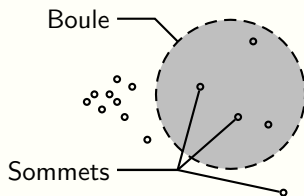
Problème : dans un graphe infini, la décomposition du graphe en sommets, arêtes et faces n'est pas aussi évidente.



Graphe de Cayley du groupe $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

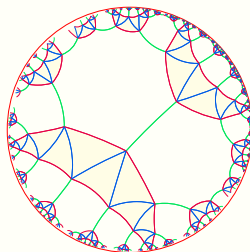
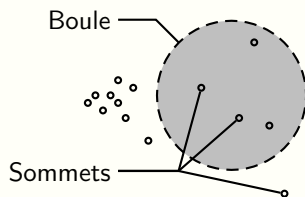
Qu'est-ce qu'un graphe localement fini ?

Un graphe planaire est dit **(topologiquement) localement fini** lorsque ses sommets n'ont pas de points d'accumulation dans le plan.



Qu'est-ce qu'un graphe localement fini ?

Un graphe planaire est dit **(topologiquement) localement fini** lorsque ses sommets n'ont pas de points d'accumulation dans le plan.



Choix des surfaces planaires

Théorème de Killing-Hopf

Toute surface de Riemann simplement connexe, complète, homogène et isotrope est nécessairement l'une des trois surfaces suivantes :

- la sphère ;
- le plan euclidien ;
- le plan hyperbolique.

Graphes arête localement finis

Le plongement d'un graphe planaire est dit **arête localement fini** lorsque tout compact du plan ne s'intersecte qu'avec un nombre fini d'arêtes.

Théorème – Graphes arête localement fini

Étant donné un graphe localement fini, il est possible d'obtenir un plongement de ce graphe qui soit arête localement fini.

Conséquences :

- le graphe et le point à l'infini forment des fermés du plan ;
- les bords des faces sont des successions d'arêtes et de sommets.

Graphes arête localement finis

Le plongement d'un graphe planaire est dit **arête localement fini** lorsque tout compact du plan ne s'intersecte qu'avec un nombre fini d'arêtes.

Théorème – Graphes arête localement fini

Étant donné un graphe localement fini, il est possible d'obtenir un plongement de ce graphe qui soit arête localement fini.

Conséquences :

- le graphe et le point à l'infini forment des fermés du plan ;
- les bords des faces sont des successions d'arêtes et de sommets.

Graphes arête localement finis

Le plongement d'un graphe planaire est dit **arête localement fini** lorsque tout compact du plan ne s'intersecte qu'avec un nombre fini d'arêtes.

Théorème – Graphes arête localement fini

Étant donné un graphe localement fini, il est possible d'obtenir un plongement de ce graphe qui soit arête localement fini.

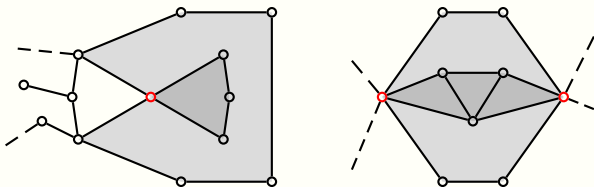
Conséquences :

- le graphe et le point à l'infini forment des fermés du plan ;
- les bords des faces sont des successions d'arêtes et de sommets.

Connexité et séparabilité

n -séparation

Une n -séparation est un ensemble de n sommets qui, retirés du graphe, le séparent en au moins deux composantes connexes.



Séparabilité et connexité

Un graphe est dit n -séparable lorsqu'il possède une n -séparation.
 Un graphe est dit n -connexe lorsqu'il n'est pas $(n - 1)$ -séparable.

Groupes d'automorphismes

Considérons un graphe $\Gamma = (V, E)$.

Automorphisme

Un automorphisme d'un graphe est une bijection de $V \cup E$:

- préservant les sommets et les arêtes ;
- l'image des extrémités d'une arête sont les extrémités de l'image de l'arête.

Le groupe d'automorphismes agit sur les sommets et les arêtes du graphe.

Selon le nombre d'orbites de sommets :

- une seule orbite \longrightarrow graphe **sommet-transitif** ;
- nombre fini d'orbites \longrightarrow graphe **cofini**.

Groupes d'automorphismes

Considérons un graphe $\Gamma = (V, E)$.

Automorphisme

Un automorphisme d'un graphe est une bijection de $V \cup E$:

- préservant les sommets et les arêtes ;
- l'image des extrémités d'une arête sont les extrémités de l'image de l'arête.

Le groupe d'automorphismes agit sur les sommets et les arêtes du graphe.

Selon le nombre d'orbites de sommets :

- une seule orbite \longrightarrow graphe **sommet-transitif** ;
- nombre fini d'orbites \longrightarrow graphe **cofini**.

Cas des graphes sommet-transitifs

Soit Γ est un graphe planaire localement fini sommet-transitif.

- Structure géométrique simple :

Lemme – Séparations finies

Le graphe Γ ne possède pas de 1 ou de 2-séparations finies.

- Action naturelle sur les faces :

Lemme – Préservation des faces finies

Les automorphismes du graphe envoient les bords d'une face finie sur le bord d'une face finie.

Cas des graphes sommet-transitifs

Soit Γ est un graphe planaire localement fini sommet-transitif.

- Structure géométrique simple :

Lemme – Séparations finies

Le graphe Γ ne possède pas de 1 ou de 2-séparations finies.

- Action naturelle sur les faces :

Lemme – Préservation des faces finies

Les automorphismes du graphe envoient les bords d'une face finie sur le bord d'une face finie.

Cas des graphes cofinis

Soit Γ est un graphe planaire localement fini sommet-transitif.

Lemme – Simplification du graphe

Étant donné un graphe planaire cofini, il est toujours possible de le simplifier de manière à ce qu'il vérifie :

- pas de 1 ou de 2-séparation finies ;
- les automorphismes préservent les bords des faces finies.

Par la suite, on supposera que les graphes vérifient ces propriétés.

1 Graphes planaires localement finis

2 Invariants géométriques

- Vecteurs d'arêtes
- Vecteurs de faces
- Voisinages d'arêtes

3 Schémas d'étiquetage

4 Applications

Coloration du graphe

Soit Γ un graphe planaire cofini localement fini.

Le graphe agit naturellement sur :

- les sommets ;
- les arêtes ;
- et les faces finies du plongement.

\Rightarrow induit une coloration naturel des ces objets géométriques.

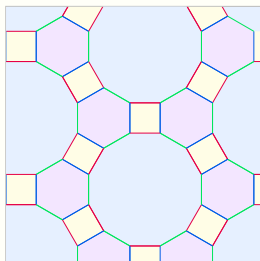
Un invariant géométrique simple

Soit s un sommet du graphe Γ .

Un **vecteur de type** en s est un vecteur donnant la liste des tailles des faces incidentes au sommet s , dans l'ordre trigonométrique positif.

$[4; 6; 10]$

Le vecteur de type ne dépend que de la couleur du sommet.



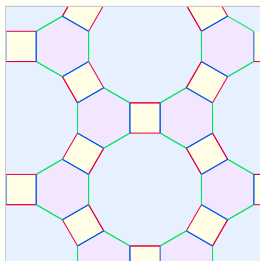
Un invariant géométrique simple

Soit s un sommet du graphe Γ .

Un **vecteur de type** en s est un vecteur donnant la liste des tailles des faces incidentes au sommet s , dans l'ordre trigonométrique positif.

$[4; 6; 10]$

Le vecteur de type ne dépend que de la couleur du sommet.

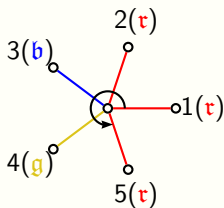


Vecteurs d'arêtes

Soit s un sommet du graphe Γ .

Un **vecteur d'arête** en s est un vecteur donnant la liste des couleurs des arêtes incidentes au sommet s , dans l'ordre trigonométrique positif.

$$[\tau; \tau; \mathbf{b}; \mathbf{g}; \tau]$$



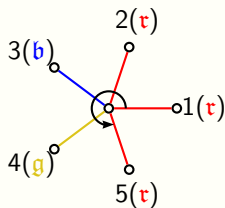
Le vecteur d'arête ne dépend que de la couleur du sommet.

Vecteurs d'arêtes

Soit s un sommet du graphe Γ .

Un **vecteur d'arête** en s est un vecteur donnant la liste des couleurs des arêtes incidentes au sommet s , dans l'ordre trigonométrique positif.

$$[\tau; \tau; \text{b}; \text{g}; \tau]$$



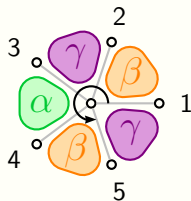
Le vecteur d'arête ne dépend que de la couleur du sommet.

Vecteurs de faces

Soit s un sommet du graphe Γ .

Un **vecteur de face** en s est un vecteur donnant la liste des couleurs des faces incidentes au sommet s , dans l'ordre trigonométrique positif.

$$[\beta; \gamma; \alpha; \beta; \gamma]$$



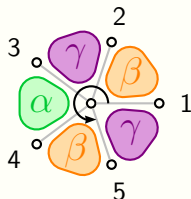
Le vecteur de face ne dépend que de la couleur du sommet.

Vecteurs de faces

Soit s un sommet du graphe Γ .

Un **vecteur de face** en s est un vecteur donnant la liste des couleurs des faces incidentes au sommet s , dans l'ordre trigonométrique positif.

$$[\beta; \gamma; \alpha; \beta; \gamma]$$



Le vecteur de face ne dépend que de la couleur du sommet.

Voisinages d'arêtes

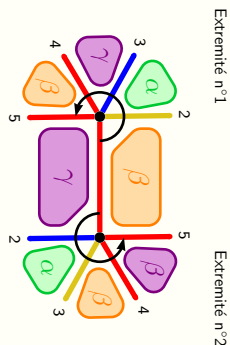
Soit e une arête du graphe Γ .

Un **voisinage d'arête** de e est un sous-graphe constitué de l'arête e et de toutes les arêtes incidentes à une des extrémités de e .

Extrémité n°1 : $[\tau, g, b, \tau, \tau]$, $[\beta, \alpha, \gamma, \beta, \gamma]$

Extrémité n°2 : $[\tau, b, g, \tau, \tau]$, $[\gamma, \alpha, \beta, \gamma, \beta]$

Le voisinage d'arête ne dépend que de la couleur de l'arête.



Voisinages d'arêtes

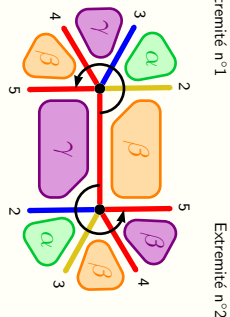
Soit e une arête du graphe Γ .

Un **voisinage d'arête** de e est un sous-graphe constitué de l'arête e et de toutes les arêtes incidentes à une des extrémités de e .

Extrémité n°1 : $[\mathbf{r}, \mathbf{g}, \mathbf{b}, \mathbf{r}, \mathbf{r}]$, $[\beta, \alpha, \gamma, \beta, \gamma]$

Extrémité n°2 : $[\mathbf{r}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{r}, \mathbf{r}]$, $[\gamma, \alpha, \beta, \gamma, \beta]$

Le voisinage d'arête ne dépend que de la couleur de l'arête.



Voisinages d'arêtes

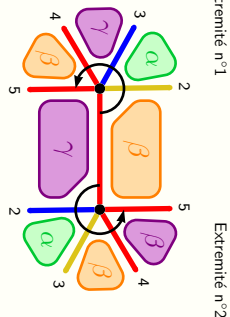
Soit e une arête du graphe Γ .

Un **voisinage d'arête** de e est un sous-graphe constitué de l'arête e et de toutes les arêtes incidentes à une des extrémités de e .

Extrémité n°1 : $[\tau, g, b, \tau, \tau]$, $[\beta, \alpha, \gamma, \beta, \gamma]$

Extrémité n°2 : $[\tau, b, g, \tau, \tau]$, $[\gamma, \alpha, \beta, \gamma, \beta]$

Le voisinage d'arête ne dépend que de la couleur de l'arête.



- 1 Graphes planaires localement finis
- 2 Invariants géométriques
- 3 Schémas d'étiquetage**
 - Définitions et Généralités
 - Bords des faces
 - Automate des bords
 - Vecteurs de type valides
 - Reconstruction du graphe
- 4 Applications

Qu'est-ce qu'un schéma d'étiquetage ?

Soit Γ un graphe planaire cofini localement fini.

Schéma d'étiquetage

Un schéma d'étiquetage correspond à la donnée de :

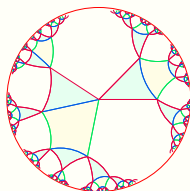
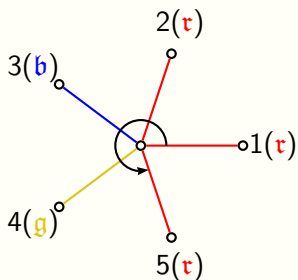
- un vecteur d'arête pour chaque couleur de sommet ;
- un vecteur de face pour chaque couleur de sommet ;
- un voisinage d'arête pour chaque couleur d'arête ;

... plus quelques conditions de cohérence.

Exemple de schéma d'étiquetage

Vecteurs d'arêtes/de faces :

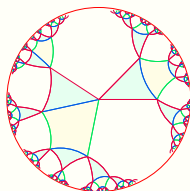
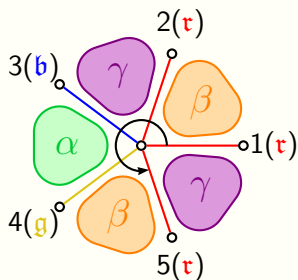
Voisins d'arêtes :



Exemple de schéma d'étiquetage

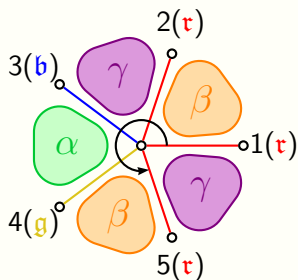
Vecteurs d'arêtes/de faces :

Voisinsages d'arêtes :

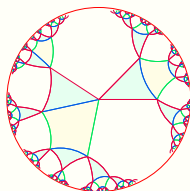
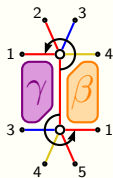


Exemple de schéma d'étiquetage

Vecteurs d'arêtes/de faces :

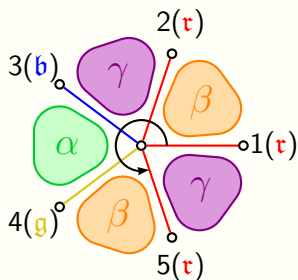


Voisinsages d'arêtes :

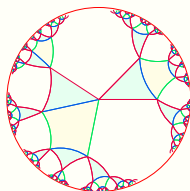
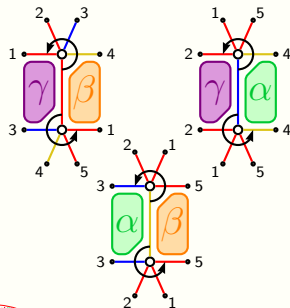


Exemple de schéma d'étiquetage

Vecteurs d'arêtes/de faces :



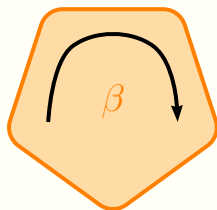
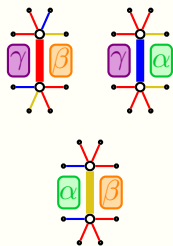
Voisinnages d'arêtes :



Reconstruire le bord d'une face

Considérons le schéma d'étiquetage de Γ .

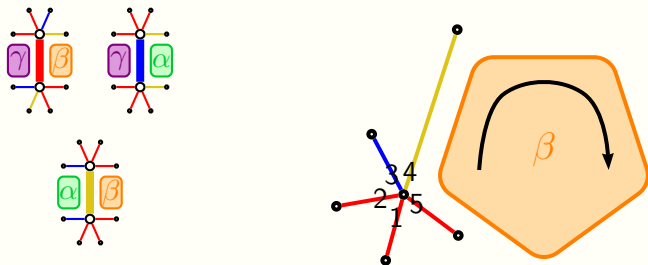
Il est alors possible de reconstruire le bord d'une face β :



Reconstruire le bord d'une face

Considérons le schéma d'étiquetage de Γ .

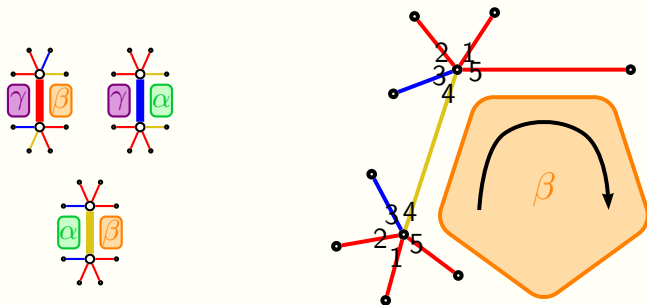
Il est alors possible de reconstruire le bord d'une face β :



Reconstruire le bord d'une face

Considérons le schéma d'étiquetage de Γ .

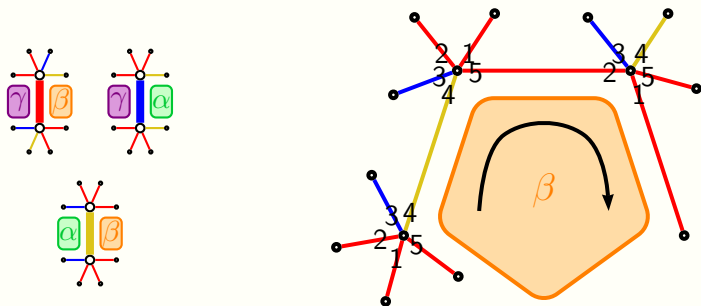
Il est alors possible de reconstruire le bord d'une face β :



Reconstruire le bord d'une face

Considérons le schéma d'étiquetage de Γ .

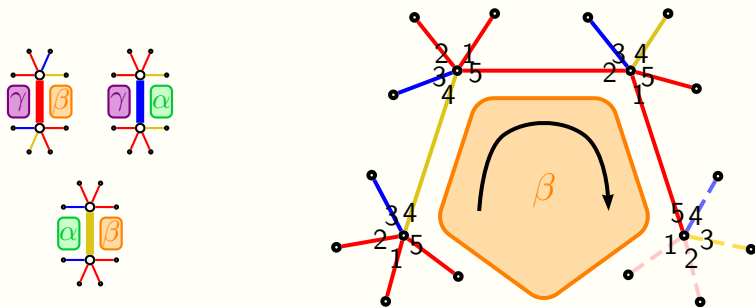
Il est alors possible de reconstruire le bord d'une face β :



Reconstruire le bord d'une face

Considérons le schéma d'étiquetage de Γ .

Il est alors possible de reconstruire le bord d'une face β :



Automate des bords

Idee : reconstruire les bords des faces à l'aide d'un automate.

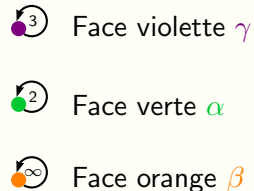
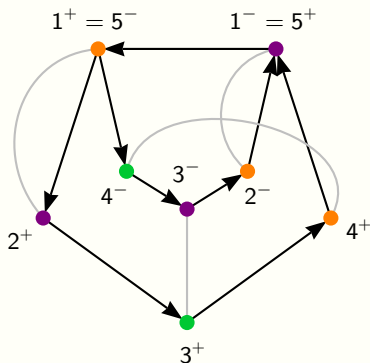
Une **configuration** consiste en la donnée d'une arête d'un vecteur de face, ainsi que d'une direction de rotation.

Deux opérations sont définies sur les configurations :

- **inv** : passer d'une extrémité d'une arête à une autre ;
- **next** : passer d'une arête à la suivante autour du sommet courant.

Suivre le bord d'une face consiste à appliquer successivement **next** et **inv**.

Exemple d'automate des bords



- Le bord d'une face correspond à un ensemble de configurations.
- L'automate est ainsi partitionné en ensembles de configurations appelés **orbites**.

- Une orbite est dite **périodique** lorsque le bord de la face correspondant est une succession périodique de configurations.
- Orbite périodique \longrightarrow face dont le bord est une répétition de la période.
- Orbite apériodique \longrightarrow face infinie.
- Ensemble de **vecteurs de type valides** :
 - un vecteur de type pour chaque couleur de sommet,
 - chaque taille de face finie est un multiple d'une orbite de l'automate.

Lemme – Construction de l'automate

Étant donné un schéma d'étiquetage, il est toujours possible de construire l'automate des bords associé et de calculer l'ensemble des vecteurs de types valides.

Reconstruction du graphe (1)

Problème : étant donné un schéma d'étiquetage et un vecteur de type valide, comment reconstruire le graphe associé ?

Solution dans le cas sommet-transitif :

Reconstruction des graphes sommet-transitifs

Il est toujours possible de reconstruire le graphe dans une des trois géométries du plan de manière à ce que les faces soient des polygones réguliers.

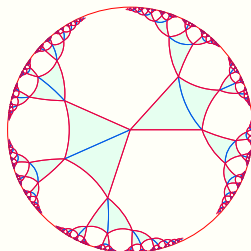
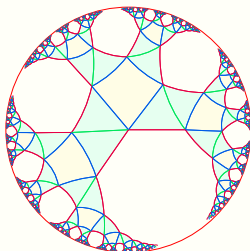
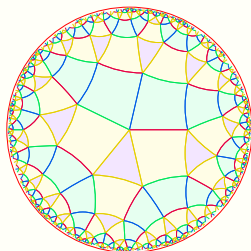
Conséquences

Γ est un graphe planaire localement fini sommet-transitif.

Lemme – Connexité

Si n est le nombre de faces infinies dans le vecteur de type de Γ , alors :

- $n = 0 \Leftrightarrow \Gamma$ est 3-connexe ;
- $n = 1 \Leftrightarrow \Gamma$ est 2-séparable et 2-connexe ;
- $n \geq 2 \Leftrightarrow \Gamma$ est 1-séparable.



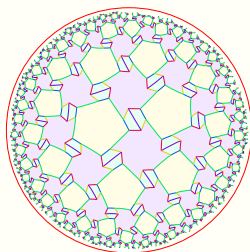
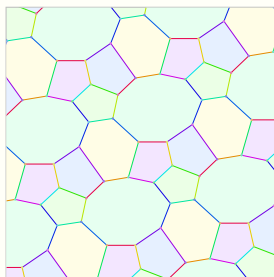
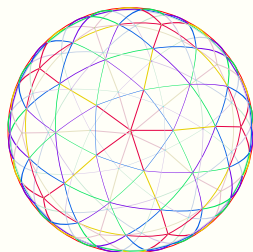
Reconstruction du graphe (2)

Pour les graphes cofinis, il n'y a pas de construction directe :

Reconstruction des graphes cofinis

Il est possible de reconstruire toute boule finie du graphe.

Problème du calcul d'un plongement effectif :



Applications

- Caractérisation des graphes planaires cofinis localement finis.
⇒ énumération effective selon le degré.

Degré	S.T.	Cayley
1	n.s.	n.s.
2	1	1
3	16	8
4	52	24
5	174	52
6	775	185

- Lorsque le graphe est sommet-transitif, il est possible de décider s'il est de Cayley et de calculer les présentations possibles.
- Recherche de plongements vérifiant des propriétés géométriques :
⇒ tels que les automorphismes soient des isométries.

Perspectives

⇒ Graphes cofinis

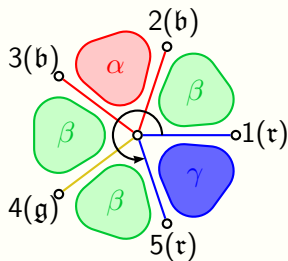
- Caractériser la connexité des graphes cofinis selon leur schéma.
- Obtenir des plongements géodésiques des graphes cofinis.

⇒ Graphes de Cayley

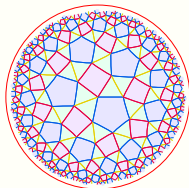
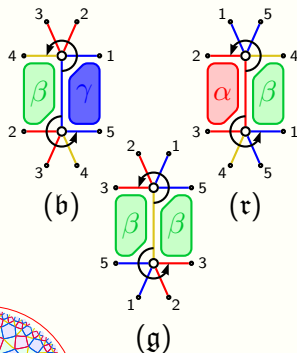
- Caractériser les groupes d'automorphismes associés.
- Appliquer des méthodes géométriques à des problèmes combinatoires.
- Étendre les résultats sur les graphes localement finis aux graphes planaires généraux.

Exemple de schéma d'étiquetage (2)

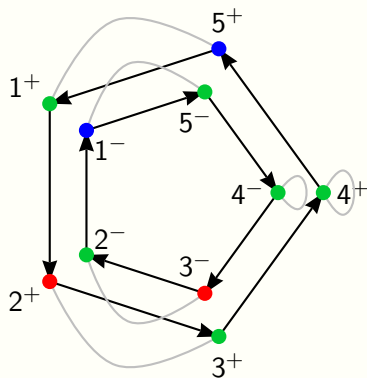
Vecteurs d'arêtes/de faces :




Voisinages d'arêtes :



Exemple d'automates des bords (2)



 Face rouge α

 Face verte β

 Face bleue γ

