

## Dépendances Fonctionnelles

- Sens des DF
- Clés et Clés minimales
- Comment déduire des DF
- Clôtures
- Couverture minimale
- DF induites
- Représentation des DF

1

## Dépendances Fonctionnelles

- ◆  $X \rightarrow A$  propriété d'une relation  $R$  si 2 u-uplet sont égaux sur les attributs  $X$  alors ils sont égaux sur l'attribut  $A$ .
  - ▶ Quand c'est le cas, on dit que  $R$  satisfait la DF " $X \rightarrow A$ "
  - ▶ **Convention:** ...,  $X, Y, Z$  ensembles d'attributs;  $A, B, C, \dots$  attributs.
  - ▶ **Convention:** On écrit  $ABC$ , plutôt que  $\{A, B, C\}$ .

2

## Exemple

Drinkers(name, addr, beersLiked, manf, favBeer)

- ◆ FD naturelles pour ce schéma:
  1.  $name \rightarrow addr$
  - ▶  $name \rightarrow favBeer$
  - ▶  $beersLiked \rightarrow manf$

3

## Exemple

name	addr	beersLiked	manf	favBeer
Janeway	Voyager	Bud	A.B.	Wicke
Janeway	Voyager	Wickedale	Pete's	Wicke
Spock	Enterprise	Bud	Bud	A.B.

Parce que  $name \rightarrow addr$

Parce que  $name \rightarrow favBeer$

Parce que  $beersLiked \rightarrow manf$

4

## DF à plusieurs attributs

- ◆ Plus d'un attribut à droite: pratique mais pas indispensable
  - ▶ Pratique comme raccourci pour plusieurs DF
  - ▶ Exemple:
    - $name \rightarrow addr$
    - $name \rightarrow favBeer$
 deviennent
    - $name \rightarrow addr\ favBeer$
- ◆ Plus d'un attribut à gauche: essentiel.
  - ▶ Exemple:  $bar\ beer \rightarrow price$

5

## Clés d'une Relation

- ◆  $K$  est une **clé** de  $R$  ssi pour tout attribut  $A$  de  $R$  on a la DF  $K \rightarrow A$
- ◆  $K$  est une **clé minimale** de  $R$  ssi
  - ▶  $K$  une clé,
  - ▶ et aucun sous ensemble strict de  $K$  n'est une clé de  $R$

6

## Exemple

Drinkers(name, addr, beersLiked, manf, favBeer)

- ◆ {name, beersLiked} est une clé:  
ces 2 attributs déterminent tous les autres.
  - ▶ name -> addr favBeer
  - ▶ beersLiked -> manf

7

## Exemple, suite

- ◆ {name, beersLiked} est une clé minimale:  
ni {name}  
ni {beersLiked} n'est une clé
  - ▶ name ne détermine pas manf;  
beersLiked ne détermine pas addr.
- ◆ Il n'y a pas d'autre clé minimale,  
mais il y a beaucoup d'autres clés
  - ▶ Tout ensemble d'attributs contenant {name, beersLiked}.

8

## Clés des schémas E/R et clés des relations

- ◆ Les clés des schémas E/R portent sur les entités.
- ◆ Les clés des relations portent sur les n-uplets.
- ◆ En principe, une entité = un n-uplet.
- ◆ MAIS --- si le schéma relationnel est mal conçu  
une entité correspond à plusieurs n-uplets,  
donc en principe les 2 notions de clés diffèrent.

9

## Exemple

name	addr	beersLiked	manf	favBeer
Janeway	Voyager	Bud	A.B.	WickedAle
Janeway	Voyager	WickedAle	Pete's	WickedAle
Spock	Enterprise	Bud	A.B.	Bud

Clé relationnelle = {name beersLiked}  
Mais dans le schéma E/R,  
name est une clé pour Drinkers,  
et beersLiked est une clé pour Beers.  
Remarque: 2 n-uplets pour l'entité Janeway  
2 n-uplets pour l'entité Bud.

10

## D'où viennent les clés?

- ☞ On peut poser que  $K$  est une clé.
  - ▶ Les seules DF sont  $K \rightarrow A$   
pour tous les attributs  $A$ .
- ☞ On peut poser des DF  
et en déduire les clés.
  - ▶ Le modèle E/R nous donne des DF  
à partir des entités et des relations n-1.

11

## L'analyse du problème donne des DF de bon sens

- ◆ Exemple:  
"jamais deux cours à la même heure  
dans la même salle"  
heure salle -> cours.

12

## Déduire des DF

- ◆ On se donne F un ensemble de DF:  
 $X_1 \rightarrow A_1, X_2 \rightarrow A_2, \dots, X_n \rightarrow A_n$ ,  
 et on se demande si la DF  $Y \rightarrow B$   
 en est conséquence sémantique de F:  
 c'est-à-dire  $Y \rightarrow B$  est satisfaite dans tout  
 modèle satisfaisant F.
- ◆ Exemple: Si  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$  sont vraies,  
 sans doute que  $A \rightarrow C$  aussi,  
 même si on ne le dit pas.
- ◆ Important  
 pour la conception de schémas relationnels.

13

## Test de la conséquence (1/2)

- ◆ (On peut aussi le faire pour plusieurs DF mais il faut énumérer  
 les égalités différentes possibles)
- ◆ Pour voir si  $Y \rightarrow B$ ,  
 découle d'un ens. F de DF on suppose que  
 deux n-uplets sont égaux sur Y et on se  
 demande s'ils sont égaux sur B

←  $\overline{Y}$  →  
 0000000. . . 0  
 00000?? . . . ?

14

## Test de la conséquence (1/2)

- ◆ Utiliser les DF données pour en déduire  
 que les n-uplets sont égaux sur  
 d'autres attributs
  - ▶ Si B est l'un des attributs pour lesquels il y  
 a égalité alors  $Y \rightarrow B$  est conséquence.
  - ▶ Sinon les 2 n-uplets avec les égalités  
 induites par les dépendances forment un  
 exemple de table pour R qui satisfait les Df  
 de départ et pas  $Y \rightarrow B$  qui n'est pas  
 conséquence

15

## Test de la conséquence - (3)

- ◆ DF données  $C \rightarrow B$   $AB \rightarrow D$
- ◆  $AC \rightarrow D$  ?
- ◆  $AB \rightarrow C$  ?

A	B	C	D	E
a'	b'	c'	d'	e'
a''	b''	c''	d''	e''

16

## Axiomes d'Armstrong

- ◆ **Théorème** Une DF  $X \rightarrow Y$  est conséquence d'un  
 ensemble de DF F ssi elle s'obtient  
 à partir
  - ▶ de F
  - ▶ des axiomes  $X \rightarrow X'$  avec X' inclus dans X  
 (réflexivité)
 par les règles suivantes
  - ▶ si  $Z \rightarrow Z'$  alors  $ZW \rightarrow Z'W$   
 (augmentation)
  - ▶ si  $X \rightarrow Y$  et  $Y \rightarrow Z$  alors  $X \rightarrow Z$   
 (transitivité)
- ◆ Ces principes sont appelés axiomes d'Armstrong.

17

## Quelques conséquences des axiomes d'Armstrong

1. Si  $X \rightarrow Y$  et  $X \rightarrow Z$  alors  $X \rightarrow YZ$
2. Si  $X \rightarrow Y$  et  $WY \rightarrow Z$  alors  $WX \rightarrow Z$
3. Si  $X \rightarrow Y$  et Z inclus dans Y alors  $X \rightarrow Z$

18

## Validité des axiomes d'Armstrong (1/2)

- ◆ Si une DF  $f$  s'obtient à partir de  $F$  par les axiomes d'Armstrong, alors elle est conséquence sémantique de  $F$  (tout modèle satisfaisant  $F$  satisfait  $f$ )
- ◆ Par induction sur le nombre de règles utilisées:

19

## Validité des axiomes d'Armstrong (2/2)

- ◆ Zéro règle:
  - ▶ DF de  $F$
  - ▶ Axiome de Réflexivité
- ◆ On suppose ok pour  $\leq n$  règles, on vérifie pour  $n+1$  règles, La dernière étant:
  - ▶ Augmentation
  - ▶ Transitivité

20

## Complétude des axiomes d'Armstrong (1/4)

- ◆ Si une DF  $X \rightarrow Y$  est conséquence sémantique de  $F$  alors  $f$  se déduit de  $F$  par les axiomes d'Armstrong.
- ◆ Supposons que  $X \rightarrow Y$  soit conséquence sémantique de  $F$  et pas dérivable par les axiomes d'Armstrong.

21

## Complétude des axiomes d'Armstrong (2/4)

- ◆ Appelons  $X^+$  les attributs  $U$  tels que la dépendance  $X \rightarrow U$  est conséquence de  $F$  par les axiomes d'Armstrong
- ◆ Evidemment  $X^+$  contient  $X$  (réflexivité)
- ◆ Considérons  $r$

$X^+$								
1	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1

22

## Complétude des axiomes d'Armstrong (3/4)

- ◆  $r$  satisfait toute DF  $V \rightarrow W$  de  $F$   
*sinon*  
 $V$  inclus dans  $X^+$  -- et donc  $X \rightarrow V$   
 $W$  contient  $A$  qui n'est pas dans  $X^+$   
 mais alors  $X \rightarrow A$  est conséquence de  $F$   
 par les axiomes d'Armstrong,  
 $(X \rightarrow V, V \rightarrow W, W \rightarrow A$  donc  $X \rightarrow A)$   
 et donc  $A$  dans  $X^+$ , contradiction

23

## Complétude des axiomes d'Armstrong (4/4)

- ◆ Si  $X \rightarrow Y$  est conséquence sémantique de  $F$  comme  $r$  satisfait toute DF de  $F$   $Y$  doit être inclus dans  $X^+$  (sinon les  $n$ -uplets diffèreraient sur  $Y$ ) et donc pour chaque attribut  $A$  de  $Y$   $A$  est dans  $X^+$  c'est-à-dire  $X \rightarrow A$  est conséquence par les axiomes d'Armstrong à partir de  $F$  et donc  $X \rightarrow Y$  aussi (conséquence n°1 des axiomes)

24

## Clôture d'un ensemble d'attributs

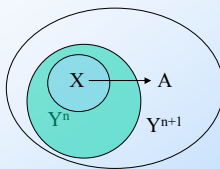
- ◆ Etant donné un ensemble  $F$  de DF et  $X$  est un ensemble d'attributs, on note  $X^+$  l'ensemble des attributs  $A$  tels que  $X \rightarrow A$  est conséquence de  $F$
- ◆ Conséquence sémantique ou conséquence dérivable des axiomes d'Armstrong: d'après la complétude les 2 notions coïncident

25

## Calcul de la clôture

- ◆ **Initialisation:**  $Y^0 = Y$ .
- ◆ **Induction:**  
 $Y^{n+1} = Y^n \cup \{A \mid Z \rightarrow A \text{ et } Z \text{ inclus dans } Y^n\}$
- ◆ **Arrêt:** stabilité  $Y^n = Y^{n+1}$

26



27

## Correction de l'algo de calcul de la clôture

- ◆ **Arrêt:** suite croissante
- ◆ Par induction sur  $n$ :  
si  $A$  dans  $Y^n$  alors  $A$  dans  $Y^+$

28

## Correction de l'algo de calcul de la clôture

- ◆ Si  $A$  dans  $Y^+$  alors  $A$  dans  $Y^i = Y^{i+1}$

$Y^i = Y^{i+1}$									
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

- ◆ Satisfait  $F$   
(sinon  $U \rightarrow V$  avec  $U$  dans  $Y^i$  et  $V$  dans  $Y^{i+1}$  et  $V$  sort de  $Y^i = Y^{i+1}$ )
- ◆ Donc satisfait  $Y \rightarrow A$  (conséquence sém. de  $F$ )
- ◆ Donc  $A$  est dans  $Y^i$  (sinon  $Y \rightarrow A$  faux)

29

## Exemple

- ◆  $AB \rightarrow C$
- ◆  $C \rightarrow A$
- ◆  $BC \rightarrow D$
- ◆  $ACD \rightarrow B$
- ◆  $D \rightarrow EG$
- ◆  $BE \rightarrow C$
- ◆  $CG \rightarrow BD$
- ◆  $CE \rightarrow AG$
- ◆ **Clôture de  $BD$ ?**

30

## Ensembles de DF Équivalents

- ◆ F ensemble de FD  
 $Cl(F) = \{f \mid f \text{ conséquence de } F\}$   
(sémantique ou syntaxique, on a vu que c'est équivalent)
- ◆ Deux ensembles F et G de DF sont dits équivalents si  $Cl(F) = Cl(G)$

31

## Couverture minimale

- ◆ F ensemble de DF
- ◆ G couverture minimale ssi
  - ▶  $Cl(G) = Cl(F)$
  - ▶ Dans G, toute DF a un seul attribut à droite
  - ▶ Aucune DF f de G ne peut être retirée  $Cl(G-f) \neq Cl(G)$
  - ▶ Pour toute DF  $f = X \rightarrow A$  de G, pour tout Z strictement inclus dans X,  $Cl((G-f) \cup (Z \rightarrow A)) \neq Cl(G) = Cl(F)$

32

## Existence et calcul d'une couverture minimale

1. Décomposer chaque DF pour avoir un seul attribut à droite
2. Supprimer les attributs en surnombre à gauche
3. Supprimer les DF redondantes
4. Cela suffit. (On peut inverser les étapes 2 et 3 mais il faut alors itérer).

33

## Exemple

- ◆  $AB \rightarrow C$
- ◆  $C \rightarrow A$
- ◆  $BC \rightarrow D$
- ◆  $ACD \rightarrow B$
- ◆  $D \rightarrow EG$
- ◆  $BE \rightarrow C$
- ◆  $CG \rightarrow BD$
- ◆  $CE \rightarrow AG$
- ◆ **Couverture minimale?**

34

## Exemple

- ◆  $AB \rightarrow C$
- ◆  $C \rightarrow A$
- ◆  $BC \rightarrow D$
- ◆  $CD \rightarrow B$
- ◆  $D \rightarrow EG$
- ◆  $BE \rightarrow C$
- ◆  $CG \rightarrow B$
- ◆  $CG \rightarrow D$
- ◆  $CE \rightarrow A$
- ◆  $CE \rightarrow G$
- ◆ **Couverture minimale?**

35

## Exemple

- ◆  $AB \rightarrow C$
- ◆  $C \rightarrow A$
- ◆  $BC \rightarrow D$
- ◆  $D \rightarrow EG$
- ◆  $BE \rightarrow C$
- ◆  $CG \rightarrow B$
- ◆  $CG \rightarrow D$
- ◆  $CE \rightarrow A$
- ◆  $CE \rightarrow G$
- ◆ **Couverture minimale?**

36

## Exemple

- ◆  $AB \rightarrow C$
- ◆  $C \rightarrow A$
- ◆  $BC \rightarrow D$
- ◆  $D \rightarrow EG$
- ◆  $BE \rightarrow C$
- ◆  $CG \rightarrow B$
- ◆  $CE \rightarrow A$
- ◆  $CE \rightarrow G$
- ◆ **Couverture minimale?**

37

## Exemple

- ◆  $AB \rightarrow C$
- ◆  $C \rightarrow A$
- ◆  $BC \rightarrow D$
- ◆  $D \rightarrow EG$
- ◆  $BE \rightarrow C$
- ◆  $CG \rightarrow B$
- ◆  $CE \rightarrow G$
- ◆ **Couverture minimale?**

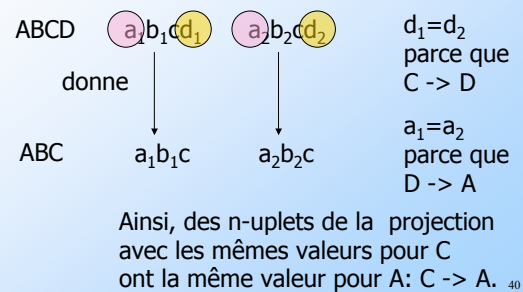
38

## Comment trouver les DF induites

- ◆ **Motivation:** "normalisation," qui décompose les schémas
- ◆ **Exemple:**  $ABCD$  avec les DFs  $AB \rightarrow C$ ,  $C \rightarrow D$ , and  $D \rightarrow A$ .
  - ▶ Décomposition en  $ABC$ ,  $AD$ . Quelles DF sur  $ABC$ ?
  - ▶ Non seulement  $AB \rightarrow C$ , mais aussi  $C \rightarrow A$  !

39

## Pourquoi?



## Idée simple

- 👉 Trouver toutes les DF *non triviales* conséquences de F.
  - ▶ Non triviales = pas d'attribut commun entre la gauche et la droite.
- 👉 Se restreindre aux DF qui ne concernent que des attributs d'une même relation

41

## Algorithme simple mais exponentiel

- Pour chaque ensemble d'attribut  $X$ , on calcule  $X^+$ .
- Ajouter  $X \rightarrow A$  pour tout  $A$  dans  $X^+ - X$ .
- Laisser de côté  $XY \rightarrow A$  si on découvre  $X \rightarrow A$ .
  - En effet  $XY \rightarrow A$  découle de  $X \rightarrow A$  quelle que soit la manière dont on projette.
- Finalement, ne conserver que les DF qui ne concernent que les attributs d'une même projection

42

## Algorithme simple mais exponentiel (variante)

- ✎ Calculer toutes les conséquences de F par les axiomes d'Armstrong
- ✎ Ne conserver que les dépendances qui ne concernent que les attributs d'une même projection

43

## Quelques trucs

- ◆ Il est inutile de calculer la clôture de
  - ▶ Tous les attributs
  - ▶ L'ensemble vide.
- ◆ Si  $X^+ =$  tous les attributs, il en va de même de tout  $X'$  contenant  $X$ .

44

## Exemple

- ◆  $ABC$  avec les DF  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$ .  
Projeter sur  $AC$ .
  - ▶  $A^+ = ABC$ ; donne  $A \rightarrow B, A \rightarrow C$ .
    - Inutile de calculer  $AB^+$  ou  $AC^+$ .
  - ▶  $B^+ = BC$ ; donne  $B \rightarrow C$ .
  - ▶  $C^+ = C$ ; ne donne rien.
  - ▶  $BC^+ = BC$ ; ne donne rien.

45

## Exemple --- suite

- ◆ DF obtenues:  
 $A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C$ .
- ◆ Projection sur  $AC$ :  $A \rightarrow C$ .
  - ▶ Seule DF concernant  $\{A, C\}$ .

46

## DF induites -- algo malin

- ◆ R ensemble F de DF
- ◆ R décomposé en  $R_1, \dots, R_k$
- ◆ On pose  $G_i = Cl(F)|_{R_i}$
- ◆ Est-ce que  $Cl(\cup G_i) = Cl(F)$ ?  
Est-ce qu'après la décomposition on retrouve les mêmes DF?

47

## DF induites -- algo malin

- ◆ Pour vérifier que  $X \rightarrow Y$  de F sera préservé
- ◆ INIT  $Z := X$
- ◆ Tant que Z change:
  - ▶ Pour chaque  $R_i$  faire
  - ▶  $Z := Z \cup ((Z \cap R_i)^+ / F \cap R_i)$   
(+: clôture par rapport à F)
- ◆ A la fin Z vaut  $X^+$  par rapport à  $G_1 \cup \dots \cup G_k$
- ◆ Si Y dans Z, alors  $X \rightarrow Y$  préservée.

48

## DF induites -- exemple

- ◆  $F = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow A\}$
- ◆ Décomposition AB, BC, CD
- ◆  $D \rightarrow A$  préservée?
- ◆ Calcul de  $D^+$  par rapport à  $Cl(F)|_{AB} \cup Cl(F)|_{BC} \cup Cl(F)|_{CD}$

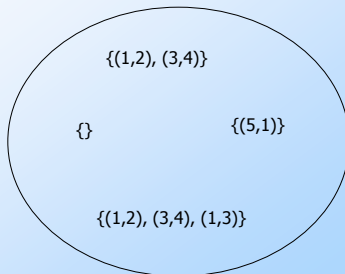
49

## Vue géométrique des DF

- ◆ Ensemble des *instances* d'une relation.
- ◆ Tous les ensemble finis de n-uplets.
- ◆ Chaque instance est un point.

50

## Exemple: R(A,B)



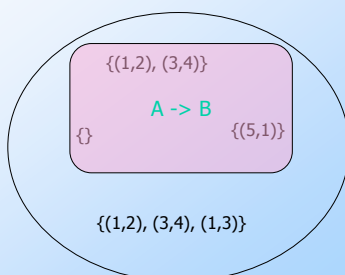
51

## Une DF est un sous-ensemble de cet espace

- ◆ Pour chaque DF  $X \rightarrow A$  on considère l'ensemble des instances qui la satisfont;
- ◆ DF = région de l'espace.
- ◆ DF triviale = l'espace entier.
  - ▶ Exemple:  $A \rightarrow A$ .

52

## Exemple: $A \rightarrow B$ pour R(A,B)



53

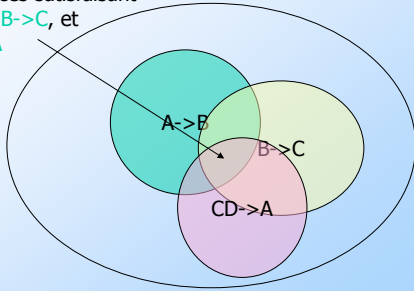
## Ensembles de DF

- ◆ Si chaque DF est un ensemble d'instances,
- ◆ Un ensemble de DF est l'intersection de ces ensembles:
  - ▶ Intersection = toutes les instances qui satisfont toutes les DF de l'ensemble.

54

## Exemple

Instances satisfaisant  
 $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow C$ , et  
 $CD \rightarrow A$



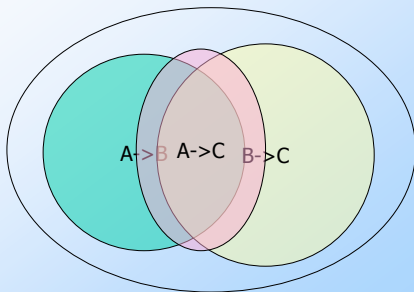
55

## Implication entre DF

- ◆ Si une DF  $Y \rightarrow B$  découle de  $X_1 \rightarrow A_1, \dots, X_n \rightarrow A_n$ , alors la région correspondant à  $Y \rightarrow B$  inclut l'intersection des régions correspondant aux  $X_i \rightarrow A_i$ .
  - ▶ Toute instance satisfaisant toutes les DFs  $X_i \rightarrow A_i$  satisfait  $Y \rightarrow B$ .
  - ▶ Par contre une instance peut satisfaire  $Y \rightarrow B$ , sans être dans l'intersection.

56

## Exemple



57