

## Dépendances Fonctionnelles

Sens des DF  
Clés et Clés minimales  
Comment déduire des DF  
Clôtures  
Couverture minimale  
DF induites  
Représentation des DF

1

## Dépendances Fonctionnelles

- ◆  $X \rightarrow A$  propriété d'une relation  $R$  si 2 u-uplet sont égaux sur les attributs  $X$  alors ils sont égaux sur l'attribut  $A$ .
  - ▶ Quand c'est le cas, on dit que  $R$  satisfait la DF " $X \rightarrow A$ "
  - ▶ **Convention:** ...,  $X, Y, Z$  ensembles d'attributs;  $A, B, C, \dots$  attributs.
  - ▶ **Convention:** On écrit  $ABC$ , plutôt que  $\{A, B, C\}$ .

2

## Exemple

Drinkers(name, addr, beersLiked, manf, favBeer)

- ◆ FD naturelles pour ce schéma:
  1. name  $\rightarrow$  addr
  2. name  $\rightarrow$  favBeer
  3. beersLiked  $\rightarrow$  manf

3

## Exemple

name	addr	beersLiked	manf	favBeer
Janeway	Voyager	Bud	A.B.	WickedAle
Janeway	Voyager	WickedAle	Pete's	WickedAle
Spock	Enterprise	Bud	A.B.	Bud

Parce que name  $\rightarrow$  addr

Parce que name  $\rightarrow$  favBeer

Parce que beersLiked  $\rightarrow$  manf

4

## DF à plusieurs attributs

- ◆ Plus d'un attribut à droite: pratique mais pas indispensable
  - ▶ Pratique comme raccourci pour plusieurs DF
  - ▶ Exemple:
    - name  $\rightarrow$  addr
    - name  $\rightarrow$  favBeer
 deviennent
    - name  $\rightarrow$  addr favBeer
- ◆ Plus d'un attribut à gauche: essentiel.
  - ▶ Exemple: bar beer  $\rightarrow$  price

5

## Clés d'une Relation

- ◆  $K$  est une **clé** de  $R$  ssi pour tout attribut  $A$  de  $R$  on a la DF  $K \rightarrow A$
- ◆  $K$  est une **clé minimale** de  $R$  ssi
  - ▶  $K$  une clé,
  - ▶ et aucun sous ensemble strict de  $K$  n'est une clé de  $R$

6

## Exemple

Drinkers(name, addr, beersLiked, manf, favBeer)

- ◆  $\{name, beersLiked\}$  est une clé: ces 2 attributs déterminent tous les autres.
  - ▶ name  $\rightarrow$  addr favBeer
  - ▶ beersLiked  $\rightarrow$  manf

7

## Exemple, suite

- ◆  $\{name, beersLiked\}$  est une **clé minimale**: ni  $\{name\}$  ni  $\{beersLiked\}$  n'est une clé
  - ▶ name ne détermine pas manf;
  - ▶ beersLiked ne détermine pas addr.
- ◆ Il n'y a pas d'autre clé minimale, mais il y a beaucoup d'autres clés
  - ▶ Tout ensemble d'attributs contenant  $\{name, beersLiked\}$ .

8

## Clés des schémas E/R et clés des relations

- ◆ Les clés des schémas E/R portent sur les **entités**.
- ◆ Les clés des relations portent sur les **n-uplets**.
- ◆ En principe, une entité = un n-uplet.
- ◆ MAIS --- si le schéma relationnel est mal conçu une entité correspond à plusieurs n-uplets, donc en principe les 2 notions de clés diffèrent.

9

## Exemple

name	addr	beersLiked	manf	favBeer
Janeway	Voyager	Bud	A.B.	WickedAle
Janeway	Voyager	WickedAle	Pete's	WickedAle
Spock	Enterprise	Bud	A.B.	Bud

Clé relationnelle = {name beersLiked}  
 Mais dans le schéma E/R,  
 name est une clé pour Drinkers,  
 et beersLiked est une clé pour Beers.  
 Remarque: 2 n-uplets pour l'entité Janeway  
 2 n-uplets pour l'entité Bud.

10

## D'où viennent les clés?

1. On peut poser que  $K$  est une clé.
  - ▶ Les seules DF sont  $K \rightarrow A$  pour tous les attributs  $A$ .
2. On peut poser des DF et en déduire les clés.
  - ▶ Le modèle E/R nous donne des DF à partir des entités et des relations n-1.

11

## L'analyse du problème donne des DF de bon sens

- ◆ Exemple: "jamais deux cours à la même heure dans la même salle"  
 heure salle  $\rightarrow$  cours.

12

## Déduire des DF

- ◆ On se donne  $F$  un ensemble de DF:  $X_1 \rightarrow A_1, X_2 \rightarrow A_2, \dots, X_n \rightarrow A_n$ , et on se demande si la DF  $Y \rightarrow B$  en est conséquence sémantique de  $F$ : c'est-à-dire  $Y \rightarrow B$  est satisfaite dans tout modèle satisfaisant  $F$ .
- ◆ Exemple: Si  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$  sont vraies, sans doute que  $A \rightarrow C$  aussi, même si on ne le dit pas.
- ◆ Important pour la conception de schémas relationnels.

13

## Test de la conséquence

- ◆ Pour voir si  $Y \rightarrow B$ , on suppose que deux n-uplets sont égaux sur  $Y$  et on se demande s'ils sont égaux sur  $B$

$\leftarrow Y \rightarrow$   
 0000000. . . 0  
 00000?? . . . ?

14

## Test de la conséquence- (2)

- ◆ Utiliser les DF données pour en déduire que les n-uplets sont égaux sur d'autres attributs
  - ▶ Si  $B$  est l'un des attributs pour lesquels il y a égalité alors  $Y \rightarrow B$  est conséquence.
  - ▶ Sinon les 2 n-uplets avec les égalités induites par les dépendances forment un exemple de table pour  $R$  qui satisfait les DF de départ et pas  $Y \rightarrow B$  qui n'est pas conséquence

15

## Test de la conséquence - (3)

- ◆ DF données  $C \rightarrow B$   $AB \rightarrow D$
- ◆  $AC \rightarrow D$  ?
- ◆  $AB \rightarrow C$  ?

A	B	C	D	E
a'	b'	c'	d'	e'
a''	b''	c''	d''	e''

16

## Axiomes d'Armstrong

- ◆ **Théorème** Une DF  $X \rightarrow Y$  est conséquence d'un ensemble de DF  $F$  ssi elle s'obtient à partir
  - ▶ de  $F$
  - ▶ des axiomes  $X \rightarrow X'$  avec  $X'$  inclus dans  $X$  (réflexivité)
 par les règles suivantes
  - ▶ si  $Z \rightarrow Z'$  alors  $ZW \rightarrow Z'W$  (augmentation)
  - ▶ si  $X \rightarrow Y$  et  $Y \rightarrow Z$  alors  $X \rightarrow Z$  (transitivité)
- ◆ Ces principes sont appelés axiomes d'Armstrong.

17

## Quelques conséquences des axiomes d'Armstrong

1. Si  $X \rightarrow Y$  et  $X \rightarrow Z$  alors  $X \rightarrow YZ$
2. Si  $X \rightarrow Y$  et  $WY \rightarrow Z$  alors  $WX \rightarrow Z$
3. Si  $X \rightarrow Y$  et  $Z$  inclus dans  $Y$  alors  $X \rightarrow Z$

18

## Validité des axiomes d'Armstrong

- ◆ Si une DF  $f$  s'obtient à partir de  $F$  par les axiomes d'Armstrong, alors elle est conséquence sémantique de  $F$  (tout modèle satisfaisant  $F$  satisfait  $f$ )

19

## Validité des axiomes d'Armstrong -- 2

- ◆ Par induction sur le nombre de règles utilisées:
  - Zéro règle:
    - ◆ DF de  $F$
    - ◆ Axiome de Réflexivité
  - On suppose ok pour  $\leq n$  règles, on vérifie pour  $n+1$  règles,
  - La dernière étant:
    - ◆ Augmentation
    - ◆ Transitivité

20

## Complétude des axiomes d'Armstrong

- ◆ Si une DF  $f X \rightarrow Y$  est conséquence sémantique de  $F$  alors  $f$  se déduit de  $F$  par les axiomes d'Armstrong.
- ◆ Supposons que  $X \rightarrow Y$  soit conséquence sémantique de  $F$  et pas dérivable.

21

## Complétude des axiomes d'Armstrong 1/3

- ◆ Appelons  $X^+$  les attributs  $U$  tels que la dépendance  $X \rightarrow U$  est conséquence de  $F$  par les axiomes d'Armstrong
- ◆ Evidemment  $X^+$  contient  $X$  (réflexivité)
- ◆ Considérons  $r$

$X^+$								
1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

22

## Complétude des axiomes d'Armstrong 2/3

- ◆  $r$  satisfait toute DF  $V \rightarrow W$  de  $F$  sinon
  - $V$  inclus dans  $X^+$  -- et donc  $X \rightarrow V$
  - $W$  contient  $A$  qui n'est pas dans  $X^+$  mais alors  $X \rightarrow A$  est conséquence de  $F$  par les axiomes d'Armstrong, ( $X \rightarrow V, V \rightarrow W, W \rightarrow A$  donc  $X \rightarrow A$ ) et donc  $A$  dans  $X^+$ , contradiction

23

## Complétude des axiomes d'Armstrong 3/3

- ◆ Si  $X \rightarrow Y$  est conséquence sémantique de  $F$  comme  $r$  satisfait toute DF de  $F$   $Y$  doit être inclus dans  $X^+$  (sinon les  $n$ -uplets diffèreraient sur  $Y$ ) et donc pour chaque attribut  $A$  de  $Y$   $A$  est dans  $X^+$  c'est-à-dire  $X \rightarrow A$  est conséquence par les axiomes d'Armstrong à partir de  $F$  et donc  $X \rightarrow Y$  aussi (conséquence n°1 des axiomes)

24

## Clôture d'un ensemble d'attributs

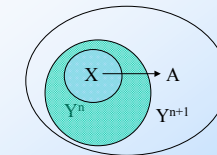
- ◆ Etant donné un ensemble  $F$  de DF et  $X$  est un ensemble d'attributs, on note  $X^+$  l'ensemble des attributs  $A$  tels que  $X \rightarrow A$  est conséquence de  $F$
- ◆ Conséquence sémantique ou conséquence dérivable des axiomes d'Armstrong: d'après la complétude les 2 notions coïncident

25

## Calcul de la clôture

- ◆ **Initialisation:**  $Y^0 = Y$ .
- ◆ **Induction:**  $Y^{n+1} = Y^n \cup \{A \mid Z \rightarrow A \text{ et } Z \text{ inclus dans } Y^n\}$
- ◆ **Arrêt:** stabilité  $Y^n = Y^{n+1}$

26



27



## Idée simple

1. Trouver toutes les DF *non triviales* conséquences de F.
  - ▶ Non triviales = pas d'attribut commun entre la gauche et la droite.
2. Se restreindre aux DF qui ne concernent que des attributs d'une même relation

37

## Algorithme simple mais exponentiel

1. Pour chaque ensemble d'attribut X, on calcule  $X^+$ .
2. Ajouter  $X \rightarrow A$  pour tout A dans  $X^+ - X$ .
3. Laisser de côté  $XY \rightarrow A$  si on découvre  $X \rightarrow A$ .
  - ◆ En effet  $XY \rightarrow A$  découle de  $X \rightarrow A$  quelle que soit la manière dont on projette.
4. Finalement, ne conserver que les DF qui ne concernent que les attributs d'une même projection

38

## Algorithme simple mais exponentiel (variante)

1. Calculer toutes les conséquences de F par les axiomes d'Armstrong
2. Ne conserver que les dépendances qui ne concernent que les attributs d'une même projection

39

## Quelques trucs

- ◆ Il est inutile de calculer la clôture de
  - ▶ Tous les attributs
  - ▶ L'ensemble vide.
- ◆ Si  $X^+ =$  tous les attributs, il en va de même de tout  $X'$  contenant X.

40

## Exemple

- ◆ ABC avec les DF  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$ . Projeter sur AC.
  - ▶  $A^+ = ABC$  ; donne  $A \rightarrow B, A \rightarrow C$ .
    - Inutile de calculer  $AB^+$  ou  $AC^+$ .
  - ▶  $B^+ = BC$  ; donne  $B \rightarrow C$ .
  - ▶  $C^+ = C$  ; ne donne rien.
  - ▶  $BC^+ = BC$  ; ne donne rien.

41

## Exemple --- suite

- ◆ DF obtenues:  
 $A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C$ .
- ◆ Projection sur AC :  $A \rightarrow C$ .
  - ▶ Seule DF concernant  $\{A, C\}$ .

42

## DF induites -- algo malin

- ◆ R ensemble F de DF
- ◆ R décomposé en  $R_1, \dots, R_k$
- ◆ On pose  $G_i = Cl(F)|_{R_i}$
- ◆ Est-ce que  $Cl(\cup G_i) = Cl(F)$  ?  
Est-ce qu'après la décomposition on retrouve les mêmes DF?

43

## DF induites -- algo malin

- ◆ Pour vérifier que  $X \rightarrow Y$  de F sera préservé
- ◆ INIT  $Z := X$
- ◆ Tant que Z change:
  - ▶ Pour chaque  $R_i$  faire
  - ▶  $Z := Z \cup ((Z \cap R_i)^+ \cap R_i)$   
(\*: clôture par rapport à F)
- ◆ A la fin Z vaut  $X^+$  par rapport à  $G_1 \cup \dots \cup G_k$
- ◆ Si Y dans Z, alors  $X \rightarrow Y$  préservée.

44

## DF induites -- exemple

- ◆  $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A\}$
- ◆ Décomposition AB, BC, CD
- ◆  $D \rightarrow A$  préservée?
- ◆ Calcul de  $D^+$  par rapport à  $Cl(F)|_{AB} \cup Cl(F)|_{BC} \cup Cl(F)|_{CD}$

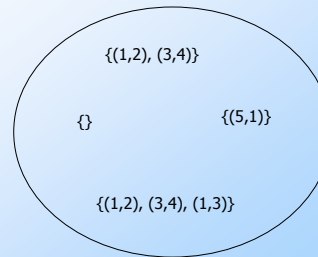
45

## Vue géométrique des DF

- ◆ Ensemble des *instances* d'une relation.
- ◆ Tous les ensemble finis de n-uplets.
- ◆ Chaque instance est un point.

46

## Exemple: R(A,B)



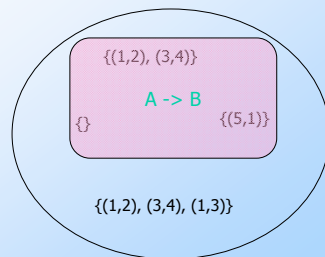
47

## Une DF est un sous-ensemble de cet espace

- ◆ Pour chaque DF  $X \rightarrow A$  on considère l'ensemble des instances qui la satisfait;
- ◆ DF = région de l'espace.
- ◆ DF triviale = l'espace entier.
  - ▶ Exemple:  $A \rightarrow A$ .

48

## Exemple: $A \rightarrow B$ pour R(A,B)



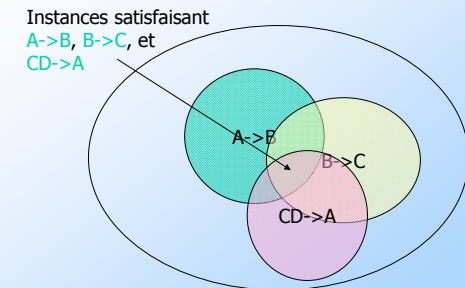
49

## Ensembles de DF

- ◆ Si chaque DF est un ensemble d'instances,
- ◆ Un ensemble de DF est l'intersection de ces ensembles:
  - ▶ Intersection = toutes les instances qui satisfont toutes les DF de l'ensemble.

50

## Exemple



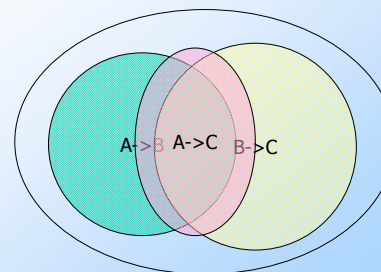
51

## Implication entre DF

- ◆ Si une DF  $Y \rightarrow B$  découle de  $X_1 \rightarrow A_1, \dots, X_n \rightarrow A_n$ , alors la région correspondant à  $Y \rightarrow B$  inclut l'intersection des régions correspondant aux  $X_i \rightarrow A_i$ .
  - ▶ Toute instance satisfaisant toutes les DFs  $X_j \rightarrow A_j$  satisfait  $Y \rightarrow B$ .
  - ▶ Par contre une instance peut satisfaire  $Y \rightarrow B$ , sans être dans l'intersection.

52

## Exemple



53