

Contribution à l'algèbre intégro-différentielle

1 Contexte

L'équipe CFHP du laboratoire CRISAL est spécialisée dans le traitement de systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) polynomiales. Depuis peu, l'équipe étudie le traitement des équations intégro-différentielles, c'est-à-dire des équations faisant intervenir à la fois des dérivations et des opérateurs d'intégration. Il s'agit d'un domaine peu étudié d'un point de vue algébrique et algorithmique, et qui a des applications concrètes en modélisation.

2 Travail à réaliser

Dans le cadre du stage, les équations seront supposées intégrales (c'est-à-dire sans dérivations) pour limiter la difficulté du sujet.

Le stagiaire commencera par étudier les deux problèmes suivants (sections 2.1 et 2.2) d'un point de vue algébrique et algorithmique. Au besoin, d'autres systèmes seront étudiés en fonction de l'avancement des résultats. La compréhension de ces deux exemples contribuera sans aucun doute à l'écriture d'algorithmes en algèbre intégro-différentielle.

Dans le cadre d'un stage de M1, le stagiaire sera en mesure de concevoir et programmer un prototype d'algorithme d'élimination (voir section 2.2) pour les équations intégrales.

2.1 L'idéal engendré par $u - \int u$ ne contient pas u

Par une construction non détaillée dans ce document, on peut définir l'idéal I engendré par l'équation $u - \int u$. Cette équation qui peut s'interpréter comme $u(t) = \int_0^u u(x)dx$ admet pour seule solution analytique $u(t) = 0$. Étrangement, l'équation u n'appartient pas ni à l'idéal I , ni à son radical. Une preuve partielle de ce résultat basé sur des arguments d'analyse est donnée dans [1].

Le stagiaire étudiera la possibilité d'une preuve basée sur des techniques algébriques, par exemple en interprétant l'équation $u - \int u$ comme la règle de réécriture $\int u \rightarrow u$.

2.2 Un problème d'identifiabilité

Le système différentiel suivant porte sur les fonctions $x = x(t)$ et $y = y(t)$ ainsi qu'un paramètre α supposé constant :

$$\dot{x} = \alpha x \tag{1}$$

$$\dot{y} = xy. \tag{2}$$

En exprimant x grâce à (2) et en reportant dans (1), on obtient une équation différentielle en y :

$$y\ddot{y} - \dot{y}^2 - \alpha y\dot{y} = 0.$$

On dit alors qu'on a éliminé la variable x . Cette équation permet en théorie de retrouver α à partir de $y(t)$ uniquement. On dit alors que le système est identifiable.

Le stagiaire tentera de résoudre le problème ouvert suivant : existe-t-il une équation faisant intervenir α , y et uniquement des intégrales itérées, qui soit conséquence de (1) et (2) ?

Nous pensons actuellement que non mais nous n'en avons pas la preuve.

2.3 Prototype d'algorithme d'élimination (stage long)

Dans le cadre d'un stage de M1, le stagiaire écrira et programmera un prototype d'algorithme d'élimination pour des classes réduites de systèmes. Cet objectif est très ambitieux !

Références

[1] On Symbolic Approaches to Integro-Differential Equations, Boulier F., Lemaire F., Rosenkrank M., Ushirobira R., Verdière N. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01367138>

Contact

François Lemaire, francois.lemaire@univ-lille1.fr

Mots clé

Algèbre différentielle, théorie de l'élimination, intégration.