

La logique classique en déduction naturelle

Richard Moot and Christian Retoré

29 octobre 2007

1 Rappel: les règles de la déduction naturelle

On rappelle les règles de la déduction naturelle:

Il n'y a pas de règle pour la *négation* $\neg X$: celle-ci est une abbréviation pour $X \rightarrow \perp$

$$\neg X \equiv^{def} X \rightarrow \perp$$

1.1 L'implication

1.1.1 Introduction

$$\frac{A\Gamma[A]_{\alpha}\Delta[A]_{\alpha} \dots B}{A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

Durant cette règle, zéro, une ou plusieurs occurrences de l'hypothèse A sont annulées (on dit aussi déchargées).

1.1.2 Elimination

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \rightarrow_e$$

1.2 La conjonction

1.2.1 Introduction

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge_i$$

1.2.2 Elimination

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge_e^1$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \wedge_e^2$$

1.3 Le faux

1.3.1 Introduction

Pas de règle d'introduction.

1.3.2 Elimination

La règle d'élimination du faux implante le principe *ex falso quodlibet sequitur* (du faux découle ce qui te plaît). Pour toute formule C , on a :

$$\frac{\perp}{C} \perp$$

1.4 La disjonction

1.4.1 Introduction

$$\frac{A}{A \vee B} \vee_i^1$$

$$\frac{B}{A \vee B} \vee_i^2$$

1.4.2 Elimination

La règle implante le raisonnement par disjonction des cas:

$$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} A\Gamma[A]_{\alpha}\Delta[A]_{\alpha} \\ \vdots d_1 \\ \dot{C} \end{array} \quad \begin{array}{c} B\Theta[B]_{\alpha}\Phi[B]_{\alpha} \\ \vdots d_2 \\ \dot{C} \end{array}}{C} \vee_e \alpha$$

Durant cette règle, zéro, une ou plusieurs occurrences de l'hypothèse A sont annulées (on dit aussi déchargées) dans d_1 et, zéro, une ou plusieurs occurrences de l'hypothèse B sont annulées dans d_2 .

1.5 La quantification existentielle

1.5.1 Introduction

$$\frac{A(t)}{\exists x A(x)} \exists_i$$

1.5.2 Elimination

$$\frac{\begin{array}{c} A\Gamma[A]_{\alpha}\Delta[A]_{\alpha} \\ \vdots \\ \dot{C} \end{array}}{\exists x A(x)} \vee_e \alpha$$

Cette règle annule un certains nombres d'hypothèses $A(x)$ et ensuite il ne doit plus y avoir d'occurrence de x libre, que ce soit dans une hypothèse non annulée ou dans la conclusion.

1.6 La quantification universelle

1.6.1 Introduction

$$\frac{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A(x) \end{array}}{\forall x A(x)} \forall_i$$

Pour appliquer cette règle il ne doit pas y d'occurrence de x libre dans les formules de Γ .

1.6.2 Elimination

Pour tout terme t :

$$\frac{\forall x A(x)}{A(t)} \forall_e$$

2 Les trois formulations de la logique classique

On ne modifie pas les règles données ci-dessus, mais on ajoute aux axiomes

$$A$$

une famille d'axiomes. Ces axiomes propres font perdre la propriété de la sous formule.

2.1 TND, Tertium Non Datur, tiers exclu

Pour toute formule A :

$$\frac{tnd}{A \vee \neg A}$$

2.2 RAA, Reductio Ad Absurdum, raisonnement par l'absurde

Pour toute formule A :

$$\frac{raa}{\neg\neg A \rightarrow A}$$

On peut aussi le formuler sous la forme d'une règle qui annule un certains nombre d'occurrences de l'hypothèse $\neg A$:

$$\frac{A\Gamma[\neg A]_\alpha \Delta[\neg A]_\alpha}{\perp} \frac{\perp}{A} raa$$

Cela revient au même, il suffit d'utiliser la règle réversible \rightarrow_i qui conduit à $\neg\neg A$ qui combiné avec l'axiome RAA produit bien A .

2.3 Loi de Pierce

Pour toutes formules P et Q :

$$\frac{\text{Pierce}}{((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P}$$

3 Equivalence des trois formulations de la logique classique

3.1 Le raisonnement de l'absurde entraîne le tiers exclu

$$\frac{\frac{\frac{[\neg(a \vee \neg a)]_3 \quad \frac{[a]_2}{a \vee \neg a} \vee_i^1}{\perp} \rightarrow_e}{\perp} \rightarrow_{i2}}{\perp} \rightarrow_{i3} \quad \frac{\frac{[\neg(a \vee \neg a)]_3 \quad \frac{[\neg a]_1}{a \vee \neg a} \vee_i^2}{\perp} \rightarrow_e}{\neg \neg a} \rightarrow_{i1}}{\neg \neg(a \vee \neg a)} \rightarrow_{i3} \quad \frac{\text{raa}}{\neg \neg(a \vee \neg a) \rightarrow (a \vee \neg a)} \rightarrow_e}{a \vee \neg a} \rightarrow_e$$

3.2 Le tiers exclu entraîne la loi de Pierce

$$\frac{\frac{\text{tna}}{p \vee \neg p} \quad \frac{[p]_3}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \rightarrow_i}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \rightarrow_e \quad \frac{\frac{[p]_1 \quad [\neg p]_3}{\perp} \rightarrow_e \quad \frac{\frac{\perp}{q} \perp}{p \rightarrow q} \rightarrow_{i1}}{p} \rightarrow_{i2}}{((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \vee_e^3 \rightarrow_e^2$$

3.3 La loi de Pierce entraîne le raisonnement par l'absurde

$$\frac{\frac{\text{Pierce avec } Q = \perp}{(\neg P \rightarrow P) \rightarrow P} \quad \frac{[\neg \neg P]_2 \quad [\neg P]_1}{\perp} \rightarrow_e}{\frac{\frac{\perp}{P} \perp}{\neg P \rightarrow P} \rightarrow_{i1}}{P} \rightarrow_e}{\neg \neg P \rightarrow P} \rightarrow_{i2}$$

4 Bibliographie

J.-Y.GIRARD, Y. LAFONT, P. TAYLOR : Proofs and types (Cambridge University Press,1989).

D. VAN DALEN Logic and Structure (Springer Verlag, Universitext, 2004)