

Numéro d'ordre : 4391

# THÈSE

PRÉSENTÉE À

**L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I**

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

par **Adrien GUIGNARD**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

SPÉCIALITÉ : INFORMATIQUE

---

## Jeux de coloration de graphes

---

Soutenue le 6 Décembre 2011

Devant la commission d'examen composée de :

<i>Rapporteurs :</i>	Sylvain GRAVIER	-	Directeur de Recherches
	Hamamache KHEDDOUCI	-	Professeur
<i>Directeur :</i>	Éric SOPENA	-	Professeur
<i>Examineurs :</i>	Paul DOBERC	-	MDC
	Éric DUCHÊNE	-	MDC
	André RASPAUD	-	Professeur Émérite



---

# Jeux de coloration de graphes

---

## Résumé

### Partie 1 : Le jeu de Domination et ses variantes

Le jeu de Domination un jeu combinatoire qui consiste à marquer les sommets d'un graphe de telle sorte qu'un sommet marqué n'ait aucun voisin marqué. Le premier joueur ne pouvant plus marquer de sommet est déclaré perdant.

Le calcul des stratégies gagnantes étant NP-difficile pour un graphe quelconque, nous avons étudié des familles particulières de graphes comme les graphes bipartis complets, les chemins ou les scies. Pour ces familles l'ensemble des graphes perdants a été déterminé. Pour d'autres familles comme les chenilles nous avons démontré l'existence d'un algorithme polynomial donnant les stratégies gagnantes à adopter ou, le cas échéant, affirmant que le graphe est perdant. Mais concernant des familles plus générales comme les arbres, aucun algorithme polynômial n'est à ce jour connu, et on ne sait guère faire mieux que d'explorer le graphe des configurations. Nous avons également étudié 28 variantes du jeu de domination, dont les 12 variantes définies par J. Conway sur un jeu combinatoire quelconque. En utilisant la notion de fonction de jeu, nous avons donné l'ensemble des chemins perdants pour 10 de ces douze variantes. Nous avons également obtenu des résultats sur 16 variantes dites *diamètre*, où la règle impose par exemple aux joueurs de jouer sur la composante de plus grand diamètre.

### Partie 2 : Le nombre chromatique ludique des arbres

Ce paramètre est calculé à partir d'un jeu de coloration : Alice et Bob colorient alternativement et proprement un sommet d'un graphe  $G$  avec l'une des  $k$  couleurs. L'objectif d'Alice est de colorier complètement le graphe alors que Bob doit l'en empêcher. Concernant les arbres Faigle et al. on démontré que le nombre chromatique ludique d'une arbre est au plus 4. Nous souhaitons donc caractériser les arbres ayant un nombre chromatique ludique 3, soit ceux pour lesquels Alice a une stratégie gagnante avec 3 couleurs. Ce problème semblant difficile à résoudre sur les arbres, nous avons considéré des sous-familles : les 1-chenilles puis les chenilles sans trous. Pour ces deux familles, nous avons effectué la caractérisation et avons également donné les stratégies gagnantes pour Alice si le nombre chromatique ludique est 3, ou pour Bob s'il vaut 4. Nous avons pour cela défini la notion de bitype qui associe à tout graphe partiellement colorié  $G$  deux lettres indiquant qui a une stratégie gagnante sur  $G$  et de même sur  $G$  avec un sommet isolé supplémentaire. Ce paramètre permet de démontrer plusieurs propriétés, notamment le calcul du nombre chromatique ludique d'un graphe en fonction de ceux de ses composantes connexes.

**Mots-clés** : Jeu combinatoire, Jeu de Domination, stratégie gagnante, coloration de graphes, nombre chromatique ludique, arbre, chenille

---

# Graphs coloring games

---

## Abstract

### Part 1 : Domination Game and its variants

Domination game is a combinatorial game that consists in marking vertices of a graph so that a marked vertex has no marked neighbors. The first player unable to mark a vertex loses the game.

Since the computing of winning strategies is an NP-hard problem for any graphs, we examine some specific families of graphs such as complete  $k$ -partite graphs, paths or saws. For these families, we establish the set of losing elements. For other families, such as caterpillars, we prove that exists a polynomial algorithm for the computation of outcome and winning strategies. No polynomial algorithm has been found to date for more general families, such as trees.

We also study 28 variants of Domination game, including the 12 variants defined by J. Conway for any combinatorial game. Using *game functions*, we find the set of losing paths for 10 of these 12 variants. We also investigate 16 variants called *diameter*, for instance when rules require to play on the component that has the largest diameter.

### Part 2 : The game chromatic number of trees

This parameter is computed from a coloring game : Alice and Bob alternatively color the vertices of a graph  $G$ , using one of the  $k$  colors in the color set. Alice has to achieve the coloring of the entire graph whereas Bob has to prevent this. Faigle and al. proved that the game chromatic number of a tree is at most 4. We undertake characterization of trees with a game chromatic number of 3. Since this problem seems difficult for general trees, we focus on sub-families : 1-caterpillars and caterpillars without holes.

For these families we provide the characterization and also compute winning strategies for Alice and Bob. In order to do so, we are led to define a new notion, the *bitype*, that for a partially-colored graph  $G$  associates two letters indicating who has a winning strategy respectively on  $G$  and  $G + K_1$ . Bitypes allow us to demonstrate several properties, in particular to compute the game chromatic number of a graph from the bitypes of its connected components.

**Keywords :** Combinatorial game, Domination game, winning strategy, graph coloring, game chromatic number, tree, caterpillar

# Remerciements

*Je remercie l'ensemble des membres du Groupe de Travail Graphes et Applications du LaBRI qui se sont toujours mis à ma disposition pour toute question ou requête, et ont par leurs remarques ouvert de nouvelles perspectives à mes travaux de recherche. Tant avec les chercheurs comme André Raspaud, Philippe Duchon, Paul Dorbec ou Reza Naserasr qu'avec les collègues doctorants comme Hervé Hocquard, Émilie Diot ou Petru Valicov, les échanges ont souvent contribué à faire avancer mes recherches.*

*Je tiens tout particulièrement à remercier mon directeur de thèse Éric Sopena qui a toujours été présent lors de ces quatre années pour effectuer mon doctorat. Il m'a conseillé des lectures et m'aidait à rédiger la thèse, des articles et des exposés, tout en me laissant une certaine liberté dans la direction que je voulais donner à mes travaux.*

*J'ai été très honoré par la présence à mon jury de thèse de Sylvain Gravier et Hamamache Kheddouci. Je les remercie d'avoir examiné ma thèse et remercie également tous les autres membres du jury : Paul Dorbec, Éric Duchêne, André Raspaud et Éric Sopena.*

*Je remercie également mes collègues de bureau du LaBRI Pierre et Fares ainsi que tous les autres collègues doctorants que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant ces années.*

*Concernant les enseignements, je remercie tous les professeurs m'ayant épaulé pour apprendre ce métier, particulièrement C. Blanc de Bordeaux 1, D. Lapoire et V. Trong Ta de L'Enseirb.*

*Mes remerciements s'adressent aussi aux secrétaires du LaBRI, de L'École Doctorale et de L'Enseirb ainsi qu'aux ingénieurs qui ont tous su allier la bonne humeur aux problèmes administratifs ou techniques. En particulier, merci à Cathy Roubineau, Christine Parison, Pierre Hericourt et Marie-Jo de Gasquet.*

*Je remercie ma famille et mes amis pour leur soutien et pour leurs encouragements, spécialement à mon grand-père maternel qui depuis mon enfance a développé ma passion pour les problèmes mathématiques, et à mes parents qui m'ont apporté une bonne culture générale et l'envie d'en apprendre toujours plus.*

*Et bien sûr un grand merci à ma femme qui a été quotidiennement à mes côtés et m'a encouragé dans les moments difficiles.*

*Enfin je dédie cette thèse à mes enfants Arnaud et Cléa auxquels je souhaite réussite et bonheur pour leur vie qui commence.*

*Merci à tous et à bientôt,  
Adrien*



# Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Remerciements	iii
Table des matières	v
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Introduction	xiii
<b>0 Définitions et notations</b>	<b>xvii</b>
0.1 Définitions générales . . . . .	xviii
0.2 Principales familles de graphes . . . . .	xx
<b>I Le jeu de domination et ses variantes</b>	<b>1</b>
<b>1 Les jeux combinatoires</b>	<b>3</b>
1.1 Définitions, historique . . . . .	4
1.2 La fonction de Sprague-Grundy . . . . .	7
1.3 Les jeux octaux . . . . .	9
<b>2 Le jeu de Domination</b>	<b>13</b>
2.1 Définitions . . . . .	14
2.2 Familles jouables : généralités . . . . .	17
2.3 Premiers résultats . . . . .	20
2.3.1 Graphes possédant un sommet universel . . . . .	20
2.3.2 Graphes $n$ -partis complets . . . . .	21
2.3.3 Graphes réguliers de haut degré . . . . .	22
2.4 Familles jouables de taille linéaire . . . . .	23
2.4.1 Les chemins et les cycles . . . . .	23
2.4.2 Les puissances de chemins ou $k$ -chemins . . . . .	25

2.4.3	Les grilles $2 \times n$ . . . . .	27
2.4.4	Les scies triangulaires . . . . .	30
2.4.5	Les scies trapézoïdales . . . . .	33
2.5	Familles non polynomiales . . . . .	35
2.5.1	Réductions sur les arbres . . . . .	36
2.5.2	Les chenilles . . . . .	37
2.6	Conclusion et perspectives . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Les 12 variantes de John H. Conway</b> . . . . .	<b>45</b>
3.1	Fonction de jeu . . . . .	47
3.2	Jeu disjonctif lent . . . . .	49
3.2.1	Version normale . . . . .	49
3.2.2	Version misère . . . . .	50
3.3	Jeu disjonctif rapide . . . . .	50
3.3.1	Version normale . . . . .	51
3.3.2	Version misère . . . . .	52
3.4	Jeu conjonctif lent . . . . .	54
3.4.1	Version normale . . . . .	54
3.4.2	Version misère . . . . .	57
3.5	Jeu conjonctif rapide . . . . .	58
3.5.1	Version normale . . . . .	58
3.5.2	Version misère . . . . .	60
3.6	Jeu sélectif lent . . . . .	61
3.6.1	Version normale . . . . .	61
3.6.2	Version misère . . . . .	63
3.7	Jeu sélectif rapide . . . . .	65
3.7.1	Version normale . . . . .	65
3.7.2	Version misère . . . . .	66
3.8	Conclusion et perspectives . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Autres variantes du jeu de domination</b> . . . . .	<b>71</b>
4.1	Jeux disjonctifs à diamètre maximal . . . . .	73
4.1.1	Jeu disjonctif maximal lent . . . . .	74
4.1.2	Jeu disjonctif maximal rapide . . . . .	80
4.2	Jeux sélectifs à diamètre maximal . . . . .	85
4.2.1	Jeu sélectif maximal lent . . . . .	85
4.2.2	Jeu sélectif maximal rapide . . . . .	89
4.3	Jeux disjonctifs à diamètre minimal . . . . .	95
4.3.1	Jeu disjonctif minimal lent . . . . .	95
4.3.2	Jeu disjonctif minimal rapide . . . . .	97
4.4	Jeux sélectifs à diamètre minimal . . . . .	97
4.4.1	Jeu sélectif minimal lent . . . . .	98
4.4.2	Jeu sélectif minimal rapide . . . . .	99
4.5	Conclusion . . . . .	101



<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>103</b>
<b>II</b>	<b>Le nombre chromatique ludique des arbres</b>	<b>105</b>
<b>6</b>	<b>Introduction et outils généraux</b>	<b>107</b>
6.1	Introduction . . . . .	108
6.2	Cinq réductions de graphes . . . . .	110
6.3	Familles de graphes étudiées : définitions, notations, propriétés . . . . .	113
6.3.1	Les lc-graphes . . . . .	113
6.3.2	Les chenilles . . . . .	114
6.3.3	Les chenilles circulaires et les arbres circulaires . . . . .	117
6.4	Types, types signés et bitypes . . . . .	119
6.4.1	Définitions et propriétés des types . . . . .	119
6.4.2	Types signés . . . . .	122
6.4.3	Définition des bitypes, exemples . . . . .	122
6.4.4	Bitypes des options . . . . .	128
6.5	Ordre des bitypes . . . . .	131
6.6	Propriétés des sous-graphes . . . . .	132
6.7	Propriétés d'addition des lc-graphes . . . . .	137
6.7.1	Symétries de l'opérateur $\oplus$ . . . . .	137
6.7.2	Ajout de composantes, bitype $\mathcal{BB}$ . . . . .	138
6.7.3	Addition pour les bitypes ne contenant pas de type $\mathcal{A}$ . . . . .	140
6.7.4	Neutralité des composantes de bitype $\mathcal{AA}^+$ . . . . .	142
6.8	Conclusion . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Étude de quelques familles de lc-graphes</b>	<b>147</b>
7.1	Introduction . . . . .	148
7.2	Les I-chenilles . . . . .	150
7.3	Les 1-chenilles . . . . .	151
7.3.1	Les lc-1-chenilles de base . . . . .	152
7.3.2	Chenilles à deux extrémités coloriées . . . . .	159
7.3.3	Chenilles à une extrémité coloriée . . . . .	164
7.3.4	Chenilles non coloriées . . . . .	165
7.3.5	Résultats sur quelques L-familles . . . . .	168
7.4	Les chenilles sans trous . . . . .	169
7.4.1	Les 2-chenilles avec au plus deux sommets de degré 4 . . . . .	169
7.4.2	Caractérisation des 2-chenilles avec au moins trois sommets de degré 4171 . . . . .	171
7.4.3	Extension aux chenilles sans trous . . . . .	174
7.5	À propos des chenilles avec trous . . . . .	174
7.6	Les 1-chenilles circulaires . . . . .	175
7.7	Perspectives sur les lc-arbres . . . . .	178

<b>8</b>	<b>À propos des arbres non coloriés</b>	<b>179</b>
8.1	Introduction . . . . .	180
8.2	Bitypes constants . . . . .	181
8.2.1	Bitype $\mathcal{AA}$ . . . . .	181
8.2.2	Bitype $\mathcal{NN}$ . . . . .	183
8.2.3	Bitype $\mathcal{BB}$ . . . . .	184
8.3	Bitypes variables . . . . .	185
8.3.1	Bitype $\mathcal{AN}$ . . . . .	185
8.3.2	Bitype $\mathcal{NA}$ . . . . .	187
8.3.3	Bitype $\mathcal{PN}$ . . . . .	188
8.3.4	Bitype $\mathcal{NP}$ . . . . .	189
8.3.5	Bitype $\mathcal{NB}$ . . . . .	190
8.3.6	Bitype $\mathcal{BN}$ . . . . .	190
8.4	Cas des 5-sommets ayant trois feuilles voisines . . . . .	191
8.5	Conclusion . . . . .	192
<b>9</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>195</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>199</b>

# Table des figures

1	Le graphe complet $K_5$ . . . . .	xx
2	Le chemin $P_7$ . . . . .	xxi
3	Le cycle $C_8$ . . . . .	xxi
4	Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ . . . . .	xxi
5	Un graphe 4-régulier . . . . .	xxii
6	Un arbre . . . . .	xxii
7	Une étoile à six branches . . . . .	xxii
8	Une chenille . . . . .	xxii
9	La grille $3 \times 4$ notée $G_{3,4}$ . . . . .	xxiii
10	Un graphe planaire extérieur. . . . .	xxiii
1.1	Le graphe des configurations pour le jeu de Nim 32, où les arcs sont orientés vers le bas ou vers la droite s'il sont horizontaux. . . . .	5
1.2	Nimbers (en rouge) des positions du jeu de Nim 32. . . . .	8
2.1	Algorithme $\mathcal{A}$ , calcule $\rho(G_n)$ pour une famille jouable $\mathcal{F} = (G_i)_{0 \leq i \leq n}$ . . . . .	19
2.2	Un graphe régulier (a) et son complémentaire (b) . . . . .	23
2.3	Le chemin de longueur $n$ : $P_n$ . . . . .	24
2.4	La puissance de chemin $P_7^2$ . . . . .	25
2.5	Les 4 familles de graphes nécessaires à l'étude des grilles $2 \times n$ . . . . .	28
2.6	Les trois types de scies triangulaires, notées $S_n$ , $S'_n$ et $S''_n$ . . . . .	30
2.7	Les scies trapézoïdales $W_n$ , $W'_n$ et $W''_n$ . . . . .	33
2.8	Les jeux possibles sur une scie trapézoïdale . . . . .	34
2.9	La réduction de feuilles . . . . .	36
2.10	Trois lois de réductions potentielles . . . . .	37
2.11	Une chenille et sa chenille réduite associée . . . . .	39
3.1	L'algorithme $\mathcal{A}'$ calcule le type du chemin $P_n$ en $\mathcal{O}(n^2)$ à l'aide de la fonction de jeu $f$ . . . . .	48
4.1	Situation où le type diffère entre les variantes conjonctives et disjonctives minimales . . . . .	100
6.1	Stratégie gagnante pour Alice avec 4 couleurs sur un arbre. . . . .	109
6.2	Arbre de nombre chromatique ludique 4 à gauche ; à droite coup gagnant de Bob. . . . .	110

6.3	Réduction $R_0$ : retrait d'une composante coloriée. . . . .	111
6.4	Réduction $R_1$ : changement des sommets coloriés en feuilles coloriées. . . . .	112
6.5	Réduction $R_2$ : retrait du reste du graphe si un sommet a les 3 couleurs dans son voisinage. . . . .	112
6.6	Réduction $R_3$ : retrait des feuilles coloriées possédant un sommet de même couleur à distance 2. . . . .	112
6.7	Réduction $R_4$ : coloration de $s$ par anticipation. . . . .	112
6.8	Exemples de lc-chenilles avec leurs mots associés. . . . .	115
6.9	Coloration de l'épine dorsale de $az0zza$ , avant et après réduction . . . . .	116
6.10	Exemple de lc-chenille circulaire avec son mot associé. . . . .	117
6.11	Exemples de graphes de bitype $\mathcal{AA}$ de signes respectifs 0 et 1. . . . .	124
6.12	Exemples de graphes de bitype $\mathcal{NN}$ de signes respectifs 0 et 1. . . . .	124
6.13	Exemples de graphes de bitype $\mathcal{BB}$ de signes respectifs 0 et 1. . . . .	125
6.14	Exemples de graphes de bitype $\mathcal{AN}$ de signes respectifs 0 et 1. . . . .	125
6.15	Exemples de graphes de bitype $\mathcal{NA}$ de signes respectifs 0 et 1. . . . .	125
6.16	Exemples de graphes de bitype $\mathcal{BN}$ de signes respectifs 0 et 1. . . . .	125
6.17	Exemples de graphes de bitype $\mathcal{NB}$ de signes respectifs 0 et 1. . . . .	126
6.18	Exemples de graphes de bitype $\mathcal{PN}$ de signes respectifs 0 et 1. . . . .	126
6.19	Exemples de graphes de bitype $\mathcal{NP}$ de signes respectifs 0 et 1. . . . .	126
6.20	lc-arbre où l'ajout de feuilles coloriées fait décroître le bitype. . . . .	133
6.21	lc-graphe où l'ajout d'une arête fait décroître le bitype. . . . .	134
6.22	Réduction de feuilles $R_5$ : suppression de deux feuilles voisines d'un sommet $s$ de degré au moins 7 et possédant au moins 5 feuilles. . . . .	145
7.1	Stratégie gagnante de Bob sur $az^8b_{a \neq b}$ . . . . .	161
7.2	Stratégie gagnante du Précédent sur la chenille circulaire $[z^4]$ . . . . .	177
8.1	Arbres d'ordre 11 où Bob peut a priori avoir une stratégie gagnante. . . . .	182
8.2	Plus petit arbre de bitype $\mathcal{NN}$ . Ordre 13 . . . . .	183
8.3	Plus petit arbre de bitype $\mathcal{BB}$ . Ordre 14. . . . .	185
8.4	Plus petit arbre connu de bitype $\mathcal{AN}$ . Ordre 30. . . . .	186
8.5	Branches et liens de l'arbre $T_{AN}$ . . . . .	186
8.6	Plus petit arbre connu de bitype $\mathcal{NA}$ . Ordre 29. . . . .	188
8.7	Plus petit arbre connu de bitype $\mathcal{PN}$ . Ordre 36. . . . .	189
8.8	Plus petit arbre connu de bitype $\mathcal{NP}$ . Ordre 37. . . . .	190
8.9	Plus petit arbre connu de bitype $\mathcal{NB}$ . Ordre 37. . . . .	191
8.10	Plus petit arbre connu de bitype $\mathcal{BN}$ . Ordre 38. . . . .	191
8.11	Arbre contenant un 5-sommet $u$ avec 3 feuilles voisines, où le retrait de l'une de ces feuilles modifie le bitype. . . . .	192

# Liste des tableaux

2.1	Exemples de familles de chenilles, résultats de l'algorithme $\mathcal{A}$ en $\mathcal{O}(n^3)$ . . .	40
3.1	Règles des douze variantes de John H. Conway . . . . .	46
3.2	La séquence de Sprague-Grundy foreclosed en version normale . . . . .	52
3.3	Statistiques de la séquence $(F^-(P_n))_{n \geq 0}$ . . . . .	53
3.4	Positions perdantes pour les 12 variantes du jeu de domination sur les chemins	69
4.1	Types des chemins dont la taille est multiple de 4 . . . . .	76
6.1	Exemples de chenilles linéaires ou circulaires pour chaque bitype signé . . .	127
6.2	Ensembles $E(\mathcal{X}\mathcal{Y})$ des bitypes potentiellement présents dans les options d'un lc-graphe de bitype $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ . . . . .	128
6.3	Table d'addition des bitypes ne contenant pas de type $\mathcal{A}$ , avec $\mathcal{Y} \in \{\mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ et $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{B}\}$ . . . . .	141
7.1	Table d'addition des bitypes étendus $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$ , $\mathcal{N}\mathcal{N}^+$ et $\mathcal{B}\mathcal{B}^+$ . . . . .	150
7.2	Bitypes de douze L-familles de 1-chenilles. . . . .	169
7.3	Bitypes des chenilles de la forme $zz^n Dz^p z$ . . . . .	170
7.4	Bitypes des 1-chenilles circulaires . . . . .	177



# Introduction

C'est généralement pendant l'enfance que notre esprit ludique se développe. Durant cette période nous cherchons à mettre en place des stratégies gagnantes sur les jeux que nous pratiquons avec nos camarades.

Pour ma part, à cette époque je me suis intéressé au jeu du morpion  $3 \times 3$  ou Tic-Tac-Toe en analysant tous les coups possibles, recherchant une méthode me permettant de gagner à coup sûr. Quelle ne fut pas ma déception quand je me suis aperçu que l'on ne pouvait faire mieux qu'un match nul... Avec mes sœurs nous jouions beaucoup au morpion  $8 \times 8$ . Là aussi j'avais essayé de rechercher une stratégie gagnante, mais je me rendis compte que ce jeu était bien trop complexe pour que l'on puisse étudier toutes les configurations.

L'existence des jeux combinatoires est avérée depuis l'Antiquité, et ceci dans la plupart des civilisations. L'Awalé en Afrique, le Go en Asie et les Échecs en Europe sont des jeux sans hasard qui existent depuis de nombreux siècles. Toutefois malgré la puissance de calcul des machines modernes ces jeux restent à ce jour non résolus, parfois même certains joueurs humains parviennent encore à battre les meilleurs ordinateurs qui peuvent pourtant effectuer plusieurs milliards d'opérations par seconde.

Les premières études mathématiques des jeux combinatoires datent du début du XX<sup>e</sup> siècle, avec la mise en évidence par C.L. Bouton dans [6] d'une stratégie gagnante sur le jeu de Nim, un jeu constitué de plusieurs tas d'allumettes où les joueurs retirent tour à tour une ou plusieurs allumettes de l'un de tas. La recherche d'une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs est l'enjeu principal de l'étude d'un jeu. Depuis plus d'un siècle la théorie des jeux combinatoires s'est considérablement étoffée. Ainsi nous pouvons classer un jeu donné dans un domaine précis, parfois trouver des équivalences avec d'autres jeux préalablement étudiés, et ainsi démontrer l'existence d'une stratégie gagnante pour certaines positions de jeu. Néanmoins pour un grand nombre de jeux connus et étudiés depuis des décennies l'ensemble des positions perdantes reste inconnu. Il est souvent déconcertant de comparer la simplicité de la définition d'un jeu avec la complexité de la recherche d'une stratégie gagnante pour une position donnée. C'est par exemple le cas pour le jeu de Kayles Misère. De plus, la plupart des jeux connus du grand public sont des problèmes difficiles. Le Go les Échecs ou le Reversi ont jusqu'ici résisté aux efforts de la communauté scientifique.

Comprenant la richesse et la complexité de ce domaine, j'ai choisi de faire une thèse sur les jeux combinatoires, plus précisément sur les jeux de coloration de graphes. Tant pour le jeu de Domination que pour le jeu aboutissant au calcul du nombre chromatique ludique, démontrer l'existence d'une stratégie gagnante sur un graphe quelconque est un problème si complexe que nous n'avons pu l'effectuer que sur des familles très restreintes comme les chemins ou les chenilles.

Après quelques définitions de théorie des graphes, nous aborderons la première partie de cette thèse qui porte sur un jeu combinatoire consistant à marquer les sommets d'un graphe, le jeu de domination. Partant d'un graphe  $G$ , les deux joueurs marquent tour à tour un sommet de  $G$  de telle sorte qu'à tout moment de la partie un sommet marqué n'ait aucun voisin marqué. Le perdant est le joueur ne pouvant plus marquer aucun sommet de  $G$ .

Dans le Chapitre 1 nous présenterons ce qu'est un jeu combinatoire et proposerons un bref historique de la théorie des jeux combinatoires. Nous introduirons les principales notions utiles à l'étude des jeux combinatoires, notamment la fonction de Sprague-Grundy qui permet entre-autres de savoir si le joueur Suivant a une stratégie gagnante. Nous introduirons également les jeux octaux, une famille de jeux combinatoires ayant fait l'objet de nombreuses publications et dont les résultats sont utiles à l'étude du jeu de domination.

Dans le Chapitre 2 nous présenterons nos résultats sur le jeu de domination pour quelques familles de graphes. Lorsqu'une famille de graphes vérifie certaines propriétés nous dirons qu'elle est jouable, et dans ce cas nous verrons qu'il existe un algorithme quadratique permettant de déterminer les valeurs de Sprague-Grundy des éléments de cette famille. Pour certaines familles jouables comme les chemins et les grilles  $2 \times n$ , nous découvrirons une période qui nous permettra de déduire l'ensemble des éléments perdants. Cependant pour d'autres familles comme les 2-chemins ou les scies trapézoïdales aucune période dans la séquence des valeurs de Sprague-Grundy n'a été découverte, nous n'avons donc pas pu déterminer l'ensemble des éléments perdants. Nous démontrerons ensuite que pour une chenille de diamètre  $d$  il existe un algorithme en  $\mathcal{O}(d^3)$  calculant la valeur de Sprague-Grundy de cette chenille, et déduirons ainsi un certain nombre de résultats sur des familles particulières de chenilles.

Dans le Chapitre 3, nous étudierons douze variantes du jeu de domination, les douze variantes de J.H. Conway [7] qui peuvent s'appliquer à tout jeu combinatoire. Elles sont basées sur 3 variations possibles. Premièrement, plutôt que de déclarer perdant le joueur ne pouvant plus jouer on peut le déclarer gagnant. Il s'agit de la variante *misère*. Ensuite, plutôt que de déclarer la partie terminée lorsque toutes les composantes le sont, on peut la déclarer terminée dès qu'une composante l'est. Il s'agit de la terminaison rapide. Enfin, plutôt que de jouer sur une seule composante (disjonctif) on peut imposer de jouer sur toutes les composantes (conjonctif), ou sur certaines composantes (sélectif). Cela aboutit à douze variantes que nous étudierons pour le jeu de domination sur la famille des chemins. Pour dix d'entre-elles nous déterminerons les chemins perdants. Concernant les deux dernières, le jeu disjonctif *misère* est un jeu célèbre pour lequel nous ne connaissons à ce jour aucun algorithme polynomial, et pour le jeu disjonctif rapide *misère* nous donnerons un algorithme quadratique.



Dans le Chapitre 4 nous nous sommes intéressés à d'autres variantes du jeu de domination. Plutôt que de pouvoir jouer sur n'importe quelle composante, on peut obliger les joueurs à jouer sur la (ou les en sélectif) composante(s) de plus grand (ou plus petit) diamètre. En combinant avec les deux terminaisons lente/rapide et avec les versions normale/misère on obtient seize nouvelles variantes. Nous présenterons nos résultats sur ces variantes, notamment des périodes géométriques sur l'ensemble des positions perdantes.

En conclusion nous remarquerons que l'on peut construire une infinité de variantes du jeu de domination. Pour certaines d'entre-elles, la caractérisation des chemins perdants semble être très difficile puisque nous n'avons pas découvert de période sur les réunions de chemins de diamètre au plus quatre.

Dans la seconde partie de cette thèse nous nous intéresserons au problème de caractérisation du nombre chromatique ludique des arbres. Le nombre chromatique ludique est basé sur le jeu partisan  $\mathcal{J}$  dont voici la définition. Partant d'un graphe  $G$  et d'un entier  $k$ , les deux joueurs Alice et Bob colorient tour à tour un sommet de  $G$  avec l'une des  $k$  couleurs de telle sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. La partie est terminée lorsqu'on ne peut plus colorier de sommet. Si tous les sommets sont coloriés alors Alice gagne la partie et sinon Bob gagne. Le nombre chromatique ludique d'un graphe  $G$  est le plus petit entier  $k$  tel qu'Alice ait une stratégie gagnante sur  $G$  en commençant à jouer. Puisque pour les arbres de diamètre au moins 3 le nombre chromatique ludique vaut 3 ou 4, nous nous sommes intéressés au problème de caractérisation des arbres de nombre chromatique ludique 3.

Dans le Chapitre 6 nous introduirons les définitions et outils utiles au calcul du nombre chromatique ludique, notamment la notion de bitype qui associe à tout graphe  $G$  partiellement 3-colorié un couple  $\mathcal{XY}$  indiquant qui gagne avec 3 couleurs (entre Alice, Bob, le joueur Suivant ou le joueur Précédent) sur  $G$  et sur  $G + K_1$ . Le fait de savoir qui gagne sur  $G + K_1$  correspond à autoriser un et un seul joueur à passer son tour une et une seule fois dans la partie. Cette définition des bitypes permet entre autres d'obtenir une propriété d'addition, c'est-à-dire de calculer le bitype de  $G + H$  connaissant les bitypes de  $G$  et de  $H$ . Nous démontrerons également un théorème d'inclusion permettant dans certains cas d'étendre une stratégie gagnante de Bob (resp. Alice) sur  $G$  à un sur-graphe de  $G$  (resp. un sous-graphe de  $G$ ).

Dans le Chapitre 7 nous étudierons quelques familles de graphes. Nous déterminerons les bitypes des chenilles sans trous (sommets de degré 2) et des 1-chenilles circulaires. Nous donnerons également quelques outils pour les chenilles avec trous mais on ne connaît à ce jour aucun algorithme polynômial permettant de déterminer le bitype de ces chenilles.

Enfin, dans le Chapitre 8, nous verrons qu'il existe des arbres non coloriés de n'importe quel bitype. Une des conséquences est que contrairement à l'intuition il existe des arbres où le joueur Précédent gagne, c'est-à-dire où ni Alice ni Bob n'ont intérêt à commencer à jouer. Pour certains bitypes nous démontrerons que les exemples découverts sont les plus petits en nombre de sommets.

Nous concluons cette partie par quelques questions ouvertes et prolongements.



# Chapitre 0

## Définitions et notations

Dans cette thèse nous manipulerons des objets mathématiques : **les graphes**. Commençons par définir ces objets et leurs principaux attributs.

## 0.1 Définitions générales

Un graphe, orienté ou non, est une représentation abstraite d'un réseau.

Un **graphe non orienté simple sans boucles**  $G$ , par la suite simplement appelé **graphe**, est un couple  $G = (V, E)$  où  $V$  est l'ensemble des **sommets** du graphe  $G$  et  $E$  l'ensemble des **arêtes** du graphe. Pour un graphe  $G$  donné, son ensemble de sommets est noté  $V(G)$ . Un sommet  $v$ , également appelé **nœud**, constitue un point d'intersection du réseau. L'ensemble des arêtes de  $G$  est noté  $E(G)$ . Une arête  $e = \{u, v\}$  est une paire de sommets. Elle constitue un lien entre les deux sommets  $u$  et  $v$  qui sont les **extrémités** de  $e$ . Elle est plus simplement notée  $e = uv$ .

Un **graphe orienté simple sans boucles**  $\vec{G}$ , par la suite simplement appelé **graphe orienté**, est également un couple  $\vec{G} = (V, A)$ , où  $V$  est l'ensemble des sommets est  $A$  l'ensemble des **arcs** de  $\vec{G}$ . Un arc  $a = \vec{uv}$  est un couple  $(u, v)$  de sommets avec  $u \neq v$ . L'arc  $a$  représente un lien de  $u$  vers  $v$ . L'ensemble des arcs  $A$  est donc un ensemble de couples de sommets distincts.

Définissons maintenant les principaux attributs concernant les graphes non orientés.

L'**ordre** d'un graphe  $G$  est le nombre de sommets de  $G$ .

Soit  $v$  un sommet d'un graphe  $G$ . Un **voisin** de  $v$  est un sommet  $u$  tel que  $uv \in E(G)$ . Le **voisinage** d'un sommet  $v$  dans  $G$ , noté  $N_G(v)$  ou  $N(v)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe considéré, est l'ensemble des voisins de  $v$  dans  $G$  :

$$N_G(v) = \{u \in V(G), uv \in E(G)\}.$$

Le **voisinage fermé** d'un sommet  $v$  dans  $G$ , noté  $N_G^+(v)$ , est le voisinage de  $v$  plus le sommet  $v$  lui-même :  $N_G^+(v) = N_G(v) \cup \{v\}$ .

Le **degré** d'un sommet  $v$  dans  $G$ , noté  $deg_G(v)$  est le nombre d'arêtes **incidentes** à  $v$ , c'est-à-dire le nombre d'arêtes ayant une extrémité égale à  $v$ . On a donc  $deg_G(v) = |N_G(v)|$ . Le degré de  $v$  est parfois noté  $deg(v)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe considéré.

Un **chemin** d'un graphe  $G$  est une suite non vide de sommets  $C = u_0u_1u_2 \dots u_k$  telle que pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $u_{i-1}u_i$  est une arête de  $G$ . Un chemin constitue un parcours dans le graphe  $G$ . Un chemin  $C = u_0u_1u_2 \dots u_k$  est un **cycle** si et seulement si  $k \geq 3$  et  $u_0 = u_k$ . Un cycle est donc un parcours dans lequel on revient au point de départ. La **longueur** d'un chemin ou d'un cycle est le nombre  $k$  d'arêtes de celui-ci.

Soit  $G$  un graphe et  $u$  et  $v$  deux sommets de  $G$ . La **distance** entre  $u$  et  $v$  dans  $G$ , notée  $d_G(u, v)$  ou  $d(u, v)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe considéré, est la longueur d'un plus court chemin reliant  $u$  à  $v$ . Si un tel chemin n'existe pas la distance est infinie :  $d_G(u, v) = +\infty$ .

Le **diamètre** de  $G$ , noté  $diam(G)$  est la plus grande distance entre deux sommets de  $G$  :

$$diam(G) = \max\{d_G(u, v), (u, v) \in V^2(G)\}.$$

Une **clique** est un ensemble de sommets  $K \subseteq V(G)$  tel que pour tous sommets  $u$  et  $v$  de  $K$  une arête relie  $u$  et  $v$ .

Un **stable** est un ensemble non vide de sommets  $S \subseteq V(G)$  non voisins deux à deux. Autrement dit, pour tous sommets  $s$  et  $t$  de  $S$ ,  $st \notin E(G)$ .

Soit  $F \subseteq E(G)$  un sous-ensemble de l'ensemble des arêtes de  $G$ . Le **graphe partiel** de  $G$  **engendré** par  $F$  est le graphe  $G' = (V(G), F)$  et est noté  $G|F$ . Si  $F = E(G) - \{e\}$ , alors le graphe partiel de  $G$  engendré par  $F$  est noté  $G - e$ .

Soit  $S \subseteq V(G)$  un sous-ensemble de l'ensemble des sommets de  $G$ . Le **sous-graphe** de  $G$  **engendré** par  $S$ , noté  $G[S]$ , est le graphe  $G[S] = (S, E')$  où  $E'$  est l'ensemble des arêtes de  $G$  ayant leurs deux extrémités dans  $S$ .

Un graphe  $G'$  est un **sous-graphe partiel** de  $G$  s'il existe  $S \subseteq V(G)$  et  $F \subseteq E(G)$  tels que  $G' = (S, F)$ . Cette relation entre  $G$  et  $G'$  est notée  $G' \subseteq G$ .

Un graphe  $G'$  est un **sous-graphe induit** de  $G$  si et seulement s'il existe un ensemble  $S$  de sommets de  $G$  tel que  $G' = G[S]$ .

Soient  $G$  et  $H$  deux graphes. On dit que  $G$  et  $H$  sont **isomorphes** et on note  $G \cong H$  s'il existe une bijection  $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$  telle que pour tous sommets  $u$  et  $v$  de  $G$  on a :

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H).$$

Soient  $G$  et  $H$  deux graphes vérifiant  $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ . La **réunion disjointe** des deux graphes  $G$  et  $H$ , notée  $G + H$ , est définie par  $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$  et  $E(G + H) = E(G) \cup E(H)$ . On dira aussi qu'il s'agit de la **réunion** ou de la **somme** de  $G$  et  $H$ .

On note  $G + G$  ou  $2.G$  la somme  $G_1 + G_2$  où  $G_1$  et  $G_2$  sont deux copies disjointes de  $G$ . On définit récursivement pour tout  $k \geq 3$  le graphe  $k.G$  comme suit :

$$k.G = (k - 1).G + G$$

Un graphe  $G$  est dit **connexe** si pour toute paire de sommets distincts il existe un chemin reliant ces sommets. Par convention le graphe vide, noté  $\emptyset$ , est également connexe.

Une **composante connexe** d'un graphe  $G$  est un sous-graphe connexe maximal  $G'$  de  $G$ , c'est-à-dire tel que pour tout  $v \in V(G) \setminus V(G')$ ,  $G[V(G') \cup \{v\}]$  n'est pas connexe. L'ensemble des composantes connexes de  $G$  est noté  $\mathcal{C}(G)$ .

Le **diamètre sur les composantes connexes**, noté  $diam_{\mathcal{C}}$  est le maximum des diamètres des composantes connexes de  $G$  :

$$diam_{\mathcal{C}}(G) = \max\{diam(C) , C \in \mathcal{C}(G)\}.$$

Le **complémentaire** d'un graphe  $G$ , noté  $\overline{G}$ , est le graphe formé des mêmes sommets et où l'on place une arête si et seulement s'il n'y en a pas dans  $G$ . Formellement,  $\overline{G} = (V(G), \overline{E})$ , où  $\overline{E} = \{uv \notin E(G)\}$ .

Le **produit cartésien** de deux graphes  $G$  et  $H$ , noté  $G \square H$  est le graphe  $K$  contenant  $|V(G)| \cdot |V(H)|$  sommets et construit comme suit :

- $V(K) = \{(u, u'), u \in V(G), u' \in V(H)\}$ ;
- $E(K) = \{(u, u')(v, v'), u = v \text{ et } u'v' \in E(H)\} \cup \{(u, u')(v, v'), u' = v' \text{ et } uv \in E(G)\}$ .

Soit  $G$  un graphe et  $k$  un entier strictement positif. Une  $k$ -**coloration** de  $G$  est une assignation de couleurs aux sommets de  $G$ , c'est-à-dire une fonction  $c$  de  $V(G)$  dans l'intervalle entier  $[1, k] = \{1, 2, \dots, k\}$ . Une  $k$ -**coloration propre** est une  $k$ -coloration  $c$  telle que si  $uv \in E(G)$  alors  $c(u) \neq c(v)$ .

Terminons ce paragraphe par quelques définitions concernant les graphes orientés.

Soit  $\vec{G}$  un graphe orienté. Un **chemin**  $C$  dans  $\vec{G}$  est une suite  $C = u_0u_1u_2 \dots u_k$  de sommets de  $\vec{G}$  telle que pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $\overrightarrow{u_{i-1}u_i} \in A(\vec{G})$ . Un **circuit** est un chemin  $C = u_0u_1u_2 \dots u_k$  vérifiant  $k \geq 3$  et  $u_0 = u_k$ .

Un graphe orienté est dit **acyclique** s'il ne contient pas de circuit. Soit  $u$  un sommet de  $\vec{G}$ . Le sommet  $u$  est un **sommet source** si et seulement si  $u$  ne contient aucun arc entrant. Autrement dit, pour tout  $v \in V(\vec{G})$ ,  $\overrightarrow{vu} \notin A(\vec{G})$ . Le sommet  $u$  est un **sommet puits** si et seulement si  $u$  ne contient aucun arc sortant. Autrement dit, pour tout  $v \in V(\vec{G})$ ,  $\overrightarrow{uv} \notin A(\vec{G})$ . Un **noyau** de  $\vec{G}$  est un ensemble  $S$  de sommets vérifiant :

1. Pour tous sommets  $s$  et  $t$  de  $S$ ,  $\overrightarrow{st} \notin A(\vec{G})$  et  $\overrightarrow{ts} \notin A(\vec{G})$ ;
2. Pour tout sommet  $u \notin S$  il existe un sommet  $s \in S$  tel que  $\overrightarrow{us} \in A(\vec{G})$ .

Dans le cas d'un graphe acyclique, Berge [3] a démontré la propriété suivante :

**Théorème 0.1.1 (Berge [3])** *Si  $\vec{G}$  est un graphe orienté acyclique, alors le noyau de  $\vec{G}$  existe et est unique.*

## 0.2 Principales familles de graphes

Dans cette section nous allons définir les familles de graphes que nous allons utiliser par la suite.

Un **graphe complet** est un graphe  $K$  dans lequel toutes les arêtes sont présentes. On a  $E(K) = \{uv, u, v \in V(K), u \neq v\}$ . Pour  $n \geq 0$ , le graphe complet d'ordre  $n$  est noté  $K_n$ . Le graphe complet  $K_5$ , d'ordre 5, est représenté en Figure 1.

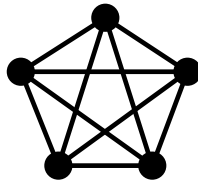
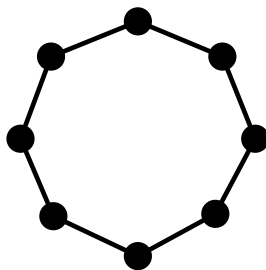


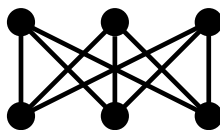
FIGURE 1 – Le graphe complet  $K_5$

Le **chemin**  $P_n$  d'ordre  $n$  est un graphe à  $n$  sommets  $u_1, u_2, \dots, u_n$  et à  $n - 1$  arêtes reliant les sommets successifs :  $E(P_n) = \{u_iu_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1\}$ . Le chemin  $P_7$ , d'ordre 7, est représenté sur la Figure 2.

Pour tout  $n \geq 3$ , le **cycle**  $C_n$  de longueur  $n$  est un graphe à  $n$  sommets  $u_1, u_2, \dots, u_n$  et à  $n$  arêtes vérifiant  $E(C_n) = \{u_nu_1\} \cup \{u_iu_{i+1}, 1 \leq i \leq n - 1\}$ . Le cycle  $C_8$ , d'ordre 8, est représenté sur la Figure 3.

FIGURE 2 – Le chemin  $P_7$ FIGURE 3 – Le cycle  $C_8$ 

Un graphe  $G$  est dit **biparti** s'il existe une partition de  $V(G)$  en deux ensembles non vides  $A$  et  $B$  telle que toute arête de  $G$  relie un sommet de  $A$  avec un sommet de  $B$ . Un graphe  $G$  est **biparti complet** si  $G$  est biparti en deux ensembles  $A$  et  $B$ , et si pour tous  $u \in A$  et  $v \in B$  il existe une arête entre  $u$  et  $v$ . On note  $K_{n,p}$  le graphe biparti complet tel que  $n = |A|$  et  $p = |B|$ . La Figure 4 est un exemple de graphe biparti complet.

FIGURE 4 – Le graphe biparti complet  $K_{3,3}$ 

On peut généraliser cette notion à  $k$  ensembles disjoints. Un graphe  $G$  est dit  **$k$ -parti** s'il existe une partition de  $V(G)$  en  $k$  ensembles non vides  $A_1, A_2, \dots, A_k$  telle que toute arête de  $G$  relie deux sommets appartenant à des parties distinctes. Le graphe  $G$  est  **$k$ -parti complet** s'il est  $k$ -parti en  $k$  ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_k$  et si pour tous  $1 \leq i < j \leq k$  pour tous  $u \in A_i$  et  $v \in A_j$  il y a une arête entre  $u$  et  $v$ . On note  $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  le graphe  $k$ -parti complet de tailles  $n_i = |A_i|$  pour  $1 \leq i \leq k$ .

Un graphe **régulier** (resp.  $k$ -régulier) est un graphe où tous les sommets ont le même degré (resp. degré  $k$ ). Le graphe de la Figure 5 est un graphe 4-régulier.

Un **arbre**  $A$  est un graphe connexe sans cycle. Une **forêt** est un graphe non connexe dont les composantes connexes sont toutes des arbres. Le graphe de la Figure 6 est un arbre.

Une **étoile généralisée**  $E$  (appelée simplement **étoile**) est un arbre où au plus un sommet est de degré supérieur ou égal à 3. Le degré de ce sommet est le nombre de **branches** de  $E$ . Le graphe de la Figure 7 est une étoile à six branches car c'est un arbre et un seul sommet est de degré 6, tous les autres sont de degré 1 ou 2.

Une **chenille**  $C$  est un arbre pour lequel il existe un chemin  $P = u_0 u_1 u_2 \dots u_k$  tel

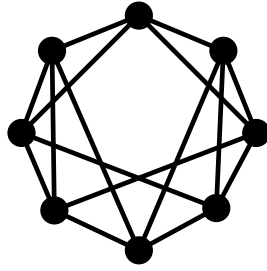


FIGURE 5 – Un graphe 4-régulier

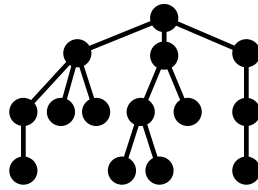


FIGURE 6 – Un arbre

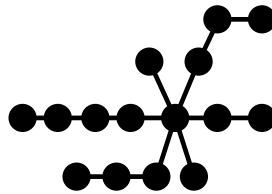


FIGURE 7 – Une étoile à six branches

que pour tout sommet  $v$  il existe un sommet  $u_i$  de  $P$  tel que  $d_G(v, u_i) \leq 1$ . Une chenille est représentée sur la Figure 8, avec le chemin  $P$  constitué par les sommets du haut de la Figure. On observe que ce chemin n'est généralement pas unique.

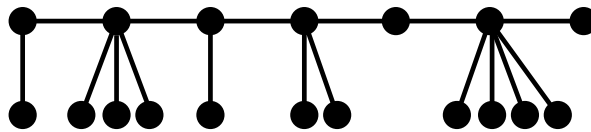


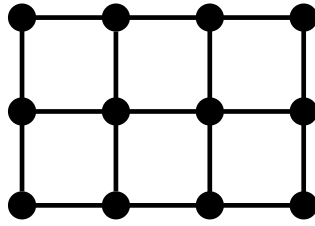
FIGURE 8 – Une chenille

Un **graphe planaire** est un graphe pouvant être dessiné de façon planaire, c'est-à-dire dessiné sur le plan de telle sorte qu'aucune arête n'en croise une autre.

Un exemple de graphe planaire est la **grille**  $n \times p$  avec  $n > 0$  et  $p > 0$ , notée  $G_{n,p}$ , et définie par le produit cartésien de deux chemins :  $G_{n,p} = P_n \square P_p$ . La grille  $3 \times 4$  est représentée sur la Figure 9.

Soit  $G$  un graphe planaire dessiné sur le plan  $\mathcal{P}$ . Une **face**  $F$  de  $G$  est une région du



FIGURE 9 – La grille  $3 \times 4$  notée  $G_{3,4}$ 

plan  $\mathcal{P}$  délimitée par des arêtes de  $G$  tel que pour tous points  $x$  et  $y$  de  $F$  il existe une courbe reliant  $x$  et  $y$  ne rencontrant ni sommet ni arête. La **face extérieure** de  $G$  est la face de  $G$  d'aire infinie.

Un **graphe planaire extérieur** est un graphe planaire qui peut être dessiné sur le plan sans croisements d'arêtes et de telle sorte que tous les sommets soient incidents à la face extérieure. Le graphe de la Figure 10 est un graphe planaire extérieur.

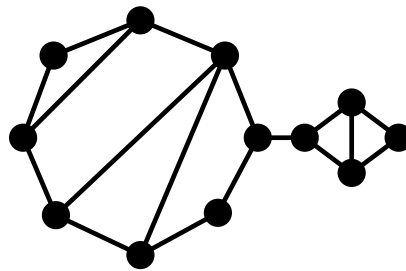


FIGURE 10 – Un graphe planaire extérieur.

Pour tout entier  $g \geq 0$ , un graphe de **genre**  $g$  est un graphe pouvant être dessiné sans croisements d'arêtes sur une surface de genre  $g$ . Les graphes  $K_5$  et  $K_{3,3}$  représentés respectivement sur les Figures 1 et 4 sont de genre 1.



# Première partie

## Le jeu de domination et ses variantes



# Chapitre 1

## Les jeux combinatoires

Les jeux, que l'on rencontre dans toutes les sociétés humaines, ont depuis toujours eu une certaine importance que ce soit pour se divertir ou afin de confronter ses capacités intellectuelles. Ainsi, l'étude de ces jeux existe depuis très longtemps même si les mathématiciens ne s'y sont réellement intéressés que depuis la fin du  $XIX^e$  siècle. Dans ce Chapitre, nous introduirons une famille particulière de jeux : les *jeux combinatoires*. Après un bref historique de ces jeux, nous définirons les notions principales et donnerons les outils majeurs permettant d'étudier ces jeux.

## 1.1 Définitions, historique

Commençons par définir ce qu'est un jeu combinatoire.

La notion de jeu combinatoire correspond à une définition précise adoptée par l'ensemble de la communauté scientifique du domaine. Formée de huit points, elle a été donnée par Berlekamp, Conway et Guy dans leur célèbre livre *Winning ways for your mathematical plays* [4] :

1. Il y a exactement **deux joueurs**.
2. Le nombre de **positions** de jeu possibles est **fini**, et la **position de départ** est donnée.
3. Les déplacements permettant d'aller d'une position à une autre sont définis par des **règles**. Celles-ci peuvent être communes aux deux joueurs (**jeu impartial**) ou spécifiques à chaque joueur (**jeu partisan**).
4. Les joueurs jouent **alternativement**, et on ne peut passer son tour.
5. L'information est **totale**, c'est-à-dire que les joueurs connaissent la **position courante** et l'ensemble des règles.
6. Le **hasard** n'intervient pas dans le déroulement du jeu.
7. Le **perdant** est le joueur qui ne peut plus jouer (en version dite *normale*).
8. Le jeu doit se terminer en un nombre de coups **fini**, on ne doit pas pouvoir revenir à une position antérieure. Le jeu est dit **acyclique**.

L'exemple de jeu combinatoire le plus connu est certainement le jeu de **Nim**. Pour faire une partie il suffit d'avoir une collection d'objets similaires comme des jetons, des cailloux, des allumettes... La position de départ est un ensemble de  $n$  tas d'allumettes. Un coup consiste à enlever une ou plusieurs allumettes de l'un des tas. Les deux joueurs jouent alternativement et le gagnant de la partie est le joueur retirant la dernière allumette. On peut remarquer que chacun des huit points de la définition est vérifié pour le jeu de Nim.

Précisons maintenant les définitions usuelles communes à l'ensemble des jeux combinatoires. Ces définitions seront illustrées par des exemples d'un jeu de Nim à deux tas où la position de départ est deux tas de 3 et 2 allumettes, qui sera notée 32.

Une **position** (ou configuration)  $P$  d'un jeu combinatoire  $\mathcal{J}$  est un état de  $\mathcal{J}$ . Par exemple il s'agit d'un placement des pièces sur un damier pour le jeu de dames.

La **position initiale** est l'état du jeu au départ de la partie, définie dans  $\mathcal{J}$ .

Une **position terminale** (ou finale) est une position où l'on ne peut plus jouer de coup (par exemple le mat aux échecs).

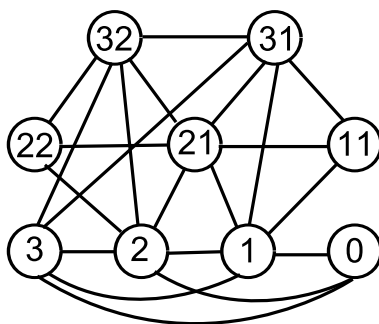


FIGURE 1.1 – Le graphe des configurations pour le jeu de Nim 32, où les arcs sont orientés vers le bas ou vers la droite s’il sont horizontaux.

Pour notre exemple, la position initiale est 32, une position courante est par exemple 21, et la position finale est par définition du jeu lorsqu’il n’y a plus d’allumettes, notée 0.

Un **coup** est un choix du joueur qui modifie la position  $P$  en une nouvelle position  $P'$ . Un coup peut être vu comme une paire  $(P, P')$  pour laquelle le déplacement de  $P$  vers  $P'$  doit être autorisé. Pour notre exemple,  $(32, 21)$  est le coup où l’on enlève deux allumettes du tas en contenant trois. Par contre,  $(32, 11)$  n’est pas un coup car on ne peut pas enlever des allumettes de plusieurs tas simultanément.

Une **option** d’une position  $P$  est une position  $P'$  atteignable en un coup depuis  $P$ . L’ensemble des options de  $P$  est noté  $Opt(P)$ , il s’agit de l’ensemble des choix possibles proposés au joueur qui doit jouer. Pour le jeu de Nim 32, l’ensemble des options est  $Opt(32) = \{22, 21, 2, 31, 3\}$ .

Une **partie** est une suite de coups qui aboutit à une position terminale. Sur le jeu de Nim 32, voici un exemple de partie :

$$32 \rightarrow 22 \rightarrow 21 \rightarrow 11 \rightarrow 1 \rightarrow 0.$$

Les **règles** du jeu  $\mathcal{J}$  correspondent donc à la donnée de la fonction  $r_{\mathcal{J}}$  qui associe à toute position  $P$  de l’ensemble des positions  $\mathcal{P}(\mathcal{J})$  un ensemble  $A \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{J})$  qui correspond aux positions atteignables en un coup depuis  $P$ . Pour le jeu de Nim à deux tas, la valeur de la fonction  $r_{Nim}$  pour une position  $n_1n_2$  vaut :

$$r_{Nim}(n_1n_2) = \{p_1n_2, 0 \leq p_1 < n_1\} \cup \{n_1p_2, 0 \leq p_2 < n_2\}.$$

Le **graphe des configurations** d’un jeu  $\mathcal{J}$  est un graphe orienté acyclique  $G_{\mathcal{J}} = (V_{\mathcal{J}}, E_{\mathcal{J}})$  où les sommets sont les positions de jeu ( $V_{\mathcal{J}} = \mathcal{P}(\mathcal{J})$ ) et où il y a un arc de  $P$  vers  $P'$  si et seulement si  $P'$  est une option de  $P$ . Les positions finales sont donc les sommets puits de  $G_{\mathcal{J}}$  (sans arcs sortants). La Figure 1.1 est un exemple de graphe des configurations : celui du jeu de Nim avec la position de départ 32.

Les deux joueurs, communément appelés **Alice** et **Bob**, jouent à tour de rôle. C’est par courtoisie (bien que cela ne la favorise pas systématiquement) toujours Alice qui commence la partie. Pour une position intermédiaire de jeu, le joueur qui doit jouer est appelé le **Suivant** (et est noté  $\mathcal{N}$  pour "Next"), et le joueur qui vient de jouer est le **Précédent** (noté  $\mathcal{P}$ ).

Une **stratégie gagnante** pour le joueur  $A$  est un choix de coups qui assure le gain de la partie quel que soit les choix de l'adversaire.

Le **type (outcome en anglais)** d'une position  $P$ , noté  $o(P)$ , correspond au joueur qui peut gagner la partie sur cette position :

- $o(P) = \mathcal{N}$  si le Suivant a une stratégie gagnante. On dit que  $P$  est une  $\mathcal{N}$ -position ou une position gagnante.
- $o(P) = \mathcal{P}$  si le Précédent a une stratégie gagnante quel que soit le choix du Suivant. On dit que  $P$  est une  $\mathcal{P}$ -position ou position perdante.
- $o(P) = \mathcal{A}$  si Alice a une stratégie gagnante qu'elle commence ou non.
- $o(P) = \mathcal{B}$  si Bob a une stratégie gagnante qu'il commence ou non.

Un jeu  $\mathcal{J}$  est dit **acyclique** si l'on ne peut revenir à une position antérieure déjà rencontrée au cours de la partie. Le terme provient du fait que l'on ne rencontre pas de cycle dans le graphe des configurations.

Dans le cas d'un jeu non acyclique, la fin de la partie n'est pas assurée. C'est par exemple le cas pour le jeu d'échecs lorsque il ne reste que les deux rois sur l'échiquier. Dans ces conditions, on décide la plupart du temps que la partie se termine sur un match nul.

Dans cette thèse, nous n'aborderons pas ce type de jeu. Nous n'étudierons que des jeux combinatoires qui sont tous par définition acycliques.

Un jeu  $\mathcal{J}$  est dit **impartial** si les deux joueurs sont soumis aux mêmes règles. À l'opposé,  $\mathcal{J}$  est un jeu **partisan** si les deux joueurs ont chacun leur ensemble de règles spécifiques.

Pour un jeu impartial, comme Alice et Bob doivent respecter les mêmes règles, seuls les types  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{P}$  apparaissent dans les positions. À l'opposé, pour un jeu partisan, les quatre types  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{A}$  peuvent être rencontrés.

Dans le cas d'un jeu impartial acyclique, le graphe de configurations est lui aussi acyclique. De plus, l'ensemble des  $\mathcal{P}$ -positions de  $\mathcal{J}$  constitue le **noyau** de  $G_{\mathcal{J}}$ .

Remarquons que la recherche des stratégies gagnantes dans un jeu combinatoire peut s'effectuer en construisant son graphe des configurations et son noyau. Dans la pratique, la taille du graphe des configurations étant exponentielle par rapport au nombre maximal de choix possibles  $\max\{|Opt(P)|, P \in V_{\mathcal{J}}\}$ , il n'est en pratique jamais réellement construit, et la plupart du temps n'est utilisé qu'en vue de démonstrations structurelles.

Deux jeux  $J_1$  et  $J_2$  sont dits **isomorphes** s'il existe une application  $\varphi$  allant de l'ensemble des positions de  $J_1$  dans celles de  $J_2$  et telle que si  $P$  est une position non terminale de  $J_1$  alors on doit avoir  $\varphi(Opt(P)) = Opt(\varphi(P))$ . Si une position  $P$  de  $J_1$  est terminale il faut que  $\varphi(P)$  soit également une position terminale de  $J_2$ . Cette notion d'isomorphisme entre deux jeux est fréquemment utilisée pour étudier un jeu combinatoire  $J_1$ . En effet, si l'on découvre un isomorphisme avec un jeu  $J_2$  déjà résolu, ces résultats peuvent être utilisés sur le jeu  $J_1$ . Dans ce cas les graphes de configurations sont également isomorphes.

Regardons maintenant à quel jeux connus du grand public peut s'appliquer la définition des jeux combinatoires. Le jeu de **dames** ne satisfait pas le point numéro 8. En effet dès que l'on possède une dame on peut lui faire faire des aller-retours indéfiniment. La partie peut donc ne jamais se terminer.

Ce point 8 est également non vérifié pour les variantes du jeu de dames : dames



anglaises, turques, chinoises.

De même, l'existence du *pat* au **jeu d'échecs** entraîne qu'il peut y avoir des parties sans perdant.

Pour des jeux tels que le **morpion** ou le **puissance 4**, on peut remplir la grille sans toutefois aligner  $k$  jetons de même couleur. Il peut donc y avoir des positions "égalité" (sans gagnant), ce qui ne satisfait pas le point numéro 7.

Le jeu des **dominos** et une grande partie des jeux de cartes comme le **tarot**, le **poker** ou la **belote** contiennent une part de hasard concernant la distribution et le tirage.

Le **Chi-Fou-Mi** également connu sous le nom **Pierre-Feuille-Ciseaux** ne vérifie pas le point 4 car les joueurs jouent simultanément. En outre, l'information n'est pas totale.

Enfin pour des jeux comme le **réversi**, l'**awalé** ou le **go**, le gain de la partie est déterminé par un comptage de points. Il peut y avoir égalité et le point numéro 7 n'est pas vérifié.

On observe donc que cette définition très restrictive quant à la condition de gain (point 7) ne s'applique qu'à très peu de jeux connus du grand public. Citons néanmoins le jeu de **Nim** ou sa version misère plus connue sous le nom de **Mariénbad**.

Ces définitions ont été proposées dans le but de donner un cadre à un certain nombre de problèmes posés par les mathématiciens depuis la fin du  $XIX^e$  siècle. Les premiers jeux combinatoires ayant intéressé ceux-ci sont les jeux de type **Nim**. Le jeu est formé de plusieurs tas d'allumettes et un coup consiste à retirer des allumettes d'un ou plusieurs tas selon un ensemble de règles. Le joueur retirant la dernière allumette est déclaré gagnant. Pour le jeu de Nim classique la règle précise que l'on peut enlever autant d'allumettes que l'on veut mais sur un seul tas à la fois. Ce jeu a été résolu par C.L. Bouton dans [6] en utilisant le ou exclusif (xor), nommé dans ce domaine *nim-somme*. En ce qui concerne sa version misère, le jeu de Mariénbad, les stratégies gagnantes sont également connues. Elle sont les mêmes que pour le jeu de Nim, excepté pour la position contenant uniquement des tas d'une allumette. Dans ce cas on doit enlever une allumette de plus ou de moins suivant la parité du nombre de tas.

Introduisons maintenant une fonction qui associe à toute position d'un jeu combinatoire un entier positif ou nul. Cette valeur est nulle si et seulement s'il s'agit d'une  $\mathcal{P}$ -position. Le calcul de cette fonction, toujours réalisable, permet également de connaître les stratégies gagnantes. Il s'agit de la fonction de Sprague-Grundy.

## 1.2 La fonction de Sprague-Grundy

La fonction de Sprague-Grundy, notée  $\rho$  s'il n'y a aucune ambiguïté sur le jeu considéré, associe à toute position d'un jeu combinatoire un entier positif ou nul, et est à la base de la théorie des jeux combinatoires impartiaux. Elle a été introduite indépendamment par R. Sprague dans [29] et par P.M. Grundy dans [12].

Elle permet non seulement de savoir si le premier joueur a une stratégie gagnante, mais également de connaître cette stratégie, c'est à dire le coup que doit jouer ce joueur pour gagner la partie.

**Définition 1.2.1 (Fonction de Sprague-Grundy, notée  $\rho$ )** Elle est définie de

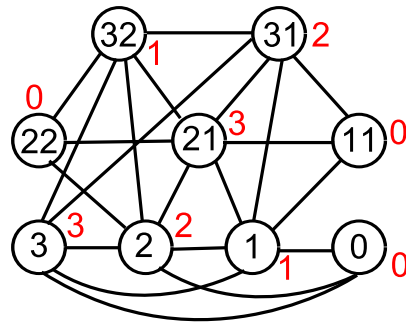


FIGURE 1.2 – Nimbers (en rouge) des positions du jeu de Nim 32.

manière récursive :

- $\rho(P) = 0$  si  $P$  est une position terminale du jeu ;
- sinon  $\rho(P) = \text{mex}(\{\rho(P'), P' \in \text{Opt}(P)\})$ , où  $\text{mex}(E)$  est le plus petit entier n'apparaissant pas dans l'ensemble  $E$ .

La valeur de Grundy  $\rho(P)$  d'une position  $P$  est aussi appelée **nimber** de  $P$ . Cette dénomination provient du fait qu'une pile de hauteur  $k$  dans le jeu de Nim a pour nimber  $k$ . Nous dirons que deux positions  $P_1$  et  $P_2$  sont **équivalentes** si elles ont le même nimber. Ainsi une position  $P$  de valeur de Grundy  $k$  correspond (en termes d'équivalences de jeux) à un jeu de Nim à un tas de taille exactement  $k$ . Revenons à notre exemple du jeu de Nim 32. On peut calculer la valeur de Grundy de la position initiale en s'aidant du graphe des configurations, comme on peut l'observer sur la Figure 1.2. On part de la position terminale qui a par définition un nimber nul. Ensuite on remonte peu à peu dans le graphe en calculant le *mex* lorsque l'ensemble des options ont des nimbers connus. On obtient ainsi le nimber de la position initiale : 1 pour cet exemple.

Ce calcul permet également de trouver les stratégies gagnantes. En effet, une première propriété de la fonction de Sprague-Grundy est que les positions perdantes sont exactement celles dont le nimber est nul.

**Proposition 1.2.2** *Soit  $P$  une position d'un jeu combinatoire. On a  $o(P) = \mathcal{P}$  si et seulement si  $\rho(P) = 0$ .*

Cette propriété se montre aisément par induction. Elle est vraie pour une position terminale par définition et, pour  $P$  non terminale, la définition du *mex* entraîne qu'il n'existe pas d'option de nimber nul. Il n'y a donc pas d'option perdante. On en déduit que  $P$  est perdante.

D'autre part, si  $\rho(P) > 0$  alors il suffit de trouver une option de nimber nul (qui existe par définition du *mex*) pour connaître la stratégie gagnante. On en conclut que la connaissance des nimbers permet également de déterminer les stratégies gagnantes.

Cette fonction vérifie également une propriété d'addition dans le contexte de composition de jeux, très utile pour l'étude du jeu de domination (c.f Chapitre 2), et d'un grand nombre de jeux combinatoires basés sur la composition de jeux plus petits comme le jeu

de Nim à  $n$  tas qui correspond à  $n$  jeux de Nim à un tas. Commençons par définir la notion d'**addition de jeux**.

**Définition 1.2.3** Soient  $J_1$  et  $J_2$  deux jeux combinatoires. La **somme** des deux jeux  $J_1$  et  $J_2$ , notée  $J_1 + J_2$  est un nouveau jeu  $J$  respectant les règles suivantes :

- À tour de rôle, chaque joueur choisit un des deux jeux et joue sur ce jeu.
- Le premier joueur ne pouvant plus jouer sur aucun des deux jeux est déclaré perdant.

Une propriété fondamentale pour les jeux formés d'une somme est que le nimber d'une position du jeu  $J = J_1 + J_2$  peut s'exprimer en fonction des nimbers des positions des jeux  $J_1$  et  $J_2$  :

**Théorème 1.2.4 (Addition des jeux combinatoires [12])** Soient  $J_1$  et  $J_2$  deux jeux combinatoires et  $P_1$  et  $P_2$  deux positions de  $J_1$  et  $J_2$  respectivement. Soit  $P = P_1 + P_2$  la position du jeu  $J = J_1 + J_2$  formée des deux positions  $P_1$  et  $P_2$ . On a :

$$\rho(P_1 + P_2) = \rho(P_1) \oplus \rho(P_2),$$

où  $\oplus$  est le "ou exclusif" bit à bit ou XOR, souvent appelé **nim-somme**.

Pour l'exemple du jeu de Nim, la valeur de Grundy du jeu de Nim à  $n$  tas est exactement la nim-somme de la taille de chacun des tas.

Remarquons que cette somme de jeux est une manière parmi d'autres de composer des jeux combinatoires. Il s'agit ici de la somme disjonctive, mais il existe d'autres types de compositions comme la somme conjonctive ou encore sélective [7].

Définissons maintenant la notion de période pour un jeu combinatoire.

**Définition 1.2.5** Soit  $J$  un jeu combinatoire et  $E = \{P_0 P_1 \dots P_n \dots\}$  un sous-ensemble ordonné de l'ensemble des positions de  $J$ . On appelle **séquence de Grundy** ou **nim-séquence** de  $E$  la suite des nimbers des positions de  $E$  :  $S(E) = (\rho(P_i))_{i \geq 0}$ . On dit que l'ensemble  $E$  est **périodique** s'il existe deux entiers  $p > 0$  et  $q > 0$  tels que pour tout  $n \geq q$ , on a  $\rho(P_{n+p}) = \rho(P_n)$ .

L'étude d'un jeu combinatoire, dans la plupart des cas, se résume à la recherche d'une période sur sa nim-séquence. Cette recherche passe bien entendu par une numérotation judicieuse des positions de jeu. Notons que pour certains jeux la période peut être arithmétique de raison  $\alpha$ , c'est-à-dire qu'à partir d'un certain rang  $q$  on observe que pour tout  $n \geq q$  on a  $\rho(P_{n+p}) = \rho(P_n) + \alpha$ .

Nous allons à présent définir une famille de jeux qui nous sera utile pour l'étude du jeu de domination : les jeux octaux.

## 1.3 Les jeux octaux

La famille des jeux combinatoires de type Nim, dont certains ont fait l'objet de nombreux articles [16] [10], a été formalisée sous la dénomination de **jeux octaux**. Un jeu octal est défini de la façon suivante [4] :

- La position initiale doit être équivalente à des tas de jetons, et la position courante également.
- Un joueur ne peut jouer que sur un seul tas à la fois.
- Il peut, soit vider le tas, soit enlever une partie des jetons, soit diviser le tas en deux en enlevant ou non des jetons.

Soit  $J$  un jeu octal. Alors les règles du jeu de  $J$  sont définies par un  $(k + 1)$ -uplet  $J = d_0 \bullet d_1 d_2 \dots d_k$  ( $k$  peut être infini), dont on tire les règles ainsi : pour tout  $i$  ( $0 \leq i \leq k$ ),  $d_i$  indique dans quelles conditions et de quelle façon on peut enlever  $i$  jetons d'un tas. Comme  $0 \leq d_i \leq 7$ , on peut écrire  $d_i$  en binaire sur 3 bits :  $d_i = a_2 a_1 a_0$ . On a :

- $a_0 = 1$  si et seulement si on peut enlever  $i$  jetons en vidant le tas ;
- $a_1 = 1$  si et seulement si on peut enlever  $i$  jetons sans ni vider ni diviser le tas ;
- $a_2 = 1$  si et seulement si on peut enlever  $i$  jetons en divisant le tas en deux tas non vides.

Par conséquent, suivant les valeurs de  $d_i$  on sait de quelle manière on est autorisé à retirer  $i$  jetons d'un tas.

Si  $d_i =$

- 0 : c'est impossible.
- 1 : le tas contient exactement  $i$  jetons, on les enlève tous.
- 2 : le tas contient strictement plus de  $i$  jetons, on ne divise pas le tas.
- 3 : le tas contient au moins  $i$  jetons, on ne divise pas le tas.
- 4 : le tas contient au moins  $i + 2$  jetons, on divise le tas en deux tas non vides.
- 5 : on peut soit diviser le tas en deux tas non vides, soit enlever tous les jetons.
- 6 : on peut, sans enlever tous les jetons, soit diviser le tas soit ne pas le faire.
- 7 : on peut tout faire (enlever le tas entier, le diviser en deux, ou le diminuer).

Remarquons que comme dans un jeu combinatoire on ne peut passer son tour, les valeurs possibles pour  $d_0$  (lorsque l'on n'enlève aucun jeton) sont seulement 0 (interdit) ou 4 (séparation du tas).

Le jeu de Nim est évidemment un jeu octal. Comme l'on ne peut séparer les tas et que l'on peut enlever autant de jetons qu'il en contient, il s'agit du jeu octal  $0 \bullet 333333 \dots = 0 \bullet 3^\infty$ .

Simple dans leur définition et pouvant se jouer par le grand public avec de simples allumettes, les jeux octaux sont une des familles de jeux combinatoires les plus étudiées [4] [1] [10].

Étudiés depuis de nombreuses années, certains d'entre-eux ont jusqu'ici résisté à la puissance de calcul des processeurs. A. Flammenkamp [10] met à disposition l'état de ses recherches sur les jeux octaux à 2 et 3 chiffres. On peut observer que plusieurs jeux octaux ont des périodes très grandes, comme c'est le cas pour le jeu octal  $0 \bullet 106$  qui a une période 328226140474 (de l'ordre de  $2^{38}$ ), ou que d'autres jeux octaux n'ont aucune période en deçà de  $2^{40}$ .

Cette famille de jeux a également été étudiée dans sa version misère, c'est à dire où le joueur retirant le dernier jeton perd la partie [2].

Cette famille de jeux va nous intéresser pour la résolution du jeu de domination sur des familles de graphes de taille linéaire telles que les chemins, les puissances de chemins,

ou encore les 1-chenilles.

Soit  $J$  un jeu octal à  $k$  chiffres. Soit  $P$  une position de  $J$  dont le plus grand tas contient  $n$  jetons. Toute option de  $P$  est constituée de tas dont le plus grand contient au minimum  $\lceil \frac{n-k}{2} \rceil$  jetons. Par conséquent, si pour un jeu octal  $J$  on observe une période jusqu'à un certain rang  $n$ , alors cette période est répétée à l'infini. Plus formellement :

**Théorème 1.3.1 (Répétition de la période des jeux octaux [4])** *Soit  $J$  un jeu octal à  $k$  chiffres  $J = d_0 \bullet d_1 d_2 \dots d_k$  ( $k$  fini) et  $Q_n$  un tas de taille  $n$ . S'il existe  $p > 0$  (période) et  $q > 0$  (pré-période) tels que*

$$\rho_J(Q_{n+p}) = \rho_J(Q_n) \text{ pour tout } n \text{ avec } q \leq n \leq 2q + p + k.$$

Alors

$$\rho_J(Q_{n+p}) = \rho_J(Q_n) \text{ pour tout } n \geq q.$$

**Preuve:** Par récurrence sur  $n$ . Si  $n \leq 2q + k$ , l'égalité est vraie. Posons maintenant  $n > 2q + k$ . Comme on ne peut retirer plus de  $k$  jetons en un seul coup, Les options de  $Q_{n+p}$  sont des réunions d'au plus deux tas dont la taille du plus grand est au moins  $\lceil \frac{n+p-k}{2} \rceil$ .

Soit  $Q_t \cup Q_v$  une option de  $Q_{n+p}$  avec  $t \geq v$ . Comme  $n > 2q + k$  on a  $t > \lceil \frac{2q+k+p-k}{2} \rceil$ , soit  $t \geq q + p$ . On en déduit que  $\rho(Q_t) = \rho(Q_{t-p})$ . Par conséquent :

$$\rho(Q_t \cup Q_v) = \rho(Q_t) \oplus \rho(Q_v) = \rho(Q_{t-p}) \oplus \rho(Q_v) = \rho(Q_{t-p} \cup Q_v)$$

Mais  $Q_{t-p} \cup Q_v$  est une option de  $Q_n$ . On peut donc identifier les nombres des options de  $Q_{n+p}$  et de  $Q_n$ . On en conclut que  $\rho(Q_{n+p}) = \rho(Q_n)$  ■

Ce théorème nous permet d'arrêter le calcul des nimbers à  $2q + p + k$  lorsque une période  $p$  a été découverte après une pré-période  $q$ , en sachant que celle-ci est répétée à l'infini.

Néanmoins, rien ne permet à ce jour de savoir si les jeux octaux sont tous périodiques. Plus précisément, aucun jeu octal non périodique n'a été découvert à ce jour, et la plupart des chercheurs du domaine pensent qu'il n'en n'existe pas :

**Conjecture 1.3.2 (Périodicité des Jeux Octaux)** *Soit  $J$  un jeu octal et  $Q_n$  un tas de taille  $n \in \mathbb{N}$ . Il existe  $q \geq 0$  (pré-période) et  $p > 0$  (période) tel que pour tout  $k \geq q$ ,  $\rho_J(Q_k) = \rho_J(Q_{k+p})$ .*



## Chapitre 2

### Le jeu de Domination

Dans ce chapitre, nous étudierons un jeu combinatoire consistant à marquer les sommets d'un graphe  $G$ , le **jeu de domination** également appelé Node-Kayles.

La connaissance du type d'un graphe  $G$  pour le jeu de domination étant un problème difficile, nous nous intéresserons à des familles particulières de graphes. Nous donnerons une caractérisation des éléments perdants ou, le cas échéant, un algorithme polynomial permettant de connaître le type d'un élément de cette famille.

## 2.1 Définitions

Le jeu de domination tient son nom du fait qu'à la fin de la partie les sommets marqués forment un ensemble dominant du graphe, c'est à dire que tout sommet est marqué ou est voisin d'un sommet marqué. C'est le cas particulier à une couleur d'un jeu combinatoire de coloration propre  $[G, k]$  d'un graphe  $G$  avec  $k$  couleurs :

- Chaque joueur colorie proprement et alternativement un sommet de  $G$  avec une des  $k$  couleurs ;
- Le premier joueur ne pouvant pas colorier de sommet est déclaré perdant.

La *position*  $\mathcal{C}$  courante du jeu (à n'importe quel moment de la partie) est donc un graphe  $G$  et une  $k$ -coloration partielle de ses sommets :  $\mathcal{C} = (G, c)$ . Nous dirons que l'ensemble des positions atteignables depuis une position  $\mathcal{C}$  sont les options de  $\mathcal{C}$ , et cet ensemble sera noté  $Opt(\mathcal{C})$ .

Le jeu de domination est le cas à une couleur de ce jeu. Toutefois, la résolution du jeu de domination suffirait pour connaître les nimbers du jeu de coloration pour tout  $k \geq 2$  :

**Proposition 2.1.1** *Le jeu de coloration  $[G, k]$  est isomorphe au jeu de domination sur  $G \square K_k$*

Où  $\square$  est le produit cartésien de graphes.

**Preuve:** Premièrement, le nombre de choix possibles y est identique, car  $V(G \square K_k) = k * |V(G)|$ . Dans le jeu de domination, on observe que tout sommet  $v$  de  $G$  est représenté par une clique de  $k$  sommets  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Montrons que dans le jeu  $[G, k]$  le coup  $(v, i)$  (colorier  $v$  avec la couleur  $i$ ) est équivalent au marquage de  $v_i$  dans le jeu de domination, c'est à dire que chaque couche du produit cartésien représente une couleur.

Remarquons que dans le jeu  $[G, k]$  le coup  $(v, i)$  interdit de recolorier  $v$  et de colorier ses voisins avec la couleur  $i$ . De plus, ce sont les seules contraintes amenées par ce coup.

Jouons maintenant sur  $v_i$  dans le jeu de domination. On observe que ce coup empêche le marquage de tous les  $v_j$  (pour  $1 \leq j \leq k$ ), ce qui est équivalent à l'interdiction de recolorier  $v$ , et empêche aussi le marquage des voisins de  $v_i$  dans la même couche  $i$ , soit dans  $[G, k]$  l'interdiction de colorier les voisins de  $v$  avec  $i$ . Comme ces équivalences peuvent également être vérifiées à tout moment de la partie, on en déduit la proposition. ■

Nous allons donc dans cette partie nous intéresser uniquement au jeu de domination car sur certaines familles de graphes il est équivalent non seulement à notre jeu de coloration,



mais également à des jeux octaux ou d'autres jeux connus comme Dawson Chess ou le jeu Node-Kayles [8].

D'autre part la version orientée du jeu de domination existe également. Le graphe de départ  $G$  est orienté, et on ne peut marquer un sommet ayant un successeur déjà marqué. Pour cette version plusieurs équivalences existent là aussi avec d'autres jeux combinatoires connus comme le jeu octal  $0 \bullet 37$  qui correspond au jeu de domination sur un chemin orienté. De plus, le jeu de domination orienté peut modéliser l'ensemble des jeux combinatoires impartiaux acycliques. En effet, jouer à un jeu impartial acyclique  $\mathcal{I}$  est équivalent à jouer au jeu de domination sur son **graphe de coups**  $H = (V, E)$ , orienté [9].

Le graphe de coups  $H = (V, E)$  d'un jeu  $\mathcal{I}$  est un graphe orienté où chaque sommet  $v \in V$  correspond à un coup possible. Par exemple pour notre jeu de coloration  $[G, k]$  on a  $v = (s, i)$  où  $s$  est un sommet de  $G$  et  $i$  une couleur ( $1 \leq i \leq k$ ). Il y a un arc  $e = (u, v) \in E$  ds le graphe de coups si et seulement si l'exécution du coup  $u$  interdit par la suite le coup  $v$ . Pour notre exemple  $[G, k]$  il y a un arc entre  $(s, i)$  et  $(s, j)$  ou entre  $(s, i)$  et  $(t, i)$  si  $t \in N_G(s)$ .

Dans cette partie nous étudierons uniquement la version non orientée du jeu de domination.

Nous allons, pour faciliter les notations, redéfinir le jeu de domination comme un jeu  $\mathcal{D}$  basé sur le retrait de sommets dans un graphe  $G$  :

- Chaque joueur choisit alternativement un sommet  $v$  de  $G$  et retire le voisinage fermé de  $v$  :  $N_v^+(G)$
- Le joueur retirant le dernier sommet est déclaré gagnant.

Dans le jeu  $\mathcal{D}$  le graphe considéré varie à chaque coup, il s'agit pour une position donnée d'un sous-graphe  $G'$  du graphe de départ  $G$  (soit  $G' \subseteq G$ ) et la position courante  $\mathcal{C}$  est entièrement définie par le graphe  $G'$ . On peut effectivement écrire  $\mathcal{C} = G'$ . Comme le fait de marquer le sommet  $v$  dans le jeu de domination empêche, pour le reste de la partie, de marquer le sommet  $v$  ainsi que ses voisins, on remarque que le choix de  $v$  a le même impact dans  $\mathcal{D}$  que dans le jeu de domination. Ces deux jeux sont donc bien isomorphes. Par conséquent, nous allons par la suite étudier le jeu  $\mathcal{D}$  plutôt que le jeu de domination au sens strict, étant donné que toute position  $\mathcal{C}$  est plus facilement exprimable dans  $\mathcal{D}$  (un graphe  $G'$  au lieu d'un couple  $(G, A)$ ).

Par abus de langage, nous dirons que  $\mathcal{D}$  est le jeu de domination.

Cette simplification nous permet d'obtenir une expression des options de  $G$  sous forme de sous-graphes de  $G$  :

**Proposition 2.1.2**  $Opt(G) = \left\{ G[V(G) \setminus N_G^+(u)], u \in V(G) \right\}$ . Où  $N_G^+(u)$  est le voisinage de  $u$  dans  $G$ ,  $u$  compris.

Prenons l'exemple d'un chemin  $P_n$  ( $n \geq 3$ ). Ses options dans le jeu de domination sont des réunions d'au plus deux chemins :

$$Opt(P_n) = \{ P_{n-2}, P_{n-3}, P_i + P_{n-i-3}, 1 \leq i \leq n-4 \}$$

que l'on peut réécrire par symétrie et en posant  $P_{-1} = P_0 = \emptyset$  :

$$\text{Opt}(P_n) = \{P_i + P_{n-i-3}, -1 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor\}$$

Pour connaître le type d'un graphe  $G$  et également les stratégies gagnantes (s'il en existe), nous utiliserons la fonction de Sprague-Grundy notée  $\rho$  et son calcul récursif par minimum exclu (*mex*), en partant de  $\rho(G) = 0$  pour le graphe vide  $G = \emptyset$ . Comme il existe évidemment un grand nombre de jeux sur les graphes, précisons que dans tout le chapitre nous parlerons de nimber d'un graphe  $G$  noté  $\rho(G)$ ,  $G$  étant formellement la position  $G$  dans le jeu de domination  $\mathcal{D}$ . Toutefois lorsqu'on est amené à comparer différents jeux comme c'est le cas dans les deux chapitres suivants, nous noterons  $\rho_{\mathcal{J}}(G)$  le nimber de  $G$  dans le jeu  $\mathcal{J}$ .

En utilisant la formule de l'expression des options (Proposition 2.1.2), on obtient :

**Proposition 2.1.3 (Calcul récursif des nimbers)** *Soit  $G$  un graphe non vide. On a :*

$$\rho(G) = \text{mex}\{\rho(G[V(G) \setminus N_G^+(u)]), u \in V(G)\}.$$

Grâce à cette formule, on peut calculer la valeur de Grundy de n'importe quel graphe de façon récursive.

Le problème est qu'il faut connaître la valeur de Grundy d'un grand nombre de sous-graphes de  $G$  pour calculer celle de  $G$ . En effet, pour un graphe  $G$  à  $n$  sommets le nombre d'options de  $G$  est au plus  $n$ . D'autre part, une option de  $G$  a au plus  $n - 1$  sommets. Si l'on note  $C(n)$  la complexité au pire du calcul du nimber d'un graphe à  $n$  sommets, on obtient la formule

$$C(n) = n.C(n - 1) = n!.$$

On en déduit donc que la complexité du calcul est la plupart du temps exponentielle en fonction du nombre de sommets de  $G$ .

Nous allons donc tenter, pour des familles particulières de graphes, de réduire la complexité du calcul pour la rendre polynomiale.

Nous avons vu que la fonction de Grundy permet de déterminer les graphes perdants ainsi que les stratégies gagnantes. Elle vérifie également une propriété d'**additivité** en  $\oplus$  pour deux jeux  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{J}_2$ .

Or lorsque l'on joue au jeu de domination sur un graphe formé de deux composantes connexes  $G = C_1 + C_2$ , on peut considérer qu'il s'agit de deux jeux indépendants  $C_1$  et  $C_2$ . On peut donc y appliquer la propriété d'additivité des nimbers et on obtient la formule suivante :

**Proposition 2.1.4 (Addition des nimbers)** *Pour tous graphes  $C_1$  et  $C_2$  on a  $\rho(C_1 + C_2) = \rho(C_1) \oplus \rho(C_2)$ .*

On en déduit que si un coup sépare le graphe de départ en  $k$  composantes connexes alors le nombre de cette option peut se calculer à partir des nombres de ses composantes connexes. Il suffira donc de connaître les nombres des composantes connexes des options de  $G$  pour calculer  $\rho(G)$ .

Cette propriété va nous aider à rendre le problème de recherche des positions perdantes polynomial pour certaines familles de graphes que nous appellerons *familles jouables*.

## 2.2 Familles jouables : généralités

**Définition 2.2.1 (Famille Jouable)** *On appelle **famille jouable** une famille  $\mathcal{F}$  de graphes contenant le graphe vide et vérifiant :*

- *L'existence d'une bijection  $\varphi$  de  $\mathcal{F}$  dans  $\mathbb{N}$ , c'est à dire une numérotation de cette famille. Autrement dit, la famille  $\mathcal{F}$  doit être **dénombrable**.*
- *Pour tout élément  $G \in \mathcal{F}$  ( $G \neq \emptyset$ ) et pour toute option  $H$  de  $G$  constituée de  $p$  composantes connexes  $C_1, C_2, \dots, C_p$ , il faut que toute composante  $C_i$  soit dans  $\mathcal{F}$  et de numéro inférieur à  $G$ . Autrement dit :*

$$\forall G \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}, \forall \bigcup_{i=1}^p C_i \in \text{Opt}(G), \forall 1 \leq i \leq p, C_i \in \mathcal{F} \text{ et } \varphi(C_i) < \varphi(G).$$

On appelle **taille** de  $\mathcal{F}$  et on note  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  la fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  qui à  $n$  associe  $\Gamma_{\mathcal{F}}(n) = |\{G \in \mathcal{F}, |V(G)| \leq n\}|$ , c'est-à-dire le nombre de graphes de  $\mathcal{F}$  à au plus  $n$  sommets.

Notons que la taille  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  est une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ ; elle permet de donner un ordre de grandeur pour la famille considérée. On parlera de familles jouables de taille linéaire, polynomiale ou exponentielle si  $\Gamma(n)$  est respectivement en  $\mathcal{O}(n)$ ,  $\mathcal{O}(n^k)$  avec  $k$  borné, ou en  $\mathcal{O}(2^n)$ .

Le premier point correspond à la nécessité d'ordonner les éléments de  $\mathcal{F}$ . Elle sera indispensable pour calculer les nombres avec l'algorithme  $\mathcal{A}$  présenté ci-dessous. Remarquons que dans certains cas il est difficile de ne pas recompter un même graphe plusieurs fois. Par exemple, pour la famille des arbres il est plus aisé de numéroter les arbres enracinés et ordonnés que les arbres simples. Par conséquent, pour un grand nombre de problèmes algorithmiques sur les arbres, ils sont artificiellement enracinés, ordonnés et parfois étiquetés. Ainsi on résout le problème sur une famille plus grande mais mieux organisée pour trouver une solution pour les arbres simples. C'est par exemple le cas pour un grand nombre de problème de bioinformatique, notamment en ce qui concerne le codage de l'ADN ou d'autres molécules [21].

Le second point impose qu'une famille jouable soit "close par jeu", c'est à dire qu'à tout moment de la partie chaque composante connexe du graphe courant appartient à la famille. Il faut en outre que les options de  $G$  aient un numéro inférieur à celui de  $G$ . Dans la pratique on prend une numérotation  $\varphi$  qui respecte l'ordre sur la taille des graphes :

$$\forall G, H, |V(G)| > |V(H)| \Rightarrow \varphi(G) > \varphi(H)$$

Pour qu'une famille de graphes  $\mathcal{F}$  soit jouable, il faut que pour tout graphe  $G \in \mathcal{F}$  et pour tout  $v \in V(G)$  le retrait du voisinage fermé de  $v$  aboutisse à un graphe appartenant à la famille. Le retrait simple d'un sommet de  $G$  étant une opération plus faible, toutes les familles closes par retrait de sommets sont des familles jouables. Un grand nombre de familles usuelles sont donc jouables :

- Exemples de familles jouables :**
1. Les chemins, avec  $\Gamma(n) = n$  ;
  2. Les cycles et les chemins, avec  $\Gamma(n) = 2n$  ;
  3. Les grilles  $2 \times n$  avec ou sans feuilles au bord, avec  $\Gamma(n) = 3n$  (c.f. Section 2.4.3) ;
  4. Les Triades ou étoiles à trois branches, avec  $\Gamma(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$  ;
  5. Les arbres binaires, avec  $\Gamma(n) = \mathcal{O}(2^n)$  ;
  6. Les graphes de maille  $m \geq 4$  ;
  7. Les graphes planaires extérieurs, planaires (taille exponentielle) ;
  8. Plus généralement toute famille définie par un ensemble de mineurs exclus.

Nous détaillerons certains de ces exemples dans la suite du chapitre.

On peut également construire une famille jouable à partir d'un graphe  $G$  à  $n$  sommets, il s'agit de la **famille induite** de  $G$  qui est un sous-ensemble de l'ensemble des sous-graphes connexes de  $G$ . Mais comme on peut l'observer sur des exemples de graphes planaires, la taille de la famille induite de  $G$  est en  $\mathcal{O}(2^n)$ , excepté pour des cas particuliers présentant un grand nombre de symétries comme par exemple le *graphe de Petersen*. Par conséquent, cette méthode ne permet pas d'aboutir à des résultats meilleurs qu'en explorant le graphe des configurations du jeu de domination sur  $G$ .

Regardons maintenant quelles propriétés ont de telles familles.

Les nombres des instances d'une famille jouable  $\mathcal{F}$  peuvent être calculés en temps polynomial, grâce à l'additivité de la fonction de Sprague-Grundy (Proposition 2.1.4) :

**Proposition 2.2.2** *Si  $\mathcal{F}$  est une famille de graphes jouable et  $G \in \mathcal{F}$ , alors on peut calculer  $\rho(G)$  en  $\mathcal{O}(\varphi(G) * |V(G)|^{3/2})$ .*

Autrement dit, si  $\mathcal{F}$  est finie et jouable, alors on peut calculer le nombre de tous les éléments de  $\mathcal{F}$  en  $\mathcal{O}(|\mathcal{F}| * n_{\mathcal{F}}^{3/2})$ , où  $n_{\mathcal{F}}$  est le nombre de sommets du plus grand graphe de  $\mathcal{F}$ .

**Preuve:** Posons  $n = |V(G)|$ . Observons que pour calculer  $\rho(G)$ , il faut calculer le *mex* des nombres de ses options. On sait que  $|Opt(G)| = \mathcal{O}(n)$ .

De plus une option de  $G$  a au pire un nombre de composante connexes distinctes en  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ . En effet s'il existe un coup sur  $v$  constituant  $k = \mathcal{O}(n)$  composantes, alors le jeu dans l'une de ces composantes ne peut créer qu'un nombre constant de composantes, car  $v$  et au moins  $k - 1$  de ses voisins seront conservés. La borne  $\sqrt{n}$  est atteinte avec l'exemple du graphe  $K$  formé de  $p$  cliques disjointes de tailles 1, 2,  $\dots$ ,  $p$  reliées par un sommet universel  $u$ . On a  $|V(K)| = \mathcal{O}(p^2)$  et tout jeu sur  $x \neq u$  enlève  $u$  ainsi que sa clique ; on obtient bien  $p - 1$  composantes connexes distinctes pour chaque option excepté le jeu sur  $u$ .

```

1: Input :  $n \geq 0$  and  $\mathcal{F} = (G_i)_{0 \leq i \leq n}$ 
2: Output :  $\rho(G_n)$ 
3:  $R[0] \leftarrow 0$ 
4: for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
5:    $A[\ ] = 0$ 
6:   for  $j = 1$  to  $|G_i|$  do
7:      $B \leftarrow \text{Opt}(G_i, j)$ 
8:      $g \leftarrow 0$ 
9:     for  $k = 0$  to  $|B|$  do
10:       $g \leftarrow g \oplus R[\varphi_{\mathcal{F}}(B[k])]$ 
11:    end for
12:     $A[g] \leftarrow A[g] + 1$ 
13:  end for
14:   $r \leftarrow 0$ 
15:  while  $A[r] \neq 0$  do
16:     $r \leftarrow r + 1$ 
17:  end while
18:   $R[i] \leftarrow r$ 
19: end for
20: return  $R[n]$ 

```

FIGURE 2.1 – Algorithme  $\mathcal{A}$ , calcul de  $\rho(G_n)$  pour une famille jouable  $\mathcal{F} = (G_i)_{0 \leq i \leq n}$

Enfin comme  $\text{mex}(E)$  se calcule en  $\mathcal{O}(|E|)$ , on en déduit que  $\rho(G)$  peut être calculé en  $\mathcal{O}(n^{3/2})$ .

Toutefois ce calcul ne peut être effectué que si l'on connaît déjà les nombres des composantes connexes des options de  $G$ . Par définition d'une famille jouable, une telle composante  $C$  vérifie  $\varphi(C) < \varphi(G)$ . Dans le pire des cas il faut donc connaître les nombres de tous les graphes  $H$  vérifiant  $\varphi(H) < \varphi(G)$ . Par calculs successifs des nombres des graphes  $H$  de numéros inférieurs à  $G$ , on obtient un algorithme en  $\mathcal{O}(\varphi(G) * n^{3/2})$  ■

**Remarque:** Si  $\mathcal{F}$  est telle que pour tout  $G \in \mathcal{F}$  la moyenne du nombre de composantes connexes de ses options est borné alors la complexité du calcul de  $\rho(G)$  devient  $\mathcal{O}(\varphi(G) * |V(G)|)$ . Dans la pratique nous n'étudierons que des familles où ce nombre est borné.

Si  $\mathcal{F}$  est une famille de taille linéaire (par exemple les chemins), la complexité de l'algorithme devient  $\mathcal{O}(n^2)$  pour calculer le nombre d'un graphe de  $\mathcal{F}$  à  $n$  sommets.

Comme illustration, nous proposons l'algorithme itératif  $\mathcal{A}$  de la Figure 2.1.

On note  $R[0..n]$  le tableau contenant les valeurs de nombres des graphes de  $\mathcal{F}$ , où  $\rho(G) = R[\varphi_{\mathcal{F}}(G)]$ . Les éléments de la famille sont indicés  $\mathcal{F} = (G_i)_{0 \leq i \leq n}$ , avec  $i = \varphi_{\mathcal{F}}(G_i)$  pour tout  $i$ . Pour  $1 \leq j \leq |V(G_i)|$ , on note  $\text{Opt}(G_i, j)$  la  $j$ -ème option de  $G_i$  correspondant au jeu sur le  $j$ -ème sommet de  $G_i$ .  $\text{Opt}(G_i, j)$  est dans l'algorithme sous la forme d'un tableau où chaque case contient une composante connexe.

Cet algorithme n'est bien entendu utilisable que s'il est polynomial en fonction de  $|V(G)|$ . Par conséquent, lorsque l'on veut calculer le nombre d'un graphe  $G$  avec l'algo-

rithme  $\mathcal{A}$ , toute la difficulté réside dans la construction d'une famille jouable de taille polynomiale contenant  $G$ . Mais comme on peut l'observer sur quelques exemples de graphes planaires comme les grilles  $n \times p$  ( $n, p \geq 3$ ), généralement une telle famille n'existe pas. Néanmoins dans certains cas des structures réapparaissent dans les options du graphe  $G$  et l'on peut ainsi construire une famille contenant  $G$  sans créer le graphe des configurations de  $G$ . C'est par exemple le cas des grilles  $2 \times n$ , ou des chenilles.

Dans ce chapitre nous allons étudier le jeu de domination sur des familles jouables de taille polynomiale en commençant par le cas des chemins  $(P_n)_{n \geq 0}$ .

Débutons cette étude par quelques résultats sur des familles pour lesquelles la forte densité d'arêtes (rapport  $E(V)/V(G)$  important) nous permet de déduire des stratégies gagnantes pour le jeu de domination.

## 2.3 Premiers résultats

Pour certaines familles de graphes comme les graphes  $n$ -partis complets, les nimbers sont calculables en temps constant. Començons par donner une propriété triviale qui nous sera utile dans tout le chapitre.

**Proposition 2.3.1** *Soit  $G$  un graphe formé de  $k$  composante connexes. Si elles sont toutes des graphes complets, alors  $\rho(G) = k \bmod 2$ .*

**Preuve:** Jouons au jeu de domination sur  $G$ . Si l'on joue un coup sur un sommet  $v$  d'une composante  $K_n$ , alors cette composante est vidée car tout sommet de  $K_n$  est ou est voisin de  $v$ . Par conséquent, à chaque coup on retirera une composante. Comme le gagnant est celui qui retire le dernier sommet, on en déduit la proposition. ■

### 2.3.1 Graphes possédant un sommet universel

**Proposition 2.3.2 (Graphes Universels)** *Si  $G$  possède un sommet universel  $u$  (relié à tous les autres sommets de  $G$ ), alors  $\rho(G) > 0$ .*

**Preuve:** On observe que le jeu sur  $u$  aboutit à l'option  $G[V(G) \setminus N_G^+(u)] = G[\emptyset] = \emptyset$  qui a pour nimber 0 par définition. La partie est donc terminée en un coup et le Suivant gagne. ■

Cette famille de graphes contient par exemple les graphes complets  $K_n$  ( $n > 0$ ) et les étoiles à branches de longueur 1  $K_{1,n}$  ( $n \geq 0$ ).

Cette propriété peut être utile pour éliminer certains choix de coups. En effet partant d'une position  $G$ , s'il existe une option  $G'$  possédant un sommet universel alors cette option  $G'$  n'est pas intéressante pour le Suivant et peut donc être écartée en vue de la recherche d'une stratégie gagnante.

### 2.3.2 Graphes $n$ -partis complets

Commençons par traiter le cas  $n = 2$ . Soit  $K_{p,q}$  un graphe biparti complet avec  $p \geq 2$  et  $q \geq 2$  (les autres cas étant des graphes universels).

Si Alice choisit de jouer sur l'un des  $p$  sommets, il restera le graphe réduit à une réunion disjointe de  $p - 1$  sommets isolés  $(p - 1)K_1$ , qui a pour nimber  $1 \oplus 1 \oplus \dots \oplus 1$  ( $p - 1$  fois), soit  $\rho_1 = \overline{p - 1}$  (en posant  $\bar{a} = a \bmod 2$ ). Il en est de même pour le jeu sur l'un des  $q$  sommets :  $\rho_2 = \overline{q - 1}$ . Comme  $\rho(K_{p,q}) = \text{mex}\{\rho_1, \rho_2\}$  on obtient des nimbers dépendant de la parité de  $p$  et  $q$  :  $\rho(K_{2p',2q'}) = 0$ ,  $\rho(K_{2p'+1,2q'}) = 2$ ,  $\rho(K_{2p',2q'+1}) = 2$ , et  $\rho(K_{2p'+1,2q'+1}) = 1$ . On obtient la formule générale suivante :

**Proposition 2.3.3**  $\rho(K_{p,q}) = 2 \cdot \overline{p + q} + \overline{pq} = 2 - \overline{pq} - 2 \cdot \overline{p + q}$ .

Passons maintenant au cas où  $n$  vaut 3. Soit  $K_{p,q,r}$  un graphe triparti complet avec  $p, q$  et  $r$  non nuls. On a :

**Proposition 2.3.4**  $\rho(K_{p,q,r}) = 2 - \overline{pqr} - 2 \cdot \overline{(p + 1)(q + 1)(r + 1)}$ .

**Preuve:** Les options possibles de  $K_{p,q,r}$  sont  $p - 1$  sommets isolés (s'il joue sur un sommet de la partie de taille  $p$ ),  $q - 1$ , ou  $r - 1$  sommets isolés. Le nimber de ces graphes est respectivement  $\overline{p - 1}$ ,  $\overline{q - 1}$ , et  $\overline{r - 1}$ . La valeur de Grundy sera donc nulle si les trois entiers sont pairs (les trois nimbers des options valent 1), un si les trois entiers sont impairs (les trois nimbers sont 0), et deux s'il y a parmi  $p, q$  et  $r$  des nombres pairs et des nombres impairs (car les nimbers des options seront 0 et 1 suivant les cas).

On en déduit la formule de la Proposition 2.3.4. ■

Donc Alice ne perd que si toutes les parties sont de taille paire.

Pour traiter le cas général, nous utiliserons la notation  $K_\Omega$ , où  $\Omega = (\omega_i)_{1 \leq i \leq n}$  est la suite de  $n$  entiers strictement positifs représentant les tailles des différentes parties.

On peut écrire, en s'inspirant de la formule de la Proposition 2.3.4 pour les graphes tripartis, que :

**Proposition 2.3.5**  $\forall n \geq 2, \forall \Omega = (\omega_i)_{1 \leq i \leq n}, \rho(K_\Omega) = 2 - \overline{\prod_{i=1}^n \omega_i} - 2 \cdot \overline{\prod_{i=1}^n (\omega_i + 1)}$ .

**Preuve:** Comme pour toute partie  $P_i$  de  $K_\Omega$ , pour tout sommet  $x$  de  $P_i$ ,  $N_{K_\Omega}(x) = \bigcup_{j \neq i} P_j$ , les options possibles de  $K_\Omega$  sont les réunions de  $\omega_i - 1$  sommets isolés, pour  $1 \leq i \leq n$ .

Si les  $\omega_i$  sont tous pairs, les nimbers des options valent tous 1; ce qui entraîne que  $\rho(K_\Omega) = 0$ .

S'ils sont tous impairs, les nimbers des options sont tous nuls; ce qui implique que  $\rho(K_\Omega) = 1$ .

Enfin, dans tous les autres cas, on a  $\rho(K_\Omega) = 2$ , puisque les nombres 0 et 1 apparaissent dans les nimbers des options du graphe.

On en conclut que la formule est vraie pour tout  $n$  et pour toute suite  $\Omega$ . ■

Les graphes  $n$ -partis complets sont donc la plupart du temps gagnants (il suffit de jouer sur une partie de taille impaire) et les joueurs devront donc généralement éviter de produire un graphe de cette famille.

### 2.3.3 Graphes réguliers de haut degré

Un graphe régulier  $R$  est un graphe dont tous les sommets ont le même nombre  $p$  de voisins. Nous dirons que  $R$  est régulier de degré  $p$ .

Si le jeu est un graphe régulier à  $n$  sommets  $R$  de degré  $n - 2$ , alors quel que soit le choix d'Alice il ne restera qu'un seul sommet, donc Bob le supprimera et Alice perdra. On en déduit que :

**Proposition 2.3.6** *Pour tout graphe  $R$  régulier à  $n$  sommets de degré  $n - 2$ ,  $\rho(R) = 0$ .*

Passons maintenant aux graphes réguliers de degré  $n - 3$ .

**Proposition 2.3.7** *Soit  $R$  un graphe régulier à  $n$  sommets et de degré  $n - 3$ . Notons  $\overline{R}$  son complémentaire.*

$\rho(R) > 0$  si et seulement si  $\overline{R}$  contient au moins un triangle.

**Preuve:** Comme  $R$  est régulier, un coup supprime exactement  $|N_R^+(v)| = 1 + (n - 3) = n - 2$  sommets. Ses options ne sont donc que des graphes à 2 sommets, soit  $Opt(R) \subseteq \{2K_1, K_2\}$ .

- Si  $Opt(R) = \{K_2\}$ , alors  $\rho(R) = mex\{1\} = 0$  et  $\overline{R}$  ne contient aucun triangle. En effet, s'il en contenait un, alors  $R$  contiendrait un stable de taille 3, et en jouant sur l'un de ces trois sommets, on obtiendrait le graphe  $2K_1$  qui n'est pas une option de  $R$  par hypothèse.
- Si  $2K_1 \in Opt(R)$ , alors  $R$  contient un stable de taille 3, puisque les deux sommets de  $2K_1$  ont un non-voisin commun (celui sur lequel on a joué pour obtenir l'option  $2K_1$ ). On en déduit que  $\overline{R}$  contient un triangle. En outre,  $\rho(2K_1) = 0$ , et comme  $Opt(R) \subseteq \{2K_1, K_2\}$  on en déduit que  $\rho(R) \in \{1, 2\}$ .

Réciproquement, si  $\overline{R}$  ne contenait pas de triangle, alors les stables de  $R$  seraient tous de taille au plus 2 et donc  $\rho(R) = 0$ . ■

Terminons par le cas des graphes  $(n - 4)$ -réguliers.

**Proposition 2.3.8** *Soit  $R$  un graphe régulier à  $n$  sommets et de degré  $n - 4$ . Nous avons alors :*

$\rho(R) > 0$  si et seulement si  $K_4 - e$  est un sous-graphe de  $\overline{R}$ ,

où  $K_4 - e$  le graphe complet  $K_4$  moins une arête.

**Preuve:** Supposons qu'un tel ensemble  $V = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$  existe, en posant  $u_1$  et  $u_2$  de degré 3 dans  $\overline{R}[V] = K_4 - e$ .

Il suffit à A de jouer (dans le jeu  $R$ ) sur  $u_1$  pour gagner. En effet, il reste à B le graphe  $R[\{u_2, v_1, v_2\}] = K_2 + K_1$  qui est perdant. On en déduit que  $\rho(R) > 0$ .

Réciproquement, si  $\rho(R) > 0$ , alors il existe un graphe  $H$  parmi les options de  $R$  qui est perdant. Or tous les graphes de  $Opt(R)$  sont de taille 3, soit  $Opt(G) \subseteq \{K_3, P_3, K_2 + K_1, 3K_1\}$ . De plus le seul graphe de nimber nul parmi ces quatre possibilités est  $K_2 + K_1$ , donc  $H = K_2 + K_1$ . Or  $\overline{H} = P_3$ . On en déduit que dans  $\overline{R}$ , il existe un sommet  $x$  tel que  $N_{\overline{R}}(x) = P_3$ , soit  $\overline{R}[N_{\overline{R}}^+(x)] = K_4 - e$ . ■



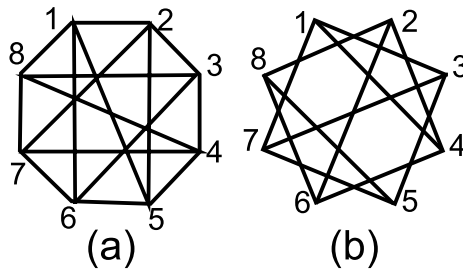


FIGURE 2.2 – Un graphe régulier (a) et son complémentaire (b)

Illustrons cette proposition par l'exemple du graphe  $G$  à huit sommets et de degré 4 de la Figure 2.2. Nous avons dessiné à sa droite son complémentaire  $\overline{G}$ . Voyant que  $\overline{G}$  contient deux sous-graphes  $K_4 - e$  ( $\overline{G}[\{1, 3, 5, 7\}]$  et  $\overline{G}[\{2, 4, 6, 8\}]$ ), il suffit au joueur A de jouer sur le sommet 1, 4, 5 ou 8 pour gagner le jeu. On vérifie (en observant le dessin de  $G$ ) que si A choisit une de ces options, le graphe résultant est bien  $K_2 + K_1$ , qui a un nimber nul. On en conclut que le joueur A a une stratégie gagnante.

Cette méthode pourrait nous permettre de continuer l'étude des graphes  $(|V(G)| - k)$ -réguliers pour  $k = 5, 6, 7, \dots$ , mais il faut pour cela connaître l'ensemble  $\mathcal{P}_{k-1}$  des graphes perdants à  $k - 1$  sommets qui grandit exponentiellement par rapport à  $k$ . On a  $|\mathcal{P}_3| = 1$  et

$$\mathcal{P}_4 = \{C_4, P_4, 2K_2, K_3 + K_1, 4K_1\}.$$

On ne peut donc envisager d'utiliser cette méthode pour des grandes valeurs de  $k$ .

## 2.4 Familles jouables de taille linéaire

Dans cette section, nous allons étudier des familles  $\mathcal{F}$  de graphes jouables de taille linéaire, c'est à dire que le nombre de graphes de  $\mathcal{F}$  à au plus  $n$  sommets est en  $\mathcal{O}(n)$  (pour tout  $n \geq 0$ ).

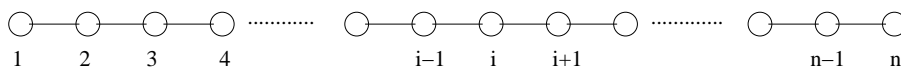
Pour ces familles de graphes l'algorithme  $\mathcal{A}$  est quadratique (en  $\mathcal{O}(|V(G)|^2) = \mathcal{O}(n^2)$ ), nous pourrions donc aisément effectuer les calculs jusqu'à  $n = 2^{20}$  dans l'optique de découvrir une période éventuelle.

Dans certains cas, des équivalences ou des isomorphismes avec des jeux combinatoires connus comme les jeux octaux nous permettront de connaître les séquences de Grundy comme c'est le cas pour les chemins.

### 2.4.1 Les chemins et les cycles

Pour cette famille de graphes, la numérotation est triviale, et c'est pourquoi nous allons commencer par traiter ce cas.

La famille des chemins est une famille jouable. En effet, rappelons la formule de l'expres-

FIGURE 2.3 – Le chemin de longueur  $n$  :  $P_n$ 

sion des options d'un chemin  $P_n$  ( $n > 0$ ) :

$$Opt(P_n) = \left\{ P_i + P_{n-i-3}, -1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Rappelons que l'on pose  $P_{-1} = P_0 = \emptyset$ . On observe que toute option est une réunion d'au plus 2 chemins. Donc les composantes connexes d'une option de  $P_n$  sont des chemins, et il en est de même à tout instant de la partie. On peut donc y appliquer l'algorithme A et on découvre une période  $p = 34$ , après une préperiode  $q = 52$ . Voici la séquence de Gundy  $(\rho(P_n))_{n \geq 0}$  obtenue (les points sur les chiffres indiquent le début et la fin de la séquence répétée à l'infini) :

0112031103322405223301130211045274 (de 0 à 33)  
 0112031103322445523301130211045374 (de 34 à 67)  
 8̇112031103322445593301130211045374̇ (de 68 à 101)

On obtient donc facilement les nimbers des cycles, car pour tout  $n \geq 3$ ,  $Opt(C_n) = \{P_{n-3}\}$  :

xxx1000100010000010000010001000100 (de 0 à 33)  
 00010001000100000000000010001000100 (de 34 à 67)  
 0̇00000010001000000000001000100010̇0 (de 68 à 101)

$C_0$ ,  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas définis.

On peut également obtenir de cet algorithme la stratégie à appliquer pour pouvoir gagner à coup sûr la partie (sauf si le nimber est nul).

En effet, si  $n \geq 102$  chercher une option perdante de  $P_n$  revient à chercher une option perdante de  $P_{n'}$  avec  $n' = n - 34k$  et  $68 \leq n' \leq 101$ . Grâce à la périodicité de la séquence, si  $P_i + P_j$  (avec  $i \geq 52$ ) est une option perdante de  $P_{n'}$  alors  $P_{i+34k} + P_j$  est une option perdante de  $P_n$ . En étudiant au cas par cas, on observe que sur l'intervalle  $[68; 101]$  une telle option perdante existe toujours si le nimber est non nul.

Ces valeurs peuvent être retrouvées à l'aide d'un isomorphisme avec un autre jeu combinatoire.

**Proposition 2.4.1** *Le jeu de domination sur les chemins est isomorphe au jeu octal  $0 \bullet 137$ .*

**Preuve:** Les chemins peuvent être représentés comme des tas où chaque jeton est un sommet de la chemin.

Comme le jeu courant  $H$  est un graphe dont les composantes connexes sont des chemins, il sera représenté par plusieurs tas, un pour chacune des composantes connexes.

Ainsi, on ne peut ni enlever zero jeton, ni plus de trois. Donc le jeu sera de la forme  $0 \bullet d_1 d_2 d_3$ . Si l'on n'enlève qu'un sommet en jouant, c'est que ce sommet n'a pas de voisin et donc il appartient à une pile de taille 1, soit  $d_1 = 1$ . Si on retire deux sommets de la chemin alors il s'agit du jeu sur une extrémité; par conséquent on ne peut couper la chemin en deux parties, donc  $d_2 = 3$ . Enfin retirer 3 sommets peut se faire aussi bien en coupant la chemin (sommet à distance au moins 2 d'une extrémité) qu'en la gardant connexe (sommet voisin d'une extrémité), d'où  $d_3 = 7$ . ■

Notre jeu sur les chemins porte donc le numéro  $0 \bullet 137$ , et c'est exactement le *Dawson's Chess* qui est résolu dans [8] et les auteurs trouvent effectivement les valeurs citées plus haut.

### 2.4.2 Les puissances de chemins ou $k$ -chemins

L'étude de cette famille de graphes permettra de mettre en valeur le rapprochement entre le jeu de domination et une famille infinie de jeux octaux. D'autre part, nous pourrions observer les singularités qu'engendre le calcul récursif des nimbers dans certains cas comme celui des puissances  $k$ -ièmes de chemins.

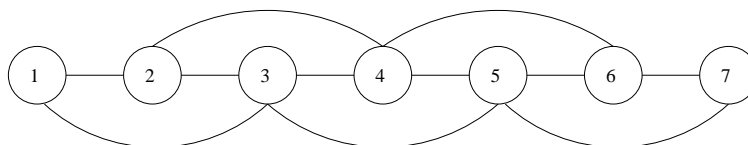


FIGURE 2.4 – La puissance de chemin  $P_7^2$

Une puissance  $k$ -ième de chemin (ou  $k$ -chemin) est un graphe construit à partir d'un chemin et dans lequel on rajoute toutes les arêtes entre les sommets étant à distance au plus  $k$  sur le chemin de départ. On notera  $P_n^k$  le  $k$ -chemin de longueur  $n$ . Par exemple le graphe de la Figure 2.4 est noté  $P_7^2$ .

Pour  $k$  fixé, une telle famille est aisément numérotée (avec la longueur du chemin) et est close par retrait de tout sommet avec son voisinage. La famille des  $k$ -chemins  $\mathcal{P}_k$  est donc jouable pour tout  $k > 0$ .

Démontrons maintenant l'existence d'un isomorphisme entre  $\mathcal{P}_k$  et un jeu octal.

**Proposition 2.4.2** *Pour tout entier  $k > 0$ , le jeu de domination sur  $\mathcal{P}_k$  est isomorphe au jeu octal  $0 \bullet 1^{(k)} 3^{(k)} 7$  (1 et 3 répétés  $k$  fois).*

**Preuve:** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . D'abord, le fait de jouer sur un  $k$ -chemin divise le graphe en au plus 2 composantes connexes, et ces composantes sont également des  $k$ -chemins. Donc  $\mathcal{P}_k$  correspond à un jeu octal.

Ensuite, pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $Opt(P_i^k) = \{\emptyset\}$ . On en déduit que les  $d_i$  (pour  $i \in [1, k]$ ) sont tous impairs (c.f. Section 1.3 pour les définitions concernant les jeux octaux).

De plus, pour tout  $n > k$ , on ne peut enlever moins de  $k + 1$  sommets en jouant sur le graphe  $P_n^k$ . On en déduit que pour tout  $i \in [1, k]$ ,  $d_i = 1$ .

Quel que soit  $i \in [k + 1, 2k + 1]$ ,  $\emptyset$  fait partie des options du graphe  $P_i^k$ , car il suffit de jouer au milieu du chemin, sur un sommet universel. On en déduit que les  $d_i$  sont impairs.

Soit  $n > 2k + 1$ . Le jeu sur le premier sommet de  $P_n^k$  enlève  $k + 1$  sommets au graphe, et on obtient  $P_{n-k-1}^k$ . Donc  $d_{k+1} \equiv 3 \pmod{4}$ . Plus généralement, pour tout  $i \in [1, k + 1]$ , le jeu sur le  $i$ -ème sommet de  $P_n^k$  enlève  $i - 1$  sommets à sa gauche,  $k$  à sa droite et lui-même.

On obtient donc le graphe  $P_{n-k-i}^k$ . On en conclut que  $d_{k+i} \equiv 3 \pmod{4}$ .

Enfin, le partage en deux du graphe n'est possible qu'en retirant  $2k + 1$  sommets ( $k$  à gauche,  $k$  à droite et lui-même). On en conclut que  $\forall i \in [k + 1, 2k]$ ,  $d_i = 3$ , et que  $d_{2k+1} = 7$ . ■

Des études pour  $k = 2$  et  $3$  ont montré qu'il n'existait pas de période connue en deçà de  $2^{25}$  (pour les jeux octaux "cousins"  $0 \bullet 0^{(k-1)}4$ ), ni même de période arithmétique [10]. De plus les 2-chemins et 3-chemins perdants sont en nombre très limité : 35 pour  $k = 2$  et 28 pour  $k = 3$ , pour une recherche jusqu'à  $2^{25}$ .

En exécutant l'algorithme  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{O}(n^2)$  pour  $4 \leq k \leq 30$  on peut observer qu'il y a au minimum 13  $k$ -chemins pour lesquelles le nimber est nul, il s'agit de :  $0, 2k+2, 4k+4, 8k+6, 12k+8, 16k+12, 20k+14, 28k+20, 32k+22, 40k+30, 48k+36, 64k+46$  et  $68k + 50$ .

De plus, les autres valeurs de  $n$  pour lesquelles  $\rho_k(P_n^k) = 0$ , s'il en existe, sont très éloignées des 13 premières et sont spécifiques à la valeur de  $k$ . Par exemple, pour  $k = 7$ , l'algorithme trouve (en plus des treize valeurs classiques) 924196, 924874 et 930300 comme 7-chemins perdantes de taille inférieure à  $10^6$ .

Dans cette section nous allons démontrer, avec l'assistance de l'ordinateur, que ces 13  $k$ -chemins perdantes le sont pour tout  $k \geq 4$ , les cas  $k = 2$  et  $3$  ne vérifiant pas cette hypothèse. Pour par exemple, prouver que pour tout  $k \geq 4$ ,  $\rho_k(8k + 6) = 0$ , il faut connaître toutes les valeurs prises par la fonction de Grundy sur l'intervalle entier  $[0, 8k + 5]$ .

La preuve se fait en trois étapes :

1. Recherche d'intervalles du type  $[a.k+b; c.k+d]$  où le nombre de Grundy est constant, et ce pour tout  $k \geq 4$ .

Plus précisément, on cherchera une succession de  $N$  intervalles consécutifs  $I_m = [i_m.k + j_m; i_{m+1}.k + j_{m+1} - 1]$  tels que pour tout  $0 \leq m \leq N$ , il existe  $p_m \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \in I_m, \rho_k(P_n) = p_m$ .

On cherchera donc une suite de  $N$  triplets  $(i_m, j_m, p_m)_{0 \leq m \leq N}$  (avec  $i_0 = j_0 = p_0 = 0$  par convention). Cette recherche peut s'effectuer en comparant les séquences de Grundy des  $k$ -chemins et des  $k + 1$ -chemins, calculées avec l'algorithme  $\mathcal{A}$ . Il faudra prendre  $k$  suffisamment grand ( $k \geq \sqrt{N}$ ) car on remarque que certains intervalles ne sont non vides qu'à partir d'un certain rang  $k_0$  (il s'agit des intervalles de largeur  $k - k_0 + 1$ ).

2. Ensuite il faudra prouver que ces hypothèses d'intervalles sont vraies pour tout  $k$ . On commence par montrer que tous les nombres inférieurs à  $p_m$  sont parmi les nombres des options de toutes les  $k$ -chemins de longueur comprise dans  $I_m$  (pour tout  $k \geq 4$ ).
3. Enfin, on montre que pour tout  $k \geq 4$ , pour tout  $n \in I_m$ ,  $Opt(P_n^k)$  ne contient pas de graphe de nimber  $p_m$ .
4. Puis on utilise ces résultats pour poursuivre la démonstration au rang  $m + 1$ , et cela jusqu'au rang  $N$ .

La découverte des intervalles est donc en  $\mathcal{O}(n^2)$  (où  $n$  est la plus grande  $k$ -chemin dont le nimber est calculé) et on démontre l'hypothèse d'intervalles (avec l'assistance de l'ordinateur) en  $\mathcal{O}(N^3)$  (où  $N$  est le nombre d'intervalles).

L'implémentation de cette méthode nous permet de découvrir et démontrer les 210 premiers intervalles nécessaires à la démonstration de l'existence des treize zéros cités plus haut :

**Théorème 2.4.3 ( $k$ -chemins perdantes)** *Pour tout  $k \geq 4$ , la famille  $\mathcal{P}_k$  des  $k$ -chemins de longueur  $0 \leq n \leq 68k + 50$  a exactement 13  $k$ -chemins perdantes, aux positions  $0, 2k+2, 4k+4, 8k+6, 12k+8, 16k+12, 20k+14, 28k+20, 32k+22, 40k+30, 48k+36, 64k+46$  et  $68k + 50$ .*

Les certificats de preuve fournis par l'ordinateur étant dépourvus d'intérêt, ils ne seront pas détaillés ici. Il en est de même des 210 intervalles qui peuvent facilement être retrouvés avec la comparaison des résultats de l'algorithme  $\mathcal{A}$  sur les  $k$  et  $k + 1$ -chemins, en prenant toutefois  $k$  suffisamment grand ( $k \geq 80$ ).

### 2.4.3 Les grilles $2 \times n$

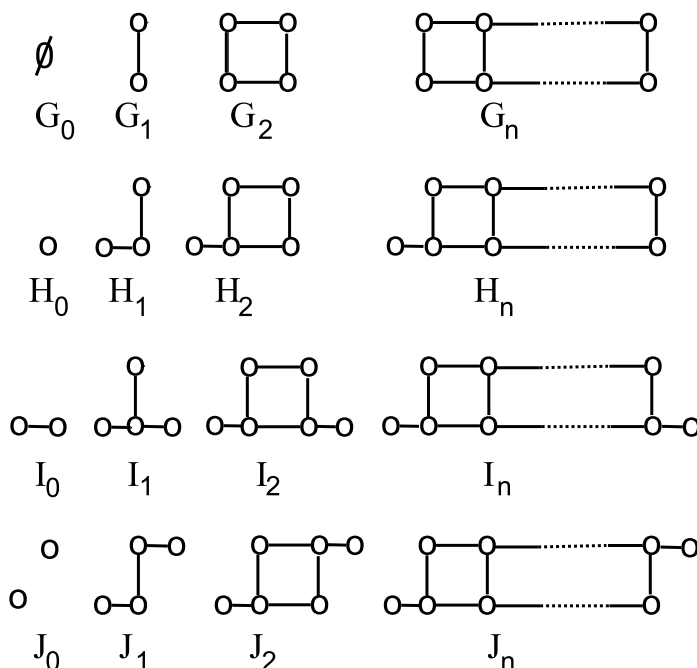
Les grilles de hauteur 2 constituent une famille de graphes qui s'étudie aisément, car elle est "presque" close par jeu.

En effet si l'on joue à la ligne  $i$  d'une grille  $2 \times n$ , le graphe obtenu est constitué de deux grilles  $2 \times n$  avec en plus une feuille pendante à une des extrémités.

Notons pour tout  $n \geq 0$  :

- $G_n$  la grille de hauteur 2 et de longueur  $n$ .
- $H_n$  la même grille dont une extrémité a un sommet voisin supplémentaire.
- $I_n$  la même grille dont les deux extrémités ont un voisin supplémentaire, tous deux sur la même ligne.
- $J_n$  la même grille dont les deux extrémités ont un voisin supplémentaire, sur des lignes différentes.

Les premiers graphes de ces familles sont précisés dans la Figure 2.5. Les familles ont été définies ainsi dans le but de simplifier au maximum les formules de récurrence permettant

FIGURE 2.5 – Les 4 familles de graphes nécessaires à l'étude des grilles  $2 \times n$ 

le calcul des nombres. Commençons par établir les formules de récurrence pour le calcul des nombres. En posant  $H_{-1} = \emptyset$ , on a :

**Proposition 2.4.4** *Pour tout entier  $n \geq 3$  on a :*

$$\rho(G_n) = \text{mex}\{\rho(H_k) \oplus \rho(H_{n-k-3}), -1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor\}.$$

$$\rho(H_n) = \text{mex}\{\rho(H_{n-1}), \rho(H_{n-2}), \rho(H_{n-2}) \oplus 1, \rho(J_{k-2}) \oplus \rho(H_{n-k-1}), \rho(I_{k-2}) \oplus \rho(H_{n-k-1}), 2 \leq k \leq n\}.$$

$$\rho(I_n) = \text{mex}\{\rho(J_n), \rho(J_{k-1}) \oplus \rho(J_{n-k}), \rho(I_{k-2}) \oplus \rho(I_{n-k}), 2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}.$$

$$\rho(J_n) = \text{mex}\{\rho(I_{n-1}), \rho(I_{k-2}) \oplus \rho(J_{n-k}), \rho(J_{k-2}) \oplus \rho(I_{n-k}), 2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}.$$

**Preuve:** Pour toutes les familles nous noterons  $u_i$  (resp.  $v_i$ ) le sommet du haut (resp. du bas) en position  $i$  sur la grille principale. Les éventuelles feuilles attachées aux extrémités seront notées  $x$  (à gauche) et  $y$  (à droite).

Commençons par démontrer l'expression de  $\rho(G_n)$ . Dans  $G_n$  les jeux sur  $u_i$  et  $v_i$  sont isomorphes, et c'est également le cas pour les jeux sur  $u_i$  et  $u_{n-i+1}$ . Il suffit donc de regarder les options constituées par le jeu sur  $u_i$  pour  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ . Le jeu sur  $u_1$  enlève les 3 sommets  $u_1, u_2$  et  $v_1$ . La longueur de la grille est réduite de 2 et une feuille supplémentaire gauche  $x$  est constituée. On obtient l'option  $H_{n-2}$ . Le jeu sur le  $i$ -ème sommet  $u_i$  ( $2 \leq i \leq \frac{n}{2}$ ) coupe le graphe en deux parties : à gauche  $H_{i-2}$  et à droite  $H_{n-i-1}$ . En effet, sur la gauche il reste une grille de longueur  $i-1$  avec une feuille  $y = v_{i-1}$ . Et sur la droite il reste une

grille de longueur  $n - (i + 2) + 1 = n - i - 1$  avec une feuille gauche  $x = v_{i+1}$ . En posant  $H_{-1} = \emptyset$  et en éliminant les options identiques on obtient l'expression suivante :

$$Opt(G_n) = \{H_k + H_{n-k-3}, -1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor\}.$$

On en déduit immédiatement la première formule de la Proposition 2.4.4

Passons maintenant à  $H_n$  pour  $n \geq 3$ . Ici la feuille supplémentaire  $x$  élimine les symétries que l'on avait sur  $G_n$ . Il faut donc regarder toutes les options de  $H_n$ , soit  $2n + 1$  options a priori toutes distinctes. Le jeu sur  $x$  supprime  $x$  ainsi que son voisin  $v_1$ , et constitue donc l'option  $H_{n-1}$ . Le jeu sur  $u_1$  (resp.  $v_1$ ) constitue l'option  $H_{n-2} + K_1$  (resp.  $H_{n-2}$ ). Ensuite le jeu sur  $u_i$  pour  $2 \leq i \leq n$  coupe la grille en deux parties de tailles  $i - 2$  et  $n - i - 1$  en laissant deux feuilles pendantes  $v_{i-1}$  et  $v_{i+1}$ . Comme  $v_{i-1}$  et  $x$  sont tous les deux en bas, on obtient une grille de type  $I$  à gauche, et de type  $H$  à droite.

Pour  $I_n$  on observe une symétrie entre les sommets  $u_i$  et  $u_{n-i}$ , il suffit donc de regarder les jeux sur  $u_i$  et  $v_i$  pour  $i \leq \frac{n}{2}$ , et le jeu sur  $x$ . En jouant sur  $x$  on obtient une option de type  $J$  et de taille  $n - 1$ . En jouant sur  $u_i$  on coupe la grille en deux parties de tailles  $i - 2$  et  $n - i - 1$  en laissant deux feuilles pendantes  $v_{i-1}$  et  $v_{i+1}$ , qui sont en bas tout comme  $x$  et  $y$ . On obtient donc deux grilles de type  $I$ . Enfin en jouant sur  $v_i$  on coupe la grille en laissant deux feuilles pendantes  $u_{i-1}$  et  $u_{i+1}$ , qui cette fois-ci sont en haut à l'opposé de  $x$  et  $y$  qui sont en bas. On aboutit donc à deux grilles de type  $J$ .

Finalement, pour  $J_n$  on observe une symétrie entre les sommets  $u_i$  et  $v_{n-i}$ , il suffit donc de regarder les jeux sur  $u_i$  et  $v_i$  pour  $i \leq \frac{n}{2}$ , et le jeu sur  $x$ . En jouant sur  $x$  on obtient une option de type  $I$  et de taille  $n - 1$ . En jouant sur  $u_i$  on coupe la grille en deux parties de tailles  $i - 2$  et  $n - i - 1$  en laissant deux feuilles pendantes  $v_{i-1}$  et  $v_{i+1}$ . Comme  $x$  est en bas elle est du même côté que  $v_{i-1}$ . On a donc un graphe de type  $I$  à gauche. A l'opposé,  $y$  est en haut, on a donc un graphe de type  $J$  à droite. Enfin en jouant sur  $v_i$  on coupe la grille en laissant deux feuilles pendantes  $u_{i-1}$  et  $u_{i+1}$ . Cette fois-ci  $u_{i-1}$  est à l'opposé de  $x$  et  $u_{i+1}$  est du même côté que  $y$ . On aboutit donc à une grille de type  $J$  à gauche et de type  $I$  à droite. ■

On obtient donc une famille jouable :

**Corollaire 2.4.5** *Pour tout  $n \geq 0$ , la famille  $\mathcal{F} = (G_k, H_k, I_k, J_k)_{0 \leq k \leq n}$  est jouable et est de taille  $\Gamma_{\mathcal{F}}(n) = 4 * n$ .*

On peut donc appliquer à  $\mathcal{F}$  l'algorithme  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{O}(n^2)$ . On peut montrer la proposition suivante :

**Proposition 2.4.6**  $\forall n \geq 0, \rho(G_n) = \bar{n}, \rho(H_n) = n + 1, \rho(I_n) = 1, \text{ et } \rho(J_n) = 0.$

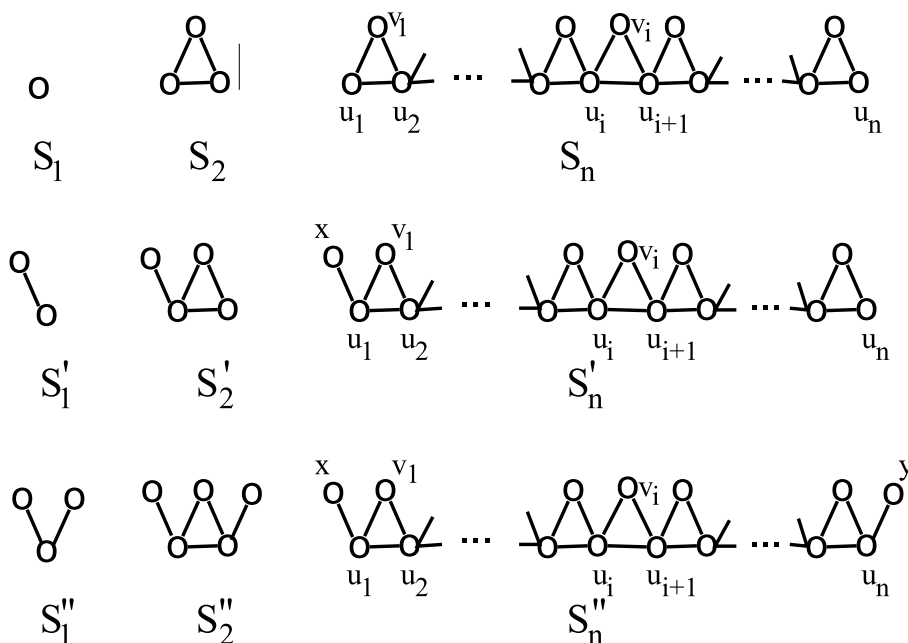
**Preuve:** Par induction sur  $n$ .

Supposons les propriétés vraies pour tout  $i < n$ . On a alors :

$$\rho(J_n) = mex\{1, 1 \oplus 0, 0 \oplus 1\} = 0.$$

$$\rho(I_n) = mex\{0, 0 \oplus 0, 1 \oplus 1\} = 1.$$

$$\begin{aligned} \rho(H_n) &= mex\{n, 0 \oplus (n - i), 1 \oplus (n - i), 1 \leq i \leq n\} \\ &= mex\{0, 1, n, i, i \oplus 1, 1 \leq i \leq n - 1\} . \end{aligned}$$

FIGURE 2.6 – Les trois types de scies triangulaires, notées  $S_n$ ,  $S'_n$  et  $S''_n$ .

De plus, comme  $\forall 1 \leq i \leq n-1$ ,  $i \oplus 1 \leq n$ , on obtient  $\rho(H_n) = n+1$ .

Enfin, si  $n = 2p$ ,  $\rho(G_{2p}) = \{(i \oplus (2p - i - 1), 0 \leq i \leq p-1)\}$ .

- Si  $i$  est pair, alors  $i \oplus (2p - i - 1)$  est impair.
- Si  $i$  est impair, alors  $i \oplus (2p - i - 1)$  est impair.

On en conclut que  $\rho(G_{2p}) = 0$ .

D'autre part, si  $n = 2p+1$ ,  $\rho(G_{2p+1}) = \{(i \oplus (2p - i), 0 \leq i \leq p)\}$ .

- Si  $i$  est pair, alors  $i \oplus (2p - i)$  est pair.
- Si  $i$  est impair, alors  $i \oplus (2p - i)$  est pair.

On en conclut que  $\rho(G_{2p+1}) = 1$ . ■

Le problème qui se pose pour les grilles plus grandes (à partir de  $3 \times n$ ) est que le jeu sur certains sommets ne coupe pas le graphe et forme des grilles à "trous".

La famille de graphes jouable pour les grilles  $(n, p)$  a donc une taille pouvant atteindre  $\mathcal{O}(2^{n+p})$  (ensemble des parties de  $[1, n] \times [1, p]$ ). À l'heure actuelle il n'existe pas d'autre solution qu'une étude au cas par cas à l'aide du graphe des configurations.

#### 2.4.4 Les scies triangulaires

Continuons l'étude de familles jouables de taille linéaire avec la famille des **scies**. Une scie triangulaire  $S_n$  est formée d'un chemin  $u_1 u_2 \dots u_n$  sur lequel sont attachés des sommets  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ), les "pointes" (c.f. Figure 2.6). Pour tout  $i$  on a  $N(v_i) = \{u_i, u_{i+1}\}$ .

La famille des scies triangulaires  $\mathcal{S} = (S_n)_{n \geq 0}$  n'est pas jouable. En effet, le jeu (dans



$S_n$ ) sur le nœud  $u_1$  fournit le graphe  $S'_{n-2}$  : une scie triangulaire de longueur  $n - 2$  avec un nouveau sommet voisin de l'extrémité gauche. On remarque que les "pointes" (nœuds du haut sur le schéma) de la scie peuvent devenir des feuilles lorsque l'on joue sur une pointe adjacente. On remarque toutefois que ces feuilles sont toujours positionnées aux extrémités de la scie. C'est pourquoi (comme cela a été fait pour les grilles  $2 \times n$ ) il faut ajouter à cette famille deux nouveaux types de graphes : les scies à une feuille notées  $S'_n$  et les scies à deux feuilles notées  $S''_n$ .

On prend comme conventions  $S_{-1} = S'_{-1} = S''_{-1} = S_0 = S'_0 = \emptyset$  et  $S''_0 = K_1$ . Etablissons les formules de récurrence pour le calcul des nimbers :

**Proposition 2.4.7** *Pour tout entier  $n > 1$  on a*

$$\rho(S_n) = \text{mex}\{\rho(S'_i) \oplus \rho(S'_{n-i-2}), \rho(S'_i) \oplus \rho(S'_{n-i-3}), 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor\}.$$

$$\rho(S'_n) = \text{mex}\{\rho(S'_{n-1}), \rho(S''_{i-2}) \oplus \rho(S'_{n-i-1}), \rho(S''_{i-1}) \oplus \rho(S'_{n-i-1}), 1 \leq i \leq n-1\}.$$

$$\rho(S''_n) = \text{mex}\{\rho(S''_i) \oplus \rho(S''_{n-i-1}), \rho(S''_i) \oplus \rho(S''_{n-i-2}), 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}.$$

**Preuve:** Sur  $S_n$ , le jeu sur la  $i$ -ème pointe  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) supprime  $u_i$ ,  $u_{i+1}$  et  $v_i$ . On obtient donc à gauche l'option  $S'_{i-1}$  et à droite l'option  $S'_{n-i-1}$ . D'autre part, le jeu sur  $u_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) coupe la scie en deux parties : à gauche la scie  $S'_{i-1}$  ou le graphe vide si  $i \leq 2$ , et à droite la scie  $S'_{n-i-1}$  (ou  $\emptyset$  si  $i = n-1$ ). Comme le jeu sur  $u_n$  est identique au jeu sur  $v_{n-1}$ , on en déduit que :

$$\text{Opt}(S_n) = \{S'_{i-1} + S'_{n-i-1}, S'_{i-2} + S'_{n-i-1}, 1 \leq i \leq n-1\}.$$

Avec le changement de variable  $i \leftarrow i-1$  et en remarquant que la scie  $S_n$  est symétrique, on obtient la formule de la Proposition.

Passons maintenant aux scies  $S'_n$ . Le jeu sur la feuille  $x$  fournit l'option  $S'_{n-1}$ . Le jeu sur le sommet  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) coupe la scie en deux parties :  $S''_{i-1}$  à gauche et  $S'_{n-i-1}$  à droite. Enfin le jeu sur le sommet  $u_i$  constitue l'option  $S''_{i-2} + S'_{n-i-1}$ .

Finalement, pour la scie  $S''_n$ , les jeux sur  $x$ ,  $u_n$ ,  $u_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) et  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) constituent respectivement les options  $S''_{n-1}$ ,  $S''_{n-2}$ ,  $S''_{i-2} + S''_{n-i-1}$  et  $S''_{i-1} + S''_{n-i-1}$ . On remarque que le graphe possède des symétries : le jeu sur  $u_i$  (resp.  $v_i$ ,  $x$ ) est identique au jeu sur  $u_{n-i+1}$  (resp.  $v_{n-i}$ ,  $y$ ). On en déduit l'expression suivante :

$$\text{Opt}(S''_n) = \{S''_i + S''_{n-i-1}, S''_i + S''_{n-i-2}), -1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}.$$

On a ajouté le cas  $i = -1$  où on retrouve les options  $S''_{n-1}$  et  $S''_{n-2}$  issues du jeu sur  $x$  et  $u_n$  respectivement. ■

On observe que toute option est formée de graphes appartenant à une des trois familles. Donc la famille  $\mathcal{S} = \left( S_n, S'_n, S''_n \right)_{n \geq 0}$  est jouable et de taille linéaire  $\Gamma_{\mathcal{S}}(n) = 3 * n$ .

De plus, on remarque que toute option de  $S''_n$  est constituée de scies uniquement du type  $S''_n$ . La famille  $\mathcal{S}'' = (S''_n)_{n \geq 0}$  est donc à elle seule jouable.

Elle paraît donc répondre à toutes les caractéristiques d'un jeu octal. Montrons que c'est effectivement le cas :

**Proposition 2.4.8** *Le jeu de domination sur la famille de graphes  $\mathcal{S}'' = (S''_n)_{n \geq 0}$  est isomorphe au jeu octal  $0 \bullet 77$ .*

**Preuve:** Voir la Section 1.3 pour les définitions et propriétés des jeux octaux.

Soit  $J = d_0 \bullet d_1 d_2 d_3 \dots$  le jeu octal en isomorphisme avec le jeu de domination sur  $\mathcal{S}''$ , en supposant qu'il existe. Prenons comme isomorphisme la correspondance entre un tas de  $n$  jetons et le graphe  $S''_n$ .

On a vu que  $\mathcal{S}''$  était jouable, et que les options sont au plus la réunion de deux graphes. Il reste à montrer que :

1. On ne peut enlever plus de deux jetons du tas ;
2. On peut ou séparer le tas ou le laisser entier si l'on enlève un ou deux jetons du tas.

Rappelons la formule de l'expression des options de  $S''_n$  (pour  $n > 1$ )

$$\rho(S''_n) = \text{mex}\{\rho(S''_i) \oplus \rho(S''_{n-i-1}), \rho(S''_i) \oplus \rho(S''_{n-i-2}), 0 \leq i \leq n-2\}..$$

On observe que le nombre de "jetons" qu'il reste après avoir joué sur  $S''_n$  est soit  $i + (n - i - 1) = n - 1$ , soit  $i + (n - i - 2) = n - 2$ . On peut donc enlever uniquement 1 ou 2 jetons du tas, soit  $d_0 = d_3 = d_4 = \dots = 0$ .

De plus, dans les deux cas, on observe que l'on peut laisser le tas entier ( $i = 0$ ), ou le séparer de toutes les manières possibles : on construit le couple  $(i, n - i - 1)$  (avec  $1 \leq i \leq n - 2$ ) si l'on enlève un jeton et le couple  $(i, n - i - 2)$  (avec  $1 \leq i \leq n - 3$ ) si l'on en enlève 2. On en déduit que  $d_1$  et  $d_2$  valent 6 ou 7.

Finalement, comme  $\emptyset \in \text{Opt}(S''_1)$  et  $\emptyset \in \text{Opt}(S''_2)$ , les deux entiers  $d_1$  et  $d_2$  sont bien impairs. On en conclut qu'il s'agit du jeu octal  $0 \bullet 77$  ■

On en déduit, à l'aide des travaux sur les jeux octaux dans le tome 1 de l'ouvrage *Winning Ways* [4], que ce jeu a une période de 12 et une préperiode de 70, et a pour séquence de Grundy :

012314321426412714321467412854721867 (de 0 à 35)

412314721827412814721427412814721867 (de 36 à 71)

412814721827 (de 72 à 83).

Revenons maintenant aux scies  $S_n$  et  $S'_n$ .

**Proposition 2.4.9**  $\forall n \geq 2$ , on a :

1.  $\rho(S'_n) = \rho(S''_n)$  ;
2.  $\rho(S_n) = \rho(S''_{n-1})$ .

**Preuve:** Par induction sur  $n$ . Au rang 2 On a  $\rho(S'_2) = \text{mex}\{1, 0, 1, 1\} = 2 = \rho(S''_2)$  et  $\rho(S_2) = \rho(K_3) = 1 = \rho(S''_1)$ .

Supposons la proposition vraie jusqu'au rang  $n-1$ , et réécrivons la formule de l'expression des options de  $S_n$  :

$$\rho(S_n) = \text{mex}\{\rho(S'_i) \oplus \rho(S'_{n-i-2}), \rho(S'_i) \oplus \rho(S'_{n-i-3}), 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor\}.$$

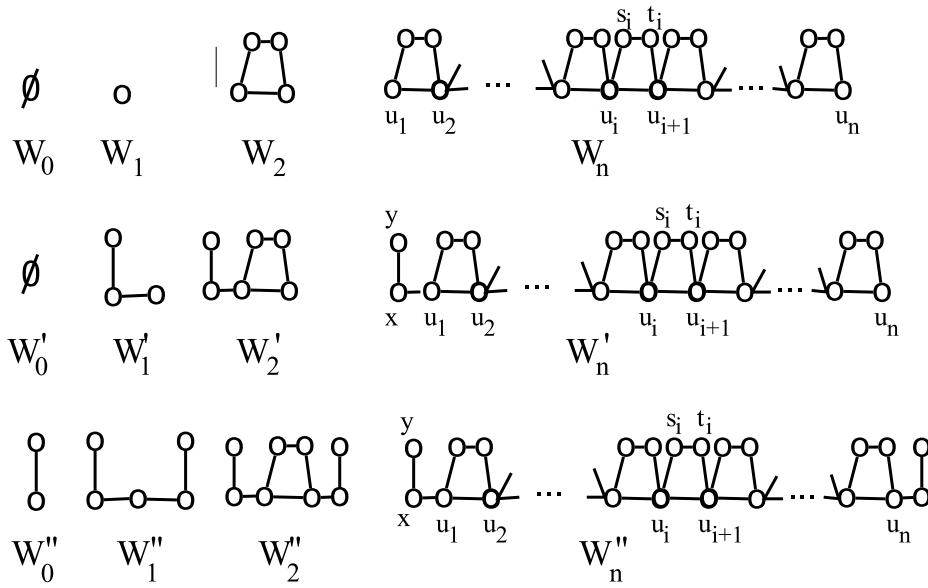


FIGURE 2.7 – Les scies trapézoïdales  $W_n$ ,  $W'_n$  et  $W''_n$

Par induction on remplace  $S'_k$  par  $S''_{k-1}$ . On obtient :

$$\rho(S_n) = \text{mex}\{\rho(S''_i) \oplus \rho(S''_{(n-1)-i-1}), \rho(S''_i) \oplus \rho(S''_{(n-1)-i-2}), 0 \leq i \leq \lfloor \frac{(n-1)}{2} \rfloor - 1\}.$$

C'est exactement la formule des options de  $S''_{n-1}$ .

De même, pour  $S'_n$  on a :

$$\rho(S'_n) = \text{mex}\{\rho(S'_i) \oplus \rho(S'_{n-i-1}), \rho(S'_i) \oplus \rho(S'_{n-i-2}), 0 \leq i \leq n-1\}, \text{ donc, par induction}$$

$$\rho(S'_n) = \text{mex}\{\rho(S''_i) \oplus \rho(S''_{n-i-1}), \rho(S''_i) \oplus \rho(S''_{n-i-2}), 0 \leq i \leq n-1\}, \text{ soit } \rho(S'_n) = \rho(S''_n). \blacksquare$$

Par conséquent, les familles des scies de types  $S$  et  $S'$  ont également une période 12 après une pré-période 70 et 71 respectivement.

### 2.4.5 Les scies trapézoïdales

S'inspirant des scies triangulaires, on peut remplacer les "dents" par une paire de sommets pour obtenir une autre famille jouable : les scies trapézoïdales.

Soit  $W_n$  le graphe nommé "scie trapézoïdale de longueur  $n$ " et représenté sur la Figure 2.7

Comme pour les scies triangulaires, la famille  $\mathcal{W} = (W_n)_{n \geq 0}$  est incomplète. Il faut y ajouter les scies avec un chemin de longueur 2 jointe à une ou deux des extrémités du graphe, que l'on note respectivement  $W'_n$  et  $W''_n$ . Avec ces trois types de graphes, on construit une famille jouable  $\mathcal{W} = (W_n, W'_n, W''_n)_{n \geq 0}$ . En effet, toute option d'un élément de  $\mathcal{W}$  est une réunion d'au plus deux éléments de cette famille. Plus précisément, on a les formules de récurrence suivantes :

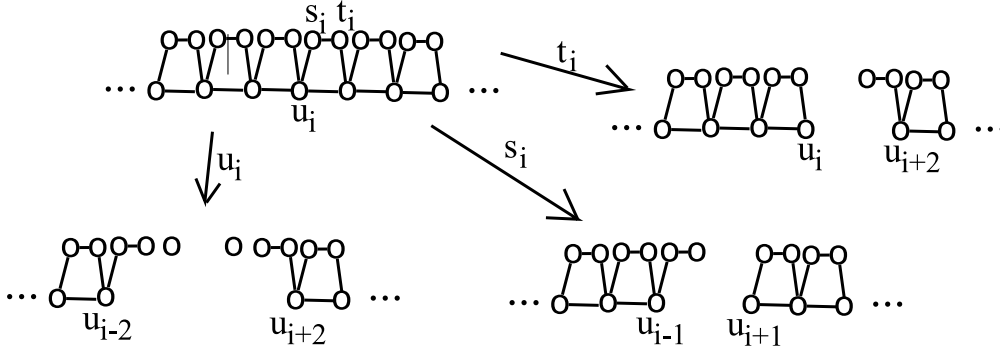


FIGURE 2.8 – Les jeux possibles sur une scie trapézoïdale

**Proposition 2.4.10** *Pour tout  $n > 0$ , on a :*

$$\rho(W_n) = \text{mex}_{2 \leq i \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \left\{ \rho(W_{n-1}), \rho(W'_{n-1}) \oplus 1, \rho(W''_{i-2}) \oplus \rho(W'_{n-i-1}), \rho(W'_{i-1}) \oplus \rho(W_{n-i}), \right. \\ \left. \rho(W_i) \oplus \rho(W'_{n-i-1}) \right\}.$$

$$\rho(W'_n) = \text{mex}_{0 \leq i \leq n-1} \left\{ \rho(W''_{i-1}) \oplus \rho(W'_{n-i-1}), \rho(W''_i) \oplus \rho(W_{n-i}), \rho(W'_i) \oplus \rho(W'_{n-i-1}) \right\}.$$

$$\rho(W''_n) = \text{mex}_{0 \leq i \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left\{ \rho(W''_{i-1}) \oplus \rho(W''_{n-i-1}), \rho(W''_i) \oplus \rho(W'_{n-i-1}), \rho(W'_i) \oplus \rho(W''_{n-i-1}) \right\}.$$

**Preuve:** Nous avons dessiné sur la Figure 2.8 les graphes obtenus après le jeu sur les sommets  $u_i$ ,  $s_i$  et  $t_i$  pour  $2 \leq i \leq n-1$ .

Premièrement, regardons l'option issue du jeu sur  $u_i$  avec  $2 \leq i \leq n-1$ . Comme on peut l'observer sur la Figure 2.8, ce coup isole deux sommets que l'on peut ignorer car ils ont un nimber total nul  $\rho(2K_1) = 1 \oplus 1 = 0$ . Les deux autres composantes connexes sont de tailles respectives  $i-2$  et  $n-i-1$ , et sont de type  $W''$  ou  $W'$  suivant la présence ou non d'une 2-chemin à l'extrémité opposée. On obtient donc pour  $i$  fixé l'option  $W'_{i-2} + W'_{n-i-1}$ ,  $W''_{i-2} + W'_{n-i-1}$  ou  $W''_{i-2} + W''_{n-i-1}$  pour  $W_n$ ,  $W'_n$  ou  $W''_n$  respectivement.

Ensuite le jeu sur  $s_i$  constitue à gauche l'option  $W''_{i-1}$  ou  $W'_{i-1}$  suivant la présence ou non d'une 2-chemin à l'extrémité opposée, et à droite l'option  $W_{n-i}$  (ou  $W'_{n-i}$  pour les mêmes raisons). On obtient donc l'option  $W'_{i-1} + W_{n-i}$ ,  $W''_{i-1} + W_{n-i}$  ou  $W'_{i-1} + W'_{n-i}$  pour  $W_n$ ,  $W'_n$  ou  $W''_n$  respectivement.

Enfin, comme on peut l'observer sur la Figure 2.8, le jeu sur  $t_i$  constitue à gauche l'option  $W'_i$  ou  $W_i$  suivant la présence ou non d'une 2-chemin à l'extrémité opposée, et à droite l'option  $W''_{n-i-1}$  (ou  $W'_{n-i-1}$  pour les mêmes raisons). On obtient donc l'option  $W_i + W'_{n-i-1}$ ,  $W'_i + W'_{n-i-1}$  ou  $W'_i + W''_{n-i-1}$  pour  $W_n$ ,  $W'_n$  ou  $W''_n$  respectivement.

Les six plus petits graphes d'indice  $n \leq 1$  ont été choisis pour que ces options soient les mêmes lorsque l'on joue au bord, soit sur  $u_i$ ,  $s_i$  ou  $t_i$  lorsque  $i \in \{1, n\}$ . On peut par

exemple vérifier que le jeu sur  $s_1$  dans  $W'_n$  fournit l'option  $K_2 + W_{n-1}$  qui est exactement  $W''_{i-1} + W_{n-i}$  pour  $i = 1$  car on a posé  $W''_0 = K_2$ .

Il reste à regarder le jeu sur les sommets  $x$  et  $y$  (les 2-chemins des extrémités, c.f. Figure 2.7). Le jeu sur  $y$  supprime uniquement les deux sommets  $x$  et  $y$ . On obtient donc l'option  $W_n$  ou  $W'_n$  de  $W'_n$  ou  $W''_n$  respectivement. Enfin le jeu sur  $x$  supprime  $x y$  et  $u_1$ . Par conséquent, on obtient l'option  $W'_{n-1}$  ou  $W''_{n-1}$  de  $W'_n$  ou  $W''_n$  respectivement. Les options ayant toutes été décrites, on peut à présent établir les formules de l'expression des options pour les trois graphes. Elles sont écrites dans l'ordre suivant : jeu sur  $u_i$ , sur  $s_i$ , sur  $t_i$ , et éventuellement sur  $x$  et enfin sur  $y$ .

$$Opt(W_n) = \{W'_{i-2} + W'_{n-i-1}, W'_{i-1} + W_{n-i}, W_i + W'_{n-i-1}, 1 \leq i \leq n\};$$

$$Opt(W'_n) = \{W''_{i-2} + W'_{n-i-1}, W''_{i-1} + W_{n-i}, W'_i + W'_{n-i-1}, W_n, W'_{n-1}, 1 \leq i \leq n\};$$

$$Opt(W''_n) = \{W''_{i-2} + W''_{n-i-1}, W''_{i-1} + W'_{n-i}, W'_i + W''_{n-i-1}, W'_n, W''_{n-1}, 1 \leq i \leq n\};$$

En effectuant des changements de variables et en utilisant les propriétés de symétries sur  $W_n$  et  $W''_n$  on obtient les formules de la Proposition 2.4.10. ■

**Corollaire 2.4.11** *La famille  $\mathcal{W} = (W_n, W'_n, W''_n)_{n>0}$  est jouable.*

**Preuve:** En regardant les formules de la Proposition 2.4.10, on s'aperçoit qu'aucune option n'a de composante connexe n'étant pas dans  $\mathcal{W}$ . De plus, par définition  $\emptyset = W_0 \in \mathcal{W}$ . ■

La taille de cette famille est bien linéaire :  $\Gamma_{\mathcal{W}}(n) = 3 * n + 1$ . De plus, le nombre de composantes connexes de toute option de  $G \in \mathcal{W}$  est au plus 2. L'algorithme  $\mathcal{A}$  sur cette famille est donc là aussi en  $\mathcal{O}(n^2)$  pour calculer le nimber de  $W_n$ . L'exécution de l'algorithme  $\mathcal{A}$  n'a donné ici aucune période "courte". On trouve, pour  $n = 10^5$  :

	Nombre de zéros	Max Nimber	Indice MaxNimber
W	65	5437	97234
W'	1	5176	99201
W''	35	3277	98432

On remarque que la croissance des nombres est importante (de l'ordre de 5% pour  $W$  et  $W'$  et 3% pour  $W''$ ), comme c'est le cas pour certains jeux octaux pour lesquels là aussi aucune période n'a été découverte [10].

## 2.5 Familles non polynomiales

Pour un graphe  $G$  non contenu dans une famille jouable de taille polynomiale, le temps de calcul du nimber de  $G$  est la plupart du temps exponentiel en fonction de  $|V(G)|$ . C'est par exemple le cas pour les graphes planaires ou même pour un arbre  $A$  à  $n$  sommets où l'on ne peut guère faire mieux que de calculer les nimbers de tous les arbres à  $k \leq n - 2$  sommets.

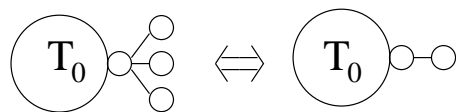


FIGURE 2.9 – La réduction de feuilles

Toutefois certaines structures locales du graphe  $G$  étudié peuvent parfois être réduites pour obtenir un graphe  $G'$  plus petit ayant la même valeur de Grundy que  $G$  à une constante  $k$  près :  $\rho(G') = \rho(G) \oplus k$ .

Dans cette section, nous démontrerons l'existence de plusieurs réductions et en conjecturerons d'autres. Nous utiliserons ces résultats pour calculer le nimber d'une chenille en temps cubique.

### 2.5.1 Réductions sur les arbres

Une **réduction** est une équivalence entre deux structures locales. Elle permet de réduire le nombre de sommets d'un arbre sans modifier son nimber. Plus formellement on définit une réduction de la façon suivante :

**Définition 2.5.1 (Collage)** Soit  $G$  et  $H$  deux graphes,  $u \in V(G)$  et  $v \in V(H)$ . On appelle **collage** de  $G$  et  $H$  en  $(u, v)$  le graphe  $K$  résultant de la fusion des sommets  $u$  et  $v$  dans le graphe  $G + H$ . Autrement dit, le collage  $K$  est défini par :

- $V(K) = V(G) \cup V(H) \setminus \{v\}$  ;
- $E(K) = E(G) \cup E(H \setminus \{v\}) \cup \{(u, x), x \in N_H(v)\}$ .

Ainsi dans un collage les voisins de  $v$  et de  $u$  deviennent voisins d'un nouveau sommet  $x$ , et le reste du graphe reste semblable à  $G+H$ . Cet outil nous permet de définir rigoureusement une loi de réduction :

**Définition 2.5.2 (Loi de réduction)** Une loi de réduction est un couple  $(A_1, A_2)$  tel que :

- $A_1$  et  $A_2$  sont deux arbres enracinés respectivement en  $r_1$  et  $r_2$  ;
- Pour tout arbre  $T$  et tout sommet  $u \in V(T)$ , les collages  $T_1$  de  $T$  et  $A_1$  en  $(u, r_1)$  et  $T_2$  de  $T$  et  $A_2$  en  $(u, r_2)$  vérifient  $\rho(T_1) = \rho(T_2)$ .

Présentons maintenant la première réduction dite **réduction de feuilles**.

**Proposition 2.5.3** Si  $K_{1,3}$  est enraciné en son sommet de degré 3, alors  $(K_{1,3}, K_2)$  est une loi de réduction.

Autrement dit, si un arbre  $T$  possède un sommet ayant au moins trois feuilles dans son voisinage, alors on peut en enlever deux sans modifier le nimber de l'arbre.

**Preuve:** Soit  $T_0$  un arbre enraciné en  $r$ . Notons  $T$  le collage de  $T_0$  et  $K_{1,3}$  en  $r$ , et  $T'$  le collage de  $T_0$  et  $K_2$  également en  $r$ . Il faut démontrer que  $\rho(T) = \rho(T')$ . La preuve est réalisée par récurrence sur  $|V(T_0)|$ .

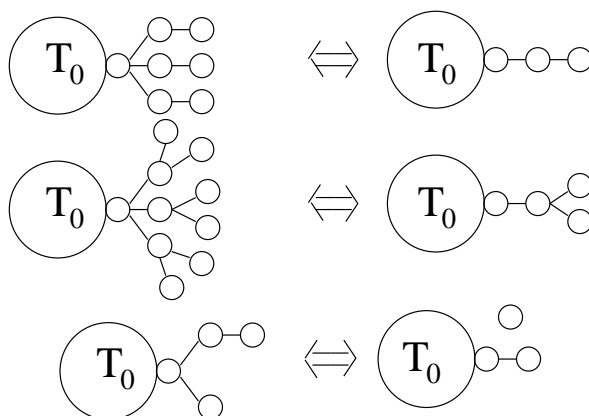


FIGURE 2.10 – Trois lois de réductions potentielles

Pour  $T_0 = K_1$ , alors on a bien  $\rho(T) = \rho(K_{1,3}) = 1 = \rho(K_2) = \rho(T')$ .

Posons maintenant  $|V(T_0)| \geq 2$ , et comparons les options de  $T$  et de  $T'$ .

Premièrement, le jeu sur le sommet  $r$  supprime les feuilles et aboutit donc à la même option sur  $T$  et  $T'$ . Ensuite, le jeu sur  $v \in N(r)$  supprime le sommet  $r$  et isole donc les feuilles de  $K_{1,3}$ . Or qu'il y ait un ou trois sommets isolés ne change pas le nimber (c'est la parité qui compte). Donc les options sur  $T$  et  $T'$  ont le même nimber. Enfin, le jeu sur  $v \in V(T)\mathcal{N}^+(r)$  a par induction même nimber que le jeu sur le même sommet  $v$  dans  $T'$ . On en conclut que  $(K_{1,3}, K_2)$  est une loi de réduction. ■

En comparant les nombres des arbres, d'autres réductions plus complexes ont pu être conjecturées, mais leur démonstration reste à ce jour un problème ouvert. La Figure 2.10 présente trois exemples de réductions probables de hauteur 2.

La réduction de feuilles  $R_f$  nous permet de retirer deux à deux les feuilles voisines d'un même sommet  $u$ , jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une ou deux. Cette réduction nous permet de réduire la taille de certaines familles d'arbres comme les chenilles, et ainsi de faciliter le calcul des nimbers.

### 2.5.2 Les chenilles

Une chenille (*caterpillar tree* en Anglais) est un arbre  $T$  dans lequel il existe une **épine dorsale**  $s_1s_2 \dots s_\ell$  qui est un chemin induit de  $T$  et telle que tout sommet de  $T$  est à distance au plus 1 de ce chemin. Une chenille  $C$  est donc entièrement définie par deux paramètres :

1. La longueur  $\ell$  de l'épine dorsale.
2. La donnée, pour tout  $1 \leq i \leq \ell$  du nombre de feuilles attachées au  $i$ -ème sommet de l'épine dorsale.

Il est ainsi possible de coder une chenille sous la forme d'un mot sur l'alphabet des entiers naturels  $\mathbb{N}$  :

**Définition 2.5.4** Soit  $C$  une chenille. Le **mot** de  $C$ , noté  $w(C) = a_1 a_2 \dots a_\ell$ , est un mot sur l'alphabet  $\mathbb{N}$  vérifiant :

1. Si  $C = \emptyset$  alors  $w(C) = \epsilon$  et si  $C = K_1$  alors  $w(C) = 0$ .
2. La longueur  $\ell$  de  $w(C)$  est le nombre de sommets de degré au moins 2 de  $C$ .
3. Pour  $1 \leq i \leq \ell$ ,  $a_i$  est le nombre de feuilles reliées au  $i$ -ème sommet de l'épine dorsale de  $C$ .
4.  $a_1$  et  $a_n$  sont non nuls.

On choisit comme convention  $a_1$  et  $a_\ell$  non nuls pour éviter d'avoir des feuilles dans l'épine dorsale. En effet, si  $a_1 = 0$ , le sommet correspondant  $s_1$  n'a aucune feuille pendante et n'a qu'un voisin dans l'épine dorsale. C'est donc une feuille et elle peut être considérée comme une feuille pendante de  $s_2$ . Il en est de même pour  $a_\ell$ .

Cette convention permet donc non seulement de réduire la taille des mots mais aussi d'éviter d'avoir plusieurs mots distincts pour une même chenille. Il reste tout de même deux mots possibles pour une même chenille :  $a_1 a_2 \dots a_\ell$  et son palindrome  $a_\ell a_{\ell-1} \dots a_1$ .

La loi de réduction de feuilles  $R_f$  présentée dans la section précédente permet de retirer les feuilles voisines d'un même sommet deux à deux sans toutefois modifier le nombre de la chenille. Cette réduction est très utile dans le cas des chenilles et permet de limiter le nombre de feuilles pendantes. En effet, si un sommet  $s_i$  de l'épine dorsale possède  $a_i > 0$  feuilles pendantes, les applications successives de la réduction  $R_f$  permettent de n'en conserver qu'une (si  $a_i$  est impair) ou 2 (si  $a_i$  est pair) sans modifier le nombre de  $C$ . De telles chenilles seront appelées **chenilles réduites**.

**Définition 2.5.5** Une chenille  $C$  est dite **réduite** si tout sommet de la chaîne principale possède au plus 2 feuilles.

Ainsi il suffira de connaître les nombres des chenilles réduites pour connaître ceux de toutes les chenilles.

**Définition 2.5.6** Le **mot réduit** d'une chenille  $C$  sur l'alphabet  $\{0, 1, 2\}$ , noté  $w'(C) = a'_1 a'_2 \dots a'_\ell$ , est construit à partir du mot de  $C$   $w(C) = a_1 a_2 \dots a_\ell$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$  on pose :

$$\begin{cases} a'_i = 0 & \text{si } a_i = 0, \\ a'_i = 1 & \text{si } a_i \text{ est impair,} \\ a'_i = 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Inversement, pour un mot  $u = a_1 \dots a_\ell$  sur l'alphabet  $\{0, 1, 2\}$ , on définit la chenille de  $u$   $C(u)$  comme suit :

1. Si  $u$  est le mot vide  $\epsilon$  on pose  $C = \emptyset$ .
2. L'épine dorsale de  $C(u)$  possède  $\ell$  sommets  $s_1 \dots s_\ell$ .
3. Sur chaque  $s_i$  on ajoute  $a_i$  feuilles pendantes.





FIGURE 2.11 – Une chenille et sa chenille réduite associée

Ces définitions sont illustrées par l'exemple de la Figure 2.11, où une chenille a été dessinée, ainsi que sa chenille réduite associée. Le mot des chenilles sont calculés en comptant le nombre de feuilles reliées à chaque sommet de l'épine dorsale, ici de taille  $\ell = 5$ .

On observe qu'il y a une bijection entre l'ensemble des chenilles réduites et l'ensemble des mots de  $\{0, 1, 2\}$  (sans 0 au début et à la fin sauf le mot 0), si toutefois on impose aux chenilles de ne pas pouvoir être "retournées". Pour cela on *enracine à gauche* les chenilles : on prend comme racine le premier sommet de l'épine dorsale  $s_1$ . Ainsi le mot  $u$  et son palindrome  $\bar{u}$  ne correspondent pas à la même chenille enracinée, sauf si  $u = \bar{u}$ .

Le nombre de mots sur  $\{0, 1, 2\}$  de longueur au plus  $n$  étant  $3^{n+1} - 1$ , la famille  $\mathcal{C}$  des chenilles réduites est de taille exponentielle. Néanmoins, le calcul du nimber d'une chenille  $C$  peut s'effectuer en temps polynomial en limitant l'étude aux **facteurs** de  $w'(C)$ .

Un **facteur** de  $u$  est une partie du mot  $u$ . Plus formellement, on a :

**Définition 2.5.7** Soient  $u$  et  $v$  deux mots non vides. On dit que  $u$  est un facteur de  $v$  s'il existe deux mots  $u_1$  et  $u_2$  tels que  $v = u_1uu_2$ .

Soit  $u = a_1a_2 \dots a_\ell$  un mot sur un alphabet  $\mathcal{A}$ . Pour  $1 \leq i \leq j \leq \ell$ , le facteur de  $u$  d'intervalle  $[i, j]$  (avec  $1 \leq i \leq j \leq \ell$ ) est le mot  $u' = a_i a_{i+1} \dots a_j$  et est noté  $u_{[i,j]}$ .

Cette notion nous permet, pour une chenille  $C$ , de construire une famille jouable de taille polynomiale contenant  $C$ . On note  $K_0$  le graphe vide pour éviter les confusions possibles avec l'ensemble vide  $\emptyset$ .

**Théorème 2.5.8** Soit  $C$  une chenille dont l'épine dorsale comprend  $n$  sommets. La famille  $\mathcal{F}_C$  des chenilles des facteurs du mot réduit de  $C$   $w'(C) = a'_1 a'_2 \dots a'_n$  définie par :

$$\mathcal{F}_C = K_0 \cup K_1 \cup \left\{ C(u_{[i,j]}), 1 \leq i \leq j \leq n \right\}$$

est jouable et de taille  $\mathcal{O}(n^2)$ .

**Preuve:** La taille de  $\mathcal{F}_C$  est le nombre de couples  $(i, j)$  vérifiant  $1 \leq i \leq j \leq n$  plus 2 pour  $K_0$  et  $K_1$ , soit  $\frac{n(n-1)}{2} + 2 = \mathcal{O}(n^2)$ . Posons  $w'(C) = a'_1 a'_2 \dots a'_n$ .

Il reste à démontrer que tout élément de la famille est tel que toutes les composantes connexes de chacune de ses options sont également dans  $\mathcal{F}_C$ . Prenons donc  $G$  un élément de  $\mathcal{F}_C$ . Si  $G \in \{K_0, K_1\}$  le résultat est immédiat. Si  $G$  correspond à un facteur non vide de  $w(C)$ , il existe par définition deux entiers  $p$  et  $q$ , vérifiant  $1 \leq p \leq q \leq n$  et tels que  $\omega(G) = a_p a_{p+1} \dots a_q$

Regardons maintenant quelle forme prennent les options de  $G$ .

Famille	Période (pré-période)	NbZeros	MaxG	Séquence
$2^*$	4	25%	3	$\dot{0}2\dot{1}\dot{3}$
$12^*1$	2	50%	2	$\dot{0}\dot{2}$
$1^*$	2	50%	1	$\dot{0}\dot{1}$
$21^*$	2	0	3	$\dot{2}\dot{3}$
$(10)^*2$	2	50%	2	$\dot{2}\dot{0}$
$(10)^*1$	2	0	3	$\dot{1}\dot{3}$
$(20)^*2$	2 (89)	1	8	02121212131214526312...
$0(20)^*$	2 (14)	0	5	1212321212121512
$(20)^*$	30 (117)	2	44	010468ACE573GDFJKMGP...
$(21)^*$	2	50%	3	$\dot{0}\dot{3}$
$(21)^*2$	2	0	2	$\dot{2}\dot{1}$
$1^k2^k$	4	25%	3	$\dot{0}\dot{3}\dot{1}\dot{2}$
$1^*2^{2p}$	2	50%	1	$\dot{0}\dot{1}$
$1^*2^{2p+1}$	2	0	3	$\dot{2}\dot{3}$

TABLE 2.1 – Exemples de familles de chenilles, résultats de l'algorithme  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{O}(n^3)$ 

- Pour  $p \leq i \leq q$ , si  $a_i > 0$  le jeu sur une feuille pendante  $f_i$  (reliée au sommet principal  $s_i$ ) donne l'option  $C(a_p \dots a_{i-1}) + C(a_{i+1} \dots a_q) + (a_i - 1) \cdot K_1$  formée d'au plus 3 composantes connexes distinctes toutes dans  $\mathcal{F}_C$ .
- Le jeu sur un sommet principal  $s_i$  donne l'option  $C(a_p \dots a_{i-2}) + C(a_{i+2} \dots a_n) + (a_{i-1} + a_{i+1})K_1$  qui a également toutes ses composantes connexes dans  $\mathcal{F}_C$ . Précisons que le dernier terme  $(a_{i-1} + a_{i+1})K_1$  est remplacé par  $a_{i+1}K_1$  (resp.  $(a_{i-1})K_1$ ) si  $i = p$  (resp.  $i = q$ ).

Cette famille est donc close par jeu, c'est à dire que toute composante connexe d'une option de  $G \in \mathcal{F}_C$  est également dans  $\mathcal{F}_C$ .

Enfin, la numérotation peut être faite en fonction de la longueur du mot, puis s'il y a égalité en fonction du rang de la première lettre. Ainsi, toute composante d'une option de  $G$  a un numéro plus petit que celui de  $G$ . On en conclut que pour toute chenille  $C$ , la famille  $\mathcal{F}_C$  est jouable. ■

L'option  $K_1$  pouvant apparaître si l'on joue sur une feuille ayant une autre feuille à distance 2, il faut l'ajouter à la famille même si 0 n'est pas un facteur de  $w'(C)$ . Il en est de même pour le graphe vide  $K_0$  qui ne correspond à aucun facteur d'intervalle  $[i, j]$  de  $w'(C)$ .

Comme le nombre d'options d'une chenille  $C$  à  $n$  sommets de degré au moins 2 est au plus  $2n$ , on en conclut que le nimber de  $C$  peut être calculé en  $\mathcal{O}(n^3)$  avec l'algorithme  $\mathcal{A}$ .

Cet algorithme général à l'ensemble des chenilles peut être utilisé pour des familles particulières de chenilles. Dans la Table 2.1 nous présentons quelques exemples de ces familles, avec les périodes éventuellement découvertes.

Lorsqu'une valeur  $p$  apparaît elle est fixée, alors que  $k$  est variable. En colonne *période*, le nombre entre parenthèses correspond à la pré-période éventuelle. En colonne *Séquence*, des lettres peuvent être rencontrées, il s'agit de nombres en hexadécimal étendu :  $A = 10$ ,  $B = 11$ , etc. Notons qu'ici aussi on rencontre un nouveau jeu octal. Il s'agit de la famille  $1^*$  qui correspond au jeu octal  $0 \bullet 707$ .

Bien entendu ces exemples de familles sont tous de taille polynomiale. Pour une famille de taille exponentielle comme par exemple les chenilles de degré maximal 3, la notion de période n'a pas de sens. En effet une période est recherchée sur une séquence de nimbers, soit sur une suite de graphes  $\mathcal{G} = (G_0, G_1, \dots, G_k)$ . Il faut donc trier la famille selon certains critères et calculer les nimbers de toute la séquence. On ne peut faire mieux que l'algorithme  $\mathcal{A}$  qui calculera les nimbers de la séquence en  $\mathcal{O}(k * |V(G_k)|)$ . Comme  $k = \mathcal{O}(2^{|V(G_k)|})$  on retrouve un algorithme exponentiel.

Le Théorème 2.5.8 peut toutefois être utilisé pour rechercher une période sur une famille de chenilles **non jouable**, comme cela a été fait pour  $\mathcal{F} = \{1^k 2^k, k \geq 0\}$  ou pour  $\mathcal{F}' = \{2^k 0^k 2^k, k \geq 0\}$ , pour lesquelles la famille jouable contenant  $\mathcal{F}$  (resp  $\mathcal{F}'$ ) est de taille quadratique (resp. cubique).

On peut également constituer des jeux combinatoires qui sont des cas particuliers du jeu de domination, et qui peuvent être résolus en temps cubique grâce à un algorithme issu du Théorème 2.5.8. En voici un exemple.

**Le jeu du grand nombre :** Choisir un "grand" entier positif  $N$ . Son écriture décimale est un mot  $w$  de longueur  $k = \log_{10}(N)$ . Faisons correspondre à  $w$  une chenille  $C(w)$  (c.f. Définition 2.5.4), et jouons au jeu de domination sur cette chenille.

Pour le jeu du grand nombre, le Théorème 2.5.8 peut être utilisé pour trouver un coup gagnant en  $\mathcal{O}(k^3)$ , ou à défaut pour savoir que l'on a perdu.

## 2.6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre nous avons étudié un jeu de marquage sur les graphes : le jeu de domination. Pour trouver les positions perdantes et les stratégies gagnantes d'une position de départ donnée sur ce jeu, l'algorithme naïf consistant à calculer le noyau du graphe des configurations est exponentiel en fonction du nombre de sommets du graphe de départ.

Toutefois, pour certaines familles de graphes que nous avons appelé familles jouables, nous avons mis en évidence l'existence d'un algorithme polynômial, l'algorithme  $\mathcal{A}$ . Pour des familles de taille linéaire comme les chemins ou les grilles  $2 \times n$ , cet algorithme est quadratique.

Nous avons démontré que ces séquences sont périodiques pour les chemins, les cycles, les grilles  $2 \times n$  et les scies triangulaires. Par contre, pour les puissances de chemins et les scies trapézoïdales aucune période n'a pu être mise en évidence. Des travaux sur les jeux octaux [10] ont permis de démontrer que les carrés et les cubes de chemins n'ont pas de période en deçà de  $2^{25}$ .

Le calcul des séquences de Grundy permet non seulement de connaître l'ensemble des éléments perdants mais également les stratégies gagnantes, en temps constant si une période a été démontrée et en  $\mathcal{O}(|V(G)|^2)$  sinon. On s'aperçoit donc de l'importance de la découverte d'une période en terme de complexité de recherche d'un coup gagnant.

Nous avons étudié d'autres familles jouable de taille linéaire : des familles de chenilles comme par exemple les chemins  $P_n$  où on ajoute une feuille pendante sur chaque sommet, nommés *1-chenilles*. Les résultats concernant les chenilles font l'objet d'une section particulière car cette famille, de taille non polynomiale, est traitée dans son intégralité (c.f. Section 2.5.2).

On pourrait également construire un grand nombre de familles de tailles linéaires à partir d'une de ces familles de base et d'un graphe fixé  $G$  (de taille raisonnable). Soit  $\mathcal{F}$  une famille jouable de taille linéaire  $\Gamma_{\mathcal{F}}(n) = an + b$ . Pour tout élément  $G_n$  non vide de  $\mathcal{F}$ , on appelle **racine** de  $G_n$  un sommet constituant un point de repère commun à tous les graphes de  $\mathcal{F}$ . Par exemple pour les chemins on prend le premier sommet à gauche, ou pour les grilles  $2 \times n$  le sommet de coordonnées  $(1, 1)$ .

**Proposition 2.6.1** *Soit  $\mathcal{F}$  une famille jouable de taille linéaire  $\Gamma_{\mathcal{F}}(n) = a * n + b$ . Pour tout élément  $G_n$  non vide de  $\mathcal{F}$ , on note  $z_n$  la racine de  $G_n$ . Soit  $H$  un graphe et  $r$  un sommet de  $H$ . L'ensemble  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  des graphes issus du collage entre un sous-graphe de  $H$  et un élément  $G_n$  de  $\mathcal{F}$  en  $(r, z_n)$  est une famille jouable de taille linéaire. De plus on a  $\Gamma_{\mathcal{H}(\mathcal{F})}(n) \leq 2^{|V(H)|-1} \cdot \Gamma_{\mathcal{F}}(n)$ .*

**Preuve:** Soit  $A$  l'élément de  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  issu du collage entre  $H' \subseteq H$  et  $G_n$ . Montrons que  $Opt(A)$  n'est constitué que d'éléments de  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ . Soit  $A' \in Opt(A)$  une option issue du jeu sur un sommet  $v$ .

1. Si  $v \in N_A^+(r)$ , alors ce coup "coupe" le collage. On obtient donc une option  $H_1 \cup G'$ . Or  $G' \in \mathcal{F}$  et  $H_1 \subseteq H$ . On a bien  $A' \in \mathcal{H}(\mathcal{F})$ .
2. Sinon si  $v \in V(H')$  alors l'option  $A'$  est un collage entre un sous-graphe  $H_1$  de  $H'$  et  $G_n$ . Comme  $H' \subseteq H$  on a bien  $H_1 \subseteq H$ . par définition,  $A'$  est dans  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ .
3. Sinon  $v \in V(G_n)$ , donc l'option  $A'$  est un collage entre  $H'$  et  $G'$  d'un côté, et éventuellement une autre composante connexes  $G_1 \in \mathcal{F}$  de l'autre côté. Ces deux composantes connexes étant dans  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$ , on en conclut que  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  est close par jeu.

La taille de  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  est calculée en plaçant tous les sous graphes possibles de  $H$  contenant le sommet  $r$  à gauche, et tous les éléments possibles de  $\mathcal{F}$  à droite. Il y en a  $2^{|V(H)|-1}$  à gauche et  $\Gamma_{\mathcal{F}}(n)$  à droite. ■

Par exemple un cas simple est de prendre un chemin  $P_n$  et de lui ajouter sur une extrémité  $k$  feuilles pendantes.

Cette construction permet de créer des familles jouables de taille linéaire autant qu'on le souhaite. Cela pourrait être utile par exemple pour étudier plus en détail les raisons de la périodicité ou non des séquences de Grundy, et peut-être d'obtenir une nouvelle approche de la conjecture de périodicité des jeux combinatoires, extension de la question posée sur les jeux octaux (Conjecture 1.3.2).

Cette proposition permet également, dans le cas de l'étude d'un graphe  $G$  possédant une structure particulière, de construire une famille jouable de taille linéaire autour de  $G$ . C'est par exemple le cas si  $G$  est un collage entre un graphe  $G_0$  et un chemin  $P_n$ , avec  $|V(G_0)| \ll n$ .

Pour les chenilles, une famille jouable de taille non polynômiale, nous avons démontré que le nimber d'une chenille de diamètre  $n$  peut être calculé en  $\mathcal{O}(n^3)$ , en calculant les nimbers des facteurs du mot réduit associé à cette chenille.

D'autres familles jouables ont été étudiées ou font l'objet de travaux en cours. Nous nous sommes notamment intéressés à une famille jouable de taille polynomiale : les **étoiles à au plus  $k$  branches** pour  $k \geq 3$  fixé, noté  $\mathcal{E}_k$ . La taille de cette famille est en  $\mathcal{O}(n^k)$ . Pour  $k \in \{3, 4\}$ , nous avons démontré l'existence d'une *multi-période*, c'est-à-dire qu'il existe  $q > 0$  et  $p > 0$  tels que pour toute suite d'entiers  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  tous supérieurs ou égaux à  $q$  l'étoile  $E(a_1, a_2, \dots, a_k)$  a le même nimber que l'étoile  $E' = E(a_1 + \alpha_1 p, a_2 + \alpha_2 p, \dots, a_k + \alpha_k p)$ , où pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ . Ces résultats n'ont pu être étendus à de grandes valeurs de  $k$  car la pré-période  $q$ , si elle existe, est trop importante pour pouvoir être découverte avec un ordinateur classique. En effet, la complexité de calcul, avec l'algorithme  $\mathcal{A}$ , des nimbers de toutes les étoiles à au plus  $k$  branches ( $k \geq 3$ ) et dont les branches sont de longueur au plus  $n$  est  $\mathcal{O}(n^{2k})$ .

D'autre part, les résultats obtenus sur la famille non polynômiale des chenilles peuvent être étendus à d'autres familles possédant certaines propriétés. C'est notamment le cas des **chenilles circulaires**, des **graphes d'intervalles**, ou encore des **graphes circulaires d'intervalles**. Les travaux concernant ces familles sont en cours.

Enfin, on peut s'intéresser au problème suivant :

Pour un entier  $k \geq 0$  donné, quel est le plus petit graphe de nimber  $k$  ?

Pour  $k \leq 4$ , ces graphes ont été découverts. Il s'agit de  $K_1$ ,  $P_3$ ,  $P_3 + K_1$ , et d'un arbre  $T$  à sept sommets pour  $k$  égal à 1, 2, 3 et 4 respectivement. Cependant la question reste ouverte pour  $k \geq 5$ .



## Chapitre 3

### Les 12 variantes de John H. Conway

Nom de la variante	Coup joué sur	fin de partie	gagnant
Disjonctif lent	un jeu	tous les jeux terminés	normal/misère
Disjonctif rapide	un jeu	un jeu terminé	normal/misère
Conjonctif lent	tous les jeux	tous les jeux terminés	normal/misère
Conjonctif rapide	tous les jeux	un jeu terminé	normal/misère
Sélectif lent	certains jeux	tous les jeux terminés	normal/misère
Sélectif rapide	certains jeux	un jeu terminé	normal/misère

TABLE 3.1 – Règles des douze variantes de John H. Conway

Les résultats présentés dans ce Chapitre ont été publiés dans [15] en 2009.

Dans son célèbre livre *On numbers and games* (Academic Press, N.Y., 1976) J. H. Conway a proposé 12 variantes sur la manière de composer les jeux combinatoires.

Considérons un jeu  $J$  construit à partir d'un ensemble de  $n$  jeux  $J_1, J_2 \dots J_n$  qui sont indépendants, autrement dit tels qu'un coup sur un des jeux ne modifie pas les positions des autres jeux. Par exemple, décidons que l'on joue aux dames et aux échecs en même temps. Il y a plusieurs choix de règles possibles. On pourrait imposer de jouer sur un des jeux à chaque coup, ou sur les deux simultanément, ou encore de choisir de jouer soit sur un soit sur les deux. D'autre part le gagnant peut être celui qui gagne le dernier jeu terminé, ou alors le premier gagnant sur un des jeux.

Remarquons que pour  $n$  jeux indépendants on peut définir un grand nombre de règles de composition pour ces jeux. Nous nous sommes dans un premier temps intéressés à des compositions connues, à savoir celles de J. Conway basées sur 3 variations possibles.

La première a été présentée en introduction : il s'agit de la variante **misère** ou "qui perd gagne", accordant la victoire à celui qui ne peut plus jouer plutôt qu'à celui qui effectue le dernier déplacement. On parlera par la suite de version **normale** ou **misère**.

La seconde considère la terminaison générale des  $n$  jeux indépendants. On dit que l'on joue en **terminaison rapide** si la partie est déclarée terminée dès que l'un des  $n$  jeux l'est. Par opposition, la règle de **terminaison lente** impose que tous les jeux soient terminés pour que la partie générale le soit.

Enfin on regarde les règles de composition proprement dites, c'est à dire que l'on définit ce que signifie jouer un coup sur un jeu constitué de  $n$  jeux indépendants. Premièrement la **règle disjonctive** impose de choisir un des jeux et de jouer uniquement sur celui-ci. Ensuite la **règle conjonctive** nous force à jouer sur tous les jeux simultanément. Enfin la **règle sélective** laisse le choix de jouer sur un, plusieurs ou la totalité des jeux.

On obtient alors par combinaison de ces règles les douze variantes de la Table 3.1.

Par extension, ces règles peuvent s'appliquer à des jeux combinatoires "divisibles", c'est à dire partant d'un jeu en un seul morceau on peut séparer celui-ci en deux ou plusieurs morceaux comme c'est le cas des jeux octaux ou hexadécimaux. Cette extension nous permet d'appliquer ces douze versions au jeu de domination et ainsi de constituer 11 nouveaux jeux.

Dans cette partie, nous allons étudier ces 12 variantes exclusivement sur la famille des chemins. Nos résultats pourraient dans certains cas être étendus à d'autres familles jouables de taille linéaire comme les grilles  $2 \times n$  ou les scies.



## 3.1 Fonction de jeu

Dans ce Chapitre nous allons rechercher pour chaque variante une *fonction de jeu* qui nous permettra de calculer les positions perdantes pour une famille jouable en temps quadratique. Une fonction de jeu  $f$  associe à toute position  $P$  une valeur  $f(P) \in \mathbb{Z}$ , et est définie comme suit :

**Définition 3.1.1** Une fonction de jeu  $f$  d'un jeu  $J$  est une fonction de l'ensemble  $\mathcal{P}(J)$  des positions de  $J$  dans  $\mathbb{Z}$  vérifiant les propriétés suivantes :

1. **Calculabilité** : Il existe une fonction  $\varphi$  de  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{Z}$  telle que pour toute position  $P$  non terminale on a  $f(P) = \varphi(f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_k))$ , avec  $\text{Opt}(P) = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ .
2. **Séparabilité** : Il existe une fonction  $\sigma$  de  $\mathbb{Z}$  dans  $\{0, 1\}$  vérifiant :  $P$  est perdant si et seulement si  $\sigma(f(P)) = 0$ .
3. **Additivité** : Il existe une fonction  $\delta$  de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{Z}$  vérifiant, pour toutes positions  $P_1$  et  $P_2$ ,  $f(P_1 + P_2) = \delta(f(P_1), f(P_2))$ .

On dira qu'une fonction est calculable, séparable ou additive si elle vérifie les conditions 1, 2, ou 3 respectivement.

Par exemple, pour le jeu de domination classique la fonction de Sprague-Grundy  $\rho$  est une fonction de jeu, et ses trois applications associées sont  $\varphi = \text{mex}$ ,  $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{N}}$  et  $\delta = \oplus$ .

Pour une variante donnée, la découverte d'une telle fonction nous permettra d'appliquer un algorithme quadratique s'inspirant de l'algorithme  $\mathcal{A}$  de la Figure 2.1, en remplaçant  $\rho$  et son calcul par minimum exclu par la fonction de jeu  $f$  et son calcul récursif  $\varphi$ .

La fonction de jeu est dite **éclairée** si elle permet également de trouver les stratégies gagnantes, c'est à dire s'il existe une fonction  $\gamma$  de l'ensemble des graphes dans  $\mathbb{N}$ , où  $\gamma(G)$  correspond au(x) sommet(s) sur lequel il faut jouer pour obtenir une position perdante, avec  $\gamma(G) = 0$  si  $G$  est perdant. Dans la pratique, une telle fonction sera rarement recherchée car elle nécessite une numérotation des options. Nous donnerons, pour chacune des douze variantes, une procédure permettant de rechercher un coup gagnant.

Regardons le cas de la famille des chemins  $\mathcal{P} = (P_n)_{n \geq 0}$  que nous allons étudier en détail dans la suite du Chapitre. La connaissance, pour une variante donnée, d'une fonction de jeu  $f$  et de ses trois applications  $\varphi$ ,  $\sigma$  et  $\delta$  supposées calculables en temps constant, ainsi que la donnée de la valeur initiale  $\alpha = f(\emptyset) = f(P_0)$  nous permet de calculer le type de  $P_n$  en temps quadratique et espace linéaire. Cette propriété est mise en évidence par l'algorithme  $\mathcal{A}'$  (Figure 3.1).

Dans cet algorithme  $\mathcal{A}'$ , on peut remarquer que que mis à part la valeur initiale  $\alpha = f(P_0)$ , les valeurs  $f(P_k)$  sont calculées uniquement à l'aide des applications  $\delta$  et  $\varphi$ . La fonction  $\sigma$  n'est utilisée que pour donner le résultat final, c'est la valeur  $f(P_k)$  qui est importante dans les calculs et non le type de  $P_k$ . Le tableau  $A$  stocke les valeurs des options de  $P_k$ , donc sa taille est  $\mathcal{O}(k)$ . Par conséquent le calcul de  $\varphi(A)$  n'est bien entendu

```

1: Input : Fonctions  $\varphi$ ,  $\sigma$  et  $\delta$ ; valeur initiale  $\alpha = f(P_0)$ ; taille maximale  $n$ .
2: Output : Type de  $P_n$ 
3:  $f(P_0) \leftarrow \alpha$ 
4: for  $i = 1$  to  $n$  do
5:    $A[ ] \leftarrow \emptyset$ 
6:   for  $j = -1$  to  $\lfloor \frac{i-3}{2} \rfloor$  do
7:      $A[j+1] \leftarrow \delta( f(P_j), f(P_{i-j-3}))$ 
8:   end for
9:    $f(P_i) \leftarrow \varphi(A)$ 
10: end for
11: return  $\sigma(f(P_n))$ 

```

FIGURE 3.1 – L’algorithme  $\mathcal{A}'$  calcule le type du chemin  $P_n$  en  $\mathcal{O}(n^2)$  à l’aide de la fonction de jeu  $f$

pas constant. Pour chacune des variantes, il faudra trouver une fonction de jeu  $f$  pour laquelle  $\varphi_f(A)$  soit calculable en temps linéaire. Dans le cas contraire la complexité de l’algorithme ne serait plus quadratique. En ce qui concerne  $\sigma(a)$  et  $\delta(a, b)$ , le calcul doit se faire en temps constant. Dans la pratique, on s’autorise une complexité logarithmique comme c’est le cas pour la nim-somme  $\oplus$ . Comme pour une simple addition ou multiplication, l’opération  $\oplus$  ne se fait pas réellement en temps constant. Toutefois comme il s’agit d’opérations de base elles sont considérées comme étant en  $\mathcal{O}(1)$ . Néanmoins des mesures de complexités plus fines existent : si ces opérations sont prises en considération, on parle alors de **bit-complexité**. Pour l’algorithme  $\mathcal{A}'$ , les calculs  $\lfloor \frac{i-3}{2} \rfloor$  et  $\delta( f(P_j), f(P_{i-j-3}))$  sont généralement en  $\mathcal{O}(\log(i))$ , mais dépendent de l’ordinateur et du langage de programmation utilisés.

Dans ce Chapitre, nous allons pour chacune des douze variantes rechercher une fonction de jeu. Lorsque celle-ci aura été découverte (dans dix cas sur douze), nous donnerons l’expression de ses trois applications associées permettant la calculabilité, la séparabilité et l’additivité. Ensuite nous utiliserons ces fonctions pour étudier le cas des chemins.

Nous utiliserons, lorsqu’il existe une fonction de jeu (dans 10 des 12 variantes), l’algorithme  $\mathcal{A}'$  en  $\mathcal{O}(n^2)$ . Une fois la fonction  $f$  découverte et son triplet d’application  $(\varphi_f, \sigma_f, \delta_f)$ , il suffira d’implémenter le calcul récursif par la fonction  $\varphi_f$ , de réunir les valeurs des composantes connexes avec  $\delta_f$ , et d’obtenir les types des chemins en utilisant  $\sigma_f$ .

Nous donnerons pour chacune des variantes l’expression de l’ensemble des tailles des chemins perdants  $\mathcal{L}$  ou, à défaut, un algorithme s’inspirant de l’algorithme  $\mathcal{A}'$  qui permettra de connaître le type d’un chemin donné. Nous estimerons également la complexité de recherche d’une stratégie gagnante sur une somme de chemins  $G = \sum_{j=1}^k P_{i_j}$ , en donnant une méthode permettant de trouver une option perdante  $G'$ .

L’algorithme  $\mathcal{A}'$  de la Figure 3.1 nous permet sans difficulté de calculer les valeurs de la fonction de jeu pour l’ensemble des chemins de taille inférieure à  $10^6$ . De plus, dans le cas où l’ensemble des positions gagnantes est connu, nous donnerons les stratégies

gagnantes à adopter sur une réunion de chemins, ou un algorithme permettant de les trouver. Dans tous les paragraphes, la réunion de chemins considérée sera notée  $G$ , aura  $k \geq 2$  composantes et la plus grande d'entre-elles sera  $P_n$ , soit  $\text{diam}(G) = n$ .

## 3.2 Jeu disjonctif lent

Il s'agit des règles normales du jeu de domination.

### 3.2.1 Version normale

Pour la version normale on utilise la fonction de Sprague-Grundy  $\rho$  et son calcul par récurrence utilisant le minimum exclu (*mex*) :

1.  $\rho(\emptyset) = 0$ ;
2. Pour tout  $G \neq \emptyset$ ,  $\rho(G) = \text{mex}\{\rho(G') \mid G' \in \text{Opt}(G)\}$ .

Pour la réunion disjointe de graphes, la fonction est additive en  $\oplus$  (XOR bit à bit, souvent appelée nim-somme) :

$$\text{Pour tous graphes } G, H \quad \rho(G + H) = \rho(G) \oplus \rho(H).$$

Ce jeu a été étudié en détail dans le Chapitre 2 Section 2.4.1.

L'implémentation de l'algorithme  $\mathcal{A}$  (c.f. Chapitre 2) en  $\mathcal{O}(n^2)$  nous permet de découvrir une période 34 (après une préperiode valant 52) pour les valeurs de Grundy des chemins, problème étudié en détail dans le Chapitre précédent (Chapitre 2 Section 2.4.1)), et résolu depuis de nombreuses années car il s'agit du jeu octal  $0 \bullet 137$ .

Il reste à trouver les stratégies gagnantes sur une réunion de  $p$  chemins  $G$  de nimber  $\rho(G) = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_p = k > 0$ . Soit  $r$  le plus grand entier tel que  $2^r \leq k$ . Alors par définition du ou exclusif  $\oplus$ , le nombre d'entiers  $a_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ) vérifiant  $a_i \geq 2^r$  est impair. Il y en a donc au moins un que l'on note  $a_j$ . Comme  $\oplus$  est le "ou exclusif bit à bit", et comme  $a_j$  et  $k$  sont compris entre  $2^r$  et  $2^{r+1}$ , on a :

$$a_j \oplus k < 2^r \leq a_j.$$

Par conséquent, en notant  $P$  le chemin de nimber  $a_j$ , il existe une option  $H$  de  $P$  de nimber  $a_j \oplus k$ . Or le graphe  $G' = G \setminus P$  a pour nimber  $k' = k \oplus a_j$ . On en déduit que :

$$\rho(G' + H) = \rho(G') \oplus \rho(H) = (a_j \oplus k) \oplus (a_j \oplus k) = 0.$$

Finalement comme  $G' + H$  est une option de  $G$  on en conclut que la stratégie gagnante pour le suivant est :

1. Trouver une composante  $P$  de  $G$  vérifiant  $\rho(P) \geq 2^{\log_2(\rho(G))}$  ;
2. Choisir une option  $H$  de  $P$  de nimber  $\rho(H) = \rho(P) \oplus \rho(G)$ .

En supposant les composantes non triées, la complexité de la première étape est en  $\mathcal{O}(k)$ . Celle de la seconde peut valoir  $\mathcal{O}(1)$ . En effet, on peut avoir préalablement construit des tables permettant d'atteindre pour un chemin  $P$  de nimber  $a$  un option  $H$  de nimber  $b < a$ . Ces tables sont de taille finie car à partir de  $n = 102 = 34 * 3$  ces options sont périodiques, c'est à dire que pour tous  $x$  et  $y$  positifs,  $P_{102+34x+y}$  et  $P_{102+y}$  ont la "même" option  $H$  (modulo 34) de nimber  $b$ .

### 3.2.2 Version misère

En ce qui concerne la version misère, les fonctions usuelles utilisées pour les jeux combinatoires en version normale n'ont pas d'équivalent dans cette variante. Aucune fonction de jeu n'ayant été découverte à ce jour, la recherche des stratégies gagnantes ne peut s'effectuer qu'en temps exponentiel, et souvent on ne peut guère faire mieux que d'explorer le graphe des configurations. Ainsi, le jeu de Kayles a été résolu en 1956 indépendamment par Guy and Smith [16] et par Adams et Benson [1] (la séquence de Grundy a une période de longueur 12 après une pré-période de longueur 70), alors que la solution de Kayles version misère n'a été donnée qu'en 1973 par Sibert et publiée en 1992 [26].

Dans la littérature, trois méthodes sont utilisées pour résoudre les jeux combinatoires impartiaux misère : *genus theory* [2, 4], *Sibert-Conway decomposition* [26] et *misère quotient semigroup* [24]. Ces techniques ne peuvent être décrites en quelques lignes, le lecteur intéressé pourra consulter ces articles ainsi que [23].

Dans le cas particulier de notre jeu sur les chemins, le problème reste à ce jour ouvert. La principale difficulté vient du fait qu'aucune fonction du type Sprague-Grundy n'existe, et donc que le calcul des stratégies gagnantes pour  $P_n$  s'effectue sur le graphe des configurations, l'algorithme est donc exponentiel.

Comme aucune fonction de jeu additive n'est connue à ce jour, on ne connaît pas l'ensemble des positions gagnantes. Cependant, ce problème a été étudié dans de nombreux articles où l'on peut trouver des résultats tant sur les positions perdantes que sur les stratégies gagnantes [2, 4], [26] [24].

Le calcul d'une stratégie gagnante sur  $G$  ne peut donc pour le moment que s'effectuer sur le graphe des configurations. Or sa taille est du même ordre que l'ensemble des sous-graphes de  $G$ , soit  $2^{kn}$ . De plus, une fois les valeurs de Sprague-Grundy misère calculées, il faudra rechercher sur quelle composante il faut jouer pour gagner. On peut l'effectuer avec la même méthode qu'en version normale, soit en  $\mathcal{O}(k)$ .

## 3.3 Jeu disjonctif rapide

Rappelons que dans cette version un coup s'effectue sur une seule composante (*disjonctif*) et la partie est terminée dès qu'une composante est vide. Par exemple en version normale on a évidemment  $G + K_1$  gagnant car il suffit au joueur de jouer sur le sommet isolé pour terminer la partie. Pour la version normale comme pour la version misère, des fonctions additives existent et sont nommées par J. Conway les fonctions *Foreclosed Sprague-Grundy*. Notées  $F^+$  en version normale et  $F^-$  en version misère, elles sont calculées comme suit :

1. Si une position est *illégal*, c'est à dire que le jeu est terminé ou peut se terminer par un unique coup gagnant, son *Foreclosed nimber* (normale et misère) vaut  $-1$ .
2. Sinon le calcul s'effectue de façon récursive et vaut le minimum exclu des valeurs de ses options, exactement comme pour la fonction de Sprague-Grundy habituelle.
3. Si  $G = G_1 + G_2$ , on a  $F(G) = F(G_1) \oplus F(G_2)$  si  $F(G_1)$  et  $F(G_2)$  sont positifs ou nuls, et  $F(G) = -1$  sinon.

Comme on dispose bien de l'additivité en  $\oplus$  et de la séparabilité (position perdante si et seulement si le foreclosed nimber est nul), il s'agit d'une fonction de jeu. On remarque que la définition est sensiblement la même que pour la fonction de Sprague-Grundy à la seule différence du point de départ du calcul récursif, ce qui met en évidence la proximité des deux versions lente et rapide. D'autre part, la notion de position illégale se retrouve bien dans Node-Kayles avec les chaînes  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  qui promettent une victoire en un coup pour le prochain joueur quelles que soient les autres composantes connexes qu'il puisse y avoir.

Cette fonction pourrait permettre de résoudre le jeu à l'aide du théorème de périodicité des jeux octaux qui peut également se démontrer dans le cas des terminaisons rapides :

**Théorème 3.3.1 (Périodicité des jeux octaux rapides)** *S'il existe  $p > 0$  et  $q > 0$  tels que*

$$F^+(P_{n+p}) = F^+(P_n) \text{ pour tout } n \text{ avec } q \leq n \leq 2q + p + 2.$$

Alors

$$F^+(P_{n+p}) = F^+(P_n) \text{ pour tout } n \geq q.$$

**Preuve:** Par récurrence sur  $n$ . Si  $n \leq 2q + p + 2$ , l'égalité est vraie. Posons maintenant  $n \geq 2q + p + 3$ . On peut écrire :

$$\text{Opt}(P_{n+p}) = \{P_{n+p-2}, P_{n+p-3}\} \cup \{P_i + P_j, j \geq i \geq 1, i + j = n + p - 3\}.$$

Par conséquent, on a :

$$F^+(P_{n+p}) = \text{mex} \left( \begin{array}{l} \{F^+(P_{n+p-2}), F^+(P_{n+p-3})\} \\ \cup \{F^+(P_i) \oplus F^+(P_j), j \geq i \geq 1, i + j = n + p - 3\} \end{array} \right).$$

Comme  $n - 2 < n$  et  $n - 3 < n$ , par récurrence on obtient :  $F^+(P_{n-2}) = F^+(P_{n+p-2})$  et  $F^+(P_{n-3}) = F^+(P_{n+p-3})$ . De même, comme  $q + p \leq \lfloor \frac{n+p-3}{2} \rfloor - p \leq j - p < n - 3$ , on obtient  $F^+(P_{j-p}) = F^+(P_j)$  et donc  $F^+(P_{n+p}) = F^+(P_n)$ . ■

Le même théorème peut être démontré en version misère ( $F^-$ ). On peut également adapter cette preuve à d'autres familles jouables, particulièrement à toutes celles qui sont de taille linéaire ou à la famille des chenilles. Il suffirait donc de découvrir, pour une telle famille jouable  $\mathcal{F}$  (c.f. Chapitre 2, Définition 2.2.1), une période vérifiée de  $q$  à  $2q + p + \alpha$  pour qu'elle soit répétée à l'infini, nous permettant ainsi de connaître l'ensemble des positions perdantes. La valeur  $\alpha$  variera suivant la famille considérée.

Traisons maintenant le cas des chemins.

### 3.3.1 Version normale

Regardons les options de  $P_n$ . Le joueur suivant n'a aucun intérêt à choisir de créer  $P_1$ ,  $P_2$  ou  $P_3$  car alors l'autre joueur gagne immédiatement. On peut donc éliminer les options  $P_i + P_{n-i-3}$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  des choix possibles. On en déduit le calcul récursif suivant (pour  $n \geq 7$ ) :

$$F^+(P_n) = \text{mex} \left\{ F^+(P_{n-2}), F^+(P_{n-3}), F^+(P_i) \oplus F^+(P_{n-i-3}), 4 \leq i \leq n - 7 \right\}$$

\*\*\*\*00112001120311223112334105341553425532255322550225042253442334425344553415534285 ;[0 ;83]  
 322853428544280442834422344253345533125332253322534225342253422334223342533445334255 ;[84 ;167]  
 322553425544255442534422344253345533125342253322534225342253422334223342533445334255 ;[168 ;251]  
 3225534253442554425344253442533455334253422533225342253422534223342233425334255 ;[252 ;335]

TABLE 3.2 – La séquence de Sprague-Grundy foreclosed en version normale

Comme pour le jeu initial, on l’implémente en espérant découvrir une période qui, à l’aide du Théorème 3.3.1, permettrait de connaître l’ensemble des positions perdantes.

En calculant la séquence de Grundy  $F^+(n)$ ,  $n \geq 0$ , on trouve qu’il y a un nombre fini de positions perdantes, et à l’aide du Théorème 3.3.1, on remarque que cette séquence est périodique, de période 84 après une préperiode 245 (voir Table 3.2)

Cette table nous permet de caractériser les chemins perdants et de déduire les stratégies gagnantes :

**Proposition 3.3.2** *L’ensemble des chemins perdants  $\mathcal{L}$  est fini et vaut :*

$$\mathcal{L} = \{4, 5, 9, 10, 14, 28, 50, 54, 94\}$$

Si  $n \notin \mathcal{L}$  alors on peut trouver une option perdante de  $P_n$  en  $\mathcal{O}(1)$ .

**Preuve:** La séquence  $S = (F^+(P_n))$  et les entiers  $q = 245$  et  $p = 84$  vérifient les conditions du Théorème 3.3.1. On en déduit que tout entier  $n \geq 336$  n’appartient pas à  $\mathcal{L}$ . D’autre part, si  $n \geq 408$ , alors posons  $n_0 = 324 + r$  avec  $0 \leq r \leq 83$  et  $n \equiv n_0 \pmod{84}$ . Pour  $P_{n_0}$  on peut trouver une option perdante  $P_i + P_j$  en s’aidant de la table 3.2. Comme  $n_0 \geq 324$  alors  $i \geq 161$ . Comme la séquence est périodique de période 84 à partir de du rang 161, on a  $F^+(P_i) = F^+(P_{i+n-n_0})$ . Or comme  $i + j + 3 = n_0$  on a  $(i + n - n_0) + j + 3 = n - n_0 + n_0 = n$ . Donc  $P_{i+n-n_0} + P_j$  est bien une option de  $P_n$ , et est perdante grâce à la période de  $S$ . ■

Calculer le nimber et une stratégie gagnante sur une réunion de  $k$  chaînes s’effectue donc en  $\mathcal{O}(k)$  avec la même méthode que pour le jeu de domination classique (c.f. Section 3.2.1).

### 3.3.2 Version misère

Dans ce cas seul  $P_0$  est une position illégale. On a donc  $F^-(P_1) = F^-(P_2) = 0$  et pour tout  $n \geq 5$  :

$$F^+(P_n) = \text{mex} \left\{ F^-(P_{n-2}), F^-(P_{n-3}), F^-(P_i) \oplus F^-(P_{n-i-3}), 1 \leq i \leq n-4 \right\}$$

Nous aidant de cette formule, nous avons calculé les valeurs de Sprague-Grundy foreclosed misère pour  $n \leq 10^6$  avec un algorithme en  $\mathcal{O}(n^2)$ , sans toutefois découvrir de période. Dans la Table 3.3, nous donnons quelques statistiques qui permettent notamment de remarquer que la croissance des nimbers paraît approximativement linéaire et que la probabilité qu’une position soit perdante tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l’infini.

n	Zéros	Max	Moy	Ecart-type	FreqG	% FreqG	DernZ	PosMaxG
10	3	4	1.4	1.08	0	30%	8	9
$10^2$	8	11	4.23	2.4114	2	15%	98	61
$10^3$	11	43	13.629	7.537448	16	6.8%	148	999
$10^4$	12	163	58.5556	30.621093	33	2.73%	1526	9977
$10^5$	13	907	275.95915	177.355129	128	0.795%	12758	94680
$10^6$	16	4600	1357.37834	780.786047	4096	0.256%	235086	979501
$2^{22}$	26	11529	3483.82599	3085.415376	8192	0.176%	2235172	3787086

Les différentes colonnes correspondent à :

1.  $n$  est l'intervalle étudié, il vaut  $I = [1, n]$ ;
2. *Zéros* est le nombre de chaînes perdantes sur  $I$ ;
3. *Max* est la plus grande valeur de Grundy présente sur  $I$ ;
4. *Moy* est la moyenne des nombres sur  $I$ ;
5. *Ecart-type* est l'écart-type des nombres sur  $I$ ;
6. *FreqG* est la valeur de Grundy la plus fréquente;
7. *% FreqG* est la proportion de ces valeurs sur  $I$ ;
8. *DernZ* est la position de la plus grande chaîne perdante;
9. *PosMaxG* est la position du plus grand nimber.

TABLE 3.3 – Statistiques de la séquence  $(F^-(P_n))_{n \geq 0}$

On observe également que le nimber le plus fréquent est toujours soit  $2^k$  soit  $2^{k+1}$  et, fait intrigant, cette propriété est vérifiée sur tout intervalle du type  $[1, n]$ . Notons, pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_k(n)$  le nombre de chemins de nimber  $k$  et taille comprise entre 0 et  $n$ . On peut observer un "saut" entre  $p_{k-1}$  et  $p_k$  lorsque  $k$  est un multiple de 128. Le rapport  $p_{128a-1}/p_{128a}$  est toujours inférieur à 25%, et dans certains cas il peut être inférieur à 1%. Par exemple, pour  $n = 2^{22}$ , on a  $p_{8191} = 24$  et  $p_{8192} = 7352$ .

Ces statistiques ne permettent en aucun cas d'affirmer ou d'infirmer la périodicité de ce jeu. En effet A. Flammenkamp [10], dans ses travaux sur les jeux octaux, a découvert que certains jeux combinatoires impartiaux avaient une période très grande, comme c'est le cas pour le jeu octal  $0 \bullet 106$  qui a une période de longueur 328226140474 (de l'ordre de  $2^{38}$ ), ou pour d'autres jeux octaux pour lesquels aucune période de longueur inférieure à  $2^{40}$  n'a été découverte.

Voici l'ensemble des chemins perdants de taille inférieure à  $2^{22}$  :

$$\mathcal{L}_{2^{22}} = \{1, 2, 8, 22, 44, 84, 90, 98, 118, 140, 148, 1526, 12758, 202420, 206710, 235086, 1205768\} \cup \\ \{1403900, 2200252, 2232686, 2232846, 2233222, 2233626, 2233786, 2235116, 2235172\}$$

Regardons maintenant la complexité de trouver une stratégie gagnante sur une réunion de chemins  $G$ . Il faut tout d'abord calculer la séquence  $(F^-(P_i))_{0 \leq i \leq n}$ , pour connaître le

foreclosed number de toutes les composantes de  $G$ . Cette étape est en  $\mathcal{O}(n^2)$ . Ensuite, comme les valeurs des fonctions de jeu s'additionnent là aussi avec  $\oplus$ , on procède de la même manière que pour le jeu disjonctif lent normal. Cette méthode a une complexité en  $\mathcal{O}(k+n) : \mathcal{O}(k)$  pour trouver la composante  $P$  vérifiant  $F^-(P) \oplus F^-(G) \leq 2^r \leq F^-(G)$ , et  $\mathcal{O}(n)$  pour trouver l'option  $H$  de  $P$  de number  $F^-(H) = F^-(P) \oplus F^-(G)$ .

La complexité de trouver un coup gagnant sur  $G$  est donc  $\mathcal{C}(n, k) = \mathcal{O}(n^2 + k)$ .

Néanmoins si l'on considère que  $G$  est un instant d'une partie ayant commencé sur un chemin  $P_m$ , il a d'abord fallu calculer une stratégie gagnante sur  $P_m$ . Cela a été effectué en  $\mathcal{O}(m^2)$  en calculant les numbers de tous les chemins de taille  $k \leq m$ . Par conséquent le calcul d'une stratégie gagnante sur  $G$  ne nécessite plus la première étape en  $\mathcal{O}(n^2)$ , car  $m \geq nk \geq n$ . Dans ce cas, on obtient donc une complexité en  $\mathcal{O}(n+k)$  pour trouver un coup gagnant.

### 3.4 Jeu conjonctif lent

La règle conjonctive force chaque joueur à jouer sur toutes les composantes connexes du graphe. Ainsi, l'expression des options de  $G + H$  est la suivante :

$$Opt(G + H) = \{G' + H' \mid G' \in Opt(G), H' \in Opt(H)\}$$

De plus la terminaison est lente, c'est à dire que toutes les composantes doivent être vides pour que le jeu soit terminé.

De ces deux règles découle l'idée intuitive que seules les plus grandes composantes (en diamètre) de  $J$  auront une importance sur le type de la position  $J$ . Par exemple si  $G$  est un graphe connexe de diamètre au moins 4, on a évidemment  $o(G + K_1) = o(G)$  puisque tout coup joué sur  $K_1$  le supprime.

Pour cette variante il existe également une fonction de jeu additive que J. Conway a nommé *suspense number*.

Commençons par définir les notations  $\max_{pair}$ ,  $\max_{impair}$ ,  $\min_{pair}$  et  $\min_{impair}$ . Pour un ensemble d'entiers naturels  $E$ ,  $\max_{pair}(E)$  (resp.  $\max_{impair}(E)$ ) est le plus grand entier pair (resp. impair) de l'ensemble  $E$ . De même,  $\min_{pair}(E)$  (resp.  $\min_{impair}(E)$ ) est le plus petit entier pair (resp. impair) de l'ensemble  $E$ .

#### 3.4.1 Version normale

La fonction de suspense normale  $S^+(G)$  de  $G$  est définie par :

$$\begin{cases} S^+(G) = 0 & \text{si } Opt(G) = \emptyset \\ S^+(G) = 1 + \max_{pair}\{S^+(G'), G' \in Opt(G)\} & \text{si } \exists G_0 \in Opt(G) \text{ t.q. } S^+(G_0) \text{ est pair,} \\ S^+(G) = 1 + \min_{impair}\{S^+(G'), G' \in Opt(G)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec cette définition, on observe qu'un graphe  $G$  est perdant si et seulement si  $S^+(G)$  est pair. En effet, par récurrence on remarque que si  $G$  a une option de fonction de suspense



pair (donc perdante), alors sa valeur est impaire (donc gagnante); par contre si aucune option n'a un suspense pair, alors  $S^+(G)$  est pair et donc  $G$  est perdant.

À cette définition est associée la stratégie de jeu suivante :

1. Sachant que l'on a une stratégie gagnante, on va faire durer le plus possible la partie (donc faire durer le suspense, d'où le nom de la fonction) en choisissant une option perdante ayant le plus grand  $S^+$  possible.
2. Par contre, si aucune stratégie gagnante n'existe (la position est donc perdante), on va chercher à en finir au plus vite en choisissant une option de plus petit suspense possible.

On en déduit que la valeur  $S^+(G)$  est exactement la durée (en nombre de coups) de la partie dans le cas où les deux joueurs appliquent cette stratégie.

De plus, on démontre que cette fonction est additive via l'opérateur max :

**Proposition 3.4.1** *Pour tous graphes  $G$  et  $H$  on a :  $S^+(G+H) = \max\{S^+(G), S^+(H)\}$ .*

**Preuve:** On utilise la formule de l'expression des options de  $G + H$  :

$$Opt(G + H) = \{G' + H' , G' \in Opt(G) , H' \in Opt(H) \}.$$

La preuve est réalisée par récurrence sur  $|V(G + H)|$ . Nous supposons, sans perte de généralité, que  $S^+(G) \leq S^+(H)$ .

1. Si  $S^+(G)$  et  $S^+(H)$  sont pairs, alors par définition toute option de  $G$  ou  $H$  a une valeur de suspense impaire. On a donc par récurrence :

$$S^+(G + H) = 1 + \max_{\text{impair}} \{ \max\{S^+(G'), S^+(H')\}, G' \in Opt(G), H' \in Opt(H) \}$$

Comme  $S^+(G) \leq S^+(H)$ , il existe une option de  $H$  qui a une valeur de suspense supérieure à celle de toute option de  $G$ . On en déduit que :

$$S^+(G + H) = 1 + \max_{\text{impair}} \{S^+(H'), H' \in Opt(H)\} = S^+(H).$$

2. Si  $S^+(G)$  est pair et  $S^+(H)$  est impair, alors il existe une option  $H_0$  de  $H$  de valeur de suspense exactement  $S^+(H) - 1$ . Comme  $S^+(G) \leq S^+(H) - 1$ , on en déduit à l'aide de l'hypothèse de récurrence qu'il existe une option  $K$  de  $G + H$  vérifiant  $S^+(K) = \max\{S^+(G'), S^+(H_0)\} = S^+(H) - 1$ . Comme aucune option de  $G$  n'a une valeur de suspense paire, on conclut que  $S^+(G + H) = 1 + S^+(H_0) = S^+(H)$ .
3. Si  $S^+(G)$  est impair et  $S^+(H)$  est pair, toute option  $G'$  de  $G$  de valeur de suspense paire vérifie  $\forall H' \in Opt(H), S^+(G') \leq S^+(H')$  (car  $S^+(H)$  est un minimum sur les valeurs de suspense impaires de ses options). On a donc  $S^+(G + H) = S^+(H)$ .
4. Enfin si  $S^+(G)$  et  $S^+(H)$  sont impairs, alors par définition il existe une option de  $H$  ayant une valeur de suspense paire et supérieure à  $S^+(G')$  pour toute option  $G'$  de  $G$ . On en déduit donc la propriété. ■

En ce qui concerne les chemins, on a :

**Théorème 3.4.2** *La valeur de suspense normale  $S^+$  des chemins est une fonction croissante et vaut, pour tout  $n \geq 0$  :*

1.  $S^+(P_{5(2^n-1)}) = 2n$  ;
2.  $S^+(P_k) = 2n + 1$ , pour tout  $k \in [5(2^n - 1) + 1; 5(2^{n+1} - 1) - 2]$  ;
3.  $S^+(P_{5(2^{n+1}-1)-1}) = 2n + 2$ .

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , on peut facilement calculer les valeurs suivantes :  $S^+(P_0) = 0$ ,  $S^+(P_1) = S^+(P_2) = S^+(P_3) = 1$  et  $S^+(P_4) = S^+(P_5) = 2$ .

Supposons maintenant la propriété vraie pour tout  $p$ ,  $0 \leq p < n$  et posons  $k \in [5(2^n - 1); 5(2^{n+1} - 1) - 1]$ . On considère trois cas.

1.  $k = 5(2^n - 1)$ .

Comme  $\lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor = 5 \cdot 2^{n-1} - 4 > 5(2^{n-1} - 1)$ , à l'aide de l'hypothèse de récurrence, on obtient  $S^+(P_j) = 2n - 1$  pour tout  $j$ ,  $\lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor \leq j \leq k - 4$ , et donc  $\max(S^+(P_i), S^+(P_j)) = 2n - 1$  pour tous  $i, j$ ,  $j \geq i \geq 1$ ,  $i + j = k - 3$ . Enfin, comme  $S^+(P_{k-2}) = S^+(P_{k-3}) = 2n - 1$ ,  $P_k$  n'a pas d'option de valeur de suspense paire, donc :

$$\begin{aligned} S^+(P_k) &= 1 + \min_{\text{impair}} ( \{S^+(P_{k-2}), S^+(P_{k-3})\} \\ &\quad \cup \{\max(S^+(P_i), S^+(P_j)), j \geq i \geq 1, i + j = k - 3\} ) \\ &= 1 + \min_{\text{impair}} ( \{2n - 1\} \cup \{2n - 1\} ) \\ &= 2n \end{aligned}$$

2.  $k \in [5(2^n - 1) + 1; 5(2^{n+1} - 1) - 2]$ .

Tout d'abord observons que pour un tel  $k$ ,  $P_{5(2^n-1)} + P_{k-3-5(2^n-1)}$  est une option de  $P_k$  de valeur de suspense paire, car  $k - 3 - 5(2^n - 1) \leq 5(2^{n+1} - 1) - 2 - 3 - 5(2^n - 1) = 5(2^n - 1) - 10 < 5(2^n - 1)$  et donc,  $\max(S^+(P_{5(2^n-1)}), S^+(P_{k-3-5(2^n-1)})) = S^+(P_{5(2^n-1)}) = 2n$  (en utilisant l'hypothèse de récurrence et le cas 1 ci-dessus). On en déduit l'expression suivante :

$$\begin{aligned} S^+(P_k) &= 1 + \max_{\text{paire}} ( \{S^+(P_{k-2}), S^+(P_{k-3})\} \\ &\quad \cup \{\max(S^+(P_i), S^+(P_j)), j \geq i \geq 1, i + j = k - 3\} ) . \end{aligned}$$

Procédons maintenant par récurrence sur  $k$ . On a :

$$\begin{aligned} S^+(P_{5(2^n-1)+1}) &= 1 + \max_{\text{paire}} ( \{S^+(P_{5(2^n-1)-1}), S^+(P_{5(2^n-1)-2})\} \\ &\quad \cup \{\max(S^+(P_i), S^+(P_j)), j \geq i \geq 1, i + j = 5(2^n - 1) - 2\} ) \\ &= 1 + \max_{\text{paire}} ( \{2n, 2n - 1\} \cup \{2n - 1, 2n\} ) \\ &= 2n + 1. \end{aligned}$$

De même,  $S^+(P_{5(2^n-1)+2}) = S^+(P_{5(2^n-1)+3}) = 2n + 1$ . Enfin, à l'aide de l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} S^+(P_k) &= 1 + \max_{\text{paire}} ( \{S^+(P_{k-2}), S^+(P_{k-3})\} \\ &\quad \cup \{\max(S^+(P_i), S^+(P_j)), j \geq i \geq 1, i + j = k - 3\} ) \\ &= 1 + \max_{\text{paire}} ( \{2n - 1\} \cup \{2n - 1, 2n\} ) \\ &= 2n + 1. \end{aligned}$$

3.  $k = 5(2^{n+1} - 1) - 1$ .

Les résultats obtenus au cas 2 nous permettent d'écrire  $S^+(P_{k-2}) = S^+(P_{k-3}) = 2n + 1$ . De plus, comme  $\lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor = 5 \cdot 2^n - 3 > 5(2^n - 1)$ , on obtient par récurrence et à l'aide du cas 2  $S^+(P_j) = 2n + 1$  pour tout  $j$ ,  $\lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor \leq j \leq k - 4$ , et donc  $\max(S^+(P_i), S^+(P_j)) = 2n + 1$  pour tout  $i, j$ ,  $j \geq i \geq 1$ ,  $i + j = k - 3$ . On en déduit que  $P_k$  n'a pas d'option de valeur de suspense paire et donc que :

$$\begin{aligned} S^+(P_k) &= 1 + \min_{\text{impair}} ( \{S^+(P_{k-2}), S^+(P_{k-3})\} \\ &\quad \cup \{ \max(S^+(P_i), S^+(P_j)), j \geq i \geq 1, i + j = k - 3 \} ) \\ &= 1 + \min_{\text{impair}} ( \{2n + 1\} \cup \{2n + 1\} ) \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

■

On peut remarquer que le Théorème 3.4.2 montre que la séquence des valeurs de suspense normale des chaînes a une *période géométrique* de raison 2.

Soit  $G = P_{i_1} + P_{i_2} + \dots + P_{i_\ell}$  une union disjointe de chaînes. Posons  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_\ell$ . La position  $G$  est perdante si et seulement si la plus grande des chaînes est perdante, soit s'il existe  $k \geq 0$  tel que  $i_\ell \in \{5(2^k - 1), 5(2^k - 1) - 1\}$ . En effet, comme la séquence est croissante, la valeur de suspense sera maximale sur la plus grande des chaînes de  $G$ , et donc  $S^+(G) = S^+(P_{i_\ell})$ . Si au contraire  $G$  est une position gagnante, il existe un entier  $r$  tel que  $t = 5(2^r - 1) < i_\ell$ . Un coup gagnant pour le prochain joueur peut donc être obtenu en jouant sur chaque composante de longueur  $p > t$  vers  $P_{t-1}$  si  $p = t + 1$ , vers  $P_t$  si  $p = t + 2$ , ou vers  $P_t + P_{p-t-3}$  sinon. Comme  $p - t - 3 \leq t$ , il s'agit bien d'une option perdante. Le calcul du coup gagnant se fait donc en  $\mathcal{O}(k)$ . Mais il faut avoir préalablement calculé la valeur de  $r$ , qui peut s'effectuer en  $\mathcal{O}(\log(n))$ . On en conclut que la complexité du calcul des stratégies gagnantes est en  $\mathcal{O}(k + \log(n))$ .

### 3.4.2 Version misère

La fonction de suspense misère  $S^-(G)$  de  $G$  est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} S^-(G) = 0 & \text{si } \text{Opt}(G) = \emptyset \\ S^-(G) = 1 + \max_{\text{impair}} \{S^-(G'), G' \in \text{Opt}(G)\} & \text{si } \exists G_0 \in \text{Opt}(G) \text{ t.q. } S^-(G_0) \text{ est pair,} \\ S^-(G) = 1 + \min_{\text{pair}} \{S^-(G'), G' \in \text{Opt}(G)\} & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

À l'opposé de la version normale, le jeu terminal (le graphe vide) est gagnant. Donc tout joueur doit chercher à éviter une option de valeur de suspense paire. Chaque joueur doit donc, pour trouver une stratégie gagnante, choisir une option de valeur de suspense impaire. Dans ce cas on choisit la plus grande valeur de  $S^-(H)$  pour faire durer le suspense comme en version normale.

Cette fonction est bien entendu également additive en max :

**Proposition 3.4.3** *Pour tous graphes  $G$  et  $H$  on a :  $S^-(G+H) = \max(S^-(G), S^-(H))$ .*

**Preuve:** La preuve est similaire à celle de la Proposition 3.4.1, il suffit d'échanger "pair" et "impair". ■

Pour la version misère, on démontre la propriété suivante :

**Théorème 3.4.4** *La séquence des valeurs de suspense misère  $S^-$  de chemins est croissante et vérifie, pour tout  $n \geq 0$  :*

1.  $S^+(P_{7,2^n-6}) = 2n + 1$ ,
2.  $S^+(P_{7,2^n-5}) = 2n + 1$ ,
3.  $S^+(P_k) = 2n + 2$  pour tout  $k$ ,  $7 \cdot 2^n - 4 \leq k \leq 7 \cdot 2^{n+1} - 7$ .

**Preuve:** La preuve étant similaire à celle du Théorème 3.4.2 elle ne sera pas détaillée ici. ■

Comme pour la version normale, le type d'une réunion disjointe de chemins  $G$  est donné par celui de sa plus grande composante, et trouver un coup gagnant pour  $G$  peut s'effectuer de la même manière en  $\mathcal{O}(k + \log(n))$ .

## 3.5 Jeu conjonctif rapide

À l'opposé de la variante précédente, la terminaison rapide entraîne que ce sont les composantes les plus petites qui auront la plus grande importance dans la résolution de ce jeu. Tout laisse donc à penser que la connaissance et des types et des stratégies gagnantes sera plus aisée que pour les quatre jeux disjonctifs ou les deux versions conjonctives lentes. Par exemple, on s'aperçoit qu'en version misère  $G + K_1$  est toujours perdant car le joueur est forcé de jouer sur  $K_1$ , vidant ainsi une composante. Dans ce contexte, J. Conway a défini une fonction de jeu s'adaptant parfaitement à ces observations et qu'il appelle *remoteness function*. Nous traduirons cette appellation par *temps de jeu*, notée  $R^+$  pour la version normale et  $R^-$  pour la version misère.

### 3.5.1 Version normale

**Définition 3.5.1** *Soit  $G$  un graphe. Le temps de jeu version normale  $R^+(G)$  est donné par :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} R^+(G) = 0 & \text{si } Opt(G) = \emptyset \\ R^+(G) = 1 + \min_{\text{pair}} \{R^+(G'), G' \in Opt(G)\} & \text{si } \exists G' \in Opt(G) \text{ t.q. } R^+(G') \text{ est pair,} \\ R^+(G) = 1 + \max_{\text{impair}} \{R^+(G'), G' \in Opt(G)\} & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Avec cette définition on observe qu'un graphe est perdant si et seulement si son temps de jeu est pair.

Cette définition formalise l'idée suivante : sachant que l'on peut gagner on décide de terminer la partie au plus vite, donc en recherchant une option perdante de temps de jeu minimal. Inversement, si l'on sait que l'on a perdu on fait durer la partie le plus longtemps possible (espérant une erreur de la part de l'autre joueur...).

$R^+$  est bien une fonction de jeu pour cette variante car elle vérifie l'additivité en min :

**Proposition 3.5.2** *Pour tous graphes  $G$  et  $H$  non vides on a :*

$$R^+(G + H) = \min\{R^+(G), R^+(H)\}.$$

**Preuve:** Il suffit de remarquer que le temps de jeu décroît strictement à chaque coup. On en déduit que la composante de temps de jeu minimal sera vidée en premier si l'on suit les stratégies décrites ci-dessus. ■

En ce qui concerne le jeu de domination sur les chemins, les temps de jeu sont les suivants :

**Théorème 3.5.3**

1.  $R^+(P_1) = R^+(P_2) = R^+(P_3) = 1$  ;
2.  $R^+(P_4) = R^+(P_5) = 2$  ;
3.  $R^+(P_6) = R^+(P_7) = R^+(P_8) = 3$  ;
4.  $R^+(P_9) = R^+(P_{10}) = 4$  ;
5.  $R^+(P_n) = 3$ , pour tout  $n \geq 11$ .

**Preuve:** Les quatre premiers points peuvent être facilement vérifiés en utilisant la définition et la propriété d'additivité. En effet,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  ayant le graphe vide comme option, leur temps de jeu vaut 1.  $P_4$  et  $P_5$  n'ayant que des options de temps de jeu 1, le leur vaut 2. Ensuite, comme  $P_4 \in \text{Opt}(P_6)$ ,  $P_4 \in \text{Opt}(P_7)$  et  $P_5 \in \text{Opt}(P_8)$ ,  $P_6$ ,  $P_7$  et  $P_8$  ont une option de temps de jeu pair, donc le leur vaut  $2 + 1 = 3$ . Enfin, à l'aide de l'additivité en min, on remarque que  $P_9$  et  $P_{10}$  n'ont que des options de temps de jeu impair. Leur option commune  $P_7$  entraîne que  $R^+(P_9) = R^+(P_{10}) = 4$ .

Posons donc  $n \geq 11$ . On remarque que  $P_{n-7} + P_4 \in \text{Opt}(P_n)$ . Par récurrence sur  $n$ , et connaissant les temps de jeu des petits chemins, on a :

$$R^+(P_{n-7} + P_4) = \min_{\text{pair}}\{R^+(P_{n-7}), R^+(P_4)\} = \min_{\text{pair}}\{R^+(P_{n-7}), 2\} = 2.$$

En effet, comme  $n - 7 \geq 4$  on a  $R^+(P_{n-7}) \geq 2$ . Par conséquent on obtient  $R^+(P_n) = 1 + 2 = 3$ . ■

Les graphes perdants étant ceux qui ont un temps de jeu pair, on en déduit l'ensemble des chemins perdants  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{L} = \{4, 5, 9, 10\}$$

On peut remarquer qu'une réunion de chemins  $G$  (avec  $\text{diam}(G) \geq 11$ ) est perdante si et seulement si son plus petit chemin  $P_a$  est de taille  $a \in \{4, 5\}$ . Cette propriété se démontre

aisément par récurrence sur  $|V(G)|$ . Une stratégie gagnante sur  $G$  est donc de fournir un graphe  $H$  de plus petite composante  $P_4$  ou  $P_5$ . Premièrement si  $G$  contient une composante de taille au plus 3 alors le joueur Suivant peut vider celle-ci et donc gagne. Supposons maintenant que  $G$  n'a que des composantes de taille  $a \geq 6$ . Il applique la stratégie suivante sur chaque  $P_a$  :

1. Si  $6 \leq a \leq 8$  alors il choisit l'option  $P_4$  ou  $P_5$  ;
2. Si  $a \in \{9, 10\}$  alors il choisit l'option  $P_{a-2}$ .
3. Sur la plus grande composante  $P_n$  ( $n \geq 11$ ), il choisit  $P_{n-7} + P_4$ .

Ainsi l'option  $H$  a sa plus petite composante de taille 4 ou 5, donc elle est perdante. Cette stratégie est réalisable en  $\mathcal{O}(k)$ . On ne pourrait faire mieux car on est forcé de choisir  $k$  coups, un pour chaque composante de  $G$ .

### 3.5.2 Version misère

Pour la version misère, la fonction de jeu est similaire celle de la version classique, mis à part qu'ici ce sont les graphes de temps de jeu pair qui sont gagnants.

**Définition 3.5.4** Soit  $G$  un graphe. Le temps de jeu version misère  $R^-(G)$  est donné par :

$$\begin{cases} R^-(G) = 0 & \text{si } Opt(G) = \emptyset \\ R^+(G) = 1 + \min_{\text{impair}}\{R^+(G'), G' \in Opt(G)\} & \text{si } \exists G' \in Opt(G) \text{ t.q. } R^+(G') \text{ est pair,} \\ R^+(G) = 1 + \max_{\text{pair}}\{R^+(G'), G' \in Opt(G)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici aussi on démontre avec des arguments similaires à la version normale la même propriété sur les réunions de graphes :

**Proposition 3.5.5** Pour tous graphes  $G$  et  $H$  non vides on a :

$$R^-(G + H) = \min\{R^-(G), R^-(H)\}.$$

Les types et les stratégies gagnantes de notre jeu sur les chaînes sont facilement exprimables. En effet, si  $n \geq 3$  on peut toujours couper le chemin  $P_n$  pour laisser un sommet isolé d'un côté et  $P_{n-4}$  de l'autre, et ainsi être certain de gagner la partie en 2 coups. Plus formellement on a :

**Proposition 3.5.6**

1.  $R^-(P_1) = R^-(P_2) = 1$  ;
2.  $\forall n \geq 3, R^-(P_n) = 2$ .

L'ensemble des chemins perdants est donc  $\mathcal{L} = \{1, 2\}$ . Une réunion disjointe  $G$  de chemins est perdante si et seulement si le plus petit chemin est  $P_1$  ou  $P_2$ . Par conséquent sur tout autre réunion  $G'$  gagnante la stratégie consiste à choisir l'option  $P_1 + P_{n-4}$  pour chacune des chaînes  $P_n$  de  $G'$  (et  $P_1$  comme option de  $P_3$ ). Cette méthode est également en  $\mathcal{O}(k)$ .

## 3.6 Jeu sélectif lent

Cette nouvelle règle laisse un plus grand choix à chacun des deux joueurs. En effet, le Suivant peut choisir de jouer sur n'importe quelle sélection (non vide) de composantes connexes du graphe. Si  $G$  est un graphe comprenant  $k$  composantes connexes et  $n$  sommets, le nombre d'options est maximal si chaque composante possède  $\mathcal{O}(\frac{n}{k})$  sommets. Dans ce cas on a  $\frac{n}{k} + 1$  possibilités de coups sur chaque composante (le jeu sur un sommet ou ne rien faire), soit  $\binom{n}{k}^{k+1} - 1$  options possibles (il faut retirer 1 car on ne peut passer son tour). Au pire avec  $k = \sqrt{n}$ ,  $G$  peut avoir  $\mathcal{O}(n^{\frac{\sqrt{n}+1}{2}})$  options.

En ce qui concerne les réunions de chemins, le nombre d'options peut être également très important. Par conséquent, nous devons trouver une alternative à la méthode naïve qui consiste à regarder les types de l'ensemble des options.

### 3.6.1 Version normale

Comme l'a suggéré J. Conway [7], nous utiliserons uniquement le *booléen de jeu*  $\sigma^+$  défini par :

- $\sigma^+(G) = 0 \Leftrightarrow G$  est perdant.
- $\sigma^+(G) = 1 \Leftrightarrow G$  est gagnant.

Le calcul de cette fonction se fait récursivement à l'aide des booléens de jeu de ses options :

1.  $\sigma^+(\emptyset) = 0$ ;
2. Si  $G$  est non vide alors  $\sigma^+(G) = \overline{\min\{\sigma^+(G_1), G_1 \in \text{Opt}(G)\}} = 1 - \min\{\sigma^+(\text{Opt}(G))\}$

En effet, si  $G$  est gagnant c'est qu'il existe une option perdante, c'est à dire une option  $G'$  vérifiant  $\sigma^+(G') = 0$ , soit  $\min(\sigma^+(\text{Opt}(G))) = 0$ . Inversement, si  $G$  est perdant toutes les options sont gagnantes, soit  $\min(\sigma^+(\text{Opt}(G))) = 1$ . Pour cette version, le booléen de jeu est bien une fonction de jeu car elle admet une additivité en  $\vee$ , ( $\vee$  désignant le "ou" logique ou disjonction) :

**Proposition 3.6.1** *Pour tous graphes  $G$  et  $H$  non vides, on a :*

$$\sigma(G + H) = \sigma(G) \vee \sigma(H).$$

**Preuve:** Utilisons la formule de l'expression des options (qui est valable pour les deux versions) :

$$\text{Opt}(G + H) = \{G + H_1, G_1 + H, G_1 + H_1, G_1 \in \text{Opt}(G), H_1 \in \text{Opt}(H)\}.$$

La preuve est réalisée par récurrence sur  $n = |V(G + H)|$ . On vérifie aisément que si  $G = H = K_1$ , la proposition est vraie.

1. Si  $\sigma(G) = \sigma(H) = 1$ , alors il existe  $G_1 \in \text{Opt}(G)$  tel que  $\sigma(G_1) = 0$ , et il existe également  $H_1 \in \text{Opt}(H)$  tel que  $\sigma(H_1) = 0$ .  
Par récurrence on en déduit que  $\sigma(G_1 + H_1) = 0$ , et comme  $G_1 + H_1 \in \text{Opt}(G + H)$ , on en déduit que  $\sigma(G + H) = 1$ .

2. Si  $\sigma(G) = 1$  et  $\sigma(H) = 0$ , alors il existe  $G_1 \in \text{Opt}(G)$  tel que  $\sigma(G_1) = 0$ . On en déduit que  $\sigma(G_1 + H) = 0$ , soit  $\sigma(G + H) = 1$ .
3. Si  $\sigma(G) = 0$  et  $\sigma(H) = 1$ , alors il existe  $H_1 \in \text{Opt}(H)$  tel que  $\sigma(H_1) = 0$ . On en déduit que  $\sigma(G + H_1) = 0$ , soit  $\sigma(G + H) = 1$ .
4. Si  $\sigma(G) = \sigma(H) = 0$ , alors pour toutes options  $G_1$  et  $H_1$  de  $G$  et  $H$  respectivement,  $\sigma(G_1) = \sigma(H_1) = 1$ . Donc  $\sigma(\text{Opt}(G + H)) = \{0 \vee 1, 1 \vee 0, 1 \vee 1\} = \{1\}$ , ce qui entraîne que  $\sigma(G + H) = 0$ .

■

Disposant d'une fonction de jeu additive (à valeurs dans  $\{0, 1\}$ ), le calcul récursif peut s'effectuer en  $\mathcal{O}(n^2)$ .

On démontre que la séquence des booléens de jeu des chemins est périodique de période 5 pour cette variante :

**Proposition 3.6.2** *Pour tout  $n \geq 0$  on a :*

1.  $\sigma^+(P_{5n}) = \sigma^+(P_{5n+4}) = 0$  ;
2.  $\sigma^+(P_{5n+1}) = \sigma^+(P_{5n+2}) = \sigma^+(P_{5n+3}) = 1$ .

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur  $n$ . La propriété est vérifiée pour  $n = 0$ . Soit  $n \geq 1$ .

1. Calculons les booléens de jeu des options de  $P_{5n}$  :

$$\text{Opt}(P_{5n}) = \left\{ P_{5n-2}, P_i + P_{5n-i-3}, 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{5n-3}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$\sigma^+(P_{5n}) = 1 - \min \left\{ 1, \sigma^+(P_i) \vee \sigma^+(P_{5n-i-3}), 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{5n-3}{2} \right\rfloor \right\}.$$

En séparant les valeurs de  $i$  par congruences modulo 5, on obtient :

$$\sigma^+(P_{5n}) = 1 - \min \{ 1, \sigma^+(P_{5j+k}) \vee \sigma^+(P_{5n-5j-k-3}), 0 \leq k \leq 4 \},$$

soit par hypothèse de récurrence :

$$\sigma^+(P_{5n}) = 1 - \min \{ 1, 0 \vee 1, 1 \vee 1, 1 \vee 0, 1 \vee 0, 0 \vee 1 \} = 0$$

2. Pour  $P_{5n+1}$ , comme  $P_{5n-1} \in \text{Opt}(P_{5n+1})$  et  $\sigma^+(P_{5n-1}) = 0$  par hypothèse de récurrence, on en conclut que  $\sigma^+(P_{5n+1}) = 1$ .
3. De même,  $P_{5n} \in \text{Opt}(P_{5n+2})$ , et puisque  $\sigma^+(P_{5n}) = 0$ , on en déduit que  $\sigma^+(P_{5n+2}) = 1$ .
4. Là encore, puisque  $P_{5n} \in \text{Opt}(P_{5n+3})$  on a  $\sigma^+(P_{5n+3}) = 1$ .



5. Il reste à montrer que  $\sigma^+(P_{5n+4}) = 0$ . On a :

$$\sigma^+(P_{5n+4}) = 1 - \min \left\{ \sigma^+(P_{5n+2}), \sigma^+(P_i) \vee \sigma^+(P_{5n-i+1}), 0 \leq i \leq \left\lfloor \frac{5n+1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Comme ci-dessus, on sépare ces options en fonction des congruences de  $i$  modulo 5 :

$$\sigma^+(P_{5n+4}) = 1 - \min \{ 1, \sigma^+(P_{5j+k}) \vee \sigma^+(P_{5n-5j-k+1}), 0 \leq k \leq 4 \}.$$

Par récurrence, on en déduit que :

$$\sigma^+(P_{5n+4}) = 1 - \min \{ 1, 0 \vee 1, 1 \vee 0, 1 \vee 0, 1 \vee 1, 0 \vee 1 \} = 0.$$

■

On a donc pour cette variante :

$$\mathcal{L} = \{5n, n \geq 0\} \cup \{5n + 4, n \geq 0\}$$

Avec la même méthode que pour la preuve de la Proposition 3.6.2, on peut montrer qu'une réunion de chemins  $G$  est perdante si et seulement si tous ses chemins ont une taille congrue à 0 ou 4 modulo 5. Par conséquent, si  $G$  n'est pas perdant, un coup gagnant consiste à jouer sur toutes les composantes de tailles non congrues à 0 ou 4 modulo 5, vers une option dont les deux composantes sont de tailles congrues à 0 ou 4 modulo 5. C'est toujours possible car cela a été démontré dans la preuve de la Proposition 3.6.2. On en conclut que la complexité de recherche d'un coup gagnant est  $\mathcal{O}(k)$ .

### 3.6.2 Version misère

Nous serions tentés là aussi d'utiliser le booléen de jeu  $\sigma^-$ . Mais quelques essais nous montrent que pour la version misère cette fonction n'est pas additive. Par exemple  $\sigma^-(P_1) = 0$  et  $\forall n \geq 2, \sigma^-(nP_1) = 1$ . De plus,  $\sigma^-(P_4) = \sigma^-(P_5) = \sigma^-(P_8) = 1$  alors que  $\sigma^-(P_5 + P_4) = 0 \neq 1 = \sigma^-(P_8 + P_4)$ .

Comme l'a observé J. Conway, la version misère est ici bien plus difficile à traiter que la version normale, comme c'est le cas pour le jeu de domination normal (disjonctif lent) où l'on dispose d'un fonction de jeu en version normale mais pas en version misère.

Néanmoins, nous allons utiliser le booléen de jeu  $\sigma^-$  car, dans l'exemple des chaînes ou pour d'autres familles jouables de taille linéaire, nous pouvons observer certaines propriétés utiles pour la description des stratégies de jeu, et donc pour la connaissance des stratégies gagnantes.

Nous devons, pour connaître la valeur  $\sigma^-(P_n)$ , effectuer le calcul récursif pour toutes les réunions de chaînes  $G = P_{i_1} + P_{i_2} + \dots + P_{i_k}$  (avec  $\sum_{j=1}^k i_j \leq n - 2$ ).

Commençons par déterminer les réunions d'au moins deux chemins qui sont perdantes.

**Lemme 3.6.3** Soit  $G = P_{i_1} + P_{i_2} + \dots + P_{i_\ell}$  une réunion de chemins (avec  $\ell \geq 2$ ), et soit  $\lambda_i(G)$ ,  $0 \leq i \leq 4$ , le nombre de chemins de  $G$  de taille congrue à  $i$  modulo 5. On a :

$$\sigma^-(G) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \lambda_3(G) = 0.$$

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur le nombre  $n$  de sommets de  $G$ . La propriété est vraie pour  $n = 2$ , car le seul graphe possible est  $G = 2.P_1$  et on a bien  $\sigma^-(G) = 1$ .

Supposons maintenant qu'elle est vérifiée pour tout entier  $p < n$  et démontrons-là au rang  $n$ . Rappelons l'expression des options d'une chaîne à  $k$  sommets :

$$\text{Opt}(P_k) = \{P_{k-2}, P_{k-3}\} \cup \{P_i + P_j, j \geq i \geq 1, i + j = k - 3\}$$

On remarque que si  $k$  est congru à 0 ou 4 modulo 5, alors toute option de  $P_k$  contient un chemin de taille  $m$  congrue à 1, 2 ou 3 modulo 5. En effet regardons le cas  $k = 5a$ . On a :

$$\text{Opt}(P_{5a}) = \{P_{5a-2}, P_{5a-3}\} \cup \{P_i + P_j, j \geq i \geq 1, i + j = 5a - 3\}$$

On observe que si  $i \equiv 0[5]$  alors  $j \equiv 2[5]$ , et que si  $i \equiv 4[5]$  alors  $j \equiv 3[5]$ . La propriété écrite ci-dessus est bien vérifiée, et il en est de même pour  $k = 5a + 4$ . Par conséquent, si  $G$  est tel que  $\lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \lambda_3(G) = 0$ , alors toute option  $G'$  de  $G$  vérifie  $\lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \lambda_3(G) \neq 0$ . À l'aide de l'hypothèse de récurrence, on en déduit que  $\sigma^-(G') = 1$  pour toute option  $G'$  de  $G$ , et donc que  $\sigma^-(G) = 0$ .

Supposons maintenant que  $\lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \lambda_3(G) > 0$ . On remarque que tout chemin  $P_k$  de taille  $k \equiv 1, 2$  ou  $3[5]$  a soit comme option le graphe vide (si  $k \leq 3$ ) soit une option  $P_m$  avec  $m \equiv 0$  ou  $4[5]$  (en retirant 2 ou 3 sommets sur une extrémité de  $P_k$ ). Par conséquent, une stratégie gagnante consiste à jouer uniquement sur tous les chemins de tailles congrues à 1, 2 ou 3 modulo 5 pour obtenir une option  $P_m$  vérifiant  $m \equiv 0$  ou  $4[5]$ . Ainsi on obtient un graphe  $G'$  vérifiant  $\lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \lambda_3(G) = 0$ , soit  $\sigma^-(G') = 0$ . On en conclut que  $\sigma^-(G) = 1$ . ■

Ce lemme ne peut être étendu aux graphes connexes  $P_k$ . Néanmoins il nous permet de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 3.6.4** La fonction booléenne  $\sigma^-$  vérifie :

1.  $\sigma^-(P_1) = \sigma^-(P_2) = \sigma^-(P_8) = \sigma^-(P_9) = 0$ ,
2.  $\sigma^-(P_i) = 1$  pour tout  $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14\}$ ,
3.  $\sigma^-(P_{5n}) = \sigma^-(P_{5n+4}) = 0$  pour tout  $n \geq 3$ ,
4.  $\sigma^-(P_{5n+1}) = \sigma^-(P_{5n+2}) = \sigma^-(P_{5n+3}) = 1$  pour tout  $n \geq 3$ .

**Preuve:** Les deux premiers points peuvent être vérifiés par le calcul.

Pour les points 3 et 4, on procède par récurrence sur  $n$ . Premièrement, à l'aide des points 1 et 2 et du Lemme 3.6.3 on vérifie la propriété pour  $n = 3$ . En effet,  $P_{15}$  et  $P_{19}$

n'ont aucune option  $G$  à deux composantes vérifiant  $\lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \lambda_3(G) = 0$ , et leurs options connexes sont gagnantes par le point 2. Par contre, par le Lemme 3.6.3,  $P_9 + P_4$ ,  $P_9 + P_5$  et  $P_{10} + P_5$  sont des options perdantes de  $P_{16}$ ,  $P_{17}$  et  $P_{18}$  respectivement.

Ensuite, posons  $n \geq 4$  et recherchons une option perdante pour les chemins  $P_{5n+i}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ . On observe que  $P_{5n-1} \in \text{Opt}(P_{5n+1})$ ,  $P_{5n} \in \text{Opt}(P_{5n+2})$  et  $P_{5n} \in \text{Opt}(P_{5n+3})$ . D'autre part, par l'hypothèse de récurrence,  $\sigma^-(P_{5n-1}) = \sigma^-(P_{5n}) = 0$ . On en déduit que  $\sigma^-(P_{5n+1}) = \sigma^-(P_{5n+2}) = \sigma^-(P_{5n+3}) = 1$ .

Enfin, comme pour la preuve du Lemme 3.6.3, on remarque que toute option de  $P_{5n}$  ou  $P_{5n+4}$  contient au moins un chemin de taille  $m$  congrue à 1, 2 ou 3 modulo 5. Par conséquent, par le Lemme 3.6.3, toute option est une position gagnante. On en conclut que  $\sigma^-(P_{5n}) = \sigma^-(P_{5n+4}) = 0$ . ■

On obtient l'ensemble perdant  $\mathcal{L}$  pour cette variante :

$$\mathcal{L} = \{1, 2, 8, 9\} \cup \{5n, 5n + 4, n \geq 3\}$$

Remarquons également que du Lemme 3.6.3 découlent les stratégies gagnantes pour une réunion de chaînes  $G$  vérifiant  $\lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \lambda_3(G) > 0$  :

- Si  $G$  contient un chemin de taille  $m > 5$  et congrue à 1, 2 ou 3 modulo 5, alors il existe une option  $G'$  non connexe vérifiant  $\lambda_1(G) + \lambda_2(G) + \lambda_3(G) = 0$ .
- Sinon s'il y a au moins deux composantes de  $G$  de taille congrue à 0 ou 4 modulo 5, on obtient une option perdante en jouant uniquement sur toutes les composantes  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  (en choisissant l'option  $\emptyset$ ).
- Sinon le graphe est du type  $P_n + G'$ , où  $G'$  est une réunion de chemins de taille au plus 3. il faut regarder le type de  $P_n$  : s'il est gagnant on joue dessus en choisissant une option perdante  $H$  et on supprime  $G'$ . On obtient ainsi l'option perdante  $H$ . Enfin si  $P_n$  est perdant on se contente de supprimer  $G'$  pour obtenir l'option perdante  $P_n$ .

Cette stratégie gagnante est là aussi en  $\mathcal{O}(k)$ .

## 3.7 Jeu sélectif rapide

Il s'agit du même jeu que précédemment sauf que la partie est considérée comme terminée dès qu'une composante connexe est vidée. Nous utiliserons également le booléen de jeu  $\sigma$  que nous noterons  $\tilde{\sigma}^+$  pour la version normale et  $\tilde{\sigma}^-$  pour la version misère, par opposition aux  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  des deux jeux en terminaison lente.

### 3.7.1 Version normale

**Théorème 3.7.1** *Le jeu sélectif rapide version normale est équivalent au jeu sélectif lent version normale. Autrement dit :*

$$\text{Pour tout graphe } G, \tilde{\sigma}^+(G) = \sigma^+(G).$$

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur  $|V(G)|$ . On observe que le théorème est vrai pour les graphes dont toute composante a un diamètre au plus 2. En effet, de tels graphes peuvent être vidés en un coup gagnant. Soit maintenant  $G$  possédant au moins une composante de diamètre 3. Supposons le théorème vrai pour tout  $H$  de taille inférieure à  $n = |V(G)|$ .

1. Si le jeu  $G$  en terminaison rapide peut être terminé en un coup, alors  $G$  contient au moins une composante connexe  $U_1$  avec un sommet universel. Soient  $U_1, U_2, \dots, U_k$  l'ensemble des composantes de  $G$  possédant un sommet universel. Posons  $G = G' + U_1 + \dots + U_k$ .

Considérons ce même graphe dans le jeu sélectif lent.

- Si  $\sigma^+(G') = 0$ , alors comme  $G'$  est une option de  $G$  on en déduit que  $\tilde{\sigma}^+(G) = 1$ .
  - Si  $\sigma^+(G') = 1$ , alors il existe une option  $H$  de  $G'$  qui est perdante. Or  $H$  est également une option de  $G$ . On en conclut que  $\tilde{\sigma}^+(G) = 1$ .
2. Si  $G$  ne contient aucune composante connexe ayant un sommet universel, alors par application directe de l'hypothèse de récurrence, on obtient  $\tilde{\sigma}^+(Opt(G)) = \sigma^+(Opt(G))$ , soit  $\tilde{\sigma}^+(G) = \sigma^+(G)$ .

■

Remarquons cependant que même si l'ensemble des graphes perdants est le même pour la terminaison rapide et pour la terminaison lente, la partie est souvent beaucoup plus longue (temps minimal de jeu) en terminaison lente.

Par exemple le graphe  $G = P_8 + P_3$  est gagnant pour les deux variantes en choisissant l'option  $P_5 + \emptyset$  qui est terminale en terminaison rapide et perdante en 2 coups en terminaison lente.

Cette variante ne sera donc pas étudiée car elle fournit les mêmes ensembles de graphes perdants. De plus, les stratégies de jeu peuvent être directement déduites de celles de la version lente, en séparant les deux cas "jeu pouvant être terminé en un coup" ou non.

Pour le cas des chemins, la version normale étant équivalente à celle du jeu sélectif lent, on retrouve les mêmes valeurs du booléen de jeu.

Remarquons tout de même que si l'ensemble des graphes perdants est le même pour les deux variantes lente et rapide, les stratégies gagnantes à adopter ne sont pas forcément identiques, et la partie est la plupart du temps beaucoup plus longue (en nombre de coups) en terminaison lente.

Jouons par exemple sur  $P_7 + P_1$ . En terminaison rapide, le joueur joue sur  $P_1$  et gagne donc directement. En terminaison lente, s'il joue uniquement sur  $P_1$  il perd, la stratégie gagnante n'est donc pas la même. Il doit choisir l'option  $P_5$  qui est perdante en 2 coups. Le temps de jeu vaut donc 3 contre 1 en terminaison rapide. On peut toutefois réutiliser la stratégie gagnante du jeu sélectif lent normal, car elle est également gagnante pour cette version. On déduit que la complexité de recherche d'un coup gagnant est en  $\mathcal{O}(k)$ .

### 3.7.2 Version misère

En ce qui concerne la version misère, les jeux lent et rapide sont différents. On peut par exemple l'observer avec le graphe  $nP_1$  (avec  $n \geq 2$ ) qui est gagnant en terminaison

lente (option  $P_1$ ) et perdant en terminaison rapide (fin du jeu en un coup). Dans ce cas, le booléen de jeu  $\tilde{\sigma}^-$  est bien une fonction de jeu. La séparabilité est vraie par définition et l'additivité en  $\vee$  peut être démontrée avec exactement la même méthode que pour  $\sigma^+$ .

**Proposition 3.7.2** *Pour tous graphes  $G$  et  $H$  non vides  $\tilde{\sigma}^-(G + H) = \tilde{\sigma}^-(G) \vee \tilde{\sigma}^-(H)$ .*

**Preuve:** La preuve est exactement la même que celle qui a été réalisée pour  $\sigma^+$  (Proposition 3.6.1).

La formule étant vérifiée pour  $G = H = K_1$ , on la démontre par récurrence sur  $|V(G+H)|$ . ■

Disposant d'une fonction de jeu additive en  $\vee$ , l'Algorithme  $\mathcal{A}'$  permet de trouver le type de  $P_n$  en  $\mathcal{O}(n^2)$ . On découvre et démontre une période de longueur 7 sur la séquence des  $\tilde{\sigma}^-(P_n)$  pour  $n \geq 0$ .

**Proposition 3.7.3** *Pour tout entier  $n \geq 0$  on a :*

1.  $\tilde{\sigma}^-(P_{7n+1}) = \tilde{\sigma}^-(P_{7n+2}) = 0$  ;
2.  $\forall a \in [3; 7], \tilde{\sigma}^-(P_{7n+a}) = 1$ .

**Preuve:** Elle est réalisée par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , on remarque que  $P_1$  et  $P_2$  sont perdants puisque leur seule option est le graphe vide. Par conséquent,  $P_3, P_4$  et  $P_5$  sont gagnants puisque ils ont  $P_1$  ou  $P_2$  comme option. Enfin,  $P_6$  et  $P_7$  ont une option perdante :  $P_2 + P_1$  et  $2P_2$  respectivement (perdant car on est forcé de vider une composante).

Supposons maintenant la proposition vraie pour tout  $p < n$  et démontrons-là au rang  $n$  :

1. Pour  $P_{7n+1}$ , étudions les types de ses options. On a :

$$\text{Opt}(P_{7n+1}) = \{P_{7n-1}, P_{7n-2}, P_i + P_{7n-i-2}, 1 \leq i \leq \lfloor \frac{7n-2}{2} \rfloor\}.$$

Comme  $\tilde{\sigma}^-(G) = \sum_{H \in \text{Opt}(G)} \overline{\tilde{\sigma}^-(H)}$ , on en déduit que :

$$\tilde{\sigma}^-(P_{7n+1}) = \overline{1} + \overline{1} + \sum_{i=1}^{7n-3} \overline{\tilde{\sigma}^-(P_i) + \tilde{\sigma}^-(P_{7n-i-2})}.$$

Maintenant séparons les termes de la somme par même valeurs de congruence modulo 7. On peut ne garder qu'un terme car il ont le même type par récurrence. On obtient :

$$\tilde{\sigma}^-(P_{7n+1}) = 0 + 0 + \sum_{j=1}^7 \overline{\tilde{\sigma}^-(P_j) + \tilde{\sigma}^-(P_{7n-j-2})}.$$

$$\tilde{\sigma}^-(P_{7n+1}) = \overline{1+1} + \overline{0+1} + \overline{0+1} + \overline{1+0} + \overline{1+0} + \overline{1+1} + \overline{1+1} = 0.$$

2. De même, on écrit l'expression des options de  $P_{7n+2}$  :

$$\text{Opt}(P_{7n+2}) = \{P_{7n}, P_{7n-1}, P_i + P_{7n-i-1}, 1 \leq i \leq \lfloor \frac{7n-1}{2} \rfloor\}.$$

Ce qui implique que :

$$\tilde{\sigma}^-(P_{7n+2}) = \bar{1} + \bar{1} + \sum_{i=1}^{7n-2} \overline{\tilde{\sigma}^-(P_i) + \tilde{\sigma}^-(P_{7n-i-1})}.$$

Ici aussi, l'hypothèse de récurrence nous permet de séparer les termes ayant même congruence modulo 7.

$$\tilde{\sigma}^-(P_{7n+2}) = 0 + 0 + \sum_{j=1}^7 \overline{\tilde{\sigma}^-(P_j) + \tilde{\sigma}^-(P_{7n-j-1})}.$$

$$\tilde{\sigma}^-(P_{7n+2}) = \overline{\bar{1} + \bar{1}} + \overline{\bar{0} + \bar{1}} + \overline{\bar{0} + \bar{1}} + \overline{\bar{1} + \bar{1}} + \overline{\bar{1} + \bar{0}} + \overline{\bar{1} + \bar{0}} + \overline{\bar{1} + \bar{1}} = 0.$$

3. Comme  $P_{7n+1} \in \text{Opt}(P_{7n+3})$ , on obtient  $\tilde{\sigma}^-(P_{7n+3}) = 1$ .
4. De même,  $P_{7n+1} \in \text{Opt}(P_{7n+4})$ , on obtient donc  $\tilde{\sigma}^-(P_{7n+4}) = 1$ .
5. Ensuite, on a  $P_{7n+2} \in \text{Opt}(P_{7n+5})$ , soit  $\tilde{\sigma}^-(P_{7n+5}) = 1$ .
6. On remarque que  $P_{7n+2} + P_1 \in \text{Opt}(P_{7n+6})$ . De plus, comme  $P_{7n+2}$  et  $P_1$  sont perdants, on en déduit que  $\tilde{\sigma}^-(P_{7n+2} + P_1) = \tilde{\sigma}^-(P_{7n+2}) \vee \tilde{\sigma}^-(P_1) = 0 \vee 0 = 0$ , ce qui entraîne que  $\tilde{\sigma}^-(P_{7n+6}) = 1$ .
7. De même, on observe que  $P_{7n+2} + P_2 \in \text{Opt}(P_{7n+7})$ , et que cette option est perdante. On en conclut que  $\tilde{\sigma}^-(P_{7n+7}) = 1$ .

■

Par conséquent l'ensemble  $\mathcal{L}$  est infini et vaut :

$$\mathcal{L} = \{7n + 1, n \geq 0\} \cup \{7n + 2, n \geq 0\}$$

Sur une réunion disjointe de chemins  $G$ , l'additivité en  $\vee$  entraîne que  $G$  est perdant si et seulement si toutes ses composantes connexes sont de taille congrue à 1 ou 2 modulo 7. En effet on a

$$\tilde{\sigma}^-(G) = \tilde{\sigma}^-(P_{i_1} + P_{i_2} + \dots + P_{i_k}) = \tilde{\sigma}^-(P_{i_1}) \vee \tilde{\sigma}^-(P_{i_2}) \vee \dots \vee \tilde{\sigma}^-(P_{i_k}).$$

On en déduit la stratégie gagnante pour  $G$  : Sélectionner les composantes de  $G$  de taille non congrues à 1 ou 2 modulo 7 (il y en a puisque  $G$  est gagnant) et y jouer en choisissant une option perdante (on pourra prendre celles de la preuve de la Proposition 3.7.3). On retombe bien sur un graphe  $G'$  perdant, et le calcul s'effectue en  $\mathcal{O}(k)$ .

Variante	$C(n, k)$	Ensemble perdant $\mathcal{L}$
disj. lent normal	$\mathcal{O}(k)$	$\{0, 4, 8, 14, 19, 24, 28, 34, 38, 42\}$ $\cup \{54 + 34i, 58 + 34i, 62 + 34i, 72 + 34i, 76 + 34i, i \geq 0\}$
disj. lent misère	$\mathcal{O}(2^{kn})$	<i>non résolu</i>
disj. rapide normal	$\mathcal{O}(k)$	$\{0, 4, 5, 9, 10, 14, 28, 50, 54, 98\}$
disj. rapide misère	$\mathcal{O}(n^2 + k)$	$\{1, 2, 8, 22, 44, 84, 90, 98, 118, 140, 148, 1526, 12578, 202420\}$ $\cup \{206710, 235086, 1403900, 2200252, 2232686, 22328546\}$ $\cup \{2233222, 2233626, 2233786, 2235116, 2235172\} \subseteq \mathcal{L}$
conj. lent normal	$\mathcal{O}(k + \log(n))$	$\{5(2^n - 1), n \geq 0\} \cup \{5(2^{n+1} - 1) - 1, n \geq 0\}$
conj. lent misère	$\mathcal{O}(k + \log(n))$	$\{7 \cdot 2^n - 6, n \geq 0\} \cup \{7 \cdot 2^n - 5, n \geq 0\}$
conj. rapide normal	$\mathcal{O}(k)$	$\{0, 4, 5, 9, 10\}$
conj. rapide misère	$\mathcal{O}(k)$	$\{1, 2\}$
sél. lent normal	$\mathcal{O}(k)$	$\{5n, n \geq 0\} \cup \{5n + 4, n \geq 0\}$
sél. lent misère	$\mathcal{O}(k)$	$\{1, 2, 8, 9\} \cup \{5n, n \geq 3\} \cup \{5n + 4, n \geq 3\}$
sél. rapide normal	$\mathcal{O}(k)$	$\{5n, n \geq 0\} \cup \{5n + 4, n \geq 0\}$
sél. rapide misère	$\mathcal{O}(k)$	$\{7n + 1, n \geq 0\} \cup \{7n + 2, n \geq 0\}$

TABLE 3.4 – Positions perdantes pour les 12 variantes du jeu de domination sur les chemins

### 3.8 Conclusion et perspectives

Récapitulons les résultats obtenus dans le tableau 3.4. La colonne  $C(n, k)$  correspond à la complexité de trouver un coup gagnant sur une réunion  $G$  de  $k$  chemins, de diamètre  $diam(G) = n$ .

On peut remarquer que la découverte d'une fonction de jeu permet dans neuf cas sur dix de connaître l'ensemble des chemins perdants  $\mathcal{L}$ , et également d'obtenir une complexité  $C(n, k)$  de recherche des stratégies gagnantes linéaire.

De plus, même lorsque cette fonction n'a pas permis de mettre en évidence une période (comme c'est le cas pour le jeu disjonctif rapide misère), elle reste d'une grande utilité pour calculer les stratégies gagnantes. Dans ce cas la complexité  $C(n, k)$  est quadratique en  $n$ .

Remarquons également qu'en l'absence de fonction de jeu, dans certains cas on peut tout de même connaître  $\mathcal{L}$  et calculer les stratégies gagnantes en temps linéaire. C'est le cas pour le jeu sélectif lent misère.

Parmi ces douze variantes, la plus complexe est sans aucun doute le jeu disjonctif lent misère qui a été l'objet d'un grand nombre de recherches et dont la connaissance des stratégies gagnantes reste à ce jour un problème difficile [24].

D'autres types de compositions, comme les **compositions séquentielles** introduites par W. Stromquist et D. Ullman [30], pourraient également être étudiées pour le jeu de domination sur les chemins.

S'inspirant des douze variantes de John H. Conway, nous nous sommes intéressés à la manière de faire varier un jeu combinatoire sur les graphes. Nous avons ainsi introduit des nouvelles règles de composition utilisant un paramètre du graphe considéré : le **diamètre**

de chacune de ses composantes connexes. Ces nouvelles variantes sont l'objet du Chapitre suivant.



## Chapitre 4

### Autres variantes du jeu de domination

Comme l'a fait J. Conway dans son célèbre livre *On numbers and games*, nous pouvons imaginer d'autres variantes sur la manière de jouer sur une réunion de jeux.

Par exemple, au lieu de permettre au joueur de choisir de jouer sur un ou plusieurs jeux (jeu sélectif), on pourrait lui interdire de jouer sur un seul des jeux excepté s'il n'y en a qu'un seul. De la même manière, on peut généraliser cette règle : pour  $k$  fixé, le joueur doit jouer sur au moins  $k$  composantes s'il y en a plus de  $k$  et sur toutes sinon. Nous étudierons dans cette partie quelques-unes de ces variantes, notamment le *jeu 2-maximum lent*, où l'on peut jouer au maximum sur deux composantes dans un même coup, et en terminaison lente.

D'autre part, si l'on dispose d'une fonction injective  $f$  de l'ensemble des positions de jeu dans  $\mathbb{Z}$ , on peut trier les composantes et donc forcer le joueur à jouer sur celle qui a la plus grande valeur, ou la plus petite, ou encore une valeur donnée. Dans notre cas, comme il s'agit d'un jeu sur les graphes, on peut choisir comme fonction le diamètre, le nombre de sommets, le degré moyen maximum, l'existence de telle ou telle structure, etc...

Ainsi nous pouvons à partir d'un jeu se jouant sur des graphes, constituer un nombre infini de variantes en modifiant les règles de composition, c'est à dire la manière de jouer sur plusieurs composantes connexes. Quelques-unes de ces variantes seront présentées en fin de Chapitre. Sans toutefois donner de théorème à propos de la complexité, nous donnerons des exemples de variantes pour lesquelles la résolution sur la famille des chemins est un problème difficile. Pour certaines variantes, la connaissance des types semble être un problème NP-difficile. Par exemple, pour le *jeu 2-exact lent normal* (jeu sur exactement 2 composantes) une réunion de chemins de diamètre 3 s'écrivant  $G = i_3.P_3 + i_1.P_1$  a un type périodique de période 16 sur  $i_3$  et 8 sur  $i_1$ , alors que le graphe  $G$  est très simple et n'a au plus que quatre options...

Dans ce chapitre, nous allons commencer par regarder des variantes faisant intervenir le **diamètre** du graphe. Les deux joueurs seront obligés de jouer sur la (ou les) composante(s) ayant un plus grand (ou plus petit) diamètre.

En composant les différentes possibilités, on obtient  $2^4 = 16$  nouvelles variantes, s'inspirant largement des 12 déjà étudiées et énoncées par J. Conway. Elles se distinguent suivant 4 règles :

1. La règle *diamètre maximal* (resp. *diamètre minimal*) force les joueurs à choisir la (ou les) composante(s) possédant un plus grand (resp. plus petit) diamètre.
2. La règle *disjonctive* oblige d'effectuer le coup sur une unique composante, alors que la règle *sélective* permet de jouer sur n'importe quel nombre de composantes en un même coup.
3. La règle de *terminaison lente* (resp. *terminaison rapide*) : La partie est terminée lorsque toutes les (resp. une des) composantes sont vides.
4. Version *normale* (resp. *misère*) : le perdant (resp. gagnant) est le premier joueur ne pouvant plus jouer.

Remarquons qu'ici la règle conjonctive n'est pas utilisée. En effet, comme elle force les joueurs à jouer sur toutes les composantes, favoriser celles qui ont plus petit ou plus grand diamètre n'a aucun sens.

Dans cette partie nous étudierons ces variantes du jeu de domination sur la famille des chemins, mais souvent il faudra connaître les types de l'ensemble des réunions disjointes de

chemins. Nous pourrions par ailleurs étudier toute autre famille jouable de taille linéaire avec, a priori, la même complexité en temps et espace.

Les fonctions découvertes par Conway pour les jeux disjonctifs et sélectifs [7, Chapitre 14] ne peuvent être réutilisées pour ces nouvelles variantes, car elles s'appuient sur le fait que l'on peut jouer librement sur n'importe laquelle des composantes.

Par conséquent, nous allons simplement nous intéresser au booléen de jeu  $\sigma$  calculable pour tout graphe  $G$  et défini par :  $\sigma(G) = 1$  si et seulement si  $o(G) = \mathcal{N}$  ( $G$  gagnant pour le prochain joueur), ou symétriquement par :  $\sigma(G) = 0$  si et seulement si  $o(G) = \mathcal{P}$  ( $G$  gagnant pour le précédent joueur). Ce calcul pour certaines réunions disjointes de chemins  $G$  nous permettra peut-être de découvrir une période dans la séquence  $(\sigma(P_n))_{n \geq 0}$ , et éventuellement de démontrer que cette séquence est périodique.

Pour différencier cette fonction entre les versions normale et misère, on notera  $\sigma^+$  (resp.  $\sigma^-$ ) le booléen de jeu pour la version normale (resp. misère).

Si  $G$  est une réunion disjointe de chemins dont la plus grande est  $P_n$ , alors elle sera généralement notée

$$G = \sum_{j=1}^n i_j.P_j = i_1.P_1 + i_2.P_2 + \cdots + i_n.P_n,$$

où les entiers positifs ou nuls  $i_j$  (pour  $1 \leq j \leq n$ ) désignent le nombre d'occurrences du chemin  $P_j$  dans  $G$ . De plus lorsqu'on utilisera cette notation on aura toujours  $i_n > 0$ .

## 4.1 Jeux disjonctifs à diamètre maximal

Dans cette section nous allons étudier 4 variantes du jeu de domination où l'on joue sur une seule composante, parmi celles qui ont le plus grand diamètre.

Comme nous étudions les chemins, le diamètre correspond à un seul graphe de cette famille, et donc on pourra dire que l'on doit jouer sur la plus grande composante à isomorphisme près.

L'ensemble des options d'une réunion de chemins  $G = i_1.P_1 + i_2.P_2 + \cdots + i_n.P_n$  (avec  $i_n > 0$  et  $n \geq 3$ ) est donc :

$$Opt(G) = \{i_1.P_1 + i_2.P_2 + \cdots + (i_n - 1).P_n + P_j + P_{n-j-3}, -1 \leq j \leq \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor\}.$$

Rappelons que par convention  $P_{-1} = P_0 = \emptyset$ .

Le nombre d'options de  $G$  est donc en  $\mathcal{O}(diam(G))$  qui est négligeable devant  $|V(G)|$  dans le cas d'une réunion contenant un grand nombre de chemins.

Il s'agit en effet parmi toutes les variantes déjà étudiées et à venir de celles qui bénéficient d'un petit nombre d'options possibles. La résolution du jeu semblerait donc plus facile ici. Or, comme nous allons le voir dans cette section, pour un certain nombre de chemins, la question de la périodicité (au sens large) de la séquence  $(\sigma(P_k))_{k \geq 0}$  reste un problème ouvert.

**Notation :**

Dans tout le Chapitre, lorsque nous parlerons du **diamètre** d'un graphe  $G$ , que nous noterons  $diam^*(G)$ , il s'agira du **plus grand diamètre parmi les composantes connexes plus 1**, défini par :

$$diam^*(G) = 1 + \max\{\max\{d_C(u, v) , (u, v) \in V^2(C)\} , C \in \mathcal{C}(G)\}.$$

Comme nous ne travaillerons que sur des réunions de chemins  $G$ ,  $diam^*(G)$  sera simplement la taille du plus grand chemin de  $G$ . Pour simplifier les notations nous remplacerons  $diam^*$  par  $diam$ .

**4.1.1 Jeu disjonctif maximal lent**

Commençons par nous pencher sur la version en terminaison lente. Rappelons qu'avec la règle dite "lente", la partie est terminée si et seulement si toutes les composantes sont vides, autrement dit si l'option choisie est le graphe vide.

**Version normale**

Le booléen de jeu n'est pas une fonction additive. En effet, on observe que pour la version normale  $\sigma^+(P_1) = \sigma^+(P_3) = \sigma^+(P_6) = 1$  alors que  $\sigma^+(P_1 + P_3) = 1 \neq \sigma^+(P_1 + P_6) = 0$ . Il faut donc, pour connaître le type de  $P_n$ , calculer récursivement les types des réunions de chaînes  $G$  avec  $V(G) \leq n - 3$  sommets. Autrement dit, il faut construire l'ensemble du graphe des configurations qui est évidemment de taille exponentielle par rapport à  $n$ .

Nous devons donc rechercher des propriétés qui nous permettraient de connaître des positions gagnantes sans aucun calcul récursif, comme par exemple :

$$\sigma^+(i_1.P_1 + i_2.P_2) = \overline{i_1 + i_2}$$

En effet, comme  $P_1$  et  $P_2$  n'ont que  $\emptyset$  comme option, on retire les composantes une par une et celui qui enlève la dernière a gagné, d'où la valeur du booléen de jeu suivant la parité du nombre de chemins.

Ce premier exemple nous invite à en rechercher d'autres, probablement moins triviaux. S'aidant d'une implémentation récursive des calculs, on remarque que l'on peut, d'une certaine manière, généraliser la propriété précédente :

**Théorème 4.1.1** *Soit  $G = \sum_{j=1}^n i_j.P_j$  une réunion disjointe de chemins. Si pour tout  $1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ,  $i_{2j} + i_{2j-1}$  est pair, alors  $\sigma^+(G) = 0$ .*

**Preuve:** Soit  $G$  une réunion de chemins telle que pour tout  $1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ,  $i_{2j} + i_{2j-1}$  est pair. Soit  $G'$  la réunion des chemins de  $G$  présents une seule fois dans  $G$ . Il existe donc  $G_0$  tel que  $G = 2.G_0 + G'$ . Posons  $G' = \sum_{j=1}^{n'} i'_j.P_j$ . On a donc pour tout  $j \leq n$ ,  $i'_j \in \{0, 1\}$ . De plus, la construction de  $G'$  ainsi que l'hypothèse sur  $G$  entraîne que

$$\forall 1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil , i'_{2j} = i'_{2j-1}.$$

La preuve est réalisée par récurrence sur  $|V(G)|$ .

1. La formule  $\sigma^+(i_1.P_1 + i_2.P_2) = \overline{i_1 + i_2}$  entraîne que la propriété est vraie si  $|V(G)| \leq 2$ .
2. Si  $\text{diam}(G_0) > \text{diam}(G')$  alors  $\text{Opt}(G) = \{G_0 + G'_0 + G', G'_0 \in \text{Opt}(G_0)\}$ . Soit  $K = G_0 + G'_0 + G'$  une option de  $G$ . Comme  $G'_0$  est une option de  $G_0$  son diamètre est inférieur à celui de  $G_0$ . Donc dans  $K$  le joueur doit jouer sur  $G_0$ . S'il choisit  $2.G'_0 + G' \in \text{Opt}(K)$ , comme par récurrence  $\sigma^+(2.G'_0 \cup G') = 0$ , on en déduit qu'il existe une option perdante de  $K$ . Ceci étant vrai pour toute option  $K$  de  $G$ , on en conclut que  $\sigma^+(G) = 0$ .
3. Si  $\text{diam}(G_0) < \text{diam}(G')$ , soit  $k = \max\{j > 0 \text{ t.q. } i'_{2j} = 1\}$ . Comme pour tout  $j$ ,  $i'_{2j} = i'_{2j-1}$  on a  $2k = \text{diam}(G') = n$ . Autrement dit,  $P_{2k}$  est le plus grand chemin de  $G$ . On en déduit l'expression des options de  $G$  :

$$\text{Opt}(G) = \{2.G_0 + G'_1 + P_{2k-1} + P_i + P_{2k-i-3}, -1 \leq i \leq k-2\},$$

avec  $G'_1 = G' \setminus (P_{2k} + P_{2k-1})$ . On note  $H_i$  la  $i$ -ème option de  $G$ .

Si  $i$  est pair, posons  $i = 2\ell$ . Comme  $2k-1 \geq \text{diam}(G_0)$ , le diamètre de  $H_i$  est exactement  $2k-1$ . On en déduit que (dans  $H_i$ ) le joueur peut jouer sur  $P_{2k-1}$  pour créer  $P_{2\ell-1} + P_{2k-2\ell-3}$ , on obtient donc l'option générale  $H'_i = 2.G_0 + G'_1 + P_{2\ell-1} + P_{2\ell} + 2.P_{2k-2\ell-3}$  qui vérifie la condition du théorème, et est donc perdante par hypothèse de récurrence. Soit  $\sigma^+(H_{2\ell}) = 1$ .

Si  $i$  est impair, on pose  $i = 2\ell + 1$ . Comme  $i < 2k-1$ , on peut jouer (dans  $H_i$ ) sur  $P_{2k-1}$  de telle sorte que l'on crée un chemin  $P_{2\ell+1}$ . On obtient l'option générale  $H'_i = 2.G_0 + G'_1 + 2.P_{2\ell+1} + P_{2k-2\ell-4} + P_{2k-2\ell-5}$ , qui vérifie les conditions du théorème, et est donc perdante. On a donc  $\sigma^+(H_i) = 1$ .

Comme pour tout  $i$  l'option  $H_i$  est gagnante, on en conclut que  $\sigma^+(G) = 0$ .

4. Enfin si  $\text{diam}(G_0) = \text{diam}(G')$  alors le plus grand chemin  $P_n$  appartient à  $G$  et à  $G_0$ . Il y a donc au moins deux chemins  $P_n$  dans  $G$ . Il suffit au second joueur de choisir la même option de  $P_n$  que celle qu'a choisi le premier. Ainsi on obtient un graphe  $G''$  qui vérifie les conditions du théorème. Par hypothèse de récurrence on en conclut que  $\sigma^+(G) = \sigma^+(G'') = 0$ .

■

**Corollaire 4.1.2** *Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\sigma^+(P_{4n+1}) = \sigma^+(P_{4n+2}) = \sigma^+(P_{4n+3}) = 1$ .*

**Preuve:** Il suffit de rechercher des options vérifiant les conditions du Théorème 4.1.1 :

- $2.P_{2n-1} \in \text{Opt}(P_{4n+1})$  et, par le Théorème 4.1.1,  $\sigma^+(2.P_{2n-1}) = 0$ , donc  $\sigma^+(P_{4n+1}) = 1$ .
- $P_{2n} + P_{2n-1} \in \text{Opt}(P_{4n+2})$  et  $\sigma^+(P_{2n} + P_{2n-1}) = 0$ , donc  $\sigma^+(P_{4n+2}) = 1$ .
- $2.P_{2n} \in \text{Opt}(P_{4n+3})$  et  $\sigma^+(2.P_{2n}) = 0$ , donc  $\sigma^+(P_{4n+3}) = 1$ .

■

Il reste à traiter le cas des chemins de taille divisible par 4. Comme aucune option de  $P_{4n}$  n'entre dans les conditions du Théorème 4.1.1, il faut a priori connaître les types de toutes les réunions de chemins appartenant au graphe des configurations.

n	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76
$\sigma$	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
p	0	0	1	3	1	2	0	2	3	5	7	4	0	1	0	2	4	11	6
w	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	6	10	16	26	42	69	94

n	80	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144
$\sigma$	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
p	8	2	0	1	1	3	5	13	7	0	0	0	5	7	17		
w	0.2	0.3	0.4	0.6	0.8	1.3	1.9	2.7	3.9	5.6	8	11	16	23	33		

où :

- $\sigma$  est la valeur du booléen de jeu  $\sigma^+(P_n)$ ;
- $p$  est le nombre d'options perdantes ;
- $w$  est le nombre d'appels récursifs nécessaires à chaque calcul (en milliers pour la première ligne et millions pour la seconde).

TABLE 4.1 – Types des chemins dont la taille est multiple de 4

L'implémentation du calcul récursif de la séquence  $\sigma^+(P_{4n})$  (pour  $n > 0$ ) jusqu'à  $4n = 144$  nous permet d'obtenir les valeurs de la table 4.1. Les calculs n'ont pas permis de mettre en évidence une période dans la séquence  $\sigma^+(P_{4n})$  (pour  $n \geq 0$ ). Même les options perdantes (non précisées ici) sont rarement similaires et leur nombre varie fortement d'un chemin à l'autre. On pourrait éventuellement espérer une période 116 sans préperiode car la suite  $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0)$  est répétée sur les intervalles  $[0; 28]$  et  $[116; 144]$ .

Mais comme on peut l'observer dans le tableau, la puissance de calcul requise pour confirmer cette période est très importante. En effet, on peut remarquer que le nombre d'appels récursifs  $w$  est approximativement multiplié par 2 lorsque  $n$  augmente de 8. On en déduit que pour atteindre  $n = 228$  il faudrait environ  $10^{11}$  appels récursifs, ce qui est évidemment irréalisable avec une machine classique.

Une implémentation plus affinée et l'utilisation du calcul parallèle pourrait néanmoins permettre d'aller plus loin dans la recherche des chemins perdants, et éventuellement de déduire une période.

Ces recherches nous ont tout de même permis d'observer un certain nombre de propriétés concernant les types des réunions de chemins. Voici la principale d'entre-elles :

### Conjecture 4.1.3

$$\text{Pour tout } G = \sum_{j=1}^{2n} i_j.P_j \text{ tel que } i_{2n} + i_{2n-1} \geq 3 \text{ on a } \sigma^+(G) = \overline{i_{2n} + i_{2n-1}}.$$

On pourrait naturellement penser à une preuve par récurrence, mais c'est le point de départ de celle-ci qui pose problème. En effet, lorsque  $i_{2n} + i_{2n-1} = 3$ , toute option  $G' = \bigcup_{j=1}^{2n} P_j^{(i'_j)}$  de  $G$  vérifie  $i'_{2n} + i'_{2n-1} = 2$ , et savoir si  $G'$  est perdant ou non n'entre plus dans le cadre de cette conjecture. Il faudrait également savoir ce qui se passe lorsque  $i_{2n} + i_{2n-1} = 2$  pour démontrer cette propriété, qui serait évidemment d'une grande utilité pour limiter le nombre d'appels récursifs pour le calcul de  $\sigma^+(P_{4n})$ .

Une autre approche est également intéressante pour réduire la masse des calculs. Elle consiste à étudier les réunions de chemins en commençant par celles qui ont le plus petit diamètre  $n = \text{diam}(G)$ .

Il s'agit de rechercher les **cas particuliers** pour un diamètre  $n$  donné.

**Définition 4.1.4** Soit  $G$  une réunion de chemins de diamètre  $n$ . On dira que  $G$  est un **cas particulier** lorsque  $\sigma^+(G)$  est différent de la valeur triviale notée  $\gamma(G)$  et définie comme suit :

$$\gamma(G) = \begin{cases} \overline{i_n + i_{n-1}} & \text{si } n \text{ pair} \\ \overline{i_n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

On a par exemple déjà observé que si  $n \leq 2$  alors  $\sigma^+(G) = \overline{i_1 + i_2}$ . Pour  $n = 3$ , regardons d'abord le cas  $i_3 = 1$ . Comme  $\text{Opt}(P_3) = \{P_1, \emptyset\}$ , on peut ajuster la parité de  $i_1 + i_2$  pour obtenir une option perdante, donc  $G$  est gagnant. Si  $i_3 = 2$  on n'a que des options vérifiant  $i'_3 = 1$ , donc gagnantes. On généralise cette situation par l'équation :

$$n = 3 \Rightarrow \sigma^+(G) = \overline{i_3}$$

Pour  $n = 4$ , on serait tentés de dire que  $P_4$  peut être remplacé par  $2P_1$ , puisque l'unique option de  $P_4$  est  $P_1$  (dû à l'équivalence entre les positions  $P_1$  et  $P_2$ ). Mais la règle du diamètre maximal interdit cette réduction comme on peut l'observer avec le contre-exemple  $P_4 + P_3$  qui est perdant alors que  $P_3 + 2P_1$  est gagnant. Après étude de quelques exemples, on peut aisément démontrer que pour  $n = 4$  :

$$\sigma^+(G) = \begin{cases} \overline{i_1 + i_2 + 1} & \text{si } i_3 = 0 \\ \overline{i_3 + i_4} & \text{sinon} \end{cases}$$

En poursuivant cette méthode, on peut obtenir des formules de taille raisonnable jusqu'à  $n = 12$ . Au delà, les cas particuliers se multiplient et il devient difficile d'obtenir des équations, et surtout de prouver qu'elles sont justes. Pour  $a \in \mathbb{Z}$  un entier relatif on pose  $\hat{a} = 1$  si et seulement si  $a = 0$  et  $\tilde{a} = 0$  si et seulement si  $a \neq 0$ . On dit que  $\hat{a}$  est le **nul** de  $a$ . Par ailleurs on pose  $\tilde{a} = 1 - \hat{a}$ .

Pour simplifier les formules, on supposera que  $G$  ne contient aucun chemin  $P_2$ , car  $P_2$  est équivalent à  $P_1$  dans toutes les variantes étudiées dans ce chapitre. Soit  $1 \leq n \leq 9$  et  $G_n$  une réunion de chemins de diamètre  $n$ . On a :

**Proposition 4.1.5**

1.  $\sigma^+(G_1) = \overline{i_1}$
2.  $\sigma^+(G_2) = \overline{i_1}$  (les  $P_2$  sont transformés en  $P_1$ )
3.  $\sigma^+(G_3) = \overline{i_3}$
4.  $\sigma^+(G_4) = \hat{i}_3 \overline{i_1} + \tilde{i}_3 \overline{i_3 + i_4}$
5.  $\sigma^+(G_5) = \overline{i_5}$

6.

$$\sigma^+(G_6) = \begin{cases} \hat{i}_5 \hat{i}_3 (\overline{i_4 + i_1 + 1}) + \overline{i_6 + i_5} (\tilde{i}_5 + \tilde{i}_3) & \text{si } i_6 = 1 \\ \hat{i}_5 \hat{i}_3 \overline{i_1} + \overline{i_6 + i_5} (\tilde{i}_5 + \tilde{i}_3) & \text{si } i_6 = 2 \\ \overline{i_6 + i_5} & \text{si } i_6 \geq 3 \end{cases}$$

7.

$$\sigma^+(G_7) = \begin{cases} \hat{i}_6 \hat{i}_5 \hat{i}_3 (\overline{i_4 + i_1 + 1}) + \overline{i_7} (\tilde{i}_6 + \tilde{i}_5 + \tilde{i}_3) & \text{si } i_7 = 1 \\ \hat{i}_6 \hat{i}_5 \hat{i}_3 \overline{i_1} + \overline{i_7} (\tilde{i}_6 + \tilde{i}_5 + \tilde{i}_3) & \text{si } i_7 = 2 \\ \overline{i_7} & \text{si } i_7 \geq 3 \end{cases}$$

8.  $\sigma^+(G_8) =$ 

$$\begin{cases} \hat{i}_5 \hat{i}_6 \left( \hat{i}_7 (\hat{i}_3 (\overline{i_4 + i_8 * i_1}) + \tilde{i}_3 \overline{i_4 + i_3}) + \hat{i}_3 \tilde{i}_7 \overline{i_4 * i_1 + 1} \right) + \overline{i_8 + i_7} (\tilde{i}_5 + \tilde{i}_6) & \text{si } i_8 + i_7 \leq 2 \\ \overline{i_8 + i_7} & \text{sinon} \end{cases}$$

9.

$$\sigma^+(G_9) = \begin{cases} \overline{i_1 + 1} & \text{si } i_9 \leq 2, i_7 = 1 \text{ et } i_3 + i_5 + i_6 + i_8 = 0 \\ \overline{i_4 + 1} + \overline{i_1} & \text{si } i_9 = 1, i_8 \leq 1 \text{ et } i_3 + i_5 + i_6 + i_7 = 0 \\ \overline{i_4 + 1 * i_1} & \text{si } i_9 = 2, i_8 \leq 1 \text{ et } i_3 + i_5 + i_6 + i_7 = 0 \\ \overline{i_9} & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que le nombre de cas particuliers augmente avec  $n$  : aucun pour  $G_5$ , deux pour  $G_6$  et  $G_7$ , trois pour  $G_8$  et  $G_9$  et une dizaine pour  $G_{10}$ ,  $G_{11}$  et  $G_{12}$ , dont les formules ne sont pas détaillées ici. Intuitivement, on peut penser que cette situation continue en faisant croître  $n$ . Par conséquent, il deviendrait de plus en plus difficile de découvrir des formules, et encore plus de les démontrer.

Par ailleurs, on peut s'apercevoir qu'il n'est pas aisé d'implémenter de telles recherches. En effet elles s'appuient sur des petites démonstrations par récurrence que l'on doit effectuer à chaque étape. De plus, le calcul des booléens de jeu n'aboutit pas à un résultat numérique 0 ou 1 mais à une formule  $\sigma^+(G_n) = \Phi(i_n, i_{n-1}, \dots, i_1)$  dont l'expression dépend d'autres formules...

Ces résultats nous permettent tout de même de diminuer sensiblement le nombre d'appels récursifs dans le calcul de la séquence  $\sigma^+(P_{4n})$  (pour  $n \geq 1$ ). Les résultats obtenus au tableau 4.1 utilisent ces formules.

Les formules de la Proposition 4.1.5 nous ont également permis de remarquer que si  $G$  est un cas particulier de diamètre  $n \geq 5$  alors :

1. Si  $n$  est impair alors  $G$  a au plus deux occurrences de  $P_n$ .
2. Si  $n$  est pair alors  $i_n + i_{n-1} \leq 2$ .
3. Il existe un entier impair  $1 \leq r \leq 2 \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$  (le **rang** de  $G$ ) tel que :
  - Si  $r = 1$  alors le type de  $G$  dépend de la parité de  $i_1$  et  $i_4$ .



- Sinon le type de  $G$  dépend de la parité de  $i_r + i_{r+1}$ .
- $G$  contient au plus deux chemins de tailles comprises entre  $r + 2$  et  $n - 2$ .

Ces observations nous ont conduit à démontrer que pour toute réunion de chemins  $G$  il existe un sous-graphe  $G'$  formé d'au plus cinq composantes et ayant le même type que  $G$ .

**Théorème 4.1.6** *Soit  $G = \sum_{j=1}^n i_j.P_j$  (avec  $i_n > 0$  et  $n \geq 5$ ) une réunion de  $k \geq 5$  chemins. Soit  $r$  le plus grand entier impair tel que  $\sum_{j=r}^n i_j \geq 5$ . Le graphe  $G$  a le même type qu'un certain sous-graphe  $G'$  de  $G$  :*

1. Si  $r = 1$  ou ( $r = 3$  et  $i_3 = 0$ ) alors  $G' = \overline{i_1 + i_2}P_1 + \overline{i_4}P_4 + \sum_{j=r+2}^n i_j.P_j$  ;
2. Sinon  $G' = \ell.P_r + \sum_{j=r+2}^n i_j.P_j$ , avec  $\ell = 2$  si  $i_r + i_{r+1}$  est pair et  $\ell = 1$  sinon.

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur le nombre total de sommets du graphe  $|V(G)| = \sum_{j=1}^n i_j$ . Pour les réunions de diamètre au plus 9, les formules de la Proposition 4.1.5 nous permettent d'observer que chaque cas particulier vérifie le Théorème. Par exemple, pour  $r = 3$  et  $n = 8$ ,  $G = P_8 + \sum_{j=1}^4 i_j.P_j$  vérifie  $\sigma(G) = \overline{i_4} + \overline{i_1} = \sigma(G')$  si  $i_3 = 0$ , et  $\sigma(G) = \overline{i_3 + i_4} = \sigma(G')$  sinon, où  $G'$  est le graphe construit à partir du théorème. On observe également pour  $n = 12$  un cas particulier de rang  $r = 5$  :  $\sigma(P_{12} + \sum_{j=1}^6 i_j.P_j) = \overline{i_5 + i_6}$ .

Soit maintenant  $G$  une réunion de  $k \geq 5$  chemins de diamètre  $n \geq 10$  et de rang  $r \leq 2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ .

Soient  $G_0$  et  $G_1$  les deux options de  $G$  obtenues à partir des choix respectifs  $P_{n-2}$  et  $P_{n-3}$ . Les rangs de  $G_0$  et  $G_1$  sont les mêmes que celui de  $G$ , car  $n \geq 10$ . On peut donc par hypothèse de récurrence réduire  $G_0$  et  $G_1$  de la même manière que  $G$ , pour obtenir des options de  $G'$ .

Soit maintenant  $G_a$  une option de  $G$  issue du choix de  $P_a + P_b$  option de  $P_n$ . Posons  $a \leq b$ , on a  $b = n - a - 3$ .

Si  $a < r$ , alors le nombre de chemins de diamètre au moins  $r + 2$  ne change pas, donc le rang de  $G_a$  est également  $r$ . Le théorème nous permet de réduire  $G_a$  en un graphe  $G'_a$  qui s'identifie avec l'option  $P_a + P_b$  de  $P_n$  dans  $G'$ .

Si  $a \in \{r, r + 1\}$  alors le rang de  $G_a$  est le même que celui de  $G$  et  $G_a$  peut se réduire en une option  $G'_a$  qui est exactement l'option de  $G'$  issue de choix  $P_a + P_b$ .

Enfin si  $a \geq r + 2$ , alors le rang  $r_a$  de  $G_a$  peut être strictement supérieur à celui de  $G$ . Mais c'est également le cas pour le même coup dans  $G'$ , on retrouve le même nouveau rang  $r_a$ .

Dans tous les cas, on observe que les options de  $G$  et de  $G'$  s'identifient par hypothèse de récurrence. On en conclut que  $\sigma^+(G) = \sigma^+(G')$ . ■

Le nombre de cas particuliers de diamètre  $n$  est donc au pire en  $\mathcal{O}(n^5)$ . On en déduit que le calcul des types des chemins peut s'effectuer en temps polynomial :

**Corollaire 4.1.7** *Soit  $G$  une réunion de chemins de diamètre  $n$ . Il existe un algorithme qui calcule  $\sigma^+(G)$  en  $\mathcal{O}(n^6)$ .*

**Preuve:** Commençons par réduire  $G$  en  $G'$  comme indiqué dans le Théorème 4.1.6. Cette étape s'effectue en  $\mathcal{O}(n)$ . Ensuite regardons chacune des  $\mathcal{O}(n)$  options de  $G'$ . Ces options

sont soit déjà réduites soit réductibles en temps constant. La connaissance des types de tous les graphes réduits de diamètre inférieur ou égal à  $n$  suffit donc pour calculer  $\sigma^+(G)$ . Le nombre de graphes réduits étant en  $\mathcal{O}(n^5)$ , on en déduit que l'algorithme est en  $\mathcal{O}(n^6)$ . ■

L'implémentation de cet algorithme n'a pas permis de mettre en évidence une période éventuelle sur la séquence  $(\sigma^+(P_{4n}))_{n \geq 0}$ . Néanmoins, nous avons pu remarquer que pour  $n = 100$  la plupart des graphes réduits avec le Théorème 4.1.6 vérifient  $\sigma^+(G) = \gamma(G)$ . Le nombre de cas particuliers est donc probablement très inférieur à  $n^5$ , mais leur caractérisation reste à ce jour un problème ouvert.

### Version misère

Les difficultés rencontrées pour la version normale se retrouvent également pour la version misère.

Toutefois, la connaissance des types des réunions de graphes pour la version normale entraînerait la résolution de la version misère, comme le montre la proposition suivante :

**Proposition 4.1.8** *Soit  $G$  un graphe. On a  $\sigma^-(G) = \sigma^+(G + P_1)$*

**Preuve:** On procède par récurrence sur  $n = |V(G)|$ . La proposition est vraie si  $G = \emptyset$ . Posons donc maintenant  $\text{diam}(G) \geq 1$ . Par définition de  $\sigma^-$ ,  $\sigma^-(G) = 1 - \min\{\sigma^-(H) , H \in \text{Opt}(G)\}$ . Par hypothèse de récurrence, on peut écrire :

$$\sigma^-(G) = 1 - \min\{\sigma^+(H + P_1) , H \in \text{Opt}(G)\}.$$

De plus, comme  $\text{diam}(P_1) \leq \text{diam}(G)$ , on est forcé de jouer sur  $G$  dans  $G + P_1$ . On en déduit que :

$$\sigma^-(G) = 1 - \min\{\sigma^+(H') , H' \in \text{Opt}(G + P_1)\} = \sigma^+(G + P_1)$$

■

Par conséquent, on retrouve le même type de problèmes que pour la version normale. On peut remarquer que la plupart du temps on a  $\sigma^+(G) = \sigma^+(G + P_1)$ . Autrement dit, le sommet isolé  $P_1$  n'a que rarement une influence sur le type du graphe, comme on peut l'observer avec les formules pour les réunions de chemins de diamètre au plus 12.

### 4.1.2 Jeu disjonctif maximal rapide

Cette variante est soumise aux mêmes règles que la précédente sauf que la partie est déclarée terminée dès qu'une seule des composantes est vidée. Mais comme ce jeu est soumis à la règle du diamètre maximal, on est forcé de jouer sur la composante de plus grand diamètre, donc la partie ne peut se terminer que lorsque  $\text{diam}(G) \leq 3$  si  $G$  est une réunion de chemins. Nous allons donc observer ce que ça entraîne pour chacune des deux versions et à quel point ce jeu se rapproche du jeu disjonctif maximal lent.

**Version normale**

Rappelons qu'ici le joueur jouant en dernier gagne la partie. On en déduit que pour une réunion de chemins  $G = i_1.P_1 + \dots + i_n.P_n$  non vide, on a :

$$n \leq 3 \Rightarrow \sigma^+(G) = 1.$$

En effet, le joueur peut vider la chaîne sur laquelle il est autorisé à jouer. Il gagne donc en un coup. Par conséquent, pour  $n \in \{4, 5\}$  la durée de la partie (temps de jeu) est exactement le nombre de chemins de taille 4 et 5 plus 1. On peut donc écrire :

$$n \in \{4, 5\} \Rightarrow \sigma^+(G) = \overline{i_4 + i_5 + 1}.$$

Continuons avec  $n \in \{6, 7\}$ . Si  $i_6 + i_7 = 1$ , le joueur s'arrange pour obtenir un nombre impair de chemins de taille 4 et 5 (en choisissant une option contenant un  $P_4$  ou non), et donc gagne. On en déduit que pour  $i_6 + i_7 = 2$  le joueur perd, etc... On a donc :

$$n \in \{6, 7\} \Rightarrow \sigma^+(G) = \overline{i_6 + i_7}.$$

Le même raisonnement nous conduit à la même expression pour  $n \in \{8, 9\}$  :

$$n \in \{8, 9\} \Rightarrow \sigma^+(G) = \overline{i_8 + i_9}.$$

On pourrait espérer pouvoir généraliser cette expression pour tout  $n \geq 6$ . Malheureusement, ça ne fonctionne plus pour  $n = 10$  car on ne peut plus créer d'option de diamètre inférieur à 3 si la parité de  $i_4 + i_5$  doit être conservée. On rencontre ici un premier cas particulier lorsque  $i_{10} \in \{1, 2\}$  et  $i_9 = i_8 = i_7 = i_6 = 0$  :

$$\begin{cases} \sigma^+(G_{10}) = \overline{i_4 + i_5 + 1} & \text{si } i_{10} \leq 2 \text{ et } i_6 + i_7 + i_8 + i_9 = 0 \\ \sigma^+(G_{10}) = \overline{i_{10}} & \text{sinon} \end{cases}$$

On retrouve ici le même type d'expressions que pour la terminaison lente, avec des cas particuliers lorsque  $i_{2k} + i_{2k+1} \in \{1, 2\}$ , et sinon :

**Conjecture 4.1.9** Soit  $n \geq 2$  et  $G = \sum_{j=1}^{2n+1} i_j.P_j$  une réunion de chemins.

Si  $i_{2n} + i_{2n+1} \geq 3$  alors  $\sigma^+(G) = \overline{i_{2n} + i_{2n+1}}$ .

On remarque que toutefois les chemins sont rassemblés entre  $2n$  et  $2n+1$  au lieu de  $2n-1$  et  $2n$  pour la terminaison lente. Ceci est dû au fait que le jeu sur les chemins  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  entraîne immédiatement la victoire du joueur en un coup, car il s'agit d'une position **illégal**e comme cela a été observé pour le jeu disjonctif rapide misère (c.f. Section 3.3.2) pour lequel pour toute réunion de chemins  $G$  telle que  $1 \leq \text{diam}(G) \leq 3$ ,  $F^+(G) = -1$  et le suivant gagne. On peut donc, pour un réunion de chemins  $G$ , omettre les petites chaînes de taille au plus 3 :

**Proposition 4.1.10** Soit  $n \geq 4$  et  $G = \sum_{j=1}^n i_j.P_j$  avec  $i_n > 0$ . On a

$$\sigma^+(G) = \sigma^+\left(\sum_{j=4}^n i_j.P_j\right) = \sigma^+(G_0).$$

**Preuve:** Par récurrence sur  $|V(G)|$ . On a  $Opt(G) = \{G + P_i + P_j - P_n, i > j \geq -1, i + j = n - 3\}$ . On peut donc écrire :

$$\sigma^+(G) = 1 - \min\{\sigma(G + P_i + P_j - P_n), i > j \geq -1, i + j = n - 3\}.$$

Posons  $G' = \sum_{j=4}^n i_j \cdot P_j - P_n$ . Par hypothèse de récurrence on a :

$$\sigma^+(G) = 1 - \min\{\sigma(G' + P_i + P_j), i > j \geq -1, i + j = n - 3\} = \sigma(G_0).$$

■

S'appuyant sur cette proposition et sur les propriétés précédentes concernant les réunions de chemins de diamètre au plus 10, on peut implémenter un algorithme calculant la séquence  $(\sigma^+(P_n))_{n \geq 10}$ . En notant  $\mathcal{L}_n$  l'ensemble des tailles des chemins perdants de taille inférieure à  $n$ , on obtient les résultats suivants :

$$\mathcal{L}_{170} = \{0, 4, 5, 12, 13, 22, 23, 30, 37, 53, 72, 73, 82, 90, 137\}$$

On observe qu'il n'y a pas de période en deçà de  $n = 170$ , et que le nombre d'options perdantes (non détaillé ici) varie fortement d'un chemin à l'autre (de 0 à 10) et sont généralement spécifiques au chemin considéré. Il n'y a de plus aucune corrélation apparente entre ces options perdantes et donc on ne peut déduire de résultat général.

Comme l'algorithme est exponentiel en temps et en espace, on ne peut guère poursuivre les calculs de la séquence. On peut néanmoins remarquer que la proportion de chemins perdants est assez faible (de l'ordre de 10% pour  $n = 170$ ) et paraît décroître lorsque  $n$  augmente.

Malgré l'apparente apériodicité de l'ensemble des chemins perdants, certaines propriétés comme la Conjecture 4.1.9, observées sur le graphe des configurations de  $P_{170}$ , nous laissent penser qu'il existe un certain rang  $K$  au delà duquel les types des réunions de  $k > K$  chemins sont calculables en  $\mathcal{O}(k)$ . On observe que pour  $k > 4$ , une réunion de  $k$  chemins a le même type qu'un certain graphe  $G_0$  comprenant 4 ou 5 composantes connexes. Pour  $G$  une réunion de chemins et  $r$  un entier on note  $s_r(G)$  le nombre de chemins de  $G$  de diamètre  $r$  ou  $r + 1$  si  $r$  pair, et  $r$  ou  $r - 1$  si  $r$  impair. Par ailleurs pour tout entier  $n$  on appelle rang de  $n$  et on note  $rg(n)$  la valeur  $rg(n) = 2 \lfloor \frac{n-2}{4} \rfloor$

**Théorème 4.1.11** Soient  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq r \geq 4$  quatre entiers avec  $r$  pair. Pour  $1 \leq i \leq 3$  posons  $G_i = \sum_{j=1}^i P_{a_j}$ . Soit  $H$  une réunion de chemins de diamètre  $\text{diam}(H) \leq r + 1$ . Posons  $s = s_r(H)$ . Soit  $1 \leq i \leq 3$ , posons  $G = G_i + H$ . Si  $s + i \geq 4$  alors on a :

1. Si  $rg(a_1) \geq r$  alors

$$\sigma^+(G) = \sigma^+(G_i + t \cdot P_r),$$

avec  $t = 4 - i$  si  $s$  et  $4 - i$  ont même parité et  $t = 5 - i$  sinon.

2. Sinon  $\sigma^+(G) = \overline{s_{a_1}(G)}$ .

Autrement dit, pour une réunion de chemins  $G$ , on sélectionne les quatre plus grands, on regarde la taille  $a_4$  du plus petit de ceux-ci, on pose  $r$  le plus grand entier pair tel que  $r \leq a_4$ , et on construit  $G'$  en enlevant et tous les chemins de taille strictement inférieure à  $r$  et deux à deux les chemins de taille  $r$  ou  $r + 1$  tant que  $G'$  a plus de 5 composantes. Le graphe  $G'$  ainsi obtenu vérifie  $\sigma^+(G) = \sigma^+(G')$ .

**Preuve:** La preuve est réalisée par double récurrence sur  $a_1 = \text{diam}(G)$  et  $s_{a_1}(G)$  le nombre de chemins de longueur  $a_1 - \overline{a_1}$  ou  $a_1 - \overline{a_1} + 1$ .

Le théorème est vérifié si  $\text{diam}(G) \leq 10$  avec les formules établies en début de Section.

Supposons maintenant le théorème vrai pour tout graphe  $G'$  de diamètre  $d < a_1$ , et également pour tout graphe  $G'$  de diamètre  $a_1$  vérifiant  $s_{a_1}(G') < s_{a_1}(G)$ .

$$\text{Opt}(G) = \{P_{b_1} + P_{b_2} + P_{a_2} + P_{a_3} + s.P_r + H', -1 \leq b_1 \leq b_2 \leq a_1 - 2, b_1 + b_2 = a_1 - 3\}$$

Pour le premier point, on remarque que toute option  $G'$  de  $G$  a un diamètre inférieur à  $G$  ou vérifie  $0 < s_{a_1}(G') < s_{a_1}(G)$ . Par conséquent  $G'$  vérifie l'hypothèse de récurrence. Comme de plus  $r \leq \text{rg}(a_1)$  toute option  $P_c + P_d$  de  $P_{a_1}$  a un diamètre  $d \geq r$ . Donc le nombre de chemins de diamètre au moins  $r$  dans  $G'$  est supérieur ou égal à celui de  $G$ . On en déduit que l'on peut supprimer  $H'$  et les  $P_r$  et  $P_{r+1}$  deux à deux jusqu'à ce qu'on atteigne la valeur  $t$  définie dans le théorème. On s'aperçoit qu'il s'agit exactement de l'ensemble des options de  $G_i + t.P_r$ , on en conclut donc le premier point.

Pour le second point, il faut étudier séparément les cas  $s_{a_1}(G) = 1$  et  $s_{a_1}(G) \geq 2$ . Premièrement si  $s_{a_1}(G) \geq 2$  alors toute option  $G'$  vérifie  $s_{a_1}(G') = s_{a_1}(G) - 1 > 0$  et vérifie la condition du point 2. Par hypothèse de récurrence on a donc  $\overline{\sigma^+(G')} = \overline{s_{a_1}(G')} = s_{a_1}(G) - 1$  pour toute option  $G'$ . On en déduit que  $\overline{\sigma^+(G)} = 1 - \min\{s_{a_1}(G) - 1\} = s_{a_1}(G)$ .

Il reste à traiter le cas  $s_{a_1}(G) = 1$ . Toute option  $G'$  a un diamètre inférieur à celui de  $G$ . Si  $i = 1$ , comme  $\text{rg}(a_1) < r$  on a  $a_1 - r - 2 < r$ . Il suffit donc au joueur de choisir soit l'option  $P_r + P_{a_1-r-3}$  (on a bien  $a_1 - r - 3 < r$ ) si  $s$  est impair soit l'option  $P_{r-1} + P_{a_1-r-2}$  si  $s$  est pair. On obtient ainsi une option  $G'$  vérifiant les conditions du second point et telle que  $\overline{s_r(G')} = 0$ , donc perdante car de diamètre  $r$ .

Enfin si  $i \geq 2$  suivant si  $s_{a_2}$  est impair ou pair le joueur choisit l'option  $P_{a_2} + P_{a_1-a_2-3}$  ou  $P_{a_2-2} + P_{a_1-a_2-1}$  respectivement. Comme  $r > \text{rg}(a_1)$  et  $a_2 > r$  on a  $a_1 - a_2 - 1 \leq a_2 - 2$ , donc ces options vérifient les conditions du point 2 et sont perdantes. ■

Remarquons qu'une réunion de chemins  $G$  est fréquemment un cas trivial, c'est à dire vérifie  $\overline{\sigma^+(G)} = s_n(G)$ . Les conditions pour lesquelles  $G$  est un cas particulier (point 1 du Théorème 4.1.11) semblent plus restrictives que  $\text{rg}(a_1) \geq r$ . Notamment si  $\text{rg}(a_i) < r$  (avec  $i \geq 2$ ) alors jusqu'à  $n = 30$  on ne rencontre qu'un unique cas particulier :  $P_{26} + P_{12} + 2kP_8$  de type  $\mathcal{P}$ , alors que l'ordre de grandeur est  $\mathcal{O}(n^4)$ .

Ce Théorème nous permet de calculer le type d'une réunion de chemins en temps polynomial :

**Proposition 4.1.12** *Soit  $G$  une réunion disjointe de chemins tel que  $\text{diam}(G) = n \geq 10$ . On peut calculer  $\overline{\sigma^+(G)}$  en  $\mathcal{O}(n^5)$ .*

**Preuve:** Tout d'abord si  $G$  peut être écrit sous la forme  $P_n + P_p + P_q + H$  avec  $\text{diam}(H) \geq \text{rg}(n) + 2$ , alors  $G$  vérifie les conditions du point 2 du Théorème 4.1.11. On en déduit que  $\overline{\sigma^+(G)} = \overline{s_n}$ . Dans le cas contraire  $G$  est de la forme  $P_n + P_p + P_q + H$  avec  $\text{diam}(H) \leq \text{rg}(n) + 1$ . Par le point 1 du Théorème 4.1.11  $\overline{\sigma^+(G)}$  peut être calculé en connaissant uniquement  $G_0 = \overline{\sigma^+(P_n + P_p + P_q)}$  et  $G_1 = \overline{\sigma^+(P_n + P_p + P_q + P_d)}$  (avec  $d = \text{diam}(H) - \text{diam}(H)$ ). Or les booléens de jeu de ces deux graphes peuvent être calculés en  $\mathcal{O}(n)$  (le

nombre d'options) si l'on connaît tous les booléens de jeu de  $P_{n'} + P_{p'} + P_{q'} + P_{d'}$  avec  $(n', p', q') \leq (n, p, q)$  dans l'ordre lexicographique et  $0 \leq d' \leq rg(q')$ . Il y en a  $\mathcal{O}(n^4)$ . On en conclut que  $\sigma^+(G_0)$  et  $\sigma^+(G_1)$  sont calculables en  $\mathcal{O}(n^5)$  et donc  $\sigma^+(G)$  également. C'est également le cas si  $G$  est constitué de  $i \leq 3$  composantes : il faut connaître les types de  $\mathcal{O}(n^4)$  réunions de diamètre inférieur à  $n$ . ■

Néanmoins l'implémentation de cet algorithme polynomial n'a pas permis de mettre en valeur une période éventuelle. Le nombre théorique de cas particuliers, bien que polynomial, reste trop important. Il faudrait affiner les conditions du Théorème 4.1.11 pour mieux caractériser l'ensemble des cas particuliers.

### Version misère

La version misère est par contre ici assez éloignée de la version normale. On ne peut trouver de lien direct entre les deux versions comme cela a été démontré pour le jeu disjonctif maximal lent. En effet, la règle version misère en terminaison rapide signifie que c'est le joueur qui vide une composante qui est déclaré perdant. Donc personne n'a intérêt à vider une composante comme on le voit avec  $P_3$  où l'on doit choisir l'option  $P_1$ . Cette remarque entraîne donc que pour une réunion de chemins  $G$  de diamètre au moins 3, les chemins  $P_1$  et  $P_2$  n'ont aucune influence sur le type de  $G$  :

**Proposition 4.1.13** *Soit  $n \geq 3$  et  $G = \sum_{j=1}^n i_j \cdot P_j$  avec  $i_n > 0$ . On a  $\sigma^-(G) = \sigma^-(\sum_{j=3}^n i_j \cdot P_j) = \sigma^-(G_0)$ .*

Cette version bénéficie de la même propriété que pour le jeu disjonctif maximal lent version normale :

**Théorème 4.1.14** *Soit  $G = \sum_{j=1}^n i_j \cdot P_j$ , avec  $i_n > 0$  (soit  $n = \text{diam}(G)$ ) et  $n \geq 3$ . Si  $\forall 1 \leq j \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, i_{2j} + i_{2j-1}$  est pair, alors  $\sigma^-(G) = 0$ .*

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur  $n = \text{diam}(G)$ .

- Le théorème est vrai pour  $n \in \{3, 4\}$ .
- La démonstration au rang  $n + 1$  est construite de la même manière que pour le jeu disjonctif lent en version normale (Théorème 4.1.1).

■

On en déduit que  $\frac{3}{4}$  des chemins sont à coup sûr gagnants :

**Corollaire 4.1.15**  $\forall n \geq 0, \sigma^+(P_{4n+1}) = \sigma^+(P_{4n+2}) = \sigma^+(P_{4n+3}) = 1$

**Preuve:** Pour chaque cas on peut trouver une option vérifiant les conditions du Théorème 4.1.14 ■

Mais en ce qui concerne la famille  $(P_{4n})_{n \geq 0}$ , les calculs ne nous ont pas permis d'extraire une période éventuelle. De plus, comme ici l'algorithme est exponentiel, nous n'avons pas pu poursuivre au delà de  $n = 172$ .

## 4.2 Jeux sélectifs à diamètre maximal

Pour les quatre variantes du type **sélectif maximal**, la règle de composition permet aux joueurs de jouer sur autant de composantes connexes qu'ils le souhaitent, avec la contrainte que les composantes sur lesquelles ils ne jouent pas doivent avoir un diamètre inférieur à chacune de celles sur lesquelles ils jouent.

Comme nous n'allons étudier que les cas du jeu de domination sur les chemins, une position de jeu est une réunion de chemins  $G = P_{a_1} + P_{a_2} + \dots + P_{a_\ell}$  (avec pour tout  $1 \leq i \leq \ell - 1$ ,  $a_i \geq a_{i+1}$ ). Un coup sur  $G$  consiste donc à choisir un indice  $k$  ( $1 \leq k \leq \ell$ ) et à choisir un coup sur chacun des chemins  $P_{a_i}$  vérifiant  $i \leq k$ .

On peut remarquer qu'il y a un grand nombre de choix possibles pour les joueurs. Plus formellement, pour une réunion de chemins  $G$  de diamètre  $n$  et formé de  $\ell$  composantes, le nombre d'options est au pire  $\mathcal{O}(n + n^2 + n^3 + \dots + n^\ell) = \mathcal{O}(n^\ell)$ .

Toutefois, pour chacune des quatre variantes, nous verrons qu'il existe des méthodes permettant de connaître le type de  $G$  sans avoir à étudier toutes les options de  $G$ .

### 4.2.1 Jeu sélectif maximal lent

Rappelons qu'ici la partie est en *terminaison lente*, c'est-à-dire que le jeu est terminé lorsqu'on atteint le graphe vide.

Commençons par définir quelques notions qui nous permettront de connaître les types et les stratégies gagnantes tant pour la version normale que pour la version misère.

**Définition 4.2.1** Soit  $G = P_{a_1} + P_{a_2} + \dots + P_{a_\ell}$  une réunion de chemins de diamètre  $a_1 > 0$ .

- Le **niveau** de  $G$ , noté  $r(G)$  est le plus grand entier  $r$  qui vérifie  $3 \cdot 2^r - 2 \leq \text{diam}(G)$ .
- Soit  $P_n$  un chemin et  $r > 0$ . Posons  $v_r = 3 \cdot 2^r - 2$ . On appelle  **$r$ -poids** de  $P_n$  et on note  $\gamma_r(P_n)$  la valeur suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \gamma_r(P_n) = 0 & \text{si } n < v_r \\ \gamma_r(P_n) = \infty & \text{si } n \geq v_{r+1} \\ \gamma_r(P_n) = \left\lfloor \frac{n - v_r}{2} \right\rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

- Par extension on appelle  **$r$ -poids** de  $G$  et on note  $\gamma_r(G)$  la somme  $\gamma_r(G) = \sum_{j=1}^{\ell} \gamma_r(P_{a_j})$ .

Cette définition va nous permettre d'exprimer aisément l'ensemble des chemins perdants et les stratégies gagnantes le cas échéant, tant en version normale que misère. Afin d'effectuer les preuves, il nous faut démontrer certaines propriétés quant aux  $r$ -poids des options d'un graphe  $G$  :

**Lemme 4.2.2** Soit  $G$  une réunion non vide de chemins, de niveau  $n = r(G) > 0$ . Soit  $0 < p \leq v_{n-1} + 2$ . On a :

1. Pour toute option  $H$  de  $G$ ,  $\gamma_n(H) < \gamma_n(G)$ .
2. Pour toute option  $H$  de  $G$ ,  $\gamma_{n-1}(H) \geq \gamma_n(G)$  ;
3. Si  $\gamma_n(G) > p$ , alors il existe  $H \in \text{Opt}(G)$  tel que  $\gamma_n(H) = p$  ;
4. Si  $\gamma_n(G) \leq p$ , alors il existe  $H \in \text{Opt}(G)$  tel que  $\gamma_{n-1}(H) = p$ .

**Preuve:** Tout d'abord, comme  $r(G) = n$ , on a  $0 < \gamma_n(G) < \infty$ . Pour tout  $n \geq 0$ , on note  $v_n = 3 \cdot 2^n - 2$ . On a  $v_{n+1} = 2v_n + 2$ . Commençons par démontrer le premier point. Soit  $H$  une option de  $G$  issue du jeu sur une seule composante (donc la plus grande  $P_{a_1}$ ) :  $P_i + P_j \in \text{Opt}(P_{a_1})$ , avec  $i + j = a_1 - 3$  et  $i \geq j$ . Si  $j < v_n$ , le  $n$ -poids de  $H$  vaudra  $\gamma_n(H) = \gamma_n(G) - \gamma_n(P_{a_1}) + \gamma_n(P_i)$ . Or  $a_1 \geq i + 2$ , donc  $\gamma_n(P_{a_1}) > \gamma_n(P_i)$ , soit  $\gamma_n(H) < \gamma_n(G)$ . Si par contre  $j \geq v_n$  alors comme  $i \geq j$ ,  $a_1 = i + j + 3 \geq 2v_n + 3$ . Ceci est impossible car  $G$  est de niveau  $n$ , c'est-à-dire  $a_1 = \text{diam}(G) < v_{n+1} = 2v_n + 2$ . Si maintenant  $H$  est une option de  $G$  issue du jeu sur  $k \geq 2$  composantes, on démontre la proposition par récurrence sur le nombre  $k$  de composantes choisies.  $H$  est également une option (en jouant sur une seule composante) d'un graphe  $H_0$  issu de jeu sur  $k - 1$  composantes dans  $G$ . On a donc  $\gamma_n(H) < \gamma_n(H_0) < \gamma_n(G)$  par hypothèse de récurrence.

Démontrons maintenant le second point avec la même méthode : on suppose tout d'abord que  $H$  est issue du jeu sur une seule composante, on démontre que  $\gamma_{n-1}(H) \geq \gamma_n(G)$ , puis en itérant ce résultat on en conclut que la propriété est vraie pour toute option  $H$  de  $G$  issue du jeu sur  $k \geq 2$  composantes.

Soit  $H = P_i + P_j + G - P_{a_1}$  une telle option, avec  $i \geq j \geq -1$  et  $i + j = a_1 - 3$ . Si  $i \geq v_n$ , alors  $\gamma_{n-1}(P_i) = \infty$ . Donc  $\gamma_{n-1}(H) = \infty + x = \infty > \gamma_n(G)$ . Si  $i < v_n$ , alors comme  $a_1 \geq v_n$  et  $i \geq \lfloor \frac{a_1}{2} \rfloor - 1$ , on a :

$$i \geq \lfloor \frac{v_n}{2} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{2v_{n-1} + 2}{2} \rfloor - 1 = v_{n-1}.$$

Donc le niveau de  $H$  est au moins  $n - 1$ . Comparons maintenant  $\gamma_n(P_{a_1})$  et  $\gamma_{n-1}(P_i) + \gamma_{n-1}(P_j)$  afin de déduire l'inégalité du second point du lemme. Si  $j < v_{n-1}$  alors  $\gamma_{n-1}(P_j) = 0$ . Mais dans ce cas on a :

$$\gamma_{n-1}(P_i) = \lfloor \frac{i - v_{n-1}}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{a_1 - j - 3 - v_{n-1}}{2} \rfloor + 1 \geq \lfloor \frac{a_1 - (v_{n-1} - 1) - 3 - v_{n-1}}{2} \rfloor + 1.$$

$$\gamma_{n-1}(P_i) \geq \lfloor \frac{a_1 - (2v_{n-1} + 2)}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{a_1 - v_n}{2} \rfloor + 1 = \gamma_n(P_{a_1}).$$

Si par contre  $j \geq v_{n-1}$ , comparons la somme des deux  $(n - 1)$ -poids avec le  $n$ -poids de départ :

$$\gamma_{n-1}(P_i) + \gamma_{n-1}(P_j) = \lfloor \frac{i - v_{n-1}}{2} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{j - v_{n-1}}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor - v_{n-1} + 2.$$

On peut rassembler  $i$  et  $j$  dans une même partie entière sauf s'ils sont tous les deux impairs, auquel cas il faut retrancher 1. On a donc  $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor + \lfloor \frac{j}{2} \rfloor \geq \lfloor \frac{i+j-1}{2} \rfloor$ , ce qui entraîne que :

$$\gamma_{n-1}(P_i) + \gamma_{n-1}(P_j) \geq \lfloor \frac{i + j - 1}{2} \rfloor - v_{n-1} + 2 = \lfloor \frac{i + j - 1 - 2v_{n-1} + 2}{2} \rfloor + 1.$$



$$\gamma_{n-1}(P_i) + \gamma_{n-1}(P_j) \geq \lfloor \frac{i+j-3-(2v_{n-1}+2)}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{a_1-v_n}{2} \rfloor + 1 = \gamma_n(P_{a_1}).$$

Passons maintenant à la preuve du troisième point. Si  $G$  a un  $n$ -poids supérieur à  $p > 0$ , il faut trouver une option  $H$  de  $G$  de poids exactement  $p$ . Soit  $G = G_0 + G'$ , avec  $\gamma_n(G_0) = 0$  et  $G' = P_{a'_1} + \dots + P_{a'_n}$  tel que pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\gamma_n(P_{a'_i}) > 0$ . On joue sur  $G$  de la façon suivante : tant que  $\gamma_n(G') > p$ , choisir la plus grande composante  $C$  de  $G'$ . Si  $\gamma_n(G') - \gamma_n(C) \geq p$ , choisir pour  $C$  une option de niveau  $n-1$  et continuer (c'est possible car  $\text{diam}(C) < v_{n+1} = 2v_n + 2$ , donc il existe  $C' \in \text{Opt}(C)$  telle que  $\text{diam}(C') \leq \text{diam}(C)/2 - 1 = v_n - 1$ ). Sinon choisir une option  $C'$  de  $n$ -poids  $\gamma_n(G') - p$  et retourner  $H = G_0 + G'$ . Notons qu'il s'agit d'une procédure, donc  $G'$  et  $C$  varient à chaque étape.

Enfin pour le quatrième point utilisons la même méthode que précédemment : donnons une procédure permettant de construire un tel graphe  $H$ .

- Jouer sur tous les chemins de niveau  $n-1$  pour obtenir des options de niveau  $n-2$
- Excepté le plus grand chemin  $P_m$ , jouer sur chaque chemin  $P_k$  de niveau  $n$  pour obtenir une option de  $(n-1)$ -poids minimal.
- Calculer le  $(n-1)$ -poids total  $s$  et compléter en jouant sur  $P_m$  pour obtenir une option de  $(n-1)$ -poids valant  $p-s$ .

Il reste à démontrer qu'une telle option existe pour  $P_m$ . Évaluons la valeur de  $s$ . Notons  $G = G_0 + G' + P_m$ , où  $G_0$  regroupe les chemins de niveau au plus  $n-1$ ,  $G'$  ceux de niveau  $n$  excepté le plus grand  $P_m$ . Soit  $P_k \in G'$  un chemin de niveau  $n$ . On montre aisément que si l'on prend une option  $P_i + P_j$  de diamètre impair minimal, alors  $\gamma_{n-1}(P_i + P_j) \leq \gamma_n(P_k)$ . En ajoutant tous les poids des options choisies des  $P_k \in G'$ , on obtient une réunion  $H'$  vérifiant  $\gamma_{n-1}(H') \leq \gamma_n(G')$ . Comme  $\gamma_n(G) \leq p$ , on a bien  $s \leq p - \gamma_n(P_m)$ . Il suffit donc de compléter  $H'$  par une option de  $P_m$  de  $(n-1)$ -poids  $p-s$ . C'est toujours possible car  $\gamma_n(P_m) \leq p-s$  et  $p \leq v_{n-1} + 2$ . ■

### Version normale

En ce qui concerne la version normale, une étude de tous les chemins de petit diamètre comme cela a été effectué pour les variantes disjonctives nous permet d'observer que peu de réunions de chemins sont perdantes.

Par exemple, sur la famille des réunions de niveau 2,  $\mathcal{H}_2 = \{G = \sum_{j=1}^k P_{a_j}, r(G) = 2\}$ , on démontre que l'ensemble des réunions perdantes est :

$$\mathcal{L}_2 = \{2P_{10} + G_1, P_{11} + P_{10} + G_1, 2P_{11} + G_1, P_{12} + G_1, P_{13} + G_1, r(G_1) < 2\},$$

où  $G_1$  est une réunion quelconque de niveau au plus 1, ou le graphe vide.

Ces observations nous permettent d'établir le théorème suivant :

**Théorème 4.2.3** *Pour toute réunion de chemins  $G$  de niveau  $n$  on a :*

$$\sigma^+(G) = 0 \Leftrightarrow \gamma_n(G) = n.$$

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur  $|V(G)|$ . On peut aisément vérifier qu'elle est vraie pour l'ensemble  $\mathcal{H}_2$  des graphes de niveau 2. Soit  $G$  une réunion de

chemins vérifiant  $\gamma_n(G) = n$ . Par le premier point du Lemme 4.2.2, on sait que toute option  $H$  de  $G$  de niveau  $n$  a un poids strictement inférieur à celui de  $G$ , et est donc par hypothèse de récurrence gagnante. De plus, par le second point de ce même lemme, toute option  $H$  de niveau  $n-1$  vérifie  $\gamma_{n-1}(H) \geq \gamma_n(G) = n$ , donc  $\gamma_{n-1}(H) \neq n-1$ . On en déduit que  $H$  est également une option gagnante. On en conclut que  $\gamma_n(G) = n \Rightarrow \sigma^+(G) = 0$ .

Montrons maintenant que  $\gamma_n(G) \neq n \Rightarrow \sigma^+(G) = 1$ . Il faut pour cela trouver une option perdante pour  $G$ . Si  $\gamma_n(G) > n$  alors par le troisième point du Lemme 4.2.2 (en prenant  $p = n$ ) il existe une option  $H$  de  $G$  de niveau  $n$  et de poids  $n$ .  $H$  est perdante par hypothèse de récurrence, on en déduit que  $G$  est gagnant. Enfin si  $\gamma_n(G) < n$ , on choisira une option perdante de niveau  $n-1$ . Par le quatrième point du lemme avec  $p = n-1$ , comme  $\gamma_n(G) \leq n-1$ , il existe une option  $H$  de  $G$  vérifiant  $\gamma_{n-1}(H) = n-1$ . Or  $H$  est perdante par hypothèse de récurrence. On en conclut que  $\sigma^+(G) = 1$ . ■

En ce qui concerne les chemins seuls, pour tout  $n \geq 0$  les chemins de niveau  $n$  et de poids  $n$  sont  $P_{v_n+2n}$  et  $P_{v_n+2n+1}$ . On en déduit à l'aide du Théorème 4.2.3 que l'ensemble  $\mathcal{L}$  des chemins perdants est :

#### Corollaire 4.2.4

$$\mathcal{L} = \left\{ 3 \cdot 2^n + 2n - 4, 3 \cdot 2^n + 2n - 3, n \geq 0 \right\}$$

#### Version misère

L'étude des réunions de chemins de petit diamètre pour la version misère donne à peu de choses près les mêmes résultats que pour la version normale. En effet on peut réutiliser les définitions de niveau et de poids pour établir la propriété suivante :

**Théorème 4.2.5** *Pour toute réunion de chemins  $G$  de niveau  $n$  on a :  $\sigma^-(G) = 0 \Leftrightarrow \gamma_n(G) = n + 1$ .*

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur  $|V(G)|$ . On peut aisément vérifier qu'elle est vraie pour de petits graphes, par exemple pour l'ensemble  $\mathcal{H}_1$  des graphes de niveau 1. Soit  $G$  une réunion de chemins vérifiant  $\gamma_n(G) = n + 1$ . Par le premier point du Lemme 4.2.2, on sait que toute option  $H$  de  $G$  de niveau  $n$  a un poids strictement inférieur à celui de  $G$ , et est donc par hypothèse de récurrence gagnante. De plus, par le second point de ce même lemme, toute option  $H$  de niveau  $n-1$  vérifie  $\gamma_{n-1}(H) \geq \gamma_n(G) = n + 1$ , donc  $\gamma_{n-1}(H) \neq n$ , on en déduit que  $H$  est également une option gagnante. On en conclut que  $\gamma_n(G) = n \Rightarrow \sigma^-(G) = 0$ .

Montrons maintenant que si  $\gamma_n(G) \neq n + 1$  alors  $\sigma^-(G) = 1$ . Il faut pour cela trouver une option perdante pour  $G$ . Si  $\gamma_n(G) > n + 1$  alors par le troisième point du Lemme 4.2.2, en prenant  $p = n + 1$ , il existe une option  $H$  de  $G$  de niveau  $n$  et de poids  $n + 1$ .  $H$  est perdante par hypothèse de récurrence, on en déduit que  $G$  est gagnant. Enfin si  $\gamma_n(G) \leq n$ , par le quatrième point du lemme avec  $p = n - 1$ , il existe une option  $H$  de  $G$  vérifiant  $\gamma_{n-1}(H) = n$ . Or  $H$  est perdante par hypothèse de récurrence. On en conclut que  $\sigma^-(G) = 1$ . ■

De ce théorème caractérisant l'ensemble des réunions de chemins perdants, on déduit l'ensemble des chemins perdants  $\mathcal{L}$  :

**Corollaire 4.2.6**

$$\mathcal{L} = \{3 \cdot 2^n + 2n - 2, n \geq 0\} \cup \{3 \cdot 2^n + 2n - 1, n \geq 0\}.$$

### 4.2.2 Jeu sélectif maximal rapide

Les deux variantes étudiées ici sont soumises à la même règle de composition : *jeu sélectif à diamètre maximal*, mais on se place en *terminaison rapide*, c'est-à-dire que la partie est terminée dès qu'une composante est vidée.

Regardons dans quelle mesure les résultats obtenus pour le jeu sélectif maximal lent peuvent être étendus à ces deux nouvelles variantes.

#### Version normale

Comme pour le jeu disjonctif maximal rapide, la règle de terminaison rapide n'a que peu d'influence sur la durée de la partie (nombre de coups). En effet, pour terminer le jeu il faut jouer sur une composante  $P_1$ ,  $P_2$  ou  $P_3$  dans le cas où  $G$  est une réunion de chemins. Mais si aucun de ces trois chemins n'est présent dans  $G$ , personne n'aura intérêt à les constituer car alors ce sera l'autre joueur qui gagnera en un coup. Par conséquent, on évitera de jouer sur les petits chemins  $P_4$  et  $P_5$ , ou de couper  $P_k$  trop près du bord. Plus formellement, on a :

**Proposition 4.2.7** *Pour toute réunion de chemins  $G = \sum_{i=1}^{\ell} P_{a_i}$ , si  $a_{\ell} \leq 3$  alors  $\sigma^+(G) = 1$ .*

On en déduit que pour un chemin  $P_k$  de taille  $k \geq 10$ , les options  $P_1 + P_{k-4}$ ,  $P_2 + P_{k-5}$  et  $P_3 + P_{k-6}$  sont forcément gagnantes, et c'est également le cas si  $P_k$  est une composante d'un jeu  $G$  à plusieurs chemins. Par conséquent, lors de l'étude des réunions de chemins, nous regarderons uniquement l'ensemble des options potentiellement perdantes de  $G$ , noté  $Opt_0(G)$ , et défini sur chacun de ses chemins de taille  $k \geq 10$  par :

$$Opt_0(P_k) = \{P_{k-2}, P_{k-3}, P_{4+i} + P_{k-i-7}, 0 \leq i \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor - 5\}.$$

Une option potentiellement perdante de  $G$  est issue du choix de  $Opt_0(P)$  pour un certain nombre de chemins  $P$  de  $G$ , respectant la règle sélective maximale.

On retrouve le même type de structures que pour les deux variantes disjonctives maximales lentes : des **niveaux** avec  $v_n = 11 \cdot 2^{n-1} - 2$ , et des **poïds** pour les chemins de niveau  $n$ , c'est-à-dire de longueur  $k$  vérifiant  $v_n \leq k \leq v_{n+1} - 1$ . On trouve par exemple sur  $\mathcal{H}_2$ , l'ensemble des réunions de chemins de niveau 2, que l'ensemble des réunions de chemins perdantes est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \{2P_{20}, P_{20} + P_{21}, 2P_{21}, P_{27}, P_{28}, P_{32}, P_{33}\} \\ & \cup \left\{ \sum_{j=20}^{26} i_j \cdot P_j, i_{25} + i_{26} = 1 \text{ et } i_{20} + i_{21} + i_{22} + i_{23} + i_{24} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Précisons que l'on peut ajouter à ces réunions toute réunion de chemins  $G'$  de niveau au plus 1 sans en changer le type.

Par la suite, pour deux entiers positifs  $a$  et  $b$  avec  $a < b$ , nous noterons  $s_{a,b}(G)$  ou  $s_{a,b}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe considéré le nombre de composantes de diamètre compris entre  $a$  et  $b$ ,  $a$  et  $b$  inclus.

Dans deux cas nous dirons que  $P_z$  a un poids infini. Premièrement s'il existe une stratégie gagnante triviale, on dira que  $P_z$  est de poids infini. On trouvera également des chemins  $P_z$  où il existe un entier  $k$  tel que  $P_z$  ait une option de  $(n-1)$ -poids  $k$  et également une option de  $n$ -poids strictement supérieur à  $k$ . Dans ce cas  $P_z$  sera également de poids infini.

Au vu de l'exemple pour les graphes de niveau 2 et de ce qui a été calculé jusqu'au niveau 5, on peut remarquer trois choses :

1. Le poids d'un chemin  $P_z$  dépend des autres chemins du graphe  $G$ . Par exemple au niveau 2 on a  $\gamma_2(P_{25}) = 1$  si et seulement si  $s_{25,26} = 1$  et  $s_{20,24} \geq 1$ . Dans le cas contraire, on a  $\gamma_2(P_{25}) \geq 2$ .
2. Un chemin  $P_z$  de niveau  $n$  a son poids minoré par le quotient de la division euclidienne de  $z + 7 - v_n$  par 7 :  $\gamma_n(P_{v_n+7k+i}) \geq k + 1$  ;
3. Si le chemin  $P_{v_n+7k+i}$  est seul dans le niveau  $n$  de  $G$ , alors son poids est soit  $k + 1$  soit  $+\infty$ .

Bien entendu ces observations doivent être démontrées (ou infirmées par un contre-exemple) dans le cadre général, lorsque le niveau de  $G$  est supérieur à 6. Par la suite, le poids d'un chemin  $P_z$  **plongé dans une réunion**  $G$  ou  $G$ -poids sera noté  $\gamma_G(P_z)$ . Par extension, pour tout  $H$  sous-ensemble de composantes de  $G$ , son poids sera noté  $\gamma_G(H)$  et vaudra la somme des  $G$ -poids de ses composantes connexes.

La fonction de poids, construction abstraite utilisée pour caractériser les réunions perdantes, devra vérifier comme dans la Section précédente les quatre propriétés nécessaires pour déduire les stratégies gagnantes ou, le cas échéant, pour certifier que la réunion est perdante. Il s'agit des quatre points du Lemme 4.2.2 adaptées à cette variante.

Pour tout graphe  $G$  de niveau  $n$  et de poids vérifiant  $0 < \gamma_n(G) < +\infty$ , et pour tout entier positif  $p \leq v_{n-1} + 2$  on doit avoir :

1.  $\forall H \in \text{Opt}(G), \gamma_n(H) < \gamma_n(G)$  ou  $\gamma_n(H) = +\infty$  ;
2.  $\forall H \in \text{Opt}(G), \gamma_{n-1}(H) \geq \gamma_n(G)$  ;
3. Si  $\gamma_n(G) > p$ , alors il existe  $H \in \text{Opt}(G)$  tel que  $\gamma_n(H) = p$  ;
4. Si  $\gamma_n(G) \leq p$ , alors il existe  $H \in \text{Opt}(G)$  tel que  $\gamma_{n-1}(H) = p$ .

Ces quatre propriétés seront appelées **propriétés de poids**.

Commençons par trouver un encadrement pour le poids d'une réunion de deux chemins de même niveau :

**Proposition 4.2.8** *Soit  $n \geq 2$  et  $P_a$  et  $P_b$  deux chemins de niveau  $n$ . Si les poids de  $P_a$  et  $P_b$  ne sont pas infinis alors on a :*

$$\gamma_n(P_a) + \gamma_n(P_b) \leq \gamma_n(P_a + P_b) \leq 2\gamma_n(P_a) + 2\gamma_n(P_b) - 1$$

**Preuve:** Prenons  $P_a$  et  $P_b$  deux chemins de niveau  $n$  et de poids fini. La preuve est réalisée par récurrence sur  $(a, b)$ , en posant  $a \geq b$ . La propriété est vérifiée au niveau 2, pour tout couple  $(a, b)$ . Commençons par démontrer la première inégalité, en supposant par l'absurde que  $\gamma_n(P_a + P_b) < \gamma_n(P_a) + \gamma_n(P_b)$ .

La propriété de poids numéro 4 entraîne qu'il existe  $H = P_{a'} + P_{a-a'-3}$  une option de  $P_a$  de niveau  $n$  et de poids  $\gamma_n(P_a) - 1$ . Or comme  $P_a$  et  $P_{a'}$  sont de niveau  $n$ ,  $P_{a-a'-3}$  a un niveau inférieur à  $n - 1$ . Donc  $\gamma_n(H) = \gamma_n(P_{a'}) = \gamma_n(P_a) - 1$ . Par hypothèse de récurrence, on a  $\gamma_n(P_{a'} + P_b) \geq \gamma_n(P_a) - 1 + \gamma_n(P_b)$ . Mais comme  $\gamma_n(P_a + P_b) < \gamma_n(P_a) + \gamma_n(P_b)$ , on en déduit que :

$$\gamma_n(P_{a'} + P_b) \geq \gamma_n(P_a + P_b).$$

Par la propriété de poids 1 la seule possibilité est donc  $\gamma_n(P_{a'} + P_b) = +\infty$ . Or c'est impossible car par hypothèse de récurrence  $\gamma_n(P_{a'} + P_b) \leq 2\gamma_n(P_{a'}) + 2\gamma_n(P_b) - 1$ , on aboutit donc à une contradiction.

Il reste à montrer que le poids de  $P_a + P_b$  est inférieur à  $2\gamma_n(P_a) + 2\gamma_n(P_b) - 1$ . Soit  $H$  une option de  $P_a + P_b$  de niveau  $n$ . On peut négliger les composantes de niveau inférieur ou égal à  $n - 1$ , comme  $H$  a au plus deux composantes de niveau  $n$  on peut écrire  $H = P_{a'} + P_{b'}$ , avec  $a' \neq a$ . Comme  $P_{a'}$  est une option de  $P_a$ , on a par la propriété de poids 1  $\gamma_n(P_{a'}) \leq \gamma_n(P_a) - 1$ . Par hypothèse de récurrence on peut donc écrire :

$$\gamma_n(H) \leq 2\gamma_n(P_{a'}) + 2\gamma_n(P_{b'}) - 1 \leq 2\gamma_n(P_a) + 2\gamma_n(P_b) - 3.$$

On observe que toute option de  $P_a + P_b$  a un poids valant au plus  $2\gamma_n(P_a) + 2\gamma_n(P_b) - 3$ . Par la propriété de poids 3 on en conclut la deuxième inégalité. ■

**Remarque:** Cette propriété peut être étendue à une réunion  $G = \sum_{i=1}^k P_{a_i}$  de  $k$  chemins de niveau  $n$ . On peut prouver que :

$$\sum_{i=1}^k \gamma_n(P_{a_i}) \leq \gamma_n(G) \leq -1 + 2 \sum_{i=1}^k \gamma_n(P_{a_i}).$$

Mais comme par la suite nous ne nous intéresserons qu'aux chemins seuls  $P_z$ , les réunions de trois chemins ou plus n'ont pas besoin d'être étudiées.

Cette propriété nous permet de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4.2.9** *Soit  $P_z$  un chemin de niveau  $n \geq 2$ . Posons  $z = v_n + 7k + i$  avec  $k \geq 0$  et  $0 \leq i \leq 6$ . On a  $\gamma_n(P_z) = +\infty$  si  $i \in \{3, 4\}$  et  $\gamma_n(P_z) = k + 1$  sinon.*

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur le niveau  $n$  de  $P_z$ . La propriété est vérifiée pour  $n = 2$  comme on peut l'observer avec l'ensemble  $\mathcal{L}_2$  des réunions perdantes de niveau 2. Soit  $n \geq 3$ . Supposons la propriété vraie pour tout  $p < n$  et démontrons-là au rang  $n$ . On effectue une deuxième récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$ , si  $i \leq 1$  alors toute option de  $P_z$  est de niveau  $n - 1$ , car pour toute option  $H$  de  $P_z$  on a  $\lfloor \frac{z}{2} \rfloor - 1 \leq \text{diam}(H) \leq z - 2$ , soit  $v_{n-1} \leq \text{diam}(H) < v_n$ . On remarque que les quatre propriétés des poids ne peuvent être vérifiées que si  $\gamma_n(P_z) = 1$ . Plus précisément, le point 3 ne pourrait être vérifié si l'on prenait tout autre poids que 1. Et la valeur 1 fonctionne pour les points 2 et 4.

Si  $i \in \{2, 3, 4\}$  alors  $P_{v_n}$  ou  $P_{v_{n+1}}$  est dans  $Opt_0(P_z)$ . Comme ces options sont de poids 1, on en déduit que  $\gamma_n(P_z) \geq 2$ . Toutefois on observe que pour  $n = 2$  le poids 2 n'est pas possible car  $P_{22}$ ,  $P_{23}$  et  $P_{24}$  ne sont pas dans  $\mathcal{L}_2$ . Plus précisément,  $P_{v_n+i}$  possède l'option de niveau  $n - 1$  et de poids 1 suivante :  $P_{v_{n-1}+6} + P_{v_{n-1}+i-7}$ . Le point 2 des propriétés de poids ne peut donc être vérifié que si le poids de  $P_z$  est inférieur à 1. On aboutit à une contradiction :  $2 \leq \gamma_n(P_z) \leq 1$ . On en conclut que le poids de  $P_z$  est infini.

Enfin si  $i \in \{5, 6\}$ , les options potentiellement perdantes  $Opt_0(P_z)$  de niveau  $n$  sont  $P_{v_n+j}$  pour  $j \in \{2, 3, 4\}$ . Or ces options sont de poids infini comme on vient de le démontrer. Or le point numéro 3 doit être vérifié, c'est-à-dire que pour tout entier  $0 < p < \gamma_n(P_z)$  il doit exister une option de niveau  $n$  et de poids  $p$ . On en déduit que  $\gamma_n(P_z) \in \{1, +\infty\}$ .

Supposons maintenant la propriété vraie pour tout  $k' < k$  et démontrons-là au rang  $k$ .

Si  $i \in \{0, 1\}$ , il faut démontrer que le poids de  $P_z$  n'est pas infini et que les quatre propriétés de poids ne sont vérifiées que pour  $\gamma_n(P_z) = k + 1$ . Les points 1 et 3 sont évidents par hypothèse de récurrence, et on peut remarquer qu'ils ne sont vérifiés que si  $\gamma_n(P_z) = k + 1$ . Il reste à démontrer que toute option de niveau  $n - 1$  est de poids supérieur ou égal à  $k + 1$ . Pour les options n'ayant qu'une composante de niveau  $n - 1$ , l'option ayant le plus petit poids est  $H = P_{v_{n-1}-1} + P_{v_{n-1}+7k+i}$  qui par induction vérifie  $\gamma_{n-1}(H) = k + 1$ . Enfin si  $H$  est une option ayant deux composantes de niveau  $n - 1$ , il existe 4 entiers positifs ou nuls  $k_1, k_2, i_1 < 7$  et  $i_2 < 7$  tels que  $H = P_{v_{n-1}+7k_1+i_1} + P_{v_{n-1}+7k_2+i_2}$ . De plus on doit avoir  $v_{n-1} + 7k_1 + i_1 + v_{n-1} + 7k_2 + i_2 = v_n + 7k + i - 3$ , soit  $7(k_1 + k_2) + i_1 + i_2 = 7k + i - 1$ . On en déduit que  $k_1 + k_2 \in \{k - 1, k\}$ , soit  $k_1 + k_2 \geq k - 1$ . D'après la Proposition 4.2.8 on peut minorer le poids de  $H$  :  $\gamma_{n-1}(H) \geq k_1 + 1 + k_2 + 1$  On en conclut que  $\gamma_{n-1}(H) \geq k - 1 + 2 = k + 1$

Si  $i \in \{2, 3, 4\}$ , alors soit  $P_{v_n+7k}$  soit  $P_{v_n+7k+1}$  est une option potentiellement perdante de  $P_z$ . Or elle est de poids  $k + 1$  on en déduit que le poids de  $P_z$  est au moins  $k + 2$ . D'autre part, regardons l'option de niveau  $n - 1$   $H = P_{v_{n-1}+i-6} + P_{v_{n-1}+7k+5}$ . Comme  $i \leq 4$  la première composante est de niveau  $n - 2$ ; la seconde quant à elle est de niveau  $n - 1$  et son poids vaut par récurrence  $k + 1$ . On en déduit que  $\gamma_n(P_z) \leq k + 1$ . On aboutit à une contradiction. On en conclut que  $\gamma_n(P_z) = +\infty$ .

Enfin si  $i \in \{5, 6\}$ , par la Proposition 4.2.7, ni  $P_{v_n+7k}$  ni  $P_{v_n+7k+1}$  ne sont des options intéressantes. En effet, le coup qui les construit isole un chemin de diamètre inférieur à 3. On en déduit en utilisant l'hypothèse de récurrence que toute option de niveau  $n$  a un poids inférieur ou égal à  $k$ . Il reste donc à prouver que toute option de niveau  $n - 1$  a un poids supérieur ou égal à  $k + 1$ . L'option  $H$  de niveau  $n - 1$ , n'ayant qu'une composante dans ce niveau, est de poids minimal  $H = P_{v_{n-1}-1} + P_{v_{n-1}+7k+i}$  par hypothèse de récurrence. Or  $\gamma_{n-1}(H) = k + 1$ . Si  $H$  a deux composantes de niveau  $n - 1$ , alors elle peut s'écrire  $H = P_{v_{n-1}+7k_1+i_1} + P_{v_{n-1}+7k_2+i_2}$ , avec  $i_1 \leq 6$  et  $i_2 \leq 6$ . De plus on doit avoir  $v_{n-1} + 7k_1 + i_1 + v_{n-1} + 7k_2 + i_2 = v_n + 7k + i - 3$ , soit  $7(k_1 + k_2) + i_1 + i_2 = 7k + i - 1$ . On en déduit que  $k_1 + k_2 \in \{k - 1, k\}$ , soit  $k_1 + k_2 \geq k - 1$ . En outre la Proposition 4.2.8 nous permet de minorer le poids de  $H$  par  $k_1 + k_2 + 2$ . On en conclut que  $\gamma_{n-1}(H) \geq k + 1$ . ■

Ce théorème nous permet de connaître l'ensemble des chemins perdants, c'est-à-dire ceux dont le poids est égal à leur niveau :

**Corollaire 4.2.10** *L'ensemble  $\mathcal{L}$  des tailles des chemins perdants pour cette variante est :*

$$\mathcal{L} = \{0, 4, 5\} \cup \{11 \cdot 2^k + 7k - 2, 11 \cdot 2^k + 7k - 1, 11 \cdot 2^k + 7k + 3, 11 \cdot 2^k + 7k + 4, k \geq 0\}$$

**Preuve:** Au niveau 0 on sait que le graphe vide  $P_0$  est perdant et que  $P_4$  et  $P_5$  n'ont que des options contenant  $P_1$ ,  $P_2$  ou  $P_3$  et sont donc également perdantes. Pour les autres chemins de niveau 0  $P_6$ ,  $P_7$  et  $P_8$ , les chemins  $P_4$  ou  $P_5$  en sont des options perdantes.

Pour un niveau  $n \geq 1$  donné, les chemins perdants sont ceux qui dont le poids est exactement  $n$ . Par le Théorème 4.2.9, on sait qu'il s'agit des chemins de taille  $z_i = v_n + 7(n-1) + i$  avec  $i \in \{0, 1, 5, 6\}$ . En posant  $k = n-1$  on obtient :  $z_i = 11 \cdot 2^k + 7k + i - 2$ . Comme  $i \in \{0, 1, 5, 6\}$  on trouve l'expression de l'ensemble  $\mathcal{L}$ . ■

Nous savons donc quels sont les chemins perdants et également quelle stratégie adopter si  $P$  est gagnant : choisir une option de niveau  $n$  et de poids  $n$  si le poids de  $P$  est supérieur à  $n$ , et choisir une option de niveau  $n-1$  et de poids  $n-1$  sinon.

Toutefois, nous avons seulement démontré que cette option de niveau  $n-1$  et de poids  $n-1$  existe, mais nous ne savons pas la trouver pour un chemin  $P$  donné. Les stratégies gagnantes ne sont donc pas connues.

Il en est de même à un instant  $t$  de la partie lorsque la position courante est une réunion de chemins  $G$ . La Proposition 4.2.8 peut être étendue pour donner un encadrement du poids de  $G$ , mais si l'on veut connaître son type il faudrait avoir le poids exact. Par conséquent, il reste à démontrer une éventuelle collection de formules permettant de donner le poids d'une réunion  $G$  de  $k$  chemins de niveau  $n$ . Les recherches que nous avons effectuées jusqu'à  $n = 6$  ne permettent pas de mettre en évidence une expression du poids de toute réunion  $G$ , hormis pour quelques cas particuliers comme lorsqu'il n'y a qu'un chemin de niveau  $n$  (Théorème 4.2.9) ou lorsque le diamètre de  $G$  est inférieur ou égal à  $v_n + 6$  :

**Conjecture 4.2.11** *Soit  $G = \sum_{i=1}^k P_{a_i}$ , avec  $v_n + 6 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq v_n$ .*

1. *S'il existe  $1 \leq i \leq k$  tel que  $a_i \in \{v_n + 2, v_n + 3, v_n + 4\}$  alors  $\gamma_n(G) = +\infty$  ;*
2. *Sinon si  $a_1 \leq v_n + 1$  alors  $\gamma_n(G) = k$  ;*
3. *Sinon soit  $j > 0$  le plus petit entier tel que  $a_j \leq v_n + 1$ . On a  $\gamma_n(G) = k + j - 2$  ;*

### Version misère

À l'opposé de la version normale, le jeu selectif maximal rapide misère est très proche du jeu selectif maximal lent misère. En effet, on retrouve un système de niveaux. Plus précisément, pour une réunion de chemins  $G$ , le type de  $G$  est le même que celui du graphe  $G_0$  issu de  $G$  et dont on a retiré tous les chemins n'étant pas de niveau maximal  $n = n(G)$ . La valeur de niveau  $v_n$  est ici  $v_n = 5 \cdot 2^n - 2$  et, comme pour les deux premières versions, l'expression du poids d'une réunion  $G$  se fait par simple addition des poids de ses composantes :

**Définition 4.2.12** Soit  $G = \sum_{i=1}^k P_{a_i}$  une réunion de chemins, avec  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ . On appelle niveau de  $G$  et on note  $n(G)$  le plus grand entier  $n$  tel que  $v_n = 5 \cdot 2^n - 2 \leq a_1 = \text{diam}(G)$ . Soit  $P_z$  un chemin et  $n \geq 1$ . On appelle  $n$ -poids de  $P_z$  et on note  $\gamma_n(P_z)$  la valeur suivante :

$$\begin{cases} \gamma_n(P_z) = 0 & \text{si } z < v_n \\ \gamma_n(P_z) = \infty & \text{si } z \geq v_{n+1} \\ \gamma_n(P_z) = \left\lfloor \frac{z-v_n}{2} \right\rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle  $n$ -poids de  $G$  (ou poids de  $G$  si  $n = n(G)$ ) et on note  $\gamma_n(G)$  la somme

$$\gamma_n(G) = \sum_{i=1}^k \gamma_n(P_{a_i}).$$

À l'aide de cette définition, on peut exprimer les types des réunions de chemins :

**Théorème 4.2.13** Soit  $G$  une réunion de chemins de niveau  $n$ . On a :

$$o(G) = \mathcal{P} \Leftrightarrow \gamma_n(G) = n$$

**Preuve:** La preuve est la même que pour les deux variantes "jeu sélectif maximal lent" mis à part le point de départ de l'induction. ■

On en déduit l'ensemble  $\mathcal{L}$  des chemins perdants :

**Corollaire 4.2.14**

$$\mathcal{L} = \{1, 2\} \cup \left\{ 5 \cdot 2^n + 2n - 4, 5 \cdot 2^n + 2n - 3, n \geq 1 \right\}$$



### 4.3 Jeux disjonctifs à diamètre minimal

Pour les variantes disjonctives à diamètre minimal, la règle de composition impose que les joueurs jouent sur la composante de plus petit diamètre. Donc pour une réunion de chemins  $G = P_{a_1} + P_{a_2} + \dots + P_{a_k}$  le nombre d'options de  $G$  est en  $\mathcal{O}(a_k) = \mathcal{O}\left(\frac{|V(G)|}{k}\right)$  au pire, mais dans la pratique comme  $P_{a_k}$  est le plus petit chemin de  $G$ ,  $a_k$  est négligeable devant  $|V(G)|$ , et donc le nombre d'options de  $G$  est le plus petit de toutes les variantes déjà étudiées.

On peut donc s'attendre à découvrir plus facilement une période pour la séquence des types des chemins. C'est effectivement le cas pour les huit variantes à diamètre minimal.

#### 4.3.1 Jeu disjonctif minimal lent

Etant donné que les versions normale et misère sont semblables, elles seront traitées dans la même section. Dans cette section, une réunion de chemins  $G$  sera notée  $G = \sum_{j=1}^n i_j P_j$  en posant  $i_2 = 0$  car les graphes  $P_1$  et  $P_2$  sont isomorphes pour l'ensemble des variantes à diamètre minimal. Pour plus de clarté, posons  $R^+ = \sigma^+(G)$  et  $R^- = \sigma^-(G)$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la réunion  $G$  considérée. Rappelons que  $\sigma^+(G)$  (resp.  $\sigma^-(G)$ ) est le **booléen de jeu** de  $G$  et vaut 1 si et seulement si  $o(G) = \mathcal{N}$  pour la version normale (resp. misère).

##### Théorème 4.3.1

1. Si  $n < 7$  alors :
  - Si  $i_5 + i_3 = 0$  alors  $R^+ = \overline{i_1 + i_6}$  et  $R^- = \overline{i_1 + i_6 + 1}$  ;
  - Sinon  $R^+ = R^- = \overline{i_1 + 1}$ .
2. Si  $n \geq 7$  alors :
  - Si  $i_6 > 0$  et  $i_5 + i_3 = 0$  alors  $R^+ = R^- = \overline{i_1 + i_6 + 1}$  ;
  - Sinon  $R^+ = R^- = \overline{i_1 + 1}$ .

Démontrons tout d'abord le fait que les chemins de taille au moins 7 sont tous gagnants pour les deux versions :

##### Lemme 4.3.2

$$\forall n \geq 7, \sigma^+(P_n) = \sigma^-(P_n) = 1$$

**Preuve:** Par récurrence sur  $n$ . Vérifions tout d'abord que le lemme est vrai pour  $n \leq 10$ . Comme  $P_3$  et  $P_5$  sont gagnants pour les deux versions,  $P_3 + P_1$ ,  $P_3 + P_2$ ,  $P_5 + P_1$  et  $P_5 + P_2$  sont des options perdantes pour respectivement  $P_7$ ,  $P_8$ ,  $P_9$ , et  $P_{10}$ . En effet, sur ces options le joueur n'a d'autre choix que de jouer sur  $P_1$  (ou  $P_2$  suivant les cas) et forme donc l'option  $P_3$  ou  $P_5$ .

Posons maintenant  $n \geq 11$ . Par hypothèse de récurrence,  $P_{n-4}$  est gagnant. Or  $Opt(P_{n-4} + P_1) = \{P_{n-4}\}$ , donc  $P_{n-4} + P_1$  est perdant. Comme il s'agit d'une option de  $P_n$  on en déduit que  $P_n$  est gagnant. ■

**Preuve du Théorème 4.3.1 :** La preuve est réalisée par récurrence sur  $|V(G)|$ . Démontrons d'abord la partie concernant les graphes de petit diamètre  $n < 7$ . On vérifie que les formules sont vraies lorsque  $G$  est le graphe vide ou lorsque  $G = P_1$ .

Premièrement, si  $i_5 + i_3 = 0$  et  $i_6 > 0$ , alors  $G = i_1 P_1 + i_4 P_4 + i_6 P_6$ . Si  $i_1 > 0$  alors  $Opt(G) = \{G - P_1\}$ , donc par hypothèse de récurrence on a  $R^+ = 1 - \min\{\overline{i_1 - 1 + i_6}\} = \overline{i_1 + i_6}$ , et  $R^- = 1 - \min\{\overline{i_1 - 1 + i_6 + 1}\} = \overline{i_1 + i_6 + 1}$ . Sinon si  $i_4 > 0$  alors l'unique option de  $G$  est  $G + P_1 - P_4$ . Par hypothèse de récurrence on retrouve les formules du théorème pour  $G$ . Sinon  $G = i_6 P_6$ . Par hypothèse de récurrence on peut écrire :

$$R^+ = 1 - \min\{\overline{i_6 - 1}, \overline{1}, \overline{2 + i_6 - 1}\} = \overline{i_6}$$

$$R^- = 1 - \min\{\overline{i_6 - 1 + 1}, \overline{1}, \overline{2 + i_6 - 1 + 1}\} = \overline{i_6 + 1}$$

Ensuite regardons le cas où  $i_5 + i_3 > 0$ . Tout d'abord, si  $i_1 > 0$  alors l'unique option est  $G - P_1$ . On en déduit par hypothèse de récurrence que  $R^+ = R^- = 1 - \min\{\overline{i_1 + 1 - 1}\} = \overline{i_1 + 1}$ . Sinon si  $i_3 > 0$  alors le joueur peut soit supprimer  $P_3$  soit constituer un sommet isolé  $P_1$ . Suivant la version considérée, il choisira l'une ou l'autre des options pour gagner la partie. Sinon si  $i_4 > 0$  alors on peut écrire  $R^+ = R^- = 1 - \min\{\overline{i_1 + 1 + 1}\} = \overline{i_1 + 1}$ . Enfin si  $i_1 + i_3 + i_4 = 0$  alors  $Opt(G) = \{G + P_3 - P_5, G + P_1 - P_5, G + 2P_1 - P_5\}$ . Si  $i_5 = 1$  alors on a

$$R^+ = 1 - \min\{\overline{i_1 + 1}, \overline{i_1 + i_6 + 1}, \overline{i_1 + i_6 + 2}\} = 1 = R^-.$$

Sinon ( $i_5 > 1$ ) par hypothèse de récurrence on peut écrire :

$$R^+ = R^- = 1 - \min\{\overline{i_1 + 1}, \overline{i_1 + 2}, \overline{i_1 + 3}\} = 1.$$

Passons maintenant aux réunions de diamètre  $n \geq 7$ . Tout d'abord, remarquons que le chemin  $P_4$  est inévitablement vidé en deux coups successifs. Par conséquent, pour toute réunion de chemins  $H$  on a  $\sigma^+(H + P_4) = \sigma^+(H)$  et  $\sigma^-(H + P_4) = \sigma^-(H)$ . On peut donc par la suite poser  $i_4 = 0$ . Si  $i_1 + i_3 + i_5 + i_6 = 0$ , alors le Lemme 4.3.2 entraîne que  $R^+ = R^- = 1$ . En effet, Alice applique successivement sur chaque composante  $P_k$  (par ordre croissant de diamètre) la stratégie gagnante misère qui consiste à choisir l'option  $P_{k-4} + P_1$  tant que  $k \geq 11$ , puis à jouer de telle sorte que l'autre joueur retire le dernier sommet. Ainsi, c'est à Alice de jouer lorsqu'il ne reste qu'une composante  $P_n$ . Par le Lemme 4.3.2, on en conclut que  $R^+ = R^- = 1$ .

Si  $i_3 + i_5 + i_6 = 0$  et  $i_1 > 0$ , par hypothèse de récurrence  $\sigma(G) = 1 - \min\{\sigma(G - P_1)\} = 1 - \min\{\overline{i_1 - 1 + 1}\} = \overline{i_1 + 1}$ .

Si  $i_5 + i_3 = 0$  et  $i_6 > 0$ , la propriété est vraie par hypothèse de récurrence si  $i_1 > 0$ . Posons donc  $i_1 = 0$ . Comme les options de  $P_6$  sont  $P_4$ ,  $P_3$  et  $P_2 + P_1$ , on peut écrire par hypothèse de récurrence :

$$\sigma(G) = 1 - \min\{\overline{i_6}, \overline{1}, \overline{i_6 + 2}\} = \overline{i_6 + 1}.$$

Enfin si  $i_3 + i_5 > 0$ , la propriété est vraie par hypothèse de récurrence si  $i_1 > 0$ . Posons donc  $i_1 = 0$ . Comme toutes les expressions du théorème dépendent de la parité du nombre de sommets isolés, le Suivant choisira l'option  $\emptyset$  ou  $P_1$  de  $P_3$  (ou bien  $P_1$  ou  $2P_1$  de  $P_5$ ) en fonction de la parité du nombre de sommets isolés qu'il lui faut obtenir pour gagner la partie. ■

Du Théorème 4.3.1 et du Lemme 4.3.2 on déduit les ensembles des tailles des chemins perdants :  $\mathcal{L}^+$  en version normale et  $\mathcal{L}^-$  en version misère :

$$\mathcal{L}^+ = \{0, 4\} \text{ et } \mathcal{L}^- = \{1, 2, 6\}.$$

Le Théorème 4.3.1 sert principalement à élaborer des stratégies gagnantes lorsque l'on joue sur une réunion quelconque de chemins. Dans la pratique si l'on part d'un chemin  $P_n$  et que la stratégie gagnante  $y$  est à tout moment de la partie appliquée, la position courante sera toujours de la forme  $P_k$  (position gagnante) ou  $P_k \cup P_1$  (position perdante), excepté à la fin du jeu lorsque  $\text{diam}(G) \leq 7$ .

### 4.3.2 Jeu disjonctif minimal rapide

Les trois dernières variantes du jeu à diamètre minimal sont triviales pour les réunions de chemins. En effet, on s'aperçoit que c'est le plus petit chemin qui détermine le type de la réunion  $G$

#### Théorème 4.3.3

1.  $\forall n \geq 11, \sigma^+(P_n) = 1$  ;
2.  $\forall n \geq 3, \sigma^-(P_n) = 1$ .

**Preuve:** Par récurrence sur  $n$ .

1. Pour la version normale, on remarque que pour tout  $4 \leq k < n$ ,  $\sigma^+(P_k + P_4) = 0$ . En effet, l'unique option de  $P_k + P_4$  est  $P_k + P_1$  qui est gagnant en un coup par hypothèse de récurrence. Comme  $P_{n-7} + P_4 \in \text{Opt}(P_n)$  et  $k = n - 7 \geq 11 - 7 = 4$ , on en conclut que  $\sigma^+(P_n) = 1$ .
2. Pour la version misère, l'option  $P_{n-4} + P_1$  de  $P_n$  est perdante en un coup par hypothèse de récurrence, on en déduit que  $\sigma^-(P_n) = 1$ .

■

Ce théorème entraîne que les ensembles  $\mathcal{L}^+$  et  $\mathcal{L}^-$  sont finis. Plus précisément, on a :

$$\mathcal{L}^+ = \{0, 4, 5, 9, 10\} \text{ et } \mathcal{L}^- = \{1, 2\}.$$

## 4.4 Jeux sélectifs à diamètre minimal

Terminons ce Chapitre par les variantes sélectives à diamètre minimal. Les joueurs peuvent jouer sur une sélection de une ou plusieurs composantes connexes parmi celles de plus petit diamètre.

### 4.4.1 Jeu sélectif minimal lent

#### Version normale

Commençons par démontrer que si le plus petit chemin d'une réunion est de taille 4, alors la réunion est perdante.

**Proposition 4.4.1**  $\forall n \geq 4, \sigma^+(P_n + P_4) = 0$

**Preuve:** Au vu des règles de composition de cette version, écrivons l'expression des options de  $P_n + P_4$  :

$$Opt(P_n + P_4) = \{P_n + P_1, P_i + P_j + P_1, i > j \geq -1, i + j = n - 3\}$$

Montrons que chacune de ces options est gagnante. Toute option de  $P_n + P_4$  s'écrit  $G + P_1$  où  $G$  est une réunion non vide d'au plus 2 chemins.

- Si  $\sigma^+(G) = 0$ , alors comme  $G \in Opt(G + P_1)$  on en déduit que  $\sigma^+(G + P_1) = 1$  ;
- Si  $\sigma^+(G) = 1$ , alors il existe une option perdante  $H$  de  $G$ . Mais  $H$  est également une option de  $G + P_1$ . Par conséquent  $\sigma^+(G + P_1) = 1$ .

On en conclut que toute option  $G + P_1$  est gagnante, donc que  $\sigma^+(P_n + P_4) = 0$ . ■

Comme pour tout  $n \geq 11$ ,  $P_{n-7} + P_4$  est une option perdante de  $P_n$ , par la Proposition 4.4.1 on en déduit l'ensemble  $\mathcal{L}^+$  :

#### Corollaire 4.4.2

$$\mathcal{L}^+ = \{0, 4, 5, 9, 10\}.$$

#### Version misère

Commençons par démontrer la propriété suivante :

**Proposition 4.4.3** Soit  $G = \sum_{j=1}^n i_j P_j$  non connexe avec  $i_n > 0$ . On a :

1. Si  $i_1 + i_2 + i_3 > 0$  alors  $\sigma^-(G) = 1$  ;
2. Si  $i_1 + i_2 + i_3 = 0$  et  $i_4 + i_5 > 0$  alors  $\sigma^-(G) = 0$ .

**Preuve:** Posons  $G' = \sum_{j=4}^n i_j P_j$ . La stratégie gagnante dans le cas où  $i_1 + i_2 + i_3 > 0$  dépend du type de  $G'$  :

- Si  $o(G') = \mathcal{P}$  alors comme  $G' \in Opt(G)$ ,  $G$  est gagnant.
- Si  $o(G') = \mathcal{N}$  alors il existe une option perdante  $H$  de  $G'$ . Mais  $H$  est également une option de  $G$ . Par conséquent,  $G$  est gagnant.

Démontrons maintenant le second point par récurrence sur  $|V(G)|$ . Sur  $G$ , le joueur Suivant est obligé de jouer sur le plus petit chemin. Comme il est de taille 4 ou 5, on en déduit que toute option  $G'$  de  $G$  contient au moins un chemin  $P_1, P_2$  ou  $P_3$ . Par hypothèse de récurrence et en utilisant le premier point on en conclut que toute option de  $G$  est gagnante, donc que  $G$  est perdant. ■

Cette propriété nous permet de déduire l'ensemble des tailles des chemins perdants  $\mathcal{L}^-$  :

**Corollaire 4.4.4**

$$\mathcal{L}^- = \{1, 2, 6, 7\}.$$

**Preuve:** Sachant que  $P_1$  et  $P_2$  sont perdants pour cette variante, on en déduit que  $P_3$ ,  $P_4$  et  $P_5$  sont gagnants. C'est également le cas pour  $2P_1$  qui contient l'option perdante  $P_1$ . Par conséquent,  $P_6$  et  $P_7$  n'ont que des options gagnantes et sont donc perdants. Pour  $n \in \{8, 9, 10\}$ ,  $P_6$  (ou  $P_7$ ) est une option perdante de  $P_n$ . Enfin, pour  $n \geq 11$ , il suffit de choisir l'option  $P_{n-7} + P_4$ . Comme  $n - 7 \geq 4$ , cette option vérifie les conditions du second point de la Proposition 4.4.3, elle est donc perdante. On en conclut qu'au delà de  $n = 8$  les chemins  $P_n$  sont tous gagnants. ■

**4.4.2 Jeu sélectif minimal rapide**

Pour les deux dernières versions à diamètre minimal, les stratégies gagnantes sur les réunions de chemins sont faciles à découvrir. En effet, si la plus petite composante connexe est gagnante alors on applique une stratégie gagnante sur cette composante sans toucher au reste du graphe. Dans le cas contraire nous allons prouver que le graphe général est lui aussi perdant.

**Version normale**

**Proposition 4.4.5** Soit  $G = \sum_{j=1}^n P_{a_j}$  avec  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ .

$G$  est perdant si et seulement si  $a_1 \in \{4, 5\}$  ou si pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i \in \{9, 10\}$

**Preuve:** Par récurrence sur  $|V(G)|$ . On observe que  $P_4$  et  $P_5$  sont perdants car ils n'ont que des options gagnantes en un coup.

Comme le joueur suivant doit jouer sur la plus petite composante  $P_{a_1}$  (et éventuellement sur d'autres composantes), on peut écrire :

- Si  $a_1 \in \{1, 2, 3\}$  alors le suivant peut gagner en un coup car le jeu est en terminaison rapide.
- Si  $a_1 \in \{4, 5\}$  alors pour toute option  $H = \sum_{j=1}^q P_{a'_j}$  de  $G$ , la plus petite composante est de longueur  $a'_1 \in \{1, 2, 3\}$ . Par hypothèse de récurrence on en déduit que  $H$  est gagnant et donc que  $o(G) = \mathcal{P}$ .
- Si  $a_1 \in \{6, 7, 8\}$ , le joueur suivant joue uniquement sur  $P_{a_1}$  pour obtenir  $P_4$  ou  $P_5$ . L'option  $H$  de  $G$  ainsi construite est perdante par hypothèse de récurrence.
- Si pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_i \in \{9, 10\}$ , on remarque que toute option de  $G$  a sa plus petite composante de taille  $a'_1 \in \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$ , et est donc perdante par hypothèse de récurrence.
- Si  $a_1 \in \{9, 10\}$  mais qu'il existe une composante  $P_{a_k}$  avec  $a_k \geq 11$ , alors le suivant joue sur toutes les composantes  $P_{a_i}$  pour  $i < k$  vers l'option  $P_{a_i-2}$ , et choisit l'option  $P_{a_k-7} + P_4$  de  $P_{a_k}$ . Il obtient ainsi une option de diamètre minimal 4, donc perdante par hypothèse de récurrence.
- Enfin si  $a_1 \geq 11$ , le suivant joue uniquement sur  $P_{a_1}$  pour obtenir  $P_{a_1-7} + P_4$ . Comme  $a_1 - 7 \geq 4$ , par hypothèse de récurrence cette option est perdante.

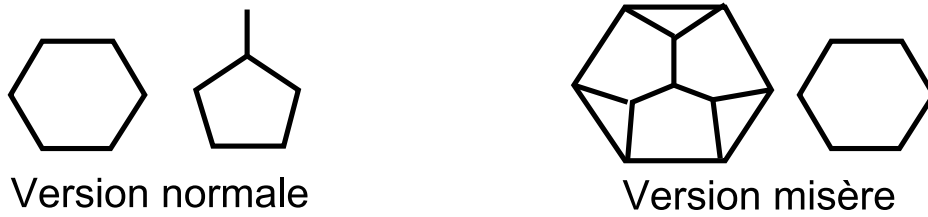


FIGURE 4.1 – Situation où le type diffère entre les variantes conjonctives et disjonctives minimales

■

De cette proposition on déduit immédiatement l'ensemble des chemins perdants  $\mathcal{L}$  :

**Corollaire 4.4.6**

$$\mathcal{L} = \{0, 4, 5, 9, 10\}.$$

**Version misère**

Pour la version misère, les stratégies gagnantes sont très faciles à exprimer :

**Proposition 4.4.7** Soit  $G = \sum_{j=1}^n P_{a_j}$  avec  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ .

$G$  est perdant si et seulement si  $a_1 \in \{1, 2\}$ .

**Preuve:** Si  $a_1 \in \{1, 2\}$ , la partie se termine forcément en un coup, donc  $o(G) = \mathcal{P}$ . Si  $a_1 = 3$  le suivant gagne en jouant uniquement sur  $P_{a_1}$  vers l'option  $P_{a_1-2} = P_1$ . Enfin si  $a_1 \geq 4$ , alors l'option  $P_{a_1-4} + P_1$  de  $P_{a_1}$  est perdante, soit  $o(G) = \mathcal{N}$ . ■

On observe que les types des réunions de chemins pour cette variante sont les mêmes que pour le *jeu disjonctif minimal rapide* et également pour le *jeu conjonctif rapide*.

Néanmoins, ces variantes ne sont pas équivalentes pour le jeu de domination tant en version normale que misère.

Premièrement, entre les jeux disjonctif minimal et sélectif minimal en version normale, regardons l'exemple  $P_{11} + P_9$ . En jeu disjonctif, le suivant est obligé de jouer seulement sur  $P_9$  qui fournit une option gagnante. Par contre, en jeu sélectif, le suivant peut jouer sur les deux composantes et choisira par exemple l'option  $P_4 + P_4 + P_7$ , qui est perdante par la Proposition 4.4.5.

Ensuite on peut observer la distinction entre le jeu conjonctif et le jeu disjonctif minimal sur la famille des graphes planaires, par exemple lorsque le graphe  $G$  est constitué de deux composantes de même diamètre. Dans ce cas, il est parfois utile de jouer sur une seule des composantes, si ce coup n'en modifie pas le diamètre. Les exemples de la Figure

4.1 illustrent le fait qu'une stratégie gagnante peut exister en disjonctif minimal rapide ou en sélectif minimal rapide mais pas en conjonctif rapide.

Pour la version normale, le graphe  $G$  est formé de  $C_6$  et d'un cycle de taille 5 avec une feuille supplémentaire, noté  $C'_5$ . L'unique option de  $C_6$  est  $P_3$  qui est gagnante pour les trois variantes. D'autre part, on a :

$$\text{Opt}(C'_5) = \{P_4, P_3, P_2 + P_1\}$$

Les options  $P_3$  et  $P_2 + P_1$  sont gagnantes alors que  $P_4$  est perdante (pour les trois variantes). On en déduit qu'en jeu disjonctif minimal ou sélectif minimal le Suivant pourra choisir l'option  $C_6 + P_4$  qui est perdante car toute option  $H$  de  $C_6 + P_4$  a au moins une composante de diamètre inférieur ou égal à 2.

Par contre, en jeu conjonctif, toute option de  $G$  contient la composante  $P_3$  (unique option de  $C_6$ ) qui est gagnante en un coup, donc  $G$  est perdant.

Il en est de même pour la version misère avec l'exemple de la Figure 4.1, en posant  $G = H_1 + C_6$  avec  $G$  le graphe général formé de deux composantes et  $H_1$  le graphe à 10 sommets à gauche sur la Figure. En jeu disjonctif minimal ou sélectif minimal, le suivant jouera uniquement sur  $H_1$  pour obtenir l'option  $H = C_6 + C_6$ , de même diamètre que  $G$ . Comme toute option de  $H$  a au moins une composante  $P_3$ , les options de  $H$  sont toutes gagnantes. Par conséquent  $H$  est une option perdante de  $G$ .

Par contre en jeu conjonctif, le suivant est obligé de jouer sur  $C_6$  pour former l'option  $P_3$  (qui a une option perdante  $P_1$ ). Et comme le jeu sur  $H_1$  n'a aucune option de diamètre 1 ou 2, on en déduit que  $G$  est perdant.

## 4.5 Conclusion

Nous avons étudié dans ce Chapitre seize nouvelles variantes du jeu de domination sur les chemins.

Les jeux disjonctifs maximaux sont certainement parmi celles-ci les variantes les plus difficile à résoudre. Aucune période n'a été découverte dans la séquence des booléens de jeu des chemins, et les algorithmes permettant de trouver les types des chemins et par la même occasion les stratégies gagnantes sont polynomiaux mais en  $\mathcal{O}(n^5)$  ou  $\mathcal{O}(n^6)$ , ce qui dans la pratique n'est guère mieux que l'algorithme exponentiel naïf. Cependant nous avons pu démontrer certaines propriétés permettant de trouver les stratégies gagnantes en temps linéaire pour des réunions de chemins particulières.

Pour les quatre jeux sélectifs maximaux nous avons au contraire pu mettre en évidence une structure récurrente dans la séquence des booléens de jeu. Une période géométrique a été découverte en affectant des **niveaux** et des **poids** aux chemins. Ces paramètres ont permis également pour trois des quatre variantes de trouver les stratégies gagnantes pour une réunion de  $k$  chemins en  $\mathcal{O}(k)$ , mais le problème d'existence d'un algorithme polynomial pour les stratégies gagnantes reste ouvert pour le jeu sélectif maximal rapide normal.

Pour les huit jeux à diamètre minimal, l'ensemble des réunions de chemins perdantes est aisément caractérisable, et par conséquent on peut trouver une stratégie gagnante

en temps linéaire. Ces versions faciles à résoudre sur la famille des chemins deviennent difficiles sur des familles plus complexes comme les graphes planaires.

Nous pourrions à loisir constituer de nouvelles variantes du jeu de domination en modifiant la manière de jouer lorsqu'il y a plusieurs composantes connexes. Outre les jeux disjonctif, sélectif et conjonctif, pour un entier  $k \geq 2$  donné, nous pourrions envisager le jeu  $k$ -exact,  $k$ -minimal et  $k$ -maximal qui imposent aux joueurs de jouer sur, respectivement, exactement, au moins et au plus  $k$  composantes connexes si le graphe en contient au moins  $k$ , et, respectivement, en conjonctif, conjonctif et sélectif sinon.

La caractérisation des réunions perdantes paraît être un problème difficile pour ces nouvelles variantes. Par exemple, pour le jeu **2-exact lent normal** les réunions de chemins de diamètre au plus 3 ont un type périodique de période 4 sur  $i_1 + i_2$  et de période 16 sur  $i_3$ , et aucune période n'a été découverte pour les réunions de diamètre 4! À titre de comparaison, pour la variante la plus difficile qui a été traitée en détail dans la Section 4.1.1, les types des réunions  $G$  de diamètre au plus 4 sont simplement donnés par la formule

$$\sigma^+(G) = \widehat{i_3 i_1} + \widetilde{i_3 i_3 + i_4}.$$

Pour ces variantes même la famille des chemins paraît trop complexe, est sa résolution est probablement un problème NP-difficile.

D'autre part on peut constituer en s'inspirant des variantes diamètre une infinité de jeux. Au lieu du diamètre, prenons une fonction  $f$  de l'ensemble des graphes connexes dans  $\mathbb{N}$ . Les joueurs seront forcés de jouer sur la (ou les) composante(s) maximisant la valeur de la fonction  $f$ . Par exemple en prenant comme fonction le reste de la division euclidienne par un entier  $k$ , on forme les **jeux à congruences**.

Jeu de marquage très simple dans sa définition, le jeu de domination permet de constituer une bibliothèque infinie de jeux combinatoires. En ce qui concerne les chemins, pour certains d'entre-eux quelques minutes suffisent pour découvrir une stratégie gagnante, alors que pour d'autres variantes paraissant pourtant similaires, le problème de caractérisation des chemins perdants est ouvert et nécessiterait une puissance de calcul considérable pour espérer découvrir une période...



# Chapitre 5

## Conclusion et perspectives

Dans cette partie, après avoir introduit les principales notions sur les jeux combinatoires, nous avons présenté une célèbre famille de jeux combinatoires : les jeux octaux.

Ensuite nous avons étudié un jeu de marquage sur les graphes : le jeu de domination. La conclusion ainsi que les perspectives sont présentées en Section 2.6. En résumé, l'étude de familles jouables nous a permis d'obtenir des résultats sur de "petites" familles de graphes, mais l'existence d'un algorithme polynomial calculant le nimber d'un graphe d'une famille plus grande comme les arbres ou les graphes planaires reste un problème ouvert.

D'autre part nous avons étudié 28 variantes du jeu de domination sur la famille des chemins. Pour les douze premières, définies par John H. Conway [7], nous avons recherché l'ensemble  $\mathcal{L}$  des chemins perdants ainsi qu'un algorithme donnant les stratégies gagnantes sur une réunion de chemins. Dans dix cas l'ensemble  $\mathcal{L}$  a pu être déterminé, mais pour les deux dernières le calcul du type d'un chemin  $P_n$  est effectué par un algorithme, quadratique pour le jeu disjonctif rapide misère et exponentiel pour le jeu disjonctif lent misère.

En ce qui concerne les quatre variantes disjonctives à diamètre maximal, l'ensemble des chemins perdants n'a pu être déterminé mais un algorithme polynomial en  $\mathcal{O}(n^5)$  ou  $\mathcal{O}(n^6)$  suivant les cas permet de calculer les types de chemins. Pour les quatre variantes sélectives à diamètre maximal, une période géométrique a pu être mise en évidence dans la séquence des types des chemins. Nous avons pour trois des quatre variantes, donné un algorithme en  $\mathcal{O}(k)$  calculant un coup gagnant sur une réunion de  $k$  chemins. Pour la dernière, le jeu sélectif maximal rapide normal, l'existence d'un algorithme polynomial calculant les stratégies gagnantes d'une réunion de chemins reste un problème ouvert. Enfin nous avons terminé cette étude par les huit variantes à diamètre minimal. Pour toutes ces variantes, l'ensemble des chemins perdants  $\mathcal{L}$  a pu être déterminé et le calcul d'un coup gagnant sur une réunion de  $k$  chemins s'effectue en  $\mathcal{O}(k)$ .

En fin de Chapitre 4 (c.f. Section 4.5) nous avons donné plusieurs autres exemples de variantes dont les règles sont basées sur la manière de jouer lorsque le graphe est formé de plusieurs composantes connexes. On peut constituer un nombre infini de variantes du jeu de domination. Deux questions se posent naturellement :

1. Existe-t-il une variante du jeu de domination telle que le calcul du type d'un chemin

soit un problème NP-complet ?

2. Peut-on établir une classification des variantes selon la complexité du problème de détermination du type d'un chemin  $P_n$ , ou selon la complexité du problème de recherche d'un coup gagnant sur une réunion de chemins ?

D'autre part, les 28 variantes ont été uniquement étudiées sur la familles des chemins. On pourrait également étudier ces variantes sur d'autres familles jouables. Pour certaines variantes comme le jeu conjonctif rapide misère on observe que certains graphes bénéficient d'une stratégie gagnante en deux coups. C'est par exemple le cas si le graphe  $G$  possède une feuille  $x$  avec au moins un sommet  $s$  à distance 2. Le jeu sur  $s$  isole la feuille  $x$ . Comme on est en jeu conjonctif rapide misère, l'autre joueur est obligé de supprimer  $x$ , ainsi il perd. Pour les huit jeux à diamètre minimal on peut également trouver des coups gagnants *localement*, c'est-à-dire dont le type de l'option ne dépend pas de toute la composante  $G$  mais seulement d'une structure locale.

Pour les six variantes pour lesquelles la caractérisation des chemins perdants reste un problème ouvert, l'étude d'autres familles jouables de taille linéaire comme les scies ou des familles de chenilles pourrait aboutir à la caractérisation des éléments perdants. Ces écarts de complexité entre deux familles de taille linéaire ont pu être observés pour le jeu de domination classique  $\mathcal{D}$ , par exemple entre les scies triangulaires et les scies trapézoïdales.

En ce qui concerne le jeu de domination classique, d'autres familles ont été étudiées ou font l'objet de travaux en cours. C'est le cas des **Etoiles à  $k$  branches** ( $k$  fixé) pour lesquelles une période dans la séquence de Grundy a été démontrée pour  $k \in \{3, 4\}$ . Cependant la question de la périodicité pour  $k \geq 5$  reste ouverte. Enfin, comme cela a été effectué pour les chenilles, on peut calculer le nimber d'une **chenille circulaire**, d'un **graphe d'intervalle**, ou encore d'un **graphe circulaire d'intervalle** de diamètre  $d$  en  $\mathcal{O}(d^3)$ .

Pour conclure, citons quelques autres perspectives concernant d'autres jeux de marquage proches du jeu de domination  $\mathcal{D}$  :

1. Jeu  $\mathcal{D}$  sur les graphes orientés ;
2. Jeu  $\mathcal{D}$  à trois joueurs ou plus ;
3. Jeu  $\mathcal{D}$  où chaque joueur joue  $k$  fois de suite ;
4. Jeu  $\mathcal{D}$  où chaque joueur est autorisé à passer son tour au plus  $k$  fois ( $k$  fixé).
5. Jeux partisans basés sur  $\mathcal{D}$  : par exemple Alice joue deux fois et Bob une seule fois ;
6. Alice doit maximiser le nombre de sommets marqués alors que Bob doit le minimiser ;
7. Pour un entier  $k \geq 0$  donné, on peut marquer un sommet  $v$  si le nombre de voisins qui sont marqués est inférieur ou égal à  $k$ .
8. etc...

## Deuxième partie

# Le nombre chromatique ludique des arbres



# Chapitre 6

## Introduction et outils généraux

## 6.1 Introduction

Proposé par Brams en 1981 (publié par Martin Gardner dans [11]) puis réinventé par Bodlaender dix ans plus tard [5], le nombre chromatique ludique est basé sur un jeu de coloration de graphes. Il s'agit d'un jeu qui n'est pas combinatoire, car le gagnant de la partie n'est pas celui qui joue le dernier coup. C'est pour cette raison que cette étude est réalisée dans une partie séparée. Néanmoins, certaines notions sur les jeux combinatoires seront utilisées ici sans être redéfinies, voir le début du Chapitre 1 pour les définitions générales de la théorie des jeux combinatoires.

Commençons par définir ce jeu de coloration qui sera noté  $\mathcal{J}$  dans toute la partie. Au départ la position initiale est constituée d'un graphe non orienté  $G$  et d'un nombre  $k > 0$  de couleurs. Les deux joueurs, toujours nommés Alice et Bob, colorient alternativement et proprement un sommet du graphe avec l'une des  $k$  couleurs. Alice commence à jouer et la partie s'arrête lorsque plus aucun sommet n'est proprement coloriable. Si le graphe  $G$  est complètement colorié alors Alice gagne, et sinon c'est Bob qui gagne. L'objectif d'Alice est donc de colorier tout le graphe alors que Bob doit tenter de l'en empêcher. On dit qu'il s'agit d'un jeu de type constructeur/destructeur. Le **nombre chromatique ludique** est un paramètre de graphe se calculant à partir de  $\mathcal{J}$  de la manière suivante :

**Définition 6.1.1** Soit  $G$  un graphe. Le **nombre chromatique ludique** de  $G$ , noté  $\chi_g(G)$ , est le plus petit nombre  $k$  de couleurs pour lequel Alice a une stratégie gagnante sur  $G$  dans le jeu de coloration  $\mathcal{J}$ .

Il existe une variante de  $\mathcal{J}$  où Bob commence à jouer que nous noterons  $\mathcal{J}^B$ . Le paramètre correspondant, calculé comme pour  $\mathcal{J}$ , est le **nombre chromatique B-ludique** et est noté  $\chi_g^B$ , par opposition au nombre chromatique ludique classique, parfois dit A-ludique et noté  $\chi_g^A = \chi_g$ .

Notons qu'il existe plusieurs autres jeux de coloration ou de marquage portant sur les graphes. Citons le jeu de coloration d'arêtes et le jeu de marquage de sommets, qui permettent également de calculer des paramètres de graphes. Le jeu de marquage de sommets est assez proche de  $\mathcal{J}$  et est à l'origine du *game coloring number*, fréquemment étudié en même temps que le nombre chromatique ludique comme dans [27] ou [20].

Il existe également une version du jeu de coloration sur les graphes orientés, introduite par Nešetřil et Sopena [22], à l'origine du nombre chromatique ludique orienté.

Depuis la fin des années 90, le nombre chromatique ludique a fait l'objet d'un grand nombre de publications. Les chercheurs ont notamment recherché un encadrement de la valeur de ce paramètre sur des familles particulières de graphes. Donnons-en quelques exemples. Nous invitons le lecteur intéressé à consulter [20] pour un récent état de l'art ainsi que l'exposé de plusieurs méthodes permettant de borner le nombre chromatique ludique. Pour les graphes planaires, les premiers résultats [19] ont été plusieurs fois améliorés jusqu'à la majoration de Zhu [31] qui démontre l'existence d'une "stratégie d'activation" qui permet à Alice de colorier tout graphe planaire avec 17 couleurs. D'autre part, un graphe planaire de nombre chromatique ludique 8 a été découvert. La question de l'existence d'un graphe planaire  $P$  vérifiant  $9 \leq \chi_g(P) \leq 16$  reste un problème ouvert.

En ce qui concerne les graphes planaires extérieurs, le "saut" est moins important. La

stratégie d'activation permet à Alice d'avoir une stratégie gagnante avec 7 couleurs [14], et il existe un exemple pour lequel 6 couleurs sont nécessaires.

Citons également d'autres résultats sur certaines familles de graphes. Le nombre chromatique ludique d'un produit cartésien peut s'exprimer en fonction de ceux des deux graphes de départ [13].

Pour les graphes de genre  $g$ , X. Zhu a démontré que le nombre chromatique ludique vaut au plus :

$$\chi_g(G) \leq \lfloor \frac{3}{2} \sqrt{1 + 48g} + 11 + \frac{1}{2} \rfloor.$$

Dans [18], Faigle et al. ont démontré que le nombre chromatique ludique de tout arbre est au plus 4, et que cette borne est atteinte. Rappelons la démonstration de ce théorème.

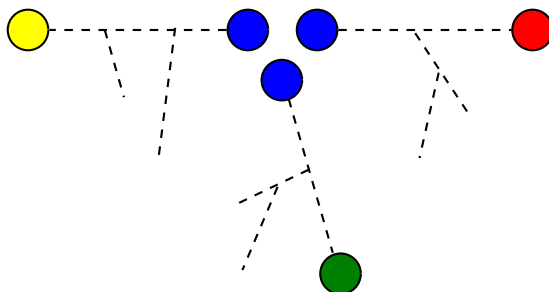


FIGURE 6.1 – Stratégie gagnante pour Alice avec 4 couleurs sur un arbre.

**Théorème 6.1.2 (Faigle et al. [18], 1993)** *Pour tout arbre  $T$ ,  $\chi_g(T) \leq 4$  et cette borne est atteinte.*

**Preuve:** Mettons en évidence une stratégie gagnante pour Alice qui lui permet d'aboutir à la coloration complète de  $T$  avec 4 couleurs. Le principe est qu'Alice peut toujours faire en sorte qu'après son coup toute composante connexe ait au plus deux feuilles coloriées. Démontrons cette propriété par induction. Elle est trivialement vraie au début de la partie. Soit  $T$  un arbre vérifiant ces conditions. Si c'est à Alice de jouer elle colorie un sommet du chemin reliant deux feuilles coloriées, ou n'importe quel sommet si toute composante a au plus une feuille coloriée. Toute composante aura ainsi au plus deux feuilles coloriées.

Si c'est à Bob de jouer, s'il colorie un sommet du chemin reliant deux feuilles coloriées, ou n'importe quel sommet d'une composante ayant au plus une feuille coloriée, alors Alice joue comme précédemment et la propriété est conservée. Si Bob choisit de colorier un sommet  $x$  dans une composante possédant 2 feuilles coloriées  $y$  et  $z$ , la composante contenant  $y$  et  $z$  possède dorénavant 3 feuilles coloriées (si  $x$  n'appartient pas au chemin reliant  $y$  et  $z$ ). Dans ce cas il suffit à Alice de jouer à l'intersection  $u$  des 3 chemins reliant  $x$  et  $y$ ,  $x$  et  $z$ , et  $y$  et  $z$ . Ainsi elle divise la composante en trois nouvelles composantes ayant chacune 2 feuilles coloriées, comme c'est illustré sur la Figure 6.1. Comme Alice a toujours au plus trois couleurs interdites, on en conclut que pour tout arbre  $T$ ,  $\chi_g(T) \leq 4$ .

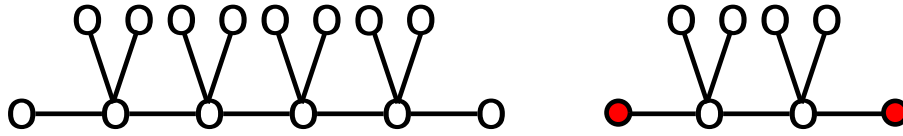


FIGURE 6.2 – Arbre de nombre chromatique ludique 4 à gauche ; à droite coup gagnant de Bob.

Un exemple pour lequel cette borne est atteinte est représenté en Figure 6.2. Démontrons que l'arbre de gauche est de nombre chromatique ludique 4. Alice commence à jouer. On observe que quel que soit son choix, en jouant sur un sommet à distance 3 avec la même couleur  $a$ , Bob constitue un arbre partiellement colorié contenant la configuration de droite. Comme il reste six sommets en dehors de cette configuration, Bob peut forcer Alice à y jouer en premier. Sur cette configuration, si Alice joue sur un sommet de degré 4 c'est avec une couleur différente de  $a$ , donc Bob peut placer une 3e couleur au voisinage de l'autre sommet de degré 4. Ainsi il faudra une 4e couleur pour colorier ce sommet. Si Alice colorie une des feuilles de cette configuration, alors Bob colorie une feuille voisine de l'autre 4-sommet avec une couleur  $b \neq a$ . On observe qu'avec 3 couleurs Alice ne peut terminer cette coloration. ■

Une question naturelle est donc de caractériser les arbres de nombre chromatique ludique  $k$ , pour  $1 \leq k \leq 4$ . Comme la réponse est triviale pour  $k = 1, 2$ , elle se réduit à caractériser l'ensemble des arbres qui ont un nombre chromatique ludique 3. Dans cette partie nous nous intéresserons à cette question de la caractérisation des arbres de nombre chromatique ludique 3. Comme ce problème semble difficile pour l'ensemble des arbres, nous étudierons une sous-famille déjà définie dans la première partie : les **chenilles**.

Par conséquent, par la suite nous étudierons uniquement les jeux  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}^B$  avec **3 couleurs**, et tenterons de déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Nous commencerons par introduire les notions nécessaires à la caractérisation des arbres de nombre chromatique ludique 3, notamment la notion de **bitype**.

Ensuite nous étudierons la famille des **chenilles sans trous** pour laquelle la caractérisation sera complète, et donnerons quelques outils pour l'étude des chenilles avec trous.

Nous terminerons par la recherche de plus petits exemples d'**arbres non coloriés** de bitype donné, notamment un arbre  $T$  vérifiant  $\chi_g(T) = 4$  et  $\chi_g^B(T) = 3$ , c'est à dire où les joueurs gagnent si et seulement s'ils ne commencent pas.

## 6.2 Cinq réductions de graphes

Afin de déterminer le nombre chromatique ludique d'un graphe  $G$  donné, nous allons jouer sur  $G$  avec trois couleurs et essayer de déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante. Le graphe  $G$  considéré appartiendra à une famille de graphes dont tous les éléments ont un nombre chromatique ludique au plus 4, comme c'est le cas pour



les arbres. Une position courante de jeu est donc une 3-coloration partielle des sommets de  $G$ . Mais certaines configurations locales nous permettent de retirer des sommets de  $G$  ou de déconnecter certaines composantes sans modifier l'issue de la partie quel que soit le joueur Suivant. Nous appellerons ces modifications des **réductions**. Nous avons pour cela besoin d'une notion d'équivalence entre deux positions de jeu.

**Définition 6.2.1** Soient  $G$  et  $H$  deux positions de jeu, c'est à dire deux graphes partiellement 3-coloriés. On dit que  $G$  est **équivalent** à  $H$  si quel que soit le joueur Suivant l'issue de la partie est la même partant de  $G$  ou de  $H$ , ou autrement dit le joueur a une stratégie gagnante sur  $G$  si et seulement s'il en a une sur  $H$ . On note cette équivalence  $G \cong H$ .

Les cinq réductions suivantes peuvent aisément être démontrées :

**Proposition 6.2.2** Soit  $G$  un graphe partiellement 3-colorié. Les cinq opérations  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  et  $R_4$  définies ci après sont des réductions de graphes.

$R_0$  : Si une composante  $C$  de  $G$  est complètement coloriée alors le graphe  $G'$  vérifiant  $G' + C = G$  est équivalent à  $G$ .

$R_1$  : Si  $G$  a un sommet colorié  $s$  de degré  $d \geq 2$ , le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en changeant  $s$  en  $d$  feuilles coloriées, chacune reliée à un voisin de  $s$ , est équivalent à  $G$ .

$R_2$  : Si  $G$  a un sommet  $s$  possédant 3 feuilles voisines coloriées avec des couleurs distinctes deux à deux, alors  $G$  est équivalent à  $K_{1,3}^c$ , c'est-à-dire le graphe  $K_{1,3}$  avec les trois couleurs sur ses feuilles, et est donc toujours gagnant pour Bob.

$R_3$  : Si  $G$  a un sommet  $s$  possédant deux feuilles voisines  $x$  et  $y$  coloriées avec la même couleur, alors  $G' = G \setminus \{x\}$  est équivalent à  $G$ .

$R_4$  : Si  $G$  a un sommet  $s$  ayant deux feuilles voisines coloriées avec des couleurs distinctes  $a$  et  $b$ , et si tout voisin non colorié de  $s$  possède une feuille voisine coloriée avec la troisième couleur  $c$ , alors le graphe  $G' = G \setminus \{s\} + K_1$  est équivalent à  $G$ .

Ces cinq réductions sont représentées dans les figures 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 et 6.7 respectivement.

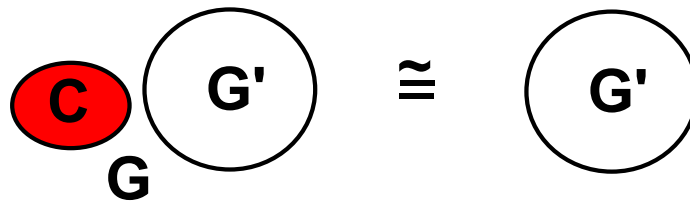


FIGURE 6.3 – Réduction  $R_0$  : retrait d'une composante coloriée.

**Preuve:** Pour les réductions  $R_0$ ,  $R_1$  et  $R_3$ , l'ensemble des colorations possibles est exactement le même. La structure de la partie non coloriée de  $G$  n'est pas modifiée par le

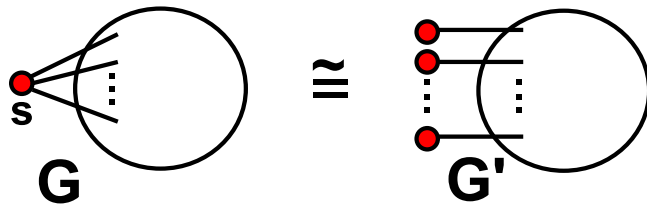


FIGURE 6.4 – Réduction  $R_1$  : changement des sommets coloriés en feuilles coloriées.

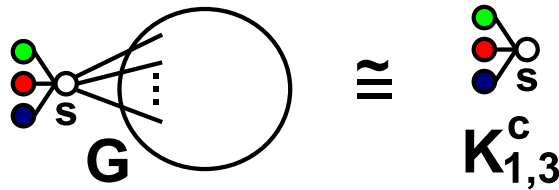


FIGURE 6.5 – Réduction  $R_2$  : retrait du reste du graphe si un sommet a les 3 couleurs dans son voisinage.

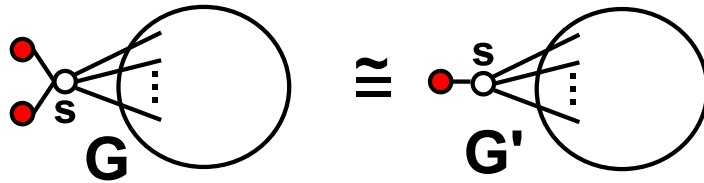


FIGURE 6.6 – Réduction  $R_3$  : retrait des feuilles coloriées possédant un sommet de même couleur à distance 2.

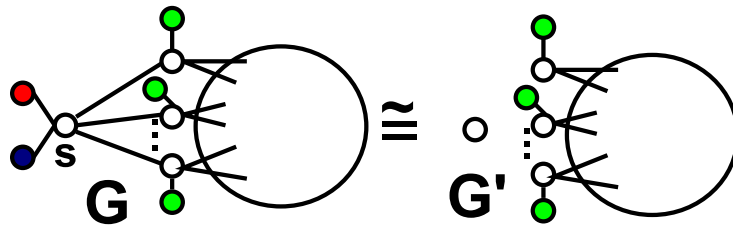


FIGURE 6.7 – Réduction  $R_4$  : coloration de  $s$  par anticipation.

passage à  $G'$ , donc le joueur ayant une stratégie gagnante dans  $G$  l'a forcément aussi dans  $G'$  et réciproquement, donc  $G \cong G'$ .

Pour la réduction  $R_2$ , le sommet  $s$  ne pourra jamais être colorié puisque l'on ne dispose que de 3 couleurs. Par conséquent, Bob a déjà gagné la partie et les coups restant à jouer ne peuvent modifier cette issue, donc  $G \cong K_{1,3}^c$ .

Pour la dernière réduction  $R_4$ , le sommet  $s$  ne pourra être colorié qu'avec la couleur  $c$ . De plus, comme tous ses voisins non coloriés ont la couleur  $c$  dans leur voisinage, il ne

pourra jamais avoir 3 feuilles voisines coloriées avec des couleurs distinctes deux à deux (ses voisins ne sont pas coloriables avec  $c$ ). Par conséquent, le sommet  $s$  sera forcément colorié avec  $c$  à un moment donné de la partie. On peut donc considérer qu'il est déjà colorié avec  $c$ , en ajoutant un sommet isolé pour que le changement de Suivant dû au coup  $(s, c)$  soit pris en compte. En appliquant la réduction  $R_1$  sur  $s$  et la réduction  $R_3$  sur les voisins de  $s$  on aboutit au graphe  $G' = G \setminus \{s\} + K_1$  qui est équivalent à  $G$ . ■

**Remarque:** Ces réductions seront utiles pour réduire la taille de la famille étudiée. Les graphes pour lesquels nous souhaiterons calculer les stratégies gagnantes ne seront donc coloriés que sur leurs feuilles, et n'auront ni deux feuilles voisines avec la même couleur, ni trois feuilles voisines de couleurs deux à deux distinctes (excepté  $K_{1,3}^c$ ), ni de structure pouvant être réduite par  $R_4$ .

## 6.3 Familles de graphes étudiées : définitions, notations, propriétés

Commençons par donner quelques définitions et notations spécifiques à ce chapitre.

Nous serons amenés à étudier des parties du jeu  $\mathcal{J}$  avec 3 couleurs sur un graphe  $G$ . Nous noterons  $J_{s,c}(G)$  le graphe (partiellement 3-colorié) issu de la coloration du sommet  $s$  avec la couleur  $c$  dans  $G$ . Cette option sera plus simplement notée  $J_{s,c}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le graphe considéré. Un **coup** dans le jeu  $\mathcal{J}$  de position initiale  $G$  est défini par un sommet et une couleur. Il sera également noté  $J_{s,c}$  par souci de simplification.

Un grand nombre de preuves de ce Chapitre sont réalisées par récurrence sur le nombre de sommets coloriables d'un graphe  $G$  partiellement 3-colorié :

**Définition 6.3.1** Soit  $G$  un graphe partiellement 3-colorié. On appelle **nombre de sommets coloriables** de  $G$  et on note  $u(G)$  l'entier défini par :

1. Si  $G$  est réductible par  $R_2$  alors  $u(G) = 0$  ;
2. sinon  $u(G)$  est le nombre de sommets non coloriés de  $G$ .

Le premier cas correspond à un graphe dans lequel Bob a déjà gagné la partie, donc on considère que la partie est terminée en posant  $u(G) = 0$ .

Un graphe  $T$  tel que  $u(T) = 0$  sera donc soit totalement colorié, donc gagnant pour Alice, soit équivalent à  $K_{1,3}^c$ , et donc gagnant pour Bob. Un tel graphe sera appelé **graphe terminal**.

Comme pour tout  $G$  vérifiant  $u(G) > 0$  toute option  $G'$  de  $G$  est soit réductible par  $R_2$  soit vérifie  $u(G') = u(G) - 1$ , nous pourrons appliquer l'hypothèse de récurrence à toute option  $G'$  de  $G$  (en ayant démontré le cas de base  $u(G) = 0$ ).

### 6.3.1 Les lc-graphes

Dans tout le Chapitre, lorsque nous parlerons d'une structure de graphe, il s'agira d'un **graphe partiellement 3-colorié sur ses feuilles**. Plus formellement on définit un lc-graphe (lc pour *leaves colored*) de la manière suivante :

**Définition 6.3.2** Un **lc-graphe**  $G$  est un triplet  $(V, E, c)$  où  $V$  est l'ensemble des sommets,  $E$  l'ensemble des arêtes et  $c$  une fonction partielle de l'ensemble des sommets de degré 1 de  $G$  dans  $\{1, 2, 3\}$ .

Un sommet  $x$  de degré 1 est une **feuille** de  $G$ . Si la feuille  $x$  n'est pas coloriée alors la fonction  $c$  n'est pas définie en  $x$ . Sinon la valeur  $c(x)$  est la couleur de la feuille  $x$ .

De même, lorsque nous parlerons d'arbres (resp. chenilles) partiellement 3-coloriés sur leurs feuilles nous parlerons de **lc-arbres** (resp. **lc-chenilles**).

Dans ce Chapitre nous étudierons le problème de caractérisation des arbres de nombre chromatique ludique 3. Par conséquent nous allons, pour un arbre non colorié  $T$ , jouer à  $\mathcal{J}$  avec 3 couleurs et rechercher quel joueur a une stratégie gagnante. Donc une position courante de la partie est l'arbre  $T$  partiellement 3-colorié, il s'agit donc d'un lc-arbre. De même lorsque nous étudierons la familles des chenilles ou des chenilles circulaires, les positions de jeu seront des lc-chenilles ou des lc-chenilles circulaires.

En effet, la réduction  $R_1$  nous permet de n'avoir qu'à considérer les colorations de feuilles. On peut observer cette réduction dans le cas d'un arbre sur la Figure 6.1.

### 6.3.2 Les chenilles

Définissons maintenant la famille des chenilles et les notations qui lui sont associées.

La famille des chenilles, nommées *caterpillar graphs* en anglais, est une sous-famille des arbres ayant déjà fait l'objet d'une étude pour la question de détermination du nombre chromatique ludique, et les auteurs ont découvert une chenille de degré maximal 3 dont le nombre chromatique ludique vaut 4 [25]. Nous allons améliorer ce résultat en caractérisant complètement la famille des chenilles sans sommets de degré 2 (qui seront appelés trous). Commençons par rappeler la définition d'une chenille, et donnons les notations qui seront utilisées dans tout le Chapitre.

**Définition 6.3.3** Une **chenille**  $C$  est un arbre formé à partir d'un chemin  $P = s_1 s_2 \dots s_\ell$  de longueur  $\ell > 0$  appelé l'**épine dorsale** de  $C$ , et tel que tout sommet n'appartenant pas à  $P$  soit une feuille. Par convention  $s_1$  et  $s_\ell$  doivent avoir au moins une feuille voisine, sauf pour le cas particulier  $C = K_1$ .

Dans cette partie, nous souhaiterions déterminer l'ensemble des chenilles de nombre chromatique ludique 3. Nous commencerons par étudier les chenilles de degré maximal 4, et ensuite nous déduirons le nombre chromatique ludique des autres chenilles en démontrant que si une chenille  $C$  a un sommet  $s$  de degré  $d \geq 5$ , alors la chenille  $C'$  dans laquelle on a retiré des feuilles voisines de  $s$  de telle sorte que  $\deg_{C'}(s) = 4$  est équivalente à  $C$ . Ainsi, mis à part de rares cas particuliers, nous n'étudierons en détail que les chenilles de degré maximal 4 qui seront appelées **2-chenilles**, le 2 correspondant au nombre maximal de feuilles voisines d'un sommet de l'épine dorsale.

Lorsque les 2-chenilles seront partiellement coloriées nous parlerons de lc-2-chenilles. Afin de faciliter l'étude des lc-2-chenilles, nous allons utiliser un codage par mots.

**Définition 6.3.4** Soit  $C$  une lc-2-chenille à au moins deux sommets et d'épine dorsale  $s_1 s_2 \dots s_\ell$ , et  $s_0$  (resp.  $s_{\ell+1}$ ) une des feuilles reliées à  $s_1$  (resp  $s_\ell$ ). Le **mot de**  $C$  est un mot

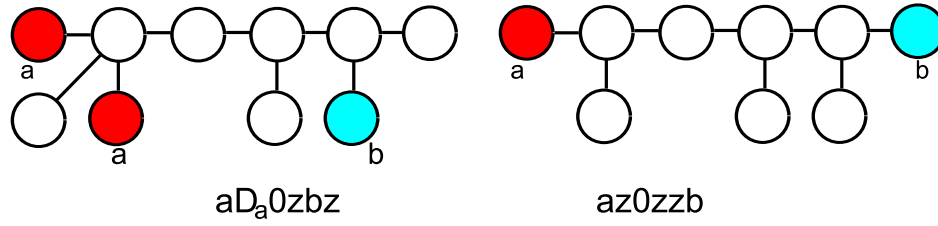


FIGURE 6.8 – Exemples de lc-chenilles avec leurs mots associés.

$w(C) = w_0 w_1 \dots w_{\ell+1}$  sur l'alphabet  $\{0, z, 1, 2, 3, D, D_1, D_2, D_3, D_{12}, D_{13}, D_{23}\}$  tel que  $w_0$  (resp.  $w_{\ell+1}$ ) est la couleur du sommet  $s_0$  (resp.  $s_{\ell+1}$ ) s'il est colorié et  $z$  sinon. D'autre part, pour tout  $1 \leq i \leq \ell$  on pose :

- si  $\deg(s_i) = 2$  alors  $w_i = 0$  ;
- si  $\deg(s_i) = 3$  alors  $w_i$  est la couleur de la feuille voisine de  $s_i$  et  $z$  si elle n'est pas coloriée ;
- si  $\deg(s_i) = 4$  alors  $w_i = D_A$ , où  $A$  est l'ensemble des couleurs présentes sur les feuilles voisines de  $s_i$ , avec la convention  $D = D_\emptyset$ .

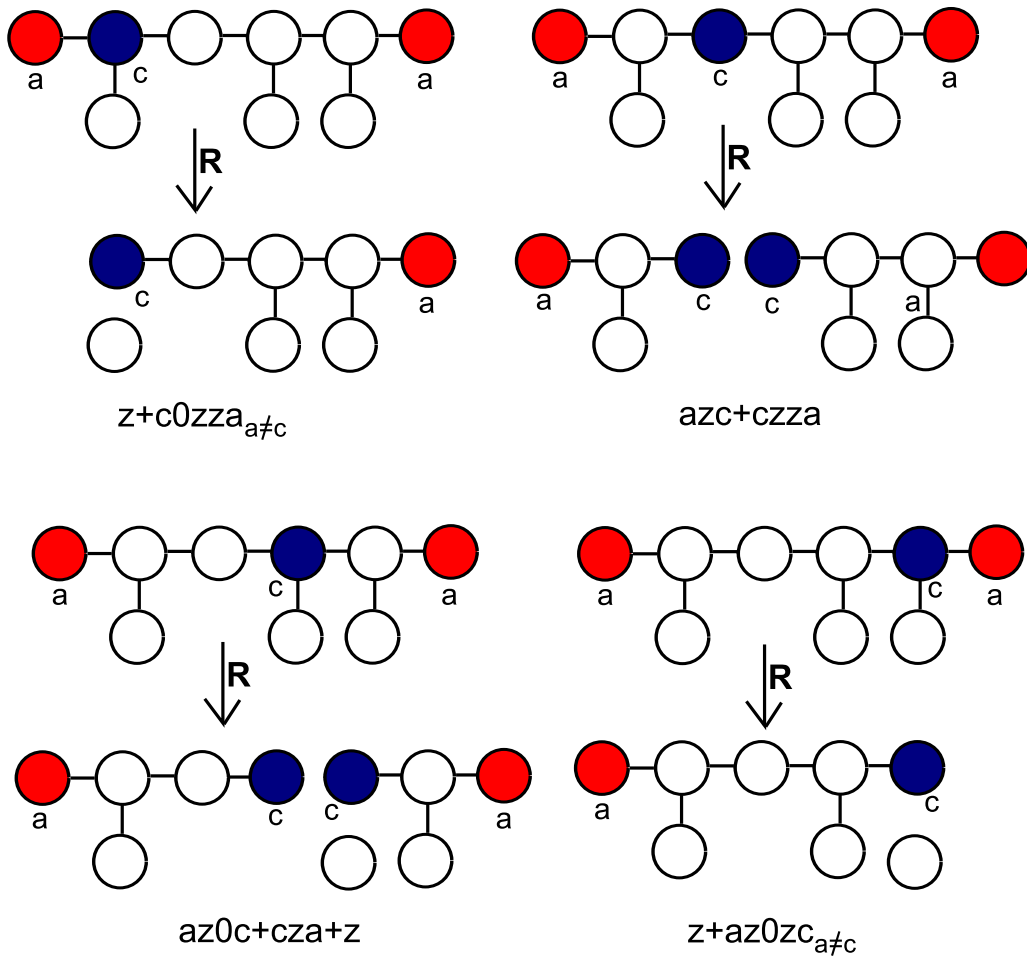
Lorsque l'on parle de feuilles voisines, les deux cas particuliers  $s_0$  et  $s_{\ell+1}$  sont exclus. Ces deux sommets sont appelés les **extrémités** de  $C$ .

La Figure 6.8 présente deux exemples de lc-chenilles associées aux mots  $aD_a0z bz$  et  $az0z z b$ . La seconde chenille est équivalente à la première. Nous avons seulement disposé les couleurs sur les extrémités et supprimé les feuilles coloriées ayant une feuille voisine coloriée avec la même couleur. Le mot de la seconde lc-chenille est en **forme normale**, c'est à dire qu'aucune de ces réductions ne peut plus être effectuée.

Ainsi, lorsque nous jouerons un coup sur une lc-chenille, les options obtenues seront toujours notées en forme normale, afin d'éviter de multiplier inutilement les éléments à étudier.

Comme il y a bijection (à palindrome près) entre les lc-chenilles et les mots par la transformation décrite dans la définition 6.3.4, on nommera une lc-chenille directement par son mot  $w(C)$ . D'autre part, nous avons utilisé sur l'exemple de la Figure 6.8 les variables  $a$  et  $b$  représentant des couleurs quelconques. Dans la pratique la précision  $a, b \in \{1, 2, 3\}$  sera omise. Les variables  $a, b$  et  $c$  seront exclusivement utilisées pour des couleurs. De plus, comme on peut échanger ou changer les couleurs d'une chenille en préservant les égalités et différences, on ne rencontrera jamais les couleurs 1, 2 ou 3 dans le mot d'une chenille. On utilisera les variables  $a, b$  et  $c$  en précisant si elles sont distinctes ou quelconques. Des conditions éventuelles sur les variables  $a, b$  et  $c$  seront indiquées en indice à la fin du mot. Par exemple  $az0z z b_{a \neq b}$  indique que les couleurs  $a$  et  $b$  sont distinctes, à l'opposé de  $az0z z b$  où elles sont quelconques. La notation  $azDc0z z b_{a \neq c}$  indique que  $a \neq c$  et que  $a$  et  $b$  (resp.  $b$  et  $c$ ) peuvent être distinctes ou non. Si plusieurs conditions sont nécessaires, elle seront parfois séparées par une virgule. Par exemple, on note  $azDc0z z b_{a \neq b, b \neq c, c \neq a}$  (ou plus simplement  $azDc0z z b_{a \neq b \neq c \neq a}$ ) lorsque les trois variables  $a, b$  et  $c$  sont distinctes deux à deux.

Cette notation nous permet d'exprimer toute lc-chenille sous forme de mot, plus par-

FIGURE 6.9 – Coloration de l'épine dorsale de  $az0zza$ , avant et après réduction

ticulièrement les options d'une lc-chenille  $C$ . Par exemple pour  $C$  la chenille de droite de la Figure 6.8, de mot  $w(C) = az0zzb$ , il faut regarder les deux cas  $a = b$  et  $a \neq b$  :

$$Opt(az0zza) = \{z+c0zza_{a \neq c}, azc+czza, az0c+cza+z, z+az0zc_{a \neq c}, ac0zza, az0cza, az0zca\}.$$

$$Opt(az0zzb_{a \neq b}) = \{z+c0zzb, azc+czzb, az0c+z+czb, az0zc+z, ac0zzb_{a \neq b}, az0czb_{a \neq b}, az0zcb_{a \neq b}\}.$$

Nous avons ici directement remplacé les lc-chenilles par leurs mots associés. Les quatre premières options correspondent à la coloration avec  $c$  d'un sommet de l'épine dorsale (de gauche à droite), les trois dernières à la coloration avec  $c$  d'une feuille de  $C$  (de gauche à droite). Les options issues d'un coup sur l'épine dorsale de  $az0zza$  sont représentées Figure 6.9, avant et après réduction en forme normale.

Lorsque l'on colorie avec  $c$  un sommet voisin d'une feuille coloriée avec  $a$ , on a forcément  $a \neq c$ . Par conséquent la première et la 4e option de  $az0zza$  ont une condition supplémentaire sur les couleurs.

Dans l'expression de  $Opt(az0zzb_{a \neq b})$ , la condition  $a \neq b$  peut disparaître si les feuilles coloriées avec  $a$  d'une part et avec  $b$  d'autre part sont déconnectées. En effet dans ce cas

la condition  $a \neq b$  n'a plus aucune importance. C'est le cas pour les quatre premières options de  $az0zzb_{a \neq b}$ .

Enfin, lorsque l'on écrira des options, les composantes complètement coloriées seront omises (par la réduction  $R_0$ ), et les composantes de la forme  $az$  seront remplacées par  $z$ . C'est le cas dans l'expression de  $Opt(az0zzb_{a \neq b})$  où l'on a écrit  $z + c0zzb$  au lieu de  $ac + cz + c0zzb$ , la composante  $ac$  étant complètement coloriée et la composante  $cz$ , étant de la forme  $az$ , est remplacée par  $z$ . À titre d'exemple, donnons l'expression de  $Opt(az0zzb_{a \neq b})$  avant l'application de ces réductions. Seule la réduction  $R_1$ , nécessaire pour obtenir une notation par mots, est appliquée.

$$Opt(az0zzb_{a \neq b}) = \{ac_{c \neq a} + cz + c0zzb, azc + czzb, az0c + cz + czb, az0zc + cz + cb_{c \neq b}\} \cup \{ac0zzb_{a \neq b}, az0czb_{a \neq b}, az0zcb_{a \neq b}\}.$$

### 6.3.3 Les chenilles circulaires et les arbres circulaires

Définissons maintenant une nouvelle famille de graphes : les **lc-chenilles circulaires**, qui seront également étudiées dans ce Chapitre et serviront à donner des exemples de positions de jeu.

**Définition 6.3.5** Une **lc-chenille circulaire**  $C$  est constituée d'un cycle  $s_1s_2 \dots s_p s_1$ , tel que tout sommet n'appartenant pas à ce cycle est une feuille. Le **mot** d'une lc-chenille circulaire  $C$  est noté  $w(C) = [w_1 \dots w_p]$ , les crochets indiquant la cyclicité du mot. Chaque lettre  $w_i$  appartient à l'alphabet  $\{0, z, 1, 2, 3, D, D_1, D_2, D_3, D_{12}, D_{13}, D_{23}\}$  et vaut, comme pour les lc-chenilles :

- si  $deg(s_i) = 2$  alors  $w_i = 0$  ;
- si  $deg(s_i) = 3$  alors  $w_i$  est la couleur de la feuille voisine de  $s_i$  et  $z$  si elle n'est pas coloriée ;
- si  $deg(s_i) = 4$  alors  $w_i = D_A$ , où  $A$  est l'ensemble des couleurs présentes sur les feuilles voisines de  $s_i$ , avec la convention  $D = D_\emptyset$ .

La **taille** d'une lc-chenille circulaire est la longueur de son cycle, ou encore la longueur de son mot.

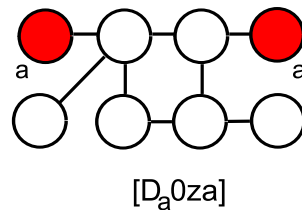


FIGURE 6.10 – Exemple de lc-chenille circulaire avec son mot associé.

Un exemple de lc-chenille circulaire de taille 4 est représenté Figure 6.10. En règle générale, pour écrire le mot de  $C$  on prendra le sommet en haut à gauche et on parcourra le cycle dans le sens trigonométrique. Mais on pourrait prendre n'importe quel point de

départ et n'importe quel sens. Par conséquent, pour une lc-chenille circulaire de taille  $n$ , il y a au plus  $2n$  mots distincts correspondant à  $C$ . On parlera toutefois de **l'unique mot** de  $C$ , en supposant que la lc-chenille circulaire est enracinée en un sommet  $s_1$  du cycle, et que le parcours s'effectue toujours dans le sens trigonométrique. Bien entendu dans la pratique on pourra prendre n'importe lequel des  $2n$  mots, selon la structure que l'on cherchera à mettre en évidence.

Un graphe  $U$  est un **arbre circulaire** s'il existe deux sommets voisins  $u$  et  $v$  tels que  $T = U - \{uv\}$  est un arbre.

La famille des arbres circulaires, contenant celle des chenilles circulaires est elle aussi de nombre chromatique ludique au plus 4 :

**Proposition 6.3.6** *Soit  $U$  un arbre circulaire. On a alors :*

$$3 \leq \chi_g(U) \leq 4.$$

**Preuve:** Soient  $u$  et  $v$  deux sommets voisins de  $U$  et tels que  $T = U - \{uv\}$  soit un arbre. Commençons par démontrer que  $\chi_g(U) \geq 3$ . L'arbre circulaire  $U$  contient un unique cycle de longueur  $1 + d_T(u, v) \geq 3$ . Donc comme  $U$  est connexe tout sommet  $s$  de  $U$  appartient au cycle ou a au moins un sommet à distance 2. Par conséquent comme Alice commence Bob peut jouer à distance 2 du coup d'Alice avec une autre couleur, ou sur le cycle si Alice a joué sur le cycle et s'il est de longueur 3. Ainsi il faudra une 3e couleur pour colorier le sommet placé entre ces deux sommets coloriés (ou le 3e sommet du cycle si ce cycle est un triangle). Par conséquent  $\chi_g(U) \geq 3$ .

Démontrons maintenant qu'Alice a une stratégie gagnante avec quatre couleurs. Il lui suffit de commencer par colorier un sommet  $s$  du cycle pour gagner avec 4 couleurs. En effet, elle coupe le cycle et constitue  $\deg(s) - 1$  composantes dont une a deux feuilles coloriées (celle qui contient les autres sommets de l'ancien cycle) et les autres une feuille coloriée. Chacune de ces composantes étant des arbres, Alice pourra toujours s'arranger pour que toute composante ait au plus deux feuilles coloriées. On retombe sur la configuration d'arbre, utilisée par Faigle et al. [18] dans la preuve du Théorème 6.1.2. ■

Remarquons que si  $U$  n'est pas connexe, alors il peut avoir un nombre chromatique ludique 2 dans le cas particulier  $U = C_4 + F$ , où  $F$  est une forêt vérifiant  $|V(F)|$  impair et  $\text{diam}(F) \leq 3$ . En effet, Alice joue sur  $F$  jusqu'à ce que Bob joue sur  $C_4$ . Elle colorie alors le sommet opposé du cycle avec la même couleur et donc gagne avec 2 couleurs car  $F$  est de nombre chromatique ludique 2. Comme par la suite nous considérerons le jeu  $\mathcal{J}$  avec 3 couleurs, ce cas particulier sera gagnant pour Alice.

Les chenilles circulaires ne sont pas des arbres. Toutefois, comme toute chenille circulaire est de nombre chromatique ludique 3 ou 4, cette famille sera étudiée en même temps que les arbres, et toutes les propriétés que nous allons démontrer sur les arbres pourront être étendues aux chenilles circulaires.



## 6.4 Types, types signés et bitypes

Dans le but de calculer le nombre chromatique ludique d'arbres non coloriés nous aurons besoin de savoir qui peut gagner sur un lc-arbre donné dans deux situations : (i) le Suivant est Alice (ii) le Suivant est Bob. Nous pourrions ainsi connaître également le nombre chromatique B-ludique.

Nous utiliserons pour cela une définition inspirée du domaine des jeux combinatoires : les **types** (*outcome* en anglais). Comme notre jeu  $\mathcal{J}$  à 3 couleurs n'est pas un jeu combinatoire, il nous faudra adapter cette définition. Nous introduirons la notion de **bitype**.

La réduction  $R_1$  nous permet de n'avoir qu'à considérer les 3-colorations partielles de feuilles. Mais cette réduction peut déconnecter des composantes reliées dans l'arbre de départ. Nous devons donc étudier des **forêts** de lc-arbres. Par conséquent, nous aurons besoin d'une propriété permettant de déterminer le gagnant sur une forêt connaissant le gagnant de chacune de ses composantes connexes. Nous utiliserons pour cela la notion de **bitype signé étendu**.

### 6.4.1 Définitions et propriétés des types

Dans ce Chapitre nous allons calculer le nombre chromatique ludique de graphes non coloriés. Pour cela, il faudra savoir qui a une stratégie gagnante à tout instant de la partie, soit sur un lc-graphe  $T$ . Nous devons donc non seulement savoir qui gagne sur  $T$  si Alice commence, mais aussi si Bob commence. C'est pourquoi nous définissons le type d'un lc-graphe  $T$  de la manière suivante :

**Définition 6.4.1** *Le type d'un lc-graphe  $T$ , noté  $o(T)$ , est défini comme suit :*

1.  $o(T) = \mathcal{B}$  si Bob gagne quel que soit celui qui commence ;
2.  $o(T) = \mathcal{P}$  si le joueur Suivant (celui qui doit jouer) perd, c'est à dire si le précédent (Previous) gagne ;
3.  $o(T) = \mathcal{N}$  si le joueur Suivant gagne (Next) ;
4.  $o(T) = \mathcal{A}$  si Alice gagne quel que soit celui qui commence.

Par extension, pour une famille  $\mathcal{F}$  de lc-graphes on note  $o(\mathcal{F})$  l'ensemble des types des éléments de  $\mathcal{F}$ .

Nous notons  $Opt(T)$  l'ensemble des **options** de  $T$ , c'est à dire l'ensemble des lc-graphes qui peuvent être obtenus depuis  $T$  en un coup. Si un lc-graphe  $T$  contient une option de type  $\mathcal{X}$  on dit que  $T$  contient une  $\mathcal{X}$ -option. Un lc-graphe  $T$  est dit **terminal** si aucun coup n'est possible sur  $T$ , autrement dit si tout sommet non colorié de  $T$  a les trois couleurs dans son voisinage.

On remarque que  $o(T)$  peut être déterminé de la manière suivante :

**Proposition 6.4.2** *Soit  $T$  un lc-graphe tel que  $u(T) > 0$ .*

1.  $o(T) = \mathcal{B} \Leftrightarrow o(Opt(T)) \in \left\{ \{\mathcal{B}\}, \{\mathcal{N}, \mathcal{B}\} \right\}$  ;
2.  $o(T) = \mathcal{P} \Leftrightarrow o(Opt(T)) = \{\mathcal{N}\}$  ;

3.  $o(T) = \mathcal{N} \Leftrightarrow \{\mathcal{P}\} \subseteq o(\text{Opt}(T))$  ou  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \subseteq o(\text{Opt}(T))$  ;
4.  $o(T) = \mathcal{A} \Leftrightarrow o(\text{Opt}(T)) \in \left\{ \{\mathcal{A}\}, \{\mathcal{A}, \mathcal{N}\} \right\}$ .

**Preuve:** Ces formules découlent de la définition des types. Les sens " $\Leftarrow$ " se démontrent aisément :

1. Si les types des options sont tous  $\mathcal{B}$  ou sont dans  $\{\mathcal{N}, \mathcal{B}\}$  alors Alice n'a aucun coup gagnant si elle commence, et Bob en a un s'il commence (il choisit une  $\mathcal{B}$ -option). On en déduit que Bob gagne toujours.
2. Si  $o(\text{Opt}(T)) = \{\mathcal{N}\}$ , alors le Suivant n'a que des  $\mathcal{N}$ -options, il ne peut donc gagner. On en déduit que  $o(T) = \mathcal{P}$ .
3. Si  $\{\mathcal{P}\} \subseteq o(\text{Opt}(T))$ , alors si le Suivant choisit une  $\mathcal{P}$ -option il gagne. Par conséquent il a un coup gagnant, donc  $o(T) = \mathcal{N}$ .  
De même si  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} \subseteq o(\text{Opt}(T))$  alors Alice et Bob ont un coup gagnant s'ils commencent. On en déduit que  $o(T) = \mathcal{N}$ .
4. Si les types des options sont tous  $\mathcal{A}$  ou dans  $\{\mathcal{A}, \mathcal{N}\}$  alors Bob n'a aucun coup gagnant s'il commence, et Alice en a un si elle commence (elle choisit une  $\mathcal{A}$ -option). On en déduit qu'Alice gagne toujours.

Pour les sens " $\Rightarrow$ ", regardons les possibilités pour l'ensemble  $o(\text{Opt}(T))$  conduisant au type désiré.

1. Supposons  $o(T) = \mathcal{B}$ . Si  $o(\text{Opt}(T))$  ne contient ni  $\mathcal{B}$  ni  $\mathcal{P}$  alors Bob n'a aucun coup gagnant, et si  $o(\text{Opt}(T))$  contient  $\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{P}$  alors Alice a un coup gagnant. On en déduit que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{P}$  ne peuvent appartenir à  $o(\text{Opt}(T))$  et que  $\mathcal{B}$  doit appartenir à  $o(\text{Opt}(T))$  si  $o(T) = \mathcal{B}$
2. Si  $o(T) = \mathcal{P}$  alors quel que soit le Suivant il n'a aucun coup gagnant. Donc  $T$  ne peut contenir ni  $\mathcal{A}$  ni  $\mathcal{P}$  ni  $\mathcal{B}$ -option.
3. Si  $o(T) = \mathcal{N}$ , quel que soit le Suivant il doit avoir un coup gagnant. Si  $T$  a une  $\mathcal{P}$ -option alors Alice et Bob gagnent en choisissant cette  $\mathcal{P}$ -option. Si  $T$  n'a pas de  $\mathcal{P}$ -option, alors comme Alice et Bob doivent avoir un coup gagnant, on en déduit qu'il existe une  $\mathcal{A}$ -option et une  $\mathcal{B}$ -option.
4. Supposons  $o(T) = \mathcal{A}$ . Si  $T$  ne contenait ni  $\mathcal{A}$ -option ni  $\mathcal{P}$ -option alors Alice n'aurait aucun coup gagnant. Or c'est impossible donc  $o(\text{Opt}(T))$  contient  $\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{P}$ . D'autre part, si  $T$  avait une  $\mathcal{B}$ -option ou une  $\mathcal{P}$ -option alors Bob aurait un coup gagnant, ce qui est impossible. Donc  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{P}$  ne peuvent appartenir à  $o(\text{Opt}(T))$ , et  $T$  a une  $\mathcal{B}$ -option et peut avoir ou non une  $\mathcal{N}$ -option. ■

Il y a une correspondance entre les types et les deux nombres chromatiques ludiques (A-ludique et B-ludique) :

**Proposition 6.4.3** *Soit  $T$  un lc-graphe.*

1.  $o(T) = \mathcal{B}$  signifie que  $\chi_g(T) = \chi_g^B(T) = 4$  ;

2.  $o(T) = \mathcal{P}$  signifie que  $\chi_g(T) = 4$  et  $\chi_g^B(T) \leq 3$  ;
3.  $o(T) = \mathcal{N}$  signifie que  $\chi_g(T) \leq 3$  et  $\chi_g^B(T) = 4$  ;
4.  $o(T) = \mathcal{A}$  signifie que  $\chi_g(T) \leq 3$  et  $\chi_g^B(T) \leq 3$  ;

**Preuve:** Les types des lc-graphes ont été définis dans le cadre du jeu de coloration  $\mathcal{J}$  avec trois couleurs. Or comme le Suivant peut être Alice ou Bob, cette définition s'applique également sur le jeu  $\mathcal{J}^B$ .

1.  $o(T) = \mathcal{B}$  signifie qu'Alice ne peut gagner qu'elle commence ou non. Par conséquent les deux nombres chromatiques sont égaux à 4.
2.  $o(T) = \mathcal{P}$  signifie qu'Alice gagne si et seulement si elle ne commence pas. Donc avec 3 couleurs elle gagne dans  $\mathcal{J}^B$  mais perd dans  $\mathcal{J}$ .
3.  $o(T) = \mathcal{N}$  signifie qu'Alice gagne si et seulement si elle commence. Donc avec 3 couleurs elle gagne dans  $\mathcal{J}$  mais perd dans  $\mathcal{J}^B$ .
4.  $o(T) = \mathcal{A}$  signifie qu'Alice gagne qu'elle commence ou non, donc avec 3 couleurs elle gagne dans  $\mathcal{J}$  et dans  $\mathcal{J}^B$ .

■

La Proposition 6.4.2 nous permet de calculer récursivement le type d'un lc-graphe donné. Mais il faut regarder l'ensemble des colorations partielles de  $T$ , il y en a au pire  $4^{|V(T)|}$ . Cette méthode est donc inutilisable dans la pratique pour un lc-graphe de taille conséquente. Néanmoins, en utilisant ces propriétés, on peut remarquer qu'aucun lc-arbre  $T$  vérifiant  $u(T) \leq 6$  n'est de type  $\mathcal{P}$ , excepté la lc-chenille à gauche de la Figure 6.18 notée  $a^6$  (ou des cas isomorphes).

Néanmoins il existe des exemples d'arbres non coloriés de type  $\mathcal{P}$  (voir Chapitre 8), c'est à dire un arbre  $T$  vérifiant  $\chi_g(T) = 4$  et  $\chi_g^B(T) \leq 3$ . Ils semblent toutefois peu nombreux par rapport aux arbres de type  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{N}$  ou  $\mathcal{B}$ .

Cependant, pour des familles de graphes contenant des cycles, on peut trouver un grand nombre d'exemples pour lesquels  $\chi_g(G) = 4$  et  $\chi_g^B(G) = 3$ . Le cas le plus simple est certainement  $G = [z^4]$  : le cycle  $C_4$  avec une feuille voisine pour chaque sommet du cycle. Le graphe  $[z^4]$  appartient à la famille des **chenilles circulaires** qui sera étudiée dans la Section 7.6.

Il existe même des familles de graphes pour lesquelles le rapport  $\chi_g/\chi_g^B$  n'est pas borné, comme par exemple certains graphes bipartis [20].

Continuons avec d'autres propriétés sur les types des lc-graphes. Puisque nous allons étudier les types des lc-graphes non connexes, nous avons besoin d'une propriété pour calculer (en temps constant)  $o(T_1 + T_2)$  en fonction de  $o(T_1)$  et  $o(T_2)$  (où  $T_1 + T_2$  est l'union disjointe de  $T_1$  et  $T_2$ ). Ainsi nous aurons seulement besoin de connaître les types des lc-graphes connexes pour calculer en temps linéaire les types des lc-graphes non connexes.

Mais la définition de type telle qu'elle a été donnée est insuffisante pour apporter l'unicité d'un type  $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = o(T_1 + T_2)$  avec  $\mathcal{X} = o(T_1)$  et  $\mathcal{Y} = o(T_2)$ . Mettons en

évidence un cas de figure pour lequel le type d'une réunion disjointe diffère de celui d'une autre réunion disjointe.

On peut observer que  $K_1$  et  $K_2$  sont tous deux de type  $\mathcal{A}$ . Mais on a

$$o(a^6 + K_1) = \mathcal{N} \neq o(a^6 + K_2) = \mathcal{P}.$$

En effet, la chenille  $a^6$  est perdante pour celui qui commence (type  $\mathcal{P}$ ). Donc sur  $a^6 + K_1$  le Suivant colorie le sommet isolé  $K_1$  et gagne car l'autre joueur est forcé de jouer dans  $a^6$ . Mais sur  $a^6 + K_2$  on peut jouer deux fois en dehors de  $a^6$ . Par conséquent c'est le précédent qui gagne.

Par conséquent, il ne peut exister de fonction calculant  $o(T_1 + T_2)$  avec les seules informations  $o(T_1)$  et  $o(T_2)$ . Il nous faut enrichir la définition des types.

### 6.4.2 Types signés

L'exemple précédent permet de mettre en évidence l'importance du **nombre de sommets coloriables**  $u(T)$ . Plus précisément, c'est la parité de  $u(T)$  qui compte, notée  $\sigma(T) = \bar{u}(T)$ . On appelle **signe** de  $T$  et on note  $\sigma(T)$  la valeur  $\bar{u}(T)$ , où pour tout entier  $a \geq 0$ ,  $\bar{a} = a \bmod 2$ . Précisons que  $\sigma(T)$  n'est pas seulement important dans le cas où l'on est en présence d'une composante de type  $\mathcal{P}$ , comme nous allons le voir par la suite.

Nous sommes donc amenés à introduire la notion de **type signé**.

**Définition 6.4.4** On appelle type signé de  $T$  le type  $\mathcal{X}$  de  $T$  signé par la parité de  $u(T)$ , noté  $\sigma'(T) = \mathcal{X}_0$  ou  $\mathcal{X}_1$ .

Le type signé  $\sigma'$  d'un lc-graphe  $T$  est donc un couple  $\sigma'(T) = (o(T), \sigma(T))$ , mais pour plus de clarté nous utiliserons la notation indicielle :  $\sigma'(T) = o(T)_{\sigma(T)}$ .

Cette première extension du type n'est pas suffisante pour obtenir l'unicité de la valeur  $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ . En effet, dans certains cas on a  $\mathcal{N} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{P}$  ou  $\mathcal{N} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{N}$  alors que la plupart du temps  $\mathcal{N} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{B}$ . Prenons un exemple avec la famille des chenilles. La chenille  $C_1 = a^3za^2$  (voir Figure 6.15) est de type signé  $\mathcal{N}_0$  car elle contient une  $\mathcal{P}$ -option. La chenille  $C_2 = azb$  (voir Figure 6.12) est également de type signé  $\mathcal{N}_0$  car elle contient des options de type  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . Or on a :

$$o(C_1 + C_1) = \mathcal{P} \neq o(C_1 + C_2) = \mathcal{N} \neq o(C_2 + C_2) = \mathcal{B}.$$

Ces types sont aisément calculables. Pour  $C_1 + C_1$  quel que soit le choix du Suivant, le précédent choisit l'option  $a^6$  de type  $\mathcal{P}$  de l'autre composante, et gagne puisqu'il reste 4 sommets à colorier hors de  $a^6$ . Pour  $C_1 + C_2$ , si Bob commence il choisit la  $\mathcal{B}$ -option de  $C_2$  et gagne, et si Alice commence elle choisit la  $\mathcal{A}$ -option de  $C_2$  pour obtenir une configuration de type  $\mathcal{P}$ . Enfin pour  $C_2 + C_2$  Bob gagne immédiatement du côté où Alice n'a pas joué, ou s'il commence.

### 6.4.3 Définition des bitypes, exemples

Ces divers exemples nous ont conduit à prendre en compte non seulement le type du lc-graphe  $T$  considéré mais aussi celui de  $T + K_1$  : le même graphe avec un sommet isolé

supplémentaire. L'idée est que dans certains cas les joueurs ont intérêt à "passer leur tour" pour gagner la partie, alors que dans d'autres cas cette possibilité ne leur permet pas d'avoir une stratégie gagnante. Ce sommet isolé  $K_1$  modélise en terme de graphe le fait qu'au cours de la partie, un joueur (Alice ou Bob) peut décider de passer son tour, et qu'après ce choix aucun des deux joueurs ne peut plus passer son tour.

Cette idée d'ajouter à un jeu un coup permettant de passer son tour une et une seule fois a été proposée par Nowakowski et al. [17]. Le jeu  $\mathcal{G}_P$  défini par l'ajout de ce *pass move* à un jeu  $\mathcal{G}$  est parfois périodique alors que l'on ne sait pas si le jeu  $\mathcal{G}$  l'est. C'est par exemple le cas pour certains jeux octaux ou hexadécimaux à ce jour non résolus (c.f. Chapitre 1 pour la définition des jeux octaux). Bien entendu, l'ajout du *pass move* modifie les règles du jeu, il ne s'agit donc pas du même jeu combinatoire.

Sur l'exemple précédent, l'ajout d'un sommet isolé à  $C_1$  en modifie le type (on a  $o(C_1) = \mathcal{N}$  et  $o(C_1 + K_1) = \mathcal{A}$ ) alors qu'il ne modifie pas le type de  $C_2$  (on a  $o(C_2 + K_1) = o(C_2) = \mathcal{N}$ ).

Ce nouveau paramètre, appelé **bitype**, est défini comme suit :

**Définition 6.4.5** Soit  $T$  un lc-graphe. Le **bitype** de  $T$  est un couple  $oo(T) = (\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , plus simplement noté  $oo(T) = \mathcal{X}\mathcal{Y}$ , et tel que  $\mathcal{X} = o(T)$  et  $\mathcal{Y} = o(T + K_1)$ .

On appelle **bitype signé** de  $T$  le bitype  $\mathcal{X}\mathcal{Y}$  de  $T$  signé par  $u(T)$ , noté  $oo'(T) = \mathcal{X}\mathcal{Y}_0$  ou  $\mathcal{X}\mathcal{Y}_1$ .

Remarquons que cette définition entraîne les deux propriétés suivantes :

**Proposition 6.4.6** Soit  $T$  un lc-graphe.

1.  $oo(T) = oo(T + 2K_1)$  ;
2. Si  $oo(T) = \mathcal{X}\mathcal{Y}$  alors  $oo(T + K_1) = \mathcal{Y}\mathcal{X}$ .

On dit que  $\mathcal{Y}\mathcal{X}$  est le **bitype miroir** de  $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ .

**Preuve:** Procédons par récurrence sur  $u(T)$ . Si  $u(T) = 0$  alors soit  $T \cong K_{1,3}^c$  donc  $oo(T + 2K_1) = oo(T + K_1) = oo(K_{1,3}^c) = \mathcal{B}\mathcal{B}$ , soit par la réduction  $R_0$  on sait que  $T \cong \emptyset$ , donc  $oo(T) = \mathcal{A}\mathcal{A}$ . Par conséquent  $oo(T + 2K_1) = oo(2K_1) = \mathcal{A}\mathcal{A}$  et  $oo(T + K_1) = oo(K_1) = \mathcal{A}\mathcal{A}$ . Supposons maintenant la propriété vraie pour tout lc-graphe  $T'$  vérifiant  $u(T') < u(T)$  et démontrons là pour  $T$ . Si le Suivant a dans  $T$  un coup gagnant  $T'$ , alors par hypothèse de récurrence  $T' + 2K_1$  est également un coup gagnant. S'il n'a aucun coup gagnant dans  $T$  alors toute option de  $T + 2K_1$  de la forme  $T' + 2K_1$  est par hypothèse de récurrence perdante. De plus, l'option  $T + K_1$  ne peut être gagnante car l'autre joueur peut choisir l'option  $T$  qui est perdante. On en conclut que pour tout  $T$ ,  $oo(T) = oo(T + 2K_1)$ . Pour le second point, revenons à la définition du bitype de  $T$  :  $oo(T) = \mathcal{X}\mathcal{Y}$  signifie que  $o(T) = \mathcal{X}$  et  $o(T + K_1) = \mathcal{Y}$ . Or par le premier point  $o(T + 2K_1) = \mathcal{X}$ . Donc en posant  $T' = T + K_1$  on a  $o(T') = \mathcal{Y}$  et  $o(T' + K_1) = \mathcal{X}$ , soit  $oo(T') = \mathcal{Y}\mathcal{X}$ . ■

Éliminons maintenant quelques bitypes ne pouvant apparaître dans la famille de lc-graphes.

**Proposition 6.4.7** Soit  $T$  un lc-graphe. Le bitype de  $T$  appartient à l'ensemble suivant :

$$\{\mathcal{A}\mathcal{A}, \mathcal{N}\mathcal{N}, \mathcal{B}\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{N}, \mathcal{N}\mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{N}, \mathcal{N}\mathcal{B}, \mathcal{P}\mathcal{N}, \mathcal{N}\mathcal{P}\}$$

**Preuve:** Par la Proposition 6.4.6 on sait que  $oo(T + K_1) = \mathcal{Y}\mathcal{X}$  si  $oo(T) = \mathcal{X}\mathcal{Y}$ . Il suffit donc de démontrer que  $T$  ne peut être de bitype  $\mathcal{AB}$ ,  $\mathcal{AP}$ ,  $\mathcal{BP}$  ou  $\mathcal{PP}$ . En effet il restera à éliminer leurs miroirs  $\mathcal{Y}\mathcal{X}$ , mais s'ils étaient présents cela entraînerait que  $o(T + K_1) = \mathcal{X}\mathcal{Y}$ .

Soit  $T$  un lc-graphe de bitype  $\mathcal{AX}$ . Sur  $T + K_1$  Alice bénéficie de la  $\mathcal{A}$ -option  $T$ , donc elle gagne si elle commence. On en déduit que  $\mathcal{X} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{N}\}$ . De même, si  $T$  est de type  $\mathcal{BY}$ , sur  $T + K_1$  Bob peut choisir la  $\mathcal{B}$ -option  $T$ , donc gagne s'il commence. On en déduit que  $\mathcal{Y} \in \{\mathcal{B}, \mathcal{N}\}$ . Enfin si  $T$  est de type  $\mathcal{PZ}$ , sur  $T + K_1$  le Suivant bénéficie de la  $\mathcal{P}$ -option  $T$ , donc il gagne. On en déduit que  $\mathcal{Z} = \mathcal{N}$ . ■

Il reste donc 9 bitypes possibles pour la familles des lc-graphes. Ils sont classés en deux catégories :

1. Les **bitypes constants** de la forme  $\mathcal{ZZ}$  :  $\mathcal{AA}$ ,  $\mathcal{NN}$  et  $\mathcal{BB}$ .
2. Les **bitypes variables** de la forme  $\mathcal{XY}$  avec  $\mathcal{X} \neq \mathcal{Y}$  :  $\mathcal{AN}$ ,  $\mathcal{NA}$ ,  $\mathcal{BN}$ ,  $\mathcal{NB}$ ,  $\mathcal{PN}$  et  $\mathcal{NP}$ .

Dans les figures 6.11 à 6.19 nous allons donner deux exemples pour chacune de ces classes : celui de gauche est de signe 0 et celui de droite de signe 1. Comme il s'agit de chenilles ou chenilles circulaires, nous utiliserons la notation par mots pour désigner chacun de ces exemples. Lorsqu'il a été aisé d'en découvrir, nous avons donné des exemples connexes. Pour certains bitypes signés, aucun exemple connexe n'a été découvert dans la famille des chenilles (circulaires ou linéaires). Ces exemples sont résumés dans la table 6.1.

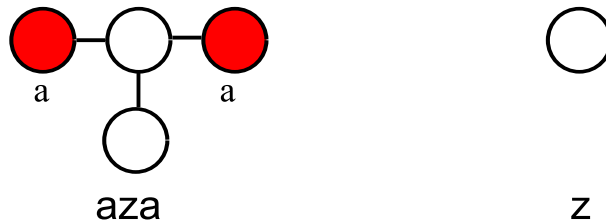


FIGURE 6.11 – Exemples de graphes de bitype  $\mathcal{AA}$  de signes respectifs 0 et 1.

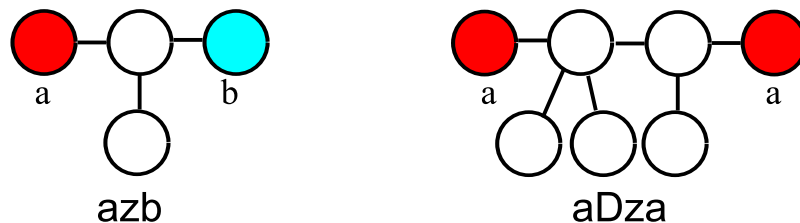


FIGURE 6.12 – Exemples de graphes de bitype  $\mathcal{NN}$  de signes respectifs 0 et 1.

Dans la table 6.1, les couleurs  $a$   $b$  et  $c$  sont distinctes deux à deux. Le bitype de ces exemples peut se calculer aisément en répondant aux quatre questions suivantes :

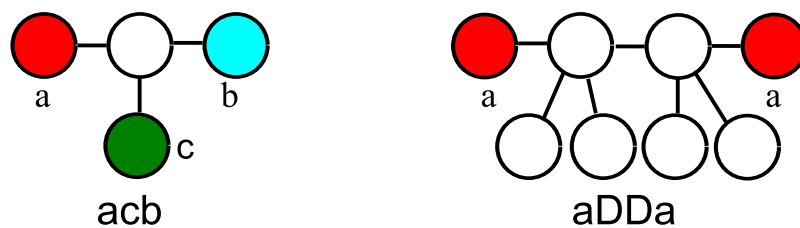


FIGURE 6.13 – Exemples de graphes de bitype  $\mathcal{BB}$  de signes respectifs 0 et 1.

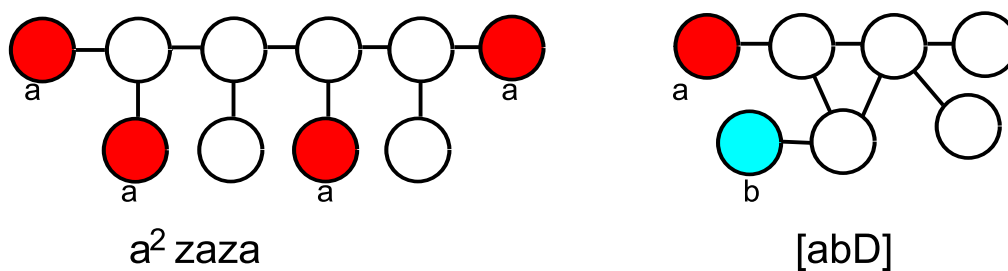


FIGURE 6.14 – Exemples de graphes de bitype  $\mathcal{AN}$  de signes respectifs 0 et 1.

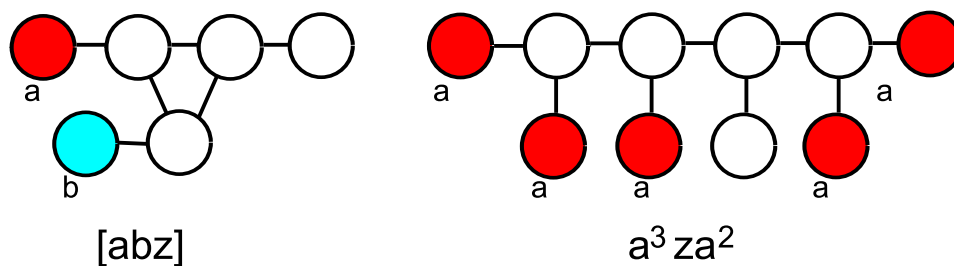


FIGURE 6.15 – Exemples de graphes de bitype  $\mathcal{NA}$  de signes respectifs 0 et 1.

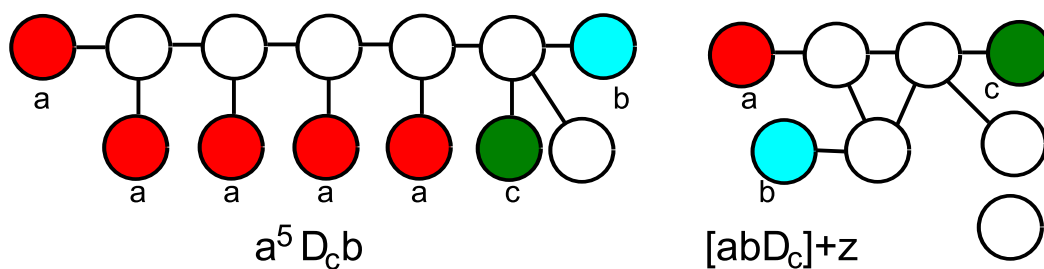


FIGURE 6.16 – Exemples de graphes de bitype  $\mathcal{BN}$  de signes respectifs 0 et 1.

1. Qui gagne sur  $T$  si Alice commence ?
2. Qui gagne sur  $T$  si Bob commence ?
3. Qui gagne sur  $T + K_1$  si Alice commence ?

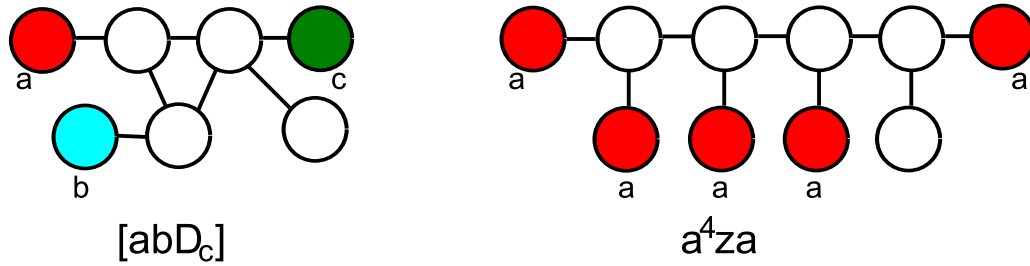


FIGURE 6.17 – Exemples de graphes de bitype  $\mathcal{NB}$  de signes respectifs 0 et 1.

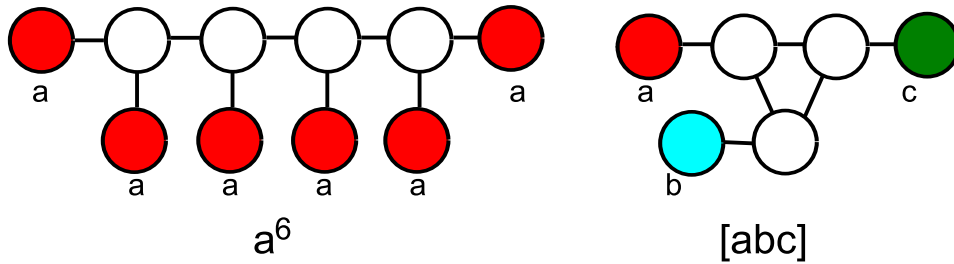


FIGURE 6.18 – Exemples de graphes de bitype  $\mathcal{PN}$  de signes respectifs 0 et 1.

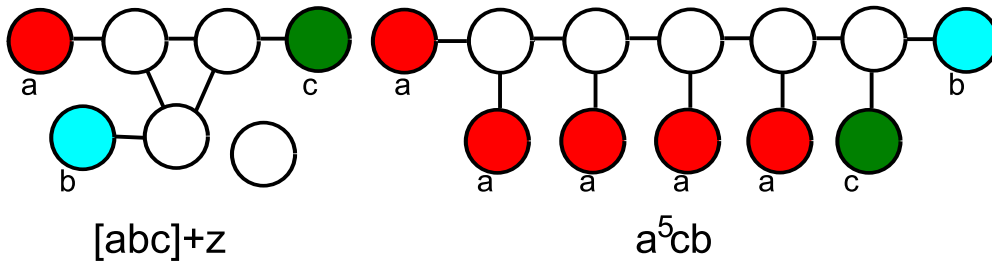


FIGURE 6.19 – Exemples de graphes de bitype  $\mathcal{NP}$  de signes respectifs 0 et 1.

4. Qui gagne sur  $T + K_1$  si Bob commence ?

La réponse aux deux premières questions fournit la première lettre du bitype  $\mathcal{XY}$ , et la réponse aux deux autres la seconde lettre.

Remarquons que dans certains cas il suffit de répondre à deux ou trois de ces quatre questions. En effet, la réponse aux deux premières questions fournit la première lettre du bitype. Or par la Proposition 6.4.7, on a :

1. Si  $o(T) = \mathcal{P}$  alors  $o(T + K_1) = \mathcal{N}$  ;
2. Si  $o(T) = \mathcal{A}$  alors  $o(T + K_1) \in \{\mathcal{A}, \mathcal{N}\}$  ;
3. Si  $o(T) = \mathcal{B}$  alors  $o(T + K_1) \in \{\mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ .

Donc si  $o(T) = \mathcal{P}$  on connaît le bitype de  $T$ , et si  $o(T) = \mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) la réponse à la 4e question (resp. la 3e) suffit pour connaître le bitype de  $T$ .



bitype	signe 0	signe 1
$\mathcal{AA}$	$aza$	$z$
$\mathcal{NN}$	$azb$	$aDza$
$\mathcal{BB}$	$acb$	$aDDa$
$\mathcal{AN}$	$a^2zaza$	$[abD]$
$\mathcal{NA}$	$[abz]$	$a^3za^2$
$\mathcal{BN}$	$a^5Dcb$	$[abD_c] + z$
$\mathcal{NB}$	$[abD_c]$	$a^4za$
$\mathcal{PN}$	$a^6$	$[abc]$
$\mathcal{NP}$	$[abc] + z$	$a^5cb$

TABLE 6.1 – Exemples de chenilles linéaires ou circulaires pour chaque bitype signé

Nous allons détailler la démonstration du bitype de quelques-uns de ces exemples. Commençons par les bitypes constants, basés sur l'observation que  $oo(acb) = \mathcal{BB}$ , car le sommet du milieu n'est pas coloriable.

$\mathcal{AA}$  : Pour les deux exemples de bitype  $\mathcal{AA}$ , on observe que quel que soit le Suivant il est impossible pour Bob d'empêcher la 3-coloration de graphe.

$\mathcal{NN}$  : Sur  $azb_{a \neq b}$ , si Bob commence alors il choisit la  $\mathcal{BB}$ -option  $acb_{a \neq b \neq c \neq a}$ , et si Alice commence elle colorie le sommet du milieu pour obtenir l'option  $cz$  de bitype  $\mathcal{AA}$ . Pour  $aDza$ , on démontre aisément que  $aDaa$  est une  $\mathcal{AA}$ -option. De plus on observe que  $aD_bza_{a \neq b}$  est une  $\mathcal{BB}$ -option (car toute option de  $aD_bza_{a \neq b}$  contient la structure  $azb_{a \neq b}$ )

$\mathcal{BB}$  : Pour la chenille  $acb_{a \neq b \neq c \neq a}$  le sommet central ne pourra plus être colorié, donc  $oo(acb_{a \neq b \neq c \neq a}) = \mathcal{BB}$ . Pour la chenille  $aDDa$  nous avons démontré dans la preuve du Théorème 6.1.2 que si Alice commençait Bob gagnait. Si Bob commence il choisit  $aD_bDa_{a \neq b}$  et gagne car comme pour  $aD_bza_{a \neq b}$  toute option contient la structure  $azb_{a \neq b}$ .

En ce qui concerne les exemples de bitype variable, ils sont tous construits à partir des deux lc-graphes de bitype  $\mathcal{PN}$  de la Figure 6.18. Démontrons que le bitype de ces deux lc-graphes est bien  $\mathcal{PN}$ . Regardons l'expression des options de  $a^6$  :

$$Opt(a^6) = \{ca_{c \neq a}^4, a^2c_{c \neq a} + ca_{c \neq a}^3\}.$$

Ces deux options sont de bitype  $\mathcal{NN}$  car elles contiennent une option réductible par  $R_2$  en  $K_{1,3}^c$  (donc de bitype  $\mathcal{BB}$ ) et une  $\mathcal{AA}$ -option :  $cac_{c \neq a} + ca_{c \neq a}^2$  pour  $ca_{c \neq a}^4$ , et  $a^2c_{c \neq a} + cac_{c \neq a}$  pour  $a^2c_{c \neq a} + ca_{c \neq a}^3$ . On en déduit que  $oo(a^6) = \mathcal{PN}$ .

Pour  $[abc]_{a \neq b \neq c \neq a}$  toute option est isomorphe à la lc-chenille  $acc_{a \neq c}$  qui est de bitype  $\mathcal{NN}$  puisqu'elle contient une  $\mathcal{AA}$  et une  $\mathcal{BB}$ -option. Par conséquent  $oo([abc]_{a \neq b \neq c \neq a}) = \mathcal{PN}$ .

En utilisant la Proposition 6.4.2, on en déduit que les lc-graphes de la Figure 6.15 sont de bitype  $\mathcal{NA}$  puisqu'ils ont une  $\mathcal{PN}$ -option et également une  $\mathcal{AA}$ -option :  $acc_{a \neq b \neq c \neq a} + z$  pour  $[abz]_{a \neq b}$  et  $a^4 + z + a^3$  pour  $a^3za^2$ . On vérifie aisément qu'avec un sommet isolé

supplémentaire ces deux lc-graphes n'ont ni  $\mathcal{P}$  ni  $\mathcal{B}$ -option, on conclut donc que leur bitype est bien  $\mathcal{NA}$ .

Il en est de même pour les lc-graphes de la Figure 6.17. Ils sont de bitype  $\mathcal{NB}$  car  $[abD_c]_{a \neq b \neq c \neq a}$  (resp.  $a^4za$ ) a une  $\mathcal{PN}$ -option  $[abc]_{a \neq b \neq c \neq a}$  (resp.  $a^6$ ), une  $\mathcal{BB}$ -option  $[abD_{ac}]_{a \neq b \neq c \neq a}$  (resp.  $a^3b_{a \neq b} + bza_{a \neq b}$ ) et aucune  $\mathcal{A}$ -option que ce soit avec ou sans sommet isolé supplémentaire.

Les deux lc-graphes de bitype  $\mathcal{AN}$  de la Figure 6.14 ont chacun une  $\mathcal{NB}$ -option, mais n'ont ni  $\mathcal{BN}$  ni  $\mathcal{BB}$  ni  $\mathcal{PN}$ -option. Comme ils ont de plus une  $\mathcal{AA}$ -option ( $a^3 + a^2za$  et  $accb_{a \neq b \neq c \neq a} + z + z$  respectivement), on en conclut que leur bitype est bien  $\mathcal{AN}$ .

Finalement pour les exemples de bitype  $\mathcal{BN}$  et  $\mathcal{NP}$ , l'application de la réduction  $R_4$  et de la Proposition 6.4.6 lorsque les graphes contiennent une composante  $K_1$  nous permettent de déduire le bitype des 4 lc-graphes des figures 6.16 et 6.19.

#### 6.4.4 Bitypes des options

Passons maintenant à l'expression des options d'un lc-graphe  $T$  non terminal de bitype  $\mathcal{XY}$ . Suivant les valeurs de  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ , certains bitypes doivent ou peuvent apparaître, ou bien sont interdits, dans les bitypes de l'ensemble des options de  $T$ . Commençons par caractériser l'ensemble des bitypes potentiellement présents parmi les options d'un lc-graphe de bitype donné.

**Proposition 6.4.8** *Soit  $T$  un lc-graphe de bitype  $\mathcal{XY}$ . L'ensemble  $oo(\text{Opt}(T))$  des bitypes des options de  $T$  est inclus dans un certain ensemble  $E(\mathcal{XY})$  donné par la table 6.2.*

$\mathcal{XY}$	$E(\mathcal{XY})$								
	$\mathcal{AA}$	$\mathcal{NN}$	$\mathcal{BB}$	$\mathcal{AN}$	$\mathcal{NA}$	$\mathcal{BN}$	$\mathcal{NB}$	$\mathcal{PN}$	$\mathcal{NP}$
$\mathcal{AA}$	•	•		•	•				
$\mathcal{NN}$	•	•	•	•	•	•	•	•	•
$\mathcal{BB}$		•	•			•	•		
$\mathcal{AN}$	•	•		•	•		•		•
$\mathcal{NA}$	•	•		•	•	•		•	
$\mathcal{BN}$		•	•		•	•	•		•
$\mathcal{NB}$		•	•	•		•	•	•	
$\mathcal{PN}$		•			•		•		•
$\mathcal{NP}$		•		•		•		•	

TABLE 6.2 – Ensembles  $E(\mathcal{XY})$  des bitypes potentiellement présents dans les options d'un lc-graphe de bitype  $\mathcal{XY}$

**Preuve:** Pour chaque bitype  $\mathcal{XY}$ , nous allons démontrer que l'ajout d'un bitype supplémentaire dans  $E(\mathcal{XY})$  aboutit à une contradiction. Soit  $\mathcal{Z}$  un type quelconque.

1. Si  $E(\mathcal{AA})$  contenait un élément de bitype  $\mathcal{PN}$ ,  $\mathcal{NP}$ ,  $\mathcal{BZ}$  ou  $\mathcal{ZB}$  alors Bob aurait un coup gagnant sur  $T$  et/ou sur  $T + K_1$ , ce qui est impossible car  $oo(T) = \mathcal{AA}$ .

2. Pour  $E(\mathcal{NN})$ , tous les bitypes sont possibles, il n'y a donc rien à démontrer.
3. Si  $E(\mathcal{BB})$  contenait un élément de bitype  $\mathcal{PN}$ ,  $\mathcal{NP}$ ,  $\mathcal{AZ}$  ou  $\mathcal{ZA}$  alors Alice aurait un coup gagnant sur  $T$  et/ou sur  $T + K_1$ , ce qui est impossible car  $oo(T) = \mathcal{BB}$ .
4. Si  $E(\mathcal{AN})$  contenait un élément de bitype  $\mathcal{PN}$  ou  $\mathcal{BZ}$  alors Bob aurait un coup gagnant sur  $T$ , ce qui est impossible car  $o(T) = \mathcal{A}$ .
5. Si  $E(\mathcal{NA})$  contenait un élément de bitype  $\mathcal{NP}$  ou  $\mathcal{ZB}$  alors Bob aurait un coup gagnant sur  $T + K_1$ , ce qui est impossible car  $o(T + K_1) = \mathcal{A}$ .
6. Si  $E(\mathcal{BN})$  contenait un élément de bitype  $\mathcal{PN}$  ou  $\mathcal{AZ}$  alors Alice aurait un coup gagnant sur  $T$ , ce qui est impossible car  $o(T) = \mathcal{B}$ .
7. Si  $E(\mathcal{NB})$  contenait un élément de bitype  $\mathcal{NP}$  ou  $\mathcal{ZA}$  alors Alice aurait un coup gagnant sur  $T + K_1$ , ce qui est impossible car  $o(T + K_1) = \mathcal{B}$ .
8. Si  $E(\mathcal{PN})$  contenait un élément de bitype  $\mathcal{PN}$ ,  $\mathcal{AZ}$  ou  $\mathcal{BZ}$  alors Alice et/ou Bob aurait un coup gagnant sur  $T$ , ce qui est impossible car  $o(T) = \mathcal{P}$ .
9. Si  $E(\mathcal{NP})$  contenait un élément de bitype  $\mathcal{NP}$ ,  $\mathcal{ZA}$  ou  $\mathcal{ZB}$  alors Alice et/ou Bob aurait un coup gagnant sur  $T + K_1$ , ce qui est impossible car  $o(T + K_1) = \mathcal{P}$ .

■

Dans cette table on observe que  $\mathcal{NN}$  peut être présent partout. En effet une telle option n'est jamais intéressante pour le Suivant, elle n'a donc aucun impact sur la valeur du bitype de  $T$ . Une  $\mathcal{NN}$ -option pourra toutefois constituer un coup gagnant sur une composante connexe  $C$  plongée dans une forêt comme nous allons le voir par la suite.

Cette table met en évidence les bitypes ne pouvant apparaître parmi les options, c'est à dire les **coups gagnants** pouvant modifier le type  $\mathcal{XY}$  voulu. Par contre, elle ne permet pas de voir quelles options sont **nécessaires** pour que le joueur ayant une stratégie gagnante sur  $T$  et/ou  $T + K_1$  puisse effectivement gagner. Par exemple pour le bitype  $\mathcal{AA}$ , il faut absolument avoir une option du type  $\mathcal{AX}$ . Ces conditions sont données par la proposition suivante.

**Proposition 6.4.9** *Soit  $T$  un lc-graphe non terminal, Notons  $S = oo(Opt(T))$ . On a alors :*

1. Si  $oo(T) = \mathcal{AA}$ , alors  $S$  contient  $\mathcal{AX}$  ;
2. Si  $oo(T) = \mathcal{NN}$ , alors  $S$  contient  $(\mathcal{PN}$  et  $\mathcal{NP})$  ou  $(\mathcal{PN}$ ,  $\mathcal{XA}$  et  $\mathcal{YB})$  ou  $(\mathcal{NP}$ ,  $\mathcal{AX}'$  et  $\mathcal{BY}'$ ) ou  $(\mathcal{AX}''$ ,  $\mathcal{X}'''A$ ,  $\mathcal{BY}''$  et  $\mathcal{Y}'''B)$  ;
3. Si  $oo(T) = \mathcal{BB}$ , alors  $S$  contient  $\mathcal{BY}$  ;
4. Si  $oo(T) = \mathcal{AN}$ , alors  $S$  contient  $\mathcal{AX}$  et  $(\mathcal{NP}$  ou  $\mathcal{NB})$  ;
5. Si  $oo(T) = \mathcal{NA}$ , alors  $S$  contient  $(\mathcal{PN}$  et  $\mathcal{XA})$  ou  $(\mathcal{BN}$ ,  $\mathcal{AX}'$  et  $\mathcal{X}''A)$  ;
6. Si  $oo(T) = \mathcal{BN}$ , alors  $S$  contient  $\mathcal{BY}_1$  et  $(\mathcal{NP}$  ou  $\mathcal{NA})$  ;
7. Si  $oo(T) = \mathcal{NB}$ , alors  $S$  contient  $(\mathcal{PN}$  et  $\mathcal{YB})$  ou  $(\mathcal{AN}$ ,  $\mathcal{BY}'$  et  $\mathcal{Y}''B)$  ;
8. Si  $oo(T) = \mathcal{PN}$ , alors  $S$  contient  $\mathcal{NZ}$  ;
9. Si  $oo(T) = \mathcal{NP}$ , alors  $S$  contient  $\mathcal{PN}$  ou  $(\mathcal{AN}$  et  $\mathcal{BN})$ .

Où les variables  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X}'$ ,  $\mathcal{X}''$  et  $\mathcal{X}'''$  correspondent à un élément de l'ensemble  $\{\mathcal{A}, \mathcal{N}\}$ , les variables  $\mathcal{Y}$ ,  $\mathcal{Y}'$ ,  $\mathcal{Y}''$  et  $\mathcal{Y}'''$  correspondent à un élément de l'ensemble  $\{\mathcal{B}, \mathcal{N}\}$ , et où  $\mathcal{Z}$  est un type quelconque. Ainsi par exemple  $\mathcal{A}\mathcal{X}$  signifie " $\mathcal{A}\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{A}\mathcal{N}$ ".

**Preuve:** Pour chaque cas on regardera qui doit gagner sur  $T$  puis sur  $T + K_1$ , selon que le Suivant est Alice ou Bob. On utilisera la Table 6.2 pour en déduire les éléments devant être présents dans  $S$ . Il faudra prêter attention à l'option  $T$  de  $T + K_1$  qui peut parfois constituer un coup gagnant. La Proposition 6.4.7 permettra de caractériser les valeurs possibles de  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ . L'ensemble  $S$  sera toujours non vide car  $T$  n'est pas terminal, c'est-à-dire  $u(T) > 0$ .

1. Si  $oo(T) = \mathcal{A}\mathcal{A}$ , quel que soit le Suivant Alice gagne sur  $T$  et sur  $T + K_1$ . Sur  $T + K_1$  il lui suffit de choisir l'option  $T$ . Sur  $T$ , par la table 6.2,  $S$  ne contient aucun élément de bitype  $\mathcal{P}\mathcal{N}$ , par conséquent il existe une option de bitype  $\mathcal{A}\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{A}\mathcal{N}$ .
2. Si  $oo(T) = \mathcal{N}\mathcal{N}$ , que le Suivant soit Alice ou Bob il gagne sur  $T$  et sur  $T + K_1$ . Par la Proposition 6.4.2  $o(T) = \mathcal{N}$  entraîne que  $T$  a une  $\mathcal{P}$ -option ou une  $\mathcal{A}$  et une  $\mathcal{B}$ -option. En passant aux bitypes,  $T$  a une  $\mathcal{P}\mathcal{N}$ -option ou une  $\mathcal{A}\mathcal{X}$  et une  $\mathcal{B}\mathcal{Y}$ -option. De même, comme  $o(T + K_1) = \mathcal{N}$ ,  $T + K_1$  a une  $\mathcal{P}\mathcal{N}$ -option ou une  $\mathcal{A}\mathcal{X}'$  et une  $\mathcal{B}\mathcal{Y}'$ -option. Ces options de  $T + K_1$  ne pouvant être  $T$ , on en déduit par la Proposition 6.4.6 que  $T$  a une  $\mathcal{N}\mathcal{P}$ -option ou une  $\mathcal{X}'\mathcal{A}$  et une  $\mathcal{Y}'\mathcal{B}$ -option. En rassemblant ces deux propriétés, on peut écrire que  $S$  contient :

$$( \mathcal{P}\mathcal{N} \text{ ou } (\mathcal{A}\mathcal{X} \text{ et } \mathcal{B}\mathcal{Y}) ) \text{ et } ( \mathcal{N}\mathcal{P} \text{ ou } (\mathcal{X}'\mathcal{A} \text{ et } \mathcal{Y}'\mathcal{B}) )$$

En développant cette expression on obtient le résultat désiré.

3. Si  $oo(T) = \mathcal{B}\mathcal{B}$ , Bob gagne sur  $T$  et  $T + K_1$  quel que soit le Suivant. Il faut donc qu'il ait une  $\mathcal{B}$ -option sur  $T$  et sur  $T + K_1$ , ce qui équivaut à dire que  $S$  contient  $\mathcal{B}\mathcal{B}$  ou  $\mathcal{B}\mathcal{N}$ , car sur  $T + K_1$ ,  $T$  est une  $\mathcal{B}$ -option.
4. Si  $oo(T) = \mathcal{A}\mathcal{N}$ , si le Suivant est Alice alors elle gagne sur  $T$  et  $T + K_1$ . Sur  $T + K_1$  elle peut choisir l'option  $T$ , et sur  $T$  il faut que  $S$  contienne  $\mathcal{A}\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}\mathcal{N}$  ou  $\mathcal{P}\mathcal{N}$ . De plus, si le Suivant est Bob il ne gagne que sur  $T + K_1$ . Donc  $S$  contient un élément de type  $\mathcal{Y}\mathcal{B}$  ou  $\mathcal{N}\mathcal{P}$ . Comme Bob perd sur  $T$  on en déduit qu'ici  $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$  et  $\mathcal{P}\mathcal{N} \notin S$ .
5. Si  $oo(T) = \mathcal{N}\mathcal{A}$ , comme pour le point précédent Alice gagne sur  $T$  et  $T + K_1$  si elle commence, donc  $S$  contient  $\mathcal{A}\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}\mathcal{N}$  ou  $\mathcal{P}\mathcal{N}$  d'une part, et  $\mathcal{A}\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{N}\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{N}\mathcal{P}$  d'autre part (car  $T$  n'est pas une option de  $T + K_1$  gagnante pour Alice). Mais si Bob commence il ne gagne que sur  $T$ , donc  $S$  contient  $\mathcal{B}\mathcal{Y}$  ou  $\mathcal{P}\mathcal{N}$ . Comme il perd sur  $T + K_1$ , on a  $\mathcal{Y} = \mathcal{N}$  et  $\mathcal{N}\mathcal{P} \notin S$ .
6. Si  $oo(T) = \mathcal{B}\mathcal{N}$ , en remplaçant Alice par Bob, le même raisonnement que pour le 4e point nous conduit à l'expression souhaitée.
7. Si  $oo(T) = \mathcal{N}\mathcal{B}$ , en remplaçant Alice par Bob, le même raisonnement que pour le 5e point nous conduit à l'expression souhaitée.
8. Si  $oo(T) = \mathcal{P}\mathcal{N}$ , alors le Suivant n'a aucun coup gagnant sur  $T$ , donc toute option est de bitype  $\mathcal{N}\mathcal{Z}$ .
9. Si  $oo(T) = \mathcal{N}\mathcal{P}$ , alors le Suivant a un coup gagnant sur  $T$ . Donc  $\mathcal{P}\mathcal{N} \in S$  ou  $S$  contient  $(\mathcal{A}\mathcal{A} \text{ ou } \mathcal{A}\mathcal{N})$  et  $(\mathcal{B}\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{B}\mathcal{N})$ . Comme de plus le Suivant n'a aucun coup gagnant sur  $T + K_1$ , on en conclut que  $\mathcal{A}\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}\mathcal{B}$  ne sont pas dans  $S$ .



Cette propriété sera très utile par la suite pour déterminer le bitype d'une chenille  $C$ , connaissant celui de ses options. Comme pour les types simples avec la Proposition 6.4.2, la présence de certains éléments dans  $S$  (Proposition 6.4.9), couplée avec l'absence d'autres éléments (Proposition 6.4.8) nous permettra de déterminer le bitype d'un lc-graphe donné.

Définissons maintenant un ordre partiel sur les bitypes, et, par extension, sur les lc-graphes.

## 6.5 Ordre des bitypes

L'objectif de cette Section est de donner un ordre entre les bitypes afin de pouvoir, pour un lc-graphe  $T$  donné, majorer ou minorer son bitype en fonction des coups gagnants qui sont connus pour l'un ou l'autre des joueurs sur  $T$  et/ou sur  $T + K_1$ .

Les bitypes peuvent être rassemblés en trois "domaines" :

1. Le domaine d'Alice : bitypes  $\mathcal{AA}$ ,  $\mathcal{AN}$  et  $\mathcal{NA}$ ;
2. Le domaine du Suivant : bitypes  $\mathcal{NN}$ ,  $\mathcal{NP}$  et  $\mathcal{PN}$ ;
3. Le domaine de Bob : bitypes  $\mathcal{BB}$ ,  $\mathcal{BN}$  et  $\mathcal{NB}$ ;

Ce classement est issu du fait que dans le premier domaine, Alice gagne plus souvent que le Suivant ou que Bob, et ceci sur  $G$  et  $G + K_1$ . Les autres domaines ont des propriétés similaires. Passons maintenant au classement des bitypes signés proprement dits.

Pour tout lc-graphe  $G$ , quatre cas sont considérés :

1. Le Suivant est Alice et le jeu est  $G$ ;
2. Le Suivant est Alice et le jeu est  $G + K_1$ ;
3. Le Suivant est Bob et le jeu est  $G$ ;
4. Le Suivant est Bob et le jeu est  $G + K_1$ ;

Le cas dans lequel on se trouve est appelé **condition de jeu**. Une partie de position courante  $G$  pourra être considérée suivant l'une ou l'autre de ces conditions de jeu.

Définissons maintenant formellement cet ordre, noté  $\preceq$  :

**Définition 6.5.1** *Soient  $\mathcal{XY}$  et  $\mathcal{X'Y'}$  deux bitypes. On dit que  $\mathcal{XY}$  est inférieur ou égal à  $\mathcal{X'Y'}$  et on note  $\mathcal{XY} \preceq \mathcal{X'Y'}$  si pour tous  $G$  et  $H$  de bitypes respectifs  $\mathcal{XY}$  et  $\mathcal{X'Y'}$  on a : pour chacune des quatre conditions de jeu, Bob gagne sur  $H$  s'il gagne sur  $G$ .*

Contrairement à l'usage dans les jeux combinatoires partisans où par convention l'ordre est défini par rapport à Alice (c.f. Chapitre 1), l'ordre a été ici défini par rapport à Bob car c'est la plupart du temps pour Bob qu'il est le plus difficile de découvrir un coup gagnant, ou de démontrer qu'il n'y en a pas. Ainsi un bitype plus grand qu'un autre sera plus fréquemment gagnant pour Bob, plutôt que pour Alice qui est la convention généralement utilisée.

En notant  $g(\mathcal{XY})$  le quadruplet  $(J_1, J_2, J_3, J_4)$  où  $J_i \in \{A, B\}$  est le joueur gagnant la partie pour la condition de jeu  $i$ , on a :

1. Dans le domaine d'Alice :  $g(\mathcal{AA}) = AAAA$ ,  $g(\mathcal{AN}) = AAAB$  et  $g(\mathcal{NA}) = AABA$  ;
  2. Dans le domaine du Suivant :  $g(\mathcal{NN}) = AABB$ ,  $g(\mathcal{NP}) = ABBA$  et  $g(\mathcal{PN}) = BAAB$  ;
  3. Dans le domaine de Bob :  $g(\mathcal{BB}) = BBBB$ ,  $g(\mathcal{BN}) = BABB$  et  $g(\mathcal{NB}) = ABBB$  ;
- On note pour tous bitypes  $\mathcal{XY}$  et  $\mathcal{X'Y'}$  :

$$\mathcal{XY} \prec \mathcal{X'Y'} \text{ si et seulement si } \mathcal{XY} \preceq \mathcal{X'Y'} \text{ et } \mathcal{XY} \neq \mathcal{X'Y'}.$$

De plus, si  $\mathcal{XY}$  et  $\mathcal{X'Y'}$  sont incomparables, on note  $\mathcal{XY} \prec \succ \mathcal{X'Y'}$ .

On a alors les propriétés suivantes :

**Proposition 6.5.2 (Ordre  $\preceq$  des bitypes)**

1. Pour tout bitype  $\mathcal{XY}$ ,  $\mathcal{AA} \preceq \mathcal{XY} \preceq \mathcal{BB}$  ;
2.  $\mathcal{AN} \prec \mathcal{PN} \prec \mathcal{BN}$  ;
3.  $\mathcal{AN} \prec \mathcal{NN} \prec \mathcal{NB}$  ;
4.  $\mathcal{NA} \prec \mathcal{NP} \prec \mathcal{NB}$  ;
5.  $\mathcal{NA} \prec \mathcal{NN} \prec \mathcal{BN}$  ;
6. Pour tout type  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{ZN} \prec \succ \mathcal{NZ}$  ;
7.  $\mathcal{NN} \prec \succ \mathcal{NP}$  et  $\mathcal{NN} \prec \succ \mathcal{PN}$ .

**Preuve:** Pour démontrer que  $\mathcal{XY} \prec \mathcal{X'Y'}$  il suffit de comparer  $g(\mathcal{XY})$  et  $g(\mathcal{X'Y'})$  et de vérifier que si un "B" est en position  $i$  dans le quadruplet  $g(\mathcal{XY})$  alors dans  $g(\mathcal{X'Y'})$  il y a bien un "B" en position  $i$ . Avec la même méthode on vérifie aisément que pour tout  $\mathcal{Z} \neq \mathcal{N}$ ,  $\mathcal{ZN}$  et  $\mathcal{NZ}$  sont incomparables. C'est également le cas entre  $\mathcal{NN}$  et  $\mathcal{NP}$  ou entre  $\mathcal{NN}$  et  $\mathcal{PN}$ . ■

Cet ordre des bitypes sera fréquemment utilisé pour majorer ou minorer le bitype d'un lc-graphe donné lorsque la valeur exacte n'est pas connue. Ce sera par exemple le cas pour les I-chenilles et les P-chenilles (c.f Section 2.5.2).

Mais continuons tout d'abord ce Chapitre avec un théorème permettant de déterminer le nombre chromatique ludique d'un ensemble de lc-graphes à partir de la connaissance du bitype d'un lc-graphe  $G_0$ .

## 6.6 Propriétés des sous-graphes

Nous allons maintenant rechercher des propriétés d'inclusion, c'est-à-dire des propriétés permettant de calculer le type d'un lc-graphe à partir de certaines propriétés d'un de ses sous-graphes. Pour une certaine définition de l'inclusion " $\subseteq$ ", nous souhaiterions obtenir la propriété (\*) suivante :

$$\text{Pour tous lc-graphes } T \text{ et } U, \text{ si } T \subseteq U \text{ et } \sigma(T) = \sigma(U) \text{ alors } oo(T) \preceq oo(U). \quad (*)$$

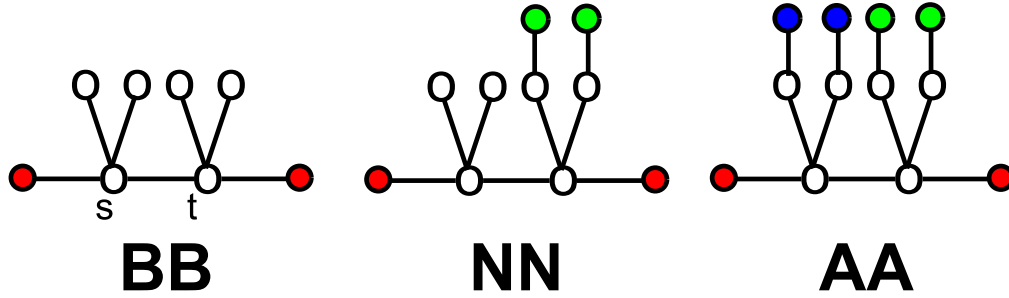


FIGURE 6.20 – lc-arbre où l’ajout de feuilles coloriées fait décroître le bitype.

Nous ajoutons l’hypothèse que  $T$  et  $U$  sont de même signe car dans le cas contraire on pourrait avoir  $oo(U)$  bitype miroir de  $T$ , par exemple si  $U = T + K_1$ . Or nous imposons à l’inclusion l’ajout de sommets isolés, c’est-à-dire pour tout  $T$  on a  $T \subseteq T + K_1$ .

Regardons quelles conditions sont nécessaires à la relation  $\subseteq$  pour que (\*) puisse être vraie.

Commençons par observer que, pour un lc-graphe  $T$  donné, l’ajout de feuilles coloriées peut favoriser Alice. Par exemple reprenons notre exemple de lc-chenille de bitype signé  $\mathcal{BB}_0$  de la Figure 6.13. Il s’agit de  $T = aDDa$  sur laquelle Bob gagne en coloriant une feuille avec une couleur différente de  $a$ , et Alice n’a aucun coup gagnant. Notamment si elle colorie un 4-sommet  $s$  avec une couleur  $b$  alors Bob peut colorier une feuille voisine de l’autre 4-sommet  $t$  avec la 3e couleur  $c$ , et ainsi constituer un lc-graphe équivalent à  $K_{1,3}^{(c)}$ . Par conséquent, si on ajoute deux feuilles coloriées avec une couleur  $c \neq a$  sur les feuilles voisines de  $t$ , Alice a un coup gagnant sur ce nouveau lc-arbre  $T'$  ( $J_{s,b}(T')$  avec  $b \notin \{a, c\}$ ). Comme dans  $T'$  Bob a toujours un coup gagnant en coloriant une feuille voisine de  $s$  avec  $b$ , on a  $oo(T') = \mathcal{NN}$ . Mais on peut lui interdire ce coup en ajoutant à  $T'$  deux feuilles coloriées avec  $b$  sur les feuilles voisines de  $s$ . On vérifie aisément que sur ce nouveau graphe  $T''$  on a  $oo(T'') = \mathcal{AA}$ . Les trois lc-arbres  $T$ ,  $T'$  et  $T''$  sont représentés Figure 6.20.

Nous ne pouvons donc dans le cadre général ajouter des feuilles coloriées sans faire décroître le bitype. Mis à part les graphes réductibles par  $R_2$  en  $K_{1,3}^{(c)}$ , nous ne savons pas à l’heure actuelle s’il existe des lc-graphes de bitype  $\mathcal{BB}$  qui restent de bitype  $\mathcal{BB}$  quelles que soient les feuilles coloriées qu’on lui ajoute.

Notre définition de l’inclusion doit donc interdire l’ajout de feuilles coloriées au voisinage des sommets de  $T$ .

Il s’agit du 4e point de la définition suivante :

**Définition 6.6.1** Soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes. On dit que  $T$  est un **sous-graphe** de  $U$  et on note  $T \subseteq U$  si et seulement si

- $V(T) \subseteq V(U)$  ;
- $E(T) \subseteq E(U)$  ;
- pour tout  $v \in V(T)$ , si  $c_T(v)$  est définie alors  $c_U(v)$  également et  $c_T(v) = c_U(v)$  ;
- pour tout  $v \in V(U) \setminus V(T)$ , si  $N_U(v) \cap V(T) \neq \emptyset$  alors  $v$  n’est pas colorié.

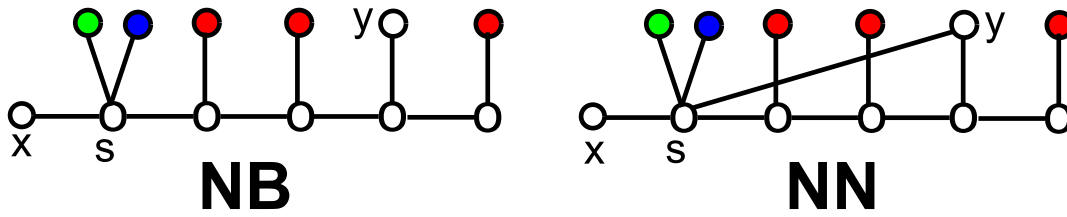


FIGURE 6.21 – lc-graphe où l'ajout d'une arête fait décroître le bitype.

Rappelons que pour un lc-graphe  $T$  et un sommet  $v \in V(T)$ ,  $c_T(v)$  est la couleur de  $v$  dans  $T$  si  $v$  est colorié, et n'est pas défini sinon.  $c_T$  est donc une fonction partielle de sommets de  $T$  dans  $\{1, 2, 3\}$ .

La dernière condition, imposant aux sommets de  $U$  voisins d'un sommet de  $T$  d'être non coloriés, permet aux coups dans  $T$  d'être possibles dans  $U$ . Autrement dit, la 4e condition permet d'avoir la propriété suivante :

**Proposition 6.6.2** *Soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes tels que  $T \subseteq U$ . Alors pour tout  $v \in V(T)$  et pour toute couleur  $c$  on a :*

$$J_{v,c}(T) \in \text{Opt}(T) \quad \Rightarrow \quad J_{v,c}(U) \in \text{Opt}(U).$$

On pourrait penser que si  $T \subseteq U$  et  $o(T) = \mathcal{N}$  alors  $o(U) \in \{\mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ . Cette propriété est effectivement vérifiée pour un grand nombre de chenilles, mais il existe quelques contre-exemples comme  $a^4 0z$  qui est de bitype  $\mathcal{N}\mathcal{A}$  alors que  $a^4 zz$  est de bitype  $\mathcal{A}\mathcal{N}$ . De plus on a toujours  $T \subseteq T + K_1$ , donc par exemple si  $T$  est de bitype  $\mathcal{N}\mathcal{P}$  cette propriété est trivialement fautive. Comme cela a été proposé dans (\*), Il faut donc imposer à  $T$  et  $U$  d'avoir le même signe, ou dans le cas contraire établir une relation entre  $oo(T + K_1)$  et  $oo(U)$ .

Intéressons-nous au cas où les lc-graphes  $T$  et  $U$  sont de même ordre, c'est-à-dire lorsque  $U$  est obtenu à partir de  $T$  par ajout d'arêtes. L'intuition nous laisse supposer que l'ajout d'arêtes ne peut favoriser Alice, en effet plus le lc-graphe est dense plus l'aboutissement de la 3-coloration semble difficile.

Mais ce n'est pas toujours le cas comme on peut l'observer avec l'exemple de la Figure 6.21. Le lc-graphe de gauche est noté  $T = zD_{bc}aa z0a$  Observons que dans  $T$  comme dans  $U$  Bob a un coup gagnant évident : la coloration de  $x$  avec  $a$  (le rouge de la Figure). Ainsi le sommet  $s$  ne pourra plus être colorié. Par conséquent, si Alice commence elle doit empêcher ce choix de Bob. Elle n'a que deux possibilités :  $J_{x,b}$  et  $J_{s,a}$ . Or  $J_{x,b}$  est réductible par  $R_4$  en  $s$  et en appliquant cette réduction on obtient exactement  $J_{s,a}$ . Par conséquent sur  $T$  comme sur  $U$  son seul coup potentiellement gagnant est  $J_{s,a}$ . On observe que  $J_{s,a}(T) \cong a^3 z a^2 + z$ , donc  $oo(J_{s,a}(T)) = \mathcal{A}\mathcal{N}$ . Ainsi le seul coup intéressant pour Bob est la coloration de  $y$  avec  $a$ . Or dans  $J_{s,a}(U)$   $y$  a un nouveau voisin  $s$ , colorié avec  $a$ . Donc Bob n'a plus aucune option intéressante, ainsi  $oo(J_{s,a}(U)) = \mathcal{A}\mathcal{A}$ . On en conclut que

$$oo(T) = \mathcal{N}\mathcal{B} \succ \mathcal{N}\mathcal{N} = oo(U).$$



Donc l'ajout d'arêtes peut dans certains cas favoriser Alice. Pour que la propriété (\*) soit vérifiée, il faudrait donc que  $T$  soit un sous graphe induit de  $U$ . Nous n'avons à ce jour découvert aucun contre-exemple à cette propriété, nous conjecturons donc que :

**Conjecture 6.6.3 (Conjecture du lc-graphe induit)** *Soit  $U$  un lc-graphe. Alors pour tout sous-graphe induit de  $U$  tel que  $T \subseteq U$  on a :*

1. Si  $\sigma(T) = \sigma(U)$  alors  $oo(T) \preceq oo(U)$  ;
2. sinon  $oo(T + K_1) \preceq oo(U)$ .

La principale difficulté de cette conjecture est qu'il existe des options de  $U$  ne vérifiant plus le 4e point de l'inclusion avec  $T$ , ou quelle que soit l'option de  $T$  choisie. En effet Alice peut choisir de colorier un sommet du voisinage de  $V(T)$  et ainsi supprimer l'ensemble des coups gagnants que Bob avait sur  $T$ .

Intéressons-nous maintenant au cas des lc-arbres  $T$  de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ . Dans ce cas pour tout lc-arbre  $U$  tel que  $T \subseteq U$ ,  $T$  est un sous-graphe induit de  $U$ . On peut remarquer que dans ce cas si dans  $U$  Alice colorie un sommet du voisinage de  $V(T)$  alors il n'y a qu'un sommet  $v$  ne vérifiant pas le 4e point de la définition 6.6.1. Par conséquent si dans  $T$  Bob avait deux coups gagnants distincts alors il lui en reste un dans  $U$ . Ainsi dans ce cas Alice n'a aucun coup gagnant sur  $V(U) \setminus V(T)$ .

Ces remarques nous ont conduit à diviser la famille des lc-graphes de bitype  $\mathcal{BB}$  en deux ensembles disjoints  $\mathcal{BB}^+$  et  $\mathcal{BB}^-$  de la manière suivante :

**Définition 6.6.4** Soit  $T$  un lc-graphe de bitype  $\mathcal{BB}$ . On dit que  $T$  est de bitype étendu  $\mathcal{BB}^+$  et on note  $ooo(T) = \mathcal{BB}^+$  si  $T \cong K_{1,3}^{(c)}$  ou si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. toute option non équivalente à  $K_{1,3}^{(c)}$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option ;
2. soit  $T$  a deux  $\mathcal{BB}^+$ -options soit pour l'unique  $\mathcal{BB}^+$ -option  $J_{s,c}(T)$  de  $T$ ,  $T * f_{s,c}$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.

Où  $T * f_{s,c}$  est le lc-graphe  $T$  auquel on a rajouté une feuille  $f_{s,c}$  voisine de  $s$  et coloriée avec  $c$ .

Dans le cas contraire on dit que  $T$  est de bitype étendu  $\mathcal{BB}^-$ .

Commençons par observer que nous n'avons découvert aucun lc-graphe de bitype étendu  $\mathcal{BB}^-$ , notamment sur la famille des lc-arbres. Ceci est dû au fait que, sur les exemples étudiés, l'absence de coup gagnant pour Alice sur  $T$  entraîne la plupart du temps l'existence d'un grand nombre de  $\mathcal{BB}$ -options. Nous n'avons en outre découvert aucun lc-graphe  $T$  de bitype  $\mathcal{BB}$  n'ayant pas de  $\mathcal{BB}$ -option, par exemple vérifiant

$$oo(Opt(T)) = \{\mathcal{BN}, \mathcal{NN}\}.$$

Considérant la famille des lc-arbres de bitype étendu  $\mathcal{BB}^+$  d'une part, et ayant une  $\mathcal{BB}^+$ -option d'autre part, une propriété d'inclusion a pu être établie.

**Théorème 6.6.5 (Théorème d'inclusion)** *Soit  $T$  un lc-arbre. Pour tout lc-arbre  $U$  tel que  $T \subseteq U$  on a :*

1. Si  $ooo(T) = \mathcal{BB}^+$  alors  $ooo(U) = \mathcal{BB}^+$  ;
2. Si  $T$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option alors  $U$  également.

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur  $u(T)$ . Si  $u(T) = 0$  alors on a  $T \cong K_{1,3}^{(c)}$ . Par définition de l'inclusion on a  $U \cong K_{1,3}^{(c)}$ , donc  $ooo(U) = \mathcal{BB}^+$ . Soit maintenant  $T$  un lc-arbre tel que  $u(T) > 0$ .

1. Si  $ooo(T) = \mathcal{BB}^+$  alors deux cas sont à étudier.
  - Si  $T$  a deux  $\mathcal{BB}^+$ -options distinctes  $J_{s,a}(T)$  et  $J_{t,b}(T)$ , comme  $J_{s,a}(T) \subseteq J_{s,a}(U)$  et  $J_{t,b}(T) \subseteq J_{t,b}(U)$ , par hypothèse de récurrence  $U$  a également deux  $\mathcal{BB}^+$ -options distinctes.  
Il reste à démontrer que toute option de  $U$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Soit  $J_{v,c}(U)$  une option de  $U$ .  
Si  $v \in V(T)$  alors comme  $ooo(T) = \mathcal{BB}^+$ ,  $J_{v,c}(T)$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Par hypothèse de récurrence on en déduit que  $J_{v,c}(U)$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.  
Si  $v \in N_U(V(T))$  alors comme  $T$  a deux  $\mathcal{BB}^+$ -options distinctes, le lc-arbre  $T_v = J_{v,c}(U[V(T) \cup \{v\}])$  a au moins une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Or  $T_v \subseteq J_{v,c}(U)$ , donc par hypothèse de récurrence  $J_{v,c}(U)$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.  
Enfin si  $v \in V(U) \setminus N_U^+(V(T))$  alors on a  $T \subseteq J_{v,c}(U)$ . Donc par hypothèse de récurrence  $J_{v,c}(U)$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. On en conclut que  $ooo(U) = \mathcal{BB}^+$ .
  - Si pour l'unique  $\mathcal{BB}^+$ -option  $J_{s,a}(T)$  de  $T$ ,  $T' = T * f_{s,a}$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option  $J_{t,b}(T')$ , alors posons  $U' = U * f_{s,a}$ . Comme  $J_{s,a}(T) \subseteq J_{s,a}(U)$  par hypothèse de récurrence  $ooo(J_{s,a}(U)) = \mathcal{BB}^+$ . De plus  $J_{t,b}(T') \subseteq J_{t,b}(U')$  donc  $U'$  a comme  $T'$  une  $\mathcal{BB}^+$ -option.  
Il reste à démontrer que toute option de  $U$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Soit  $J_{v,c}(U)$  une option de  $U$ .  
Si  $v \in V(T)$  alors comme  $ooo(T) = \mathcal{BB}^+$ ,  $J_{v,c}(T)$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Par hypothèse de récurrence on en déduit que  $J_{v,c}(U)$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.  
Sinon si  $v \in N_U(s)$  et  $a = c$  alors  $T' \subseteq J_{v,c}(U)$ , donc par hypothèse de récurrence  $J_{v,c}(U)$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.  
Sinon si  $v \in N_U(V(T))$  alors  $J_{s,a}(T) \subseteq J_{s,a}(J_{v,c}(U))$ , donc par hypothèse de récurrence  $J_{s,a}(J_{v,c}(U))$  est de bitype  $\mathcal{BB}^+$ .  
Enfin si  $v \in V(U) \setminus N_U^+(V(T))$  alors on a  $T \subseteq J_{v,c}(U)$ . Donc par hypothèse de récurrence  $J_{v,c}(U)$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. On en conclut que  $ooo(U) = \mathcal{BB}^+$ .
2. Si  $T$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option  $J_{s,a}(T)$  alors comme  $J_{s,a}(T) \subseteq J_{s,a}(U)$ , par hypothèse de récurrence  $J_{s,a}(U)$  est une  $\mathcal{BB}^+$ -option de  $U$ .

■

Ce théorème sera utilisé pour étendre une stratégie gagnante de Bob sur un lc-arbre  $T$  à un sur-graphe  $U$  de  $T$ . Il faudra démontrer que la stratégie gagnante de Bob peut s'appuyer exclusivement sur des  $\mathcal{BB}^+$ -options. Comme nous allons le voir avec la famille des lc-chenilles, pour une instance donnée  $T$  la démonstration de l'extension + sera la plupart du temps facile une fois que l'on aura démontré que  $T$  est de bitype  $\mathcal{BB}$ .

## 6.7 Propriétés d'addition des lc-graphes

Dans cette Section nous allons mettre en évidence des cas de figure où l'on peut calculer  $oo(T + U)$  connaissant  $oo'(T)$  et  $oo'(U)$ .

Les seuls bitypes signés de  $T$  et  $U$  n'étant parfois pas suffisants pour connaître le bitype de  $T + U$ , nous partitionnerons la classe  $\mathcal{AA}$  en sous classes  $\mathcal{AA}^+$  et  $\mathcal{AA}^-$ . Comme pour la Section précédente nous parlerons de **bitypes étendus** et nous noterons  $ooo(T)$  le bitype étendu de  $T$ , qui sera le bitype de  $T$  si la classe n'est pas partitionnée.

### 6.7.1 Symétries de l'opérateur $\oplus$

Rappelons que l'opérateur  $\oplus$  sur les bitypes signés étendus est défini par :

$$\text{Pour tous lc-graphes } T, U \text{ on a } ooo'(T + U) = ooo'(T) \oplus ooo'(U).$$

Comme nous allons le voir par la suite, dans le cadre général il n'y a pas unicité du bitype signé étendu de  $T + U$  en fonction de ceux de  $T$  et de  $U$ . Par conséquent  $ooo'(T) \oplus ooo'(U)$  est un ensemble de bitypes qui est parfois réduit à un singleton.

Par la suite, nous dirons qu'un coup ou une option est **intéressant(e)** pour Alice (resp. Bob) si son bitype contient  $\mathcal{A}$  ou  $\mathcal{P}$  (resp.  $\mathcal{B}$  ou  $\mathcal{P}$ ) sur l'une de ses deux lettres. En effet, toute option d'un autre bitype contient un coup gagnant pour l'autre joueur sur  $T$  et sur  $T + K_1$ . Les joueurs auront donc intérêt à ne choisir que des options intéressantes.

L'existence de l'opérateur  $\oplus$  entraîne certaines propriétés de symétrie :

**Proposition 6.7.1** *Supposons qu'il existe un opérateur  $\oplus$  tel que, pour tous lc-graphes  $T$  et  $U$ , on a :*

$$ooo'(T + U) = ooo'(T) \oplus ooo'(U).$$

*Soient deux bitypes signés étendus  $\mathcal{X}\mathcal{Y}_i$  et  $\mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j$ . Posons  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}'_k = \mathcal{X}\mathcal{Y}_i \oplus \mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j$ , on a donc  $k = \overline{i + j}$ . (les extensions éventuelles sont omises car elle alourdiraient inutilement les notations). On a les propriétés suivantes :*

1. *Commutativité :  $\mathcal{X}\mathcal{Y}_i \oplus \mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j = \mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j \oplus \mathcal{X}\mathcal{Y}_i$  ;*
2. *Symétrie centrale :  $\mathcal{X}\mathcal{Y}_i \oplus \mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j = \mathcal{Y}\mathcal{X}_{1-i} \oplus \mathcal{Y}'\mathcal{X}'_{1-j}$  ;*
3. *Antisymétrie axiale gauche :  $\mathcal{Y}\mathcal{X}_{1-i} \oplus \mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j = \mathcal{Z}'\mathcal{Z}'_{1-k}$  ;*
4. *Antisymétrie axiale droite :  $\mathcal{X}\mathcal{Y}_i \oplus \mathcal{Y}'\mathcal{X}'_{1-j} = \mathcal{Z}'\mathcal{Z}'_{1-k}$  ;*

Rappelons que le signe du bitype est toujours 0 ou 1.

**Preuve:** Soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes de bitypes signés étendus  $\mathcal{X}\mathcal{Y}_i$  et  $\mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j$  respectivement. La réunion  $T + U$  est donc de bitype  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}'_k$ , avec  $k = \overline{i + j}$  puisque le signe de  $T + U$  est la parité de  $u(T + U) = u(T) + u(U)$ . Ces 4 propriétés découlent de la définition des bitypes et de la notion de bitype miroir.

Les extensions seront omises car elles sont inchangées par passage au miroir. En effet, lorsqu'une extension  $\mathcal{X}\mathcal{Y}_i^+$  a été définie par la présence d'une option d'un bitype étendu

particulier  $\mathcal{X}'\mathcal{Y}'_{1-i}{}^d$  parmi les options, nous avons parallèlement défini l'extension sur le bi-type miroir  $\mathcal{Y}\mathcal{X}'_{1-i}{}^+$  par la présence d'une  $\mathcal{Y}'\mathcal{X}'_i{}^d$ -option. Par conséquent si  $\mathcal{X}\mathcal{Y}_i$  a l'extension + (resp. -) alors  $\mathcal{Y}\mathcal{X}'_{1-i}$  a également l'extension + (resp. -).

La preuve est immédiate pour la commutativité car la réunion disjointe de deux graphes est commutative.

Pour la symétrie centrale, on sait que  $oo(U + K_1) = \mathcal{Y}'\mathcal{X}'_{1-j}$  (bitype miroir). Par la Proposition 6.4.6, on peut écrire :

$$\mathcal{Y}\mathcal{X}'_{1-i} \oplus \mathcal{Y}'\mathcal{X}'_{1-j} = oo'(T + K_1 + U + K_1) = oo'(T + U) = \mathcal{Z}\mathcal{Z}'.$$

Le lc-graphe  $T + K_1$  a pour bitype signé  $\mathcal{Y}\mathcal{X}'_{1-i}$ . Par conséquent  $oo(T + K_1 + U) = oo'(T + K_1) \oplus oo'(U) = \mathcal{Y}\mathcal{X}'_{1-i} \oplus \mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j$ . Or comme  $oo(T + U) = \mathcal{Z}\mathcal{Z}'$  on a  $oo(T + U + K_1) = \mathcal{Z}'\mathcal{Z}$ . Cela démontre la propriété 3.

Enfin pour la 4ème propriété, le graphe  $U + K_1$  a pour bitype signé  $\mathcal{Y}'\mathcal{X}'_{1-i}$ . Par conséquent  $oo(T + U + K_1) = oo'(T) \oplus oo'(U + K_1) = \mathcal{X}\mathcal{Y}_i \oplus \mathcal{Y}'\mathcal{X}'_{1-j}$ . Or comme  $oo(T + U) = \mathcal{Z}\mathcal{Z}'$  on a  $oo(T + U + K_1) = \mathcal{Z}'\mathcal{Z}$ . ■

La preuve n'utilise que la Proposition 6.4.6 et la commutativité de la réunion disjointe. Par conséquent si la somme  $ooo'(T) \oplus ooo'(U)$  est un ensemble de bitypes, alors ces propriétés restent vérifiées en définissant le miroir d'un ensemble  $E$  de bitypes comme l'ensemble des miroirs des éléments de  $E$ .

Ces propriétés de symétrie vont nous permettre de diminuer le nombre de cas à étudier. En effet, si une valeur  $\mathcal{X}\mathcal{Y}_i^d \oplus \mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j^e$  est connue ( $d$  et  $e$  sont les extensions, éléments de  $\{-, +\}$ ), alors cela entraîne la connaissance des valeurs de  $\mathcal{Y}\mathcal{X}'_{1-i}{}^d \oplus \mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j^e$ ,  $\mathcal{X}\mathcal{Y}_i^d \oplus \mathcal{Y}'\mathcal{X}'_{1-j}{}^e$  et  $\mathcal{Y}\mathcal{X}'_{1-i}{}^d \oplus \mathcal{Y}'\mathcal{X}'_{1-j}{}^e$ . Plus précisément, pour un bitype  $\mathcal{Z}\mathcal{N}$  (où  $\mathcal{Z}$  est un type quelconque), la connaissance des valeurs  $\mathcal{Z}\mathcal{N}_i^d \oplus \mathcal{Z}'\mathcal{N}_j^e$  pour tous  $\mathcal{Z}'$ ,  $i$ ,  $j$ ,  $d$  et  $e$  implique que l'on sait calculer en temps constant les valeurs  $\mathcal{N}\mathcal{Z}_i^d \oplus \mathcal{Z}'\mathcal{N}_j^e$ ,  $\mathcal{Z}\mathcal{N}_i^d \oplus \mathcal{N}\mathcal{Z}_j^e$  et  $\mathcal{N}\mathcal{Z}_i^d \oplus \mathcal{N}\mathcal{Z}_j^e$ , cela pour tous  $\mathcal{Z}'$ ,  $i$ ,  $j$ ,  $d$  et  $e$ .

### 6.7.2 Ajout de composantes, bitype $\mathcal{B}\mathcal{B}$

Commençons par démontrer que l'ajout de composantes à un lc-graphe  $T$  ne peut diminuer le bitype, donc préserve l'existence de stratégies gagnantes pour Bob sur chacune des conditions de jeu.

**Proposition 6.7.2 (Ajout de composantes)** *Soit  $T$  un lc-graphe. Alors pour tout lc-graphe  $U$  on a :*

1. Si  $\sigma(U) = 0$  alors  $oo(T + U) \succeq oo(T)$  ;
2. Si  $\sigma(U) = 1$  alors  $oo(T + U) \succeq oo(T + K_1)$ .

**Preuve:** Par récurrence sur  $u(T)$ . Si  $u(T) = 0$  alors soit on a  $T = \emptyset$ , et  $oo(T) = oo(T + K_1) = \mathcal{A}\mathcal{A}$ , soit on a  $T \cong K_{1,3}^{(c)}$  et  $oo(T) = oo(T + K_1) = \mathcal{B}\mathcal{B} = oo(T + U)$  puisque  $T + U \cong K_{1,3}^{(c)}$ .

Soit maintenant  $T$  tel que  $u(T) > 0$ . Pour chacune des quatre conditions de jeu, il faut démontrer que si Bob gagne sur  $T$  (ou  $T + K_1$  pour le second point) alors il gagne également sur  $T + U$ .

1. Si  $\sigma(U) = 0$ , regardons chacune des quatre conditions de jeu.
  - **Jeu sur  $T$ , Alice commence** : Supposons que sur toute option  $T'$  de  $T$  Bob a un coup gagnant. Alors par hypothèse de récurrence sur toute option de  $T + U$  de la forme  $T' + U$  Bob a un coup gagnant. Dans  $T + U$  si Alice joue sur  $U$  alors Bob joue à son tour sur  $U$ . S'il obtient un lc-graphe  $U_1 \cong K_{1,3}^{(c)}$  alors il gagne. Sinon on a  $\sigma(U_1) = \sigma(U) = 0$ . Itérons ce procédé : tant qu'Alice joue sur  $U_i$  alors Bob joue à son tour sur  $U_i$  pour obtenir  $U_{i+1}$  de même signe que  $U$ . Ainsi en  $u(U)$  étapes la composante  $U$  sera complètement coloriée, donc Alice sera forcée de jouer sur  $T$  et donc perdra la partie.
  - **Jeu sur  $T + K_1$ , Alice commence** : Supposons que sur toute option  $(T + K_1)'$  de  $T + K_1$  Bob a un coup gagnant. Alors par hypothèse de récurrence sur toute option de  $T + U + K_1$  de la forme  $(T + K_1)' + U$  Bob a un coup gagnant. Dans  $T + U + K_1$  tant qu'Alice joue sur  $U$  alors Bob joue à son tour sur  $U$  et obtient soit  $U_i \cong K_{1,3}^{(c)}$  (il a donc gagné) soit  $U_i$  de signe 0. On itère ce procédé jusqu'à ce que  $U_i \cong \emptyset$ . Ainsi Alice perd car elle est forcée de jouer sur  $T + K_1$ .
  - **Jeu sur  $T$ , Bob commence** : Supposons que sur  $T$  il ait un coup gagnant  $T'$ . Alors par hypothèse de récurrence Alice n'a aucun coup gagnant sur  $T' + U$ . Ainsi  $T' + U$  est un coup gagnant pour Bob dans  $T + U$ .
  - **Jeu sur  $T + K_1$ , Bob commence** : Supposons que sur  $T + K_1$  il ait un coup gagnant  $(T + K_1)'$ . Alors par hypothèse de récurrence Alice n'a aucun coup gagnant sur  $(T + K_1)' + U$ . Ainsi  $(T + K_1)' + U$  est un coup gagnant pour Bob dans  $T + U + K_1$ .

On en conclut que  $oo(T + U) \succeq oo(T)$ .
2. Si  $\sigma(U) = 1$ , il suffit de reprendre la preuve du premier point en remplaçant  $U$  par  $U + K_1$ , on obtient ainsi  $oo(T + U + K_1) \succeq oo(T)$ . Or par définition de l'ordre  $\succeq$ , pour tous lc-graphes  $G$  et  $H$  on a  $oo(G + K_1) \succeq oo(H + K_1)$  si et seulement si  $oo(G) \succeq oo(H)$ , on en conclut que  $oo(T + U) \succeq oo(T + K_1)$ .

■

Commençons par signaler une conséquence directe de la Proposition 6.7.2 :

**Corollaire 6.7.3** *Pour tous lc-graphes  $T$  et  $U$ , si  $oo(T) = \mathcal{BB}$  alors  $oo(T + U) = \mathcal{BB}$ .*

Cette propriété sera fréquemment utilisée pour rechercher une stratégie gagnante pour Bob sur un lc-graphe non connexe : il suffira de découvrir une  $\mathcal{BB}$ -option sur l'une des composantes connexes.

Le Corollaire 6.7.3 peut se réécrire de la manière suivante :

$$\text{Pour tout bitype étendu } \mathcal{XY}^d \text{ on a } \mathcal{XY}^d \oplus \mathcal{BB} = \mathcal{BB}.$$

Comme nous allons le voir par la suite, la somme  $\mathcal{XY}_i \oplus \mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j$  peut parfois prendre plusieurs valeurs. En général il s'agit d'un **ensemble de bitypes**. On utilisera une forme contractée pour décrire cet ensemble de bitypes  $\mathcal{XY}_i \oplus \mathcal{X}'\mathcal{Y}'_j$ , par exemple  $\mathcal{AX}$ ,  $\mathcal{YB}$  ou  $\mathcal{QY}$  (avec  $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{B}\}$ ).

### 6.7.3 Addition pour les bitypes ne contenant pas de type $\mathcal{A}$

Démontrons maintenant quelques résultats sur les lc-graphes contenant une composante de bitype  $\mathcal{NN}$ .

**Théorème 6.7.4** *Soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes.*

1. *Si  $oo(T) \succeq \mathcal{NN}$  et  $oo(U) \succeq \mathcal{NN}$  alors  $oo(T + U) = \mathcal{BB}$ .*
2. *Si  $oo'(T) = \mathcal{NN}_i$  et  $oo(U) = \mathcal{PN}$  alors  $oo(T + U) = \mathcal{BY}$  si  $i = 0$  et  $\mathcal{YB}$  sinon.*
3. *Si  $oo'(T) = \mathcal{NN}_i$  et  $oo(U) = \mathcal{NP}$  alors  $oo(T + U) = \mathcal{YB}$  si  $i = 0$  et  $\mathcal{BY}'$  sinon.*

Où les variables  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{Y}'$  correspondent à un élément de l'ensemble  $\{\mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ .

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur  $u(T + U)$ . Si  $u(T + U) = 0$  alors soit  $T + U$  est complètement colorié donc ni  $T$  ni  $U$  ne peuvent être de bitype  $\mathcal{NN}$ , soit  $T$  (ou  $U$ ) est réductible par  $R_2$  en  $K_{1,3}^c$ . Dans ce cas on a  $oo(T) = \mathcal{BB}$ , par le Corollaire 6.7.3 on en déduit que  $oo(T + U) = \mathcal{BB}$ . Supposons maintenant le théorème vrai pour tous lc-graphes  $T'$  et  $U'$  tels que  $u(T' + U') < u(T + U)$ .

1. Sans perte de généralité regardons uniquement les coups sur  $T$ . Soit  $T' + U$  une option de  $T + U$ . Par la Proposition 6.7.2 on a  $oo(T' + U) \succeq oo(U) \succeq \mathcal{NN}$ , donc toute option de  $T + U$  est de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ , et Alice n'a aucun coup gagnant sur  $T + U$  ou  $T + U + K_1$ . Il reste à démontrer que  $T + U$  a une  $\mathcal{BN}$  ou une  $\mathcal{BB}$ -option. Si  $T$  (ou  $U$ ) a une  $\mathcal{NN}$ ,  $\mathcal{NB}$ ,  $\mathcal{BN}$  ou une  $\mathcal{BB}$ -option alors par hypothèse de récurrence sur le 1er point on en déduit que  $T + U$  a une  $\mathcal{BB}$ -option. Dans le cas contraire,  $oo(T) = \mathcal{NN}$  et par la Proposition 6.4.9 on sait que  $T$  a une  $\mathcal{PN}$  et une  $\mathcal{NP}$ -option. Si  $U$  est de signe 0, alors la  $\mathcal{PN}$ -option  $T_1$  de  $T$  vérifie  $oo(T_1 + U) \in \{\mathcal{BN}, \mathcal{BB}\}$  par hypothèse de récurrence sur le second point. Si  $U$  est de signe 1 alors c'est la  $\mathcal{NP}$ -option  $T_2$  de  $T$  qui vérifie  $oo(T_2 + U) \in \{\mathcal{BN}, \mathcal{BB}\}$  par hypothèse de récurrence sur le troisième point. On en conclut que  $T + U$  a toujours une  $\mathcal{BN}$  ou une  $\mathcal{BB}$ -option, donc que  $oo(T + U) = \mathcal{BB}$ .
2. Notons  $\sigma$  le signe de  $U$ . Par la Proposition 6.7.2 on a  $oo(T + U) \succeq oo(T + \sigma.K_1) \succeq \mathcal{NN}$ , donc  $oo(T + U) \in \{\mathcal{NN}, \mathcal{NB}, \mathcal{BN}, \mathcal{BB}\}$ . D'autre part, si  $i = 0$ , par la Proposition 6.7.2, on a  $oo(T + U) \succeq oo(U)$ , donc  $oo(T + U) \in \{\mathcal{PN}, \mathcal{BN}, \mathcal{BB}\}$ . En intersectant ces deux ensembles, on en déduit que  $oo(T + U)$  est de la forme  $\mathcal{BY}$ . Si  $i = 1$  alors par la Proposition 6.7.2 on a  $oo(T + U) \succeq oo(U + K_1)$  donc on a  $oo(T + U) \in \{\mathcal{NP}, \mathcal{NB}, \mathcal{BB}\}$ . Par conséquent dans ce cas  $oo(T + U)$  est de la forme  $\mathcal{YB}$ .
3. Comme pour le cas précédent, par la Proposition 6.7.2 on a  $oo(T + U) \succeq oo(T + \sigma.K_1) \succeq \mathcal{NN}$ , donc  $oo(T + U) \in \{\mathcal{NN}, \mathcal{NB}, \mathcal{BN}, \mathcal{BB}\}$ . Si  $i = 0$  alors par la Proposition 6.7.2 on a  $oo(T + U) \succeq oo(U)$ , donc  $oo(T + U) \in \{\mathcal{NP}, \mathcal{NB}, \mathcal{BB}\}$ . Par conséquent dans ce cas  $oo(T + U)$  est de la forme  $\mathcal{YB}$ . Finalement si  $i = 1$  alors par la Proposition 6.7.2, on a  $oo(T + U) \succeq oo(U + K_1)$  donc  $oo(T + U) \in \{\mathcal{PN}, \mathcal{BN}, \mathcal{BB}\}$ . Par conséquent dans ce cas  $oo(T + U)$  est de la forme  $\mathcal{BY}$ .

■

Le premier point du théorème sera fréquemment utilisé pour mettre en évidence un coup gagnant pour Bob. En effet, lorsqu'un coup sur l'épine dorsale partage une lc-chenille  $T$  en deux composantes de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ , alors par le Théorème 6.7.4, le bitype global de cette option est  $\mathcal{BB}$ , et constitue donc un coup gagnant pour Bob sur  $T$  et  $T + K_1$ .

La lecture de la preuve de ce théorème permet également de mettre en valeur l'importance de la Proposition 6.7.2. Elle permet de limiter considérablement l'ensemble des bitypes possibles pour  $T + U$  connaissant ceux de  $T$  et  $U$ . Cette proposition donne des résultats intéressants pour tous bitypes ne contenant pas de type  $\mathcal{A}$ .

**Théorème 6.7.5 (Théorème d'addition partielle)** *Soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes dont le bitype ne contient pas de type  $\mathcal{A}$ . L'ensemble des bitypes possibles pour  $T + U$  est donné par la table 6.3.*

$\oplus$	BN		NB		PN		NP		NN	
	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$BN_0$	BB	BB	BB	BB	BY	BB	BB	YB	BB	BB
$BN_1$	BB	BB	BB	BB	BB	YB	BY	BB	BB	BB
$NB_0$	BB	BB	BB	BB	BB	BY	YB	BB	BB	BB
$NB_1$	BB	BB	BB	BB	YB	BB	BB	BY	BB	BB
$PN_0$	BY	BB	BB	YB	QY	BB	BB	YQ	BY	YB
$PN_1$	BB	YB	BY	BB	BB	YQ	QY	BB	BY	YB
$NP_0$	BB	BY	YB	BB	BB	QY	YQ	BB	YB	BY
$NP_1$	YB	BB	BB	BY	YQ	BB	BB	QY	YB	BY
$NN_0$	BB	BB	BB	BB	BY	BY	YB	YB	BB	BB
$NN_1$	BB	BB	BB	BB	YB	YB	BY	BY	BB	BB

TABLE 6.3 – Table d'addition des bitypes ne contenant pas de type  $\mathcal{A}$ , avec  $\mathcal{Y} \in \{\mathcal{N}, \mathcal{B}\}$  et  $\mathcal{Q} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{B}\}$ .

**Preuve:** La preuve est basée sur les propriétés de symétrie (Proposition 6.7.1) et sur la Proposition 6.7.2. Démontrons les valeurs de la table pour  $oo(T)$  et  $oo(U)$  de la forme  $\mathcal{ZN}$ . Les symétries centrale et axiale nous permettront de déduire les autres valeurs. De plus, dans le Théorème 6.7.4 nous avons déjà démontré plusieurs valeurs. Il ne reste donc qu'à démontrer les valeurs de  $\mathcal{PN}_i \oplus \mathcal{PN}_j$  et  $\mathcal{BN}_i \oplus \mathcal{PN}_j$  pour tous  $i$  et  $j$ .

La Proposition 6.7.2 peut se réécrire ainsi :  $oo(T + U) \succeq oo(T + \sigma(U).K_1)$ . En échangeant les rôles de  $T$  et  $U$ , on a également  $oo(T + U) \succeq oo(U + \sigma(T).K_1)$ . On a donc la propriété suivante :

$$oo(T + U) \in \{\mathcal{XY} \succeq oo(T + \sigma(U).K_1)\} \cap \{\mathcal{X'Y'} \succeq oo(U + \sigma(T).K_1)\}.$$

Réécrivons maintenant cette expression pour chacun des huit cas à étudier :

1.  $\mathcal{PN}_0 \oplus \mathcal{PN}_0$  :  $oo(T + U) \in \{\mathcal{PN}, \mathcal{BN}, \mathcal{BB}\} \cap \{\mathcal{PN}, \mathcal{BN}, \mathcal{BB}\}$ , donc  $oo(T + U) = \mathcal{QY}$ .
2.  $\mathcal{PN}_0 \oplus \mathcal{PN}_1$  :  $oo(T + U) \in \{\mathcal{NP}, \mathcal{NB}, \mathcal{BB}\} \cap \{\mathcal{PN}, \mathcal{BN}, \mathcal{BB}\}$ , donc  $oo(T + U) = \mathcal{BB}$ .

3.  $\mathcal{PN}_1 \oplus \mathcal{PN}_0 : oo(T+U) \in \{\mathcal{PN}, \mathcal{BN}, \mathcal{BB}\} \cap \{\mathcal{NP}, \mathcal{NB}, \mathcal{BB}\}$ , donc  $oo(T+U) = \mathcal{BB}$ .
4.  $\mathcal{PN}_1 \oplus \mathcal{PN}_1 : oo(T+U) \in \{\mathcal{NP}, \mathcal{NB}, \mathcal{BB}\} \cap \{\mathcal{NP}, \mathcal{NB}, \mathcal{BB}\}$ , donc  $oo(T+U) = \mathcal{YQ}$ .
5.  $\mathcal{BN}_0 \oplus \mathcal{PN}_0 : oo(T+U) \in \{\mathcal{BN}, \mathcal{BB}\} \cap \{\mathcal{PN}, \mathcal{BN}, \mathcal{BB}\}$ , donc  $oo(T+U) = \mathcal{BY}$ .
6.  $\mathcal{BN}_0 \oplus \mathcal{PN}_1 : oo(T+U) \in \{\mathcal{NB}, \mathcal{BB}\} \cap \{\mathcal{PN}, \mathcal{BN}, \mathcal{BB}\}$ , donc  $oo(T+U) = \mathcal{BB}$ .
7.  $\mathcal{BN}_1 \oplus \mathcal{PN}_0 : oo(T+U) \in \{\mathcal{BN}, \mathcal{BB}\} \cap \{\mathcal{NP}, \mathcal{NB}, \mathcal{BB}\}$ , donc  $oo(T+U) = \mathcal{BB}$ .
8.  $\mathcal{BN}_1 \oplus \mathcal{PN}_1 : oo(T+U) \in \{\mathcal{NB}, \mathcal{BB}\} \cap \{\mathcal{NP}, \mathcal{NB}, \mathcal{BB}\}$ , donc  $oo(T+U) = \mathcal{YB}$ .

■

Concernant les bitypes  $\mathcal{AA}$ ,  $\mathcal{AN}$  et  $\mathcal{NA}$ , cette méthode ne permet pas d'obtenir des ensembles de deux ou trois bitypes. Par exemple pour  $oo'(T) = oo'(U) = \mathcal{AN}_0$  on obtient  $oo(T+U) \succeq \mathcal{AN}$ , soit  $oo(U) \in \{\mathcal{AN}, \mathcal{PN}, \mathcal{NN}, \mathcal{BN}, \mathcal{NB}, \mathcal{BB}\}$ . Dans ces cas les bitypes de  $T$  et de  $U$  ne suffisent pas pour connaître le bitype de  $T+U$ . Nous avons pour cela besoin d'une information supplémentaire sur  $T$  et  $U$ . En partitionnant les classes  $\mathcal{AA}$ ,  $\mathcal{AN}$ ,  $\mathcal{NA}$ ,  $\mathcal{NN}$  et  $\mathcal{BN}$  en sous-classes, nous avons ainsi défini les bitypes étendus :  $\mathcal{AA}^+$  et  $\mathcal{AA}^-$  pour  $\mathcal{AA}$ ;  $\mathcal{AN}^1$ ,  $\mathcal{AN}^2$ , et  $\mathcal{AN}^-$  pour  $\mathcal{AN}$ ; etc... Le signe  $-$  en exposant correspond à des lc-graphes pour lesquels nous ne savons pas calculer la somme  $\oplus$  : il s'agit de lc-graphes **non conformes**. Pour les autres classes, il s'agit des lc-graphes **conformes** pour lesquels la somme  $\oplus$  est connue quel que soit le second bitype étendu. Cette méthode permet d'obtenir une propriété d'addition avec unicité, c'est-à-dire que pour tous bitypes signés étendus  $\mathcal{X}\mathcal{X}_i'^d$  et  $\mathcal{Y}\mathcal{Y}_j'^e$  (sauf extension  $-$ ), il existe un unique bitype étendu  $\mathcal{Z}\mathcal{Z}'^f$  vérifiant

$$\mathcal{Z}\mathcal{Z}'^f = \mathcal{X}\mathcal{X}_i'^d \oplus \mathcal{Y}\mathcal{Y}_j'^e.$$

Le calcul des sommes pour les bitypes  $\mathcal{AN}$ ,  $\mathcal{NA}$ ,  $\mathcal{NN}$  et  $\mathcal{BN}$  sortant du cadre de cette thèse, nous nous limiterons ici à la définition de l'extension sur  $\mathcal{AA}$ , car il nous faudra fréquemment connaître le bitype de  $T+U$  lorsque  $T$  est de bitype  $\mathcal{AA}$ .

### 6.7.4 Neutralité des composantes de bitype $\mathcal{AA}^+$

**Définition 6.7.6** Soit  $T$  un lc-graphe de bitype  $\mathcal{AA}$ . On dit que  $T$  est de bitype étendu  $\mathcal{AA}^+$  et on note  $ooo(T) = \mathcal{AA}^+$  si  $u(T) \leq 1$  ou si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1.  $T$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option ;
2. toute option  $T'$  de  $T$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option.

Dans le cas contraire on note  $ooo(T) = \mathcal{AA}^-$ .

En d'autres termes, un lc-graphe  $T$  de bitype  $\mathcal{AA}$  est de bitype étendu  $\mathcal{AA}^+$  si Alice peut toujours choisir des options de bitype  $\mathcal{AA}^+$  quel que soit le Suivant sur  $T$ . Si  $T$  est de bitype étendu  $\mathcal{AA}^-$ , alors il existe au moins une condition de jeu sur laquelle Alice ne peut éviter à un moment donné dans la partie de choisir une option de bitype  $\mathcal{PN}$  pour gagner la partie (ou  $\mathcal{NP}$  en condition de jeu  $T + K_1$ ). Autrement dit sur au moins une condition de jeu Bob a une stratégie gagnante qui force Alice à choisir une option  $\mathcal{PN}$ .

Démontrons maintenant la propriété suivante pour les bitypes signés étendus  $\mathcal{AA}_0^+$  et  $\mathcal{AA}_1^+$ .



**Proposition 6.7.7** Soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes. Posons  $ooo'(U) = \mathcal{X}\mathcal{Y}_i^d$ .

1. Si  $ooo'(T) = \mathcal{A}\mathcal{A}_0^+$  alors  $ooo'(T + U) = \mathcal{X}\mathcal{Y}_i^d$ ;
2. Si  $ooo'(T) = \mathcal{A}\mathcal{A}_1^+$  alors  $ooo'(T + U) = \mathcal{Y}\mathcal{X}_{1-i}^d$ ;

**Preuve:** Démontrons cette proposition par récurrence sur  $u(T + U)$ . Si  $u(T + U) = 0$  alors la partie est terminée, on a bien  $oo(T + U) = \mathcal{B}\mathcal{B}$  si  $oo(U) = \mathcal{B}\mathcal{B}$  et  $oo(T + U) = \mathcal{A}\mathcal{A}$  sinon.

1. Démontrons que si  $ooo'(T) = \mathcal{A}\mathcal{A}_0^+$  alors  $ooo'(T + U) = ooo'(U)$ . Grâce aux propriétés de symétrie (Proposition 6.7.1) et comme le cas  $oo(U) = \mathcal{B}\mathcal{B}$  est découlé de la Proposition 6.7.3, il suffit de démontrer l'égalité pour  $oo(U) \in \{\mathcal{A}\mathcal{A}, \mathcal{Z}\mathcal{N}\}$  (où  $\mathcal{Z}$  est un type quelconque) pour conclure la preuve du premier point. En effet, si l'on démontre que  $\mathcal{A}\mathcal{A}_0^+ \oplus \mathcal{Z}\mathcal{N}_i = \mathcal{Z}\mathcal{N}_i$  alors par l'antisymétrie axiale gauche on en déduit que  $\mathcal{N}\mathcal{Z}_{i+1} \oplus \mathcal{A}\mathcal{A}_0^+ = \mathcal{N}\mathcal{Z}_{i+1}$ .
  - Si  $oo(U) = \mathcal{A}\mathcal{A}$  alors comme  $T$  a une  $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$ -option  $T_1$ , par hypothèse de récurrence on a  $oo(T_1 + U) = \mathcal{A}\mathcal{A}_1^+ \oplus \mathcal{A}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}$ , donc  $T + U$  a une  $\mathcal{A}\mathcal{A}$ -option. D'autre part, comme  $ooo(T) = \mathcal{A}\mathcal{A}^+$ , pour toute option  $T'$  de  $T$  il existe une option  $T''$  de bitype  $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$ . Par hypothèse de récurrence on en déduit qu'aucun coup sur  $T$  n'est intéressant pour Bob. De plus, dans  $T + U$ , toute option de la forme  $T + U'$  est de même bitype que  $U'$ . Puisque  $oo(U) = \mathcal{A}\mathcal{A}$  il n'est donc pas intéressant pour Bob. Par conséquent Bob n'a aucun coup gagnant sur  $T + U$  ou  $T + U + K_1$ , donc  $oo(T + U) = \mathcal{A}\mathcal{A}$ .  
Concernant le cas particulier  $oo(U) = \mathcal{A}\mathcal{A}^+$ , par définition de l'extension  $U$  a une  $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$ -option  $U_1$ . Par hypothèse de récurrence  $ooo(T + U_1) = \mathcal{A}\mathcal{A}^+$  donc  $T + U$  a une  $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$ -option. D'autre part toute option  $U'$  de  $U$  a une  $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$ -option. Par hypothèse de récurrence on en déduit que toute option de  $T + U$  a une  $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$ -option, donc que  $oo(T + U) = \mathcal{A}\mathcal{A}^+$ .
  - Si  $oo(U) = \mathcal{Z}\mathcal{N}$  alors le Suivant a un coup gagnant sur  $U + K_1$ , noté  $(U + K_1)'$ . Par hypothèse de récurrence  $T + (U + K_1)'$  est un coup gagnant sur  $T + U + K_1$ . On en déduit qu'il existe  $\mathcal{Z}'$  tel que  $oo(T + U) = \mathcal{Z}'\mathcal{N}$ . Il reste à démontrer que  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$ . Si le Suivant a un coup gagnant  $U'$  dans  $U$ , alors par hypothèse de récurrence  $T + U'$  est un coup gagnant dans  $T + U$ . Si par contre il n'a aucun coup gagnant sur  $U$  alors par hypothèse de récurrence dans  $T + U$  aucun coup sur  $U$  ne constitue un coup gagnant. Or si le Suivant joue sur  $T$ , l'autre joueur peut choisir une  $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$ -option  $T''$ . On a donc  $oo(T'' + U) = oo(U)$ , par conséquent dans ce cas le Suivant n'a aucun coup gagnant sur  $T + U$ . Dans tous les cas il a donc les mêmes possibilités sur  $U$  et  $T + U$ , ce qui entraîne que  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}'$ .
2. Si  $oo(U) = \mathcal{A}\mathcal{A}_1^+$ , par la symétrie centrale (Proposition 6.7.1) on peut écrire :

$$\mathcal{A}\mathcal{A}_1^+ \oplus \mathcal{X}\mathcal{Y}_i^d = \mathcal{A}\mathcal{A}_0^+ \oplus \mathcal{Y}\mathcal{X}_{i+1}^d = \mathcal{Y}\mathcal{X}_{i+1}^d.$$

Ce qui conclut la preuve du second point. ■

Cette proposition sera fréquemment utilisée pour éliminer une composante de bitype  $\mathcal{A}\mathcal{A}^+$  dans un lc-graphe. Ainsi lorsque le Suivant choisira une option  $G = T + U$ , si

$ooo(T) = \mathcal{AA}^+$  alors nous considérerons le lc-graphe  $G' = U + \sigma(T).K_1$ , équivalent à  $G$  par la Proposition 6.7.7.

## 6.8 Conclusion

Après un rapide état de l'art des connaissances sur le nombre chromatique ludique et ses variantes, nous nous sommes intéressés au problème de caractérisation des arbres de nombre chromatique ludique 3. Nous avons démontré cinq réductions de graphes nous permettant de nous limiter à l'étude des lc-graphes plutôt que de l'ensemble des graphes partiellement 3-coloriés.

Dans le but d'étudier ce problème de caractérisation, nous avons repris et étendu à notre jeu  $\mathcal{J}$  une notion propre aux jeux combinatoires partisans : les types. Cette division des lc-graphes en quatre classes  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{N}$  et  $\mathcal{A}$  permet de faire le parallèle avec le nombre chromatique ludique classique dit A-ludique et le nombre chromatique B-ludique où Bob commence à jouer.

Néanmoins cette définition des types n'était pas assez riche pour permettre de calculer le type d'un lc-graphe non connexe uniquement en fonction des types de ses composantes connexes. C'est pour cette raison que nous avons introduit les **bitypes signés étendus** qui nous permettent de calculer le bitype d'un lc-graphe non connexe en fonction de ceux de ses composantes connexes, ou du moins d'en connaître une expression limitée à deux ou trois bitypes (c.f. table 6.3).

Nous avons ensuite démontré une propriété sur les sur-graphes d'un lc-graphe donné, permettant notamment d'étendre une stratégie gagnante de Bob à un sur-graphe : *le théorème d'inclusion*.

Nous avons également défini un ordre partiel sur les bitypes qui sera fréquemment utilisé par la suite lorsque sur un lc-graphe donné  $G$  nous aurons mis en évidence une stratégie gagnante pour un seul des deux joueurs : nous majorerons ou minorerons le bitype de  $G$ .

Terminons ce chapitre par quelques perspectives et questions ouvertes.

Concernant les réductions de graphes, deux autres réductions portant sur des structures locales sont conjecturées.

La première, dite **réduction de feuilles** et notée  $R_5$  porte sur les sommets de haut degré possédant plusieurs feuilles voisines.

**Conjecture 6.8.1 (Réduction de feuilles  $R_5$ )** *Soit  $G$  un lc-graphe irréductible par  $R_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  ou  $R_4$ . S'il existe un sommet  $s$  de degré  $d \geq 7$  possédant 5 feuilles voisines non coloriées, la suppression de 2 feuilles voisines non coloriées de  $s$  aboutit à un lc-graphe  $G'$  équivalent à  $G$ .*

Cette réduction, représentée Figure 6.22 est facile à démontrer sur des familles particulières comme les lc-chenilles ou les arbres non coloriés, mais la démonstration n'a pu être étendue à l'ensembles des lc-graphes. La borne de 5 feuilles voisines est la meilleure possible car en deçà on peut avoir des bitypes différents entre  $s$  avec 4 feuilles voisines et  $s$  avec 2 feuilles voisines. Nous en construirons un exemple dans la Section 8.4. La réduction de

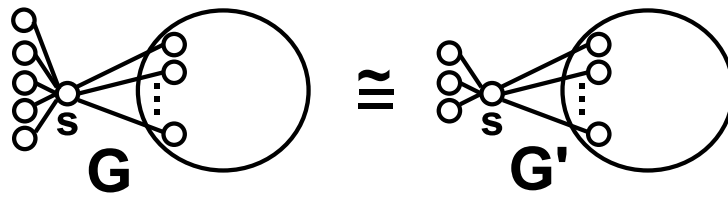


FIGURE 6.22 – Réduction de feuilles  $R_5$  : suppression de deux feuilles voisines d'un sommet  $s$  de degré au moins 7 et possédant au moins 5 feuilles.

feuilles  $R_5$  devrait pouvoir être étendue pour les lc-chenilles à  $k = 1$  voisin non-feuille de  $s$  (au lieu de  $k \geq 2$ ), voire à la déconnexion d'une feuille au lieu du retrait de deux feuilles. Ces extensions semblent s'appuyer sur la conformité du lc-graphe considéré et sur une autre propriété : l'absence de lc-graphes de cette forme ne possédant que des  $\mathcal{NA}$ ,  $\mathcal{NN}$  ou  $\mathcal{NB}$ -options. Il existe probablement d'autres réductions du même type que  $R_5$ , c'est à dire portant sur des structures locales d'un graphe connexe. Citons la **réduction de chaîne** qui permettrait de limiter la longueur des successions de sommets de degré 2 dans un graphe (notamment dans les chenilles avec trous).

**Conjecture 6.8.2 (Réduction de chaîne  $R_6$ )** *Soit  $G$  un graphe possédant une chaîne de 4 sommets  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$  de degré 2. On a :*

$$G \cong G - \{u_2u_3\}.$$

Pour démontrer cette réduction, il suffirait de prouver que si un graphe  $G$  contient une feuille coloriée  $f$  dont le voisin est de degré 2 et a un voisin de degré 2 alors  $G - \{f\}$  est équivalent à  $G$ .

Cette réduction serait utile pour déterminer le nombre chromatique ludique d'une chenille avec trous (sommets de degré 2), famille pour laquelle aucun algorithme polynomial n'est à ce jour connu (c.f Section 7.5).

La réduction de chaîne  $R_6$  a été vérifiée pour un grand nombre de lc-graphes, notamment des lc-chenilles. Aucun contre-exemple n'est à ce jour connu, on pourrait envisager de démontrer cette réduction sur une famille de graphes plus restreinte comme les lc-chenilles.

D'autres réductions ont été envisagées, comme la présence d'une composante  $C$  connectée au reste du graphe en un sommet  $u$  appelé **lien** et tel que la coloration de ce lien forme une  $\mathcal{NN}$ -option du côté de  $C$  (c.f. Section 8.3). Ces composantes pourraient être directement remplacées par le lien colorié. Néanmoins le problème de la couleur choisie pour  $u$  pose problème.

Cette notion de bitype pourrait être adaptée à d'autres jeux partisans, par exemple lorsque l'on est autorisé à passer son tour une fois dans la partie :

- La première lettre du bitype indiquant qui a un stratégie gagnante s'il commence, Alice ( $\mathcal{A}$ ), Bob ( $\mathcal{B}$ ), les deux ( $\mathcal{N}$ ) ou aucun ( $\mathcal{P}$ ).
- La seconde lettre du bitype indiquant qui gagne après que le Suivant ait passé son tour.

Néanmoins, en vue de calculer le bitype de la somme disjonctive de plusieurs jeux parti-sans, il faudra s'assurer de la conformité des positions de jeu étudiées.

## Chapitre 7

# Étude de quelques familles de lc-graphes

## 7.1 Introduction

Dans ce Chapitre, nous allons étudier le problème de caractérisation des lc-graphes de nombre chromatique ludique 3 sur quelques familles de lc-graphes. Nous étudierons principalement la famille des chenilles qui a déjà fait l'objet de quelques travaux [27, 25].

Concernant les 2-chenilles sans trous, nous établirons une stratégie permettant la réduction du problème à l'étude d'un nombre polynomial de lc-2-chenilles sans trous (en fonction de la taille). Nous étendrons ensuite la détermination des bitypes des 2-chenilles sans trous aux chenilles sans trous en démontrant que l'ajout de feuilles supplémentaires sur les 4-sommets ne modifie pas le bitype. Ceci nous permettra de déterminer le bitype de toutes les chenilles sans trous non coloriées.

Nous donnerons également quelques outils pour déterminer le bitype d'une chenille avec trous, mais on ne connaît à ce jour aucun algorithme polynomial résolvant ce problème.

Nous étudierons ensuite la familles des 1-chenilles circulaires, et terminerons ce chapitre par quelques perspectives concernant les lc-arbres.

Les définitions et notations propres aux chenilles sont présentées dans le Chapitre précédent, Section 6.3.2.

Pour l'étude de ces familles de lc-graphes, nous utiliserons la plupart des outils du Chapitre précédent. L'expression des bitypes des options (Propositions 6.4.8 et 6.4.9) nous sera utile pour déterminer le bitype d'un lc-graphe donné en fonction de ceux de ses options. Le théorème d'inclusion (Théorème 6.6.5) nous permettra d'étendre notre caractérisation à des sur-graphes, ou dans certains cas de minorer le bitype d'un lc-arbre donné à partir de celui de ses sous-graphes.

Enfin les propriétés d'addition (Proposition 6.7.3 et Théorèmes 6.7.4 et 6.7.7) nous permettront dans certains cas de connaître le bitype de lc-graphes non connexes en fonction de ceux de ses composantes connexes, particulièrement lorsqu'une composante est de bitype étendu  $\mathcal{AA}^+$ , de bitype  $\mathcal{BB}$ , ou si deux composantes sont de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ . Il existe toutefois plusieurs cas de figure où, connaissant les bitypes signés de  $T$  et  $U$ , le bitype de  $T + U$  peut prendre plusieurs valeurs, il s'agit d'un ensemble de bitypes noté  $oo'(T) \oplus oo'(U)$ . Lorsque les bitypes de  $T$  et de  $U$  ne contiennent pas de lettre  $\mathcal{A}$ , ce ensemble est décrit dans la Table 6.3.

Nous montrerons que le joueur  $\mathcal{K}$  ayant une stratégie gagnante a une stratégie gagnante **forte**, c'est-à-dire qu'il peut tout au long de la partie ne choisir que des options de bitype étendu  $\mathcal{KK}^+$  quels que soient les choix de l'autre joueur. Nous travaillerons donc exclusivement sur les bitype étendus  $\mathcal{AA}^+$ ,  $\mathcal{NN}^+$  et  $\mathcal{BB}^+$  dont voici la définition :

**Définition 7.1.1** *Soit  $T$  un lc-graphe.*

1.  $ooo(T) = \mathcal{AA}^+$  si  $T \cong \emptyset$  ou si  $T$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option et si toute option non équivalente à  $\emptyset$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option.
2.  $ooo(T) = \mathcal{NN}^+$  si  $T$  a une  $\mathcal{AA}^+$  et une  $\mathcal{BB}^+$ -option.
3.  $ooo(T) = \mathcal{BB}^+$  si  $T \cong K_{1,3}^{(c)}$  ou si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
  - toute option non équivalente à  $K_{1,3}^{(c)}$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option ;

- soit  $T$  a deux  $\mathcal{BB}^+$ -options soit pour l'unique  $\mathcal{BB}^+$ -option  $J_{s,c}(T)$  de  $T$ ,  $T * f_{s,c}$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.

Où  $T * f_{s,c}$  est le lc-graphe  $T$  auquel on a rajouté une feuille  $f_{s,c}$  voisine de  $s$  et coloriée avec  $c$ .

Seule la définition de  $\mathcal{NN}^+$  est nouvelle, les deux autres extensions ont déjà été définies au Chapitre précédent.

Les conditions supplémentaires sur le bitype étendu  $\mathcal{BB}^+$  ont été définies ainsi pour pouvoir appliquer le théorème d'inclusion (c.f. Section 6.6). En effet, l'existence de deux  $\mathcal{BB}^+$ -options de  $T$  entraîne que pour tout lc-graphe  $U$  tel que  $T \subseteq U$ , la coloration dans  $U$  d'un sommet de  $U \setminus T$  aboutit à un graphe  $U'$  ayant encore au moins une  $\mathcal{BB}^+$ -option. De même si  $T$  n'a qu'une  $\mathcal{BB}^+$ -option  $J_{s,c}(T)$ , et si  $T * f_{s,c}$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option alors dans  $U$  toute coloration d'un sommet de  $U \setminus T$  aboutit à un graphe  $U'$ . Si dans  $U'$  la couleur  $c$  est présente au voisinage de  $s$  alors  $T * f_{s,c} \subseteq U'$ , donc  $U'$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Ainsi Alice ne peut gagner sur tout lc-graphe  $U$  tel que  $T \subseteq U$ .

Établissons maintenant une table d'addition pour ces trois bitypes étendus.

**Proposition 7.1.2** *Soient  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{L}$  deux bitypes de  $\{\mathcal{A}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$  et soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes de bitypes étendus respectifs  $\mathcal{KK}^+$  et  $\mathcal{LL}^+$ .*

1. Pour tout  $\mathcal{K} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ ,  $\mathcal{BB}^+ \oplus \mathcal{KK}^+ = \mathcal{BB}^+$  ;
2. Soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes possédant une  $\mathcal{BB}^+$ -option. On a alors  $ooo(T + U) = \mathcal{BB}^+$ .
3. Pour tout  $\mathcal{K} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ ,  $\mathcal{AA}^+ \oplus \mathcal{KK}^+ = \mathcal{KK}^+$ .

La preuve s'appuie sur les principaux résultats de la Section 6.7. Elle est réalisée par récurrence sur  $u(T)$ .

- Preuve:**
1. Soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes de bitypes étendus respectifs  $\mathcal{BB}^+$  et  $\mathcal{KK}^+$ . Par la Proposition 6.7.2, on sait que si  $T$  est de bitype  $\mathcal{BB}$  alors  $oo(T + U) = \mathcal{BB}$ . Il reste à démontrer l'extension " + " pour  $T + U$ . Si  $T \cong K_{1,3}^{(c)}$  alors  $T + U \cong K_{1,3}^{(c)}$ , donc  $ooo(T + U) = \mathcal{BB}^+$ . Sinon soit  $T$  a deux  $\mathcal{BB}^+$ -options soit pour l'unique  $\mathcal{BB}^+$ -option  $J_{s,c}(T)$  de  $T$ ,  $T * f_{s,c}$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Dans le premier cas par hypothèse de récurrence  $T + U$  a également deux  $\mathcal{BB}^+$ -options, et dans le second cas par hypothèse de récurrence la  $\mathcal{BB}^+$ -option  $T_1$  de  $T * f_{s,c}$  vérifie  $ooo(T_1 + U) = \mathcal{BB}^+$ , donc  $(U + T) * f_{s,c}$  a la  $\mathcal{BB}^+$ -option  $T_1 + U$ .
  2. Soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes possédant chacun une  $\mathcal{BB}^+$ -option, notées  $T_1$  et  $U_1$  respectivement. Soit  $T + U'$  une option de  $T + U$  issue d'un coup sur  $U$ . Par le premier point  $ooo(T_1 + U') = \mathcal{BB}^+$ , et comme  $T_1 + U'$  est une option de  $T + U'$ , on en déduit que toute option de  $T + U$  issue d'un coup sur  $U$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. On procède de même pour les options de  $T + U$  issues d'un coup sur  $T$ , ainsi toute option de  $T + U$  a bien une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Finalement comme  $T_1 + U$  et  $T + U_1$  sont deux  $\mathcal{BB}^+$ -options de  $T + U$ , on en conclut que  $ooo(T + U) = \mathcal{BB}^+$ .
  3. Soient  $T$  et  $U$  deux lc-graphes de bitype étendu respectifs  $\mathcal{AA}^+$  et  $\mathcal{KK}^+$ . Par la Proposition 6.7.7, on sait que pour tous lc-graphes  $T$  et  $U$ , si  $ooo'(T) = \mathcal{AA}_0^+$  alors

$ooo(T + U) = ooo(U)$  et si  $ooo'(T) = \mathcal{AA}_1^+$  alors  $ooo(T + U)$  est le bitype étendu miroir de  $U$ . Comme le bitype de  $U$  est de la forme  $\mathcal{KK}$ , le bitype miroir de  $U$  est exactement le bitype de  $U$ . On en conclut que  $ooo(T + U) = ooo(U)$ . ■

Le second point de la Proposition 7.1.2 entraîne notamment que :

$$\mathcal{NN}^+ \oplus \mathcal{NN}^+ = \mathcal{BB}^+.$$

Les résultats de cette proposition concernant les trois bitypes étendus  $\mathcal{AA}^+$ ,  $\mathcal{NN}^+$  et  $\mathcal{BB}^+$  sont rassemblés dans la Table 7.1. Lors des calculs on utilisera fréquemment l'opérateur  $\oplus$  pour additionner ces trois bitypes étendus. Nous dirons par exemple que  $T + U$  est de bitype  $\mathcal{NN}^+ \oplus \mathcal{NN}^+ = \mathcal{BB}^+$  lorsque  $T$  et  $U$  sont de bitype  $\mathcal{NN}^+$ .

$\oplus$	$\mathcal{AA}^+$	$\mathcal{NN}^+$	$\mathcal{BB}^+$
$\mathcal{AA}^+$	$\mathcal{AA}^+$	$\mathcal{NN}^+$	$\mathcal{BB}^+$
$\mathcal{NN}^+$	$\mathcal{NN}^+$	$\mathcal{BB}^+$	$\mathcal{BB}^+$
$\mathcal{BB}^+$	$\mathcal{BB}^+$	$\mathcal{BB}^+$	$\mathcal{BB}^+$

TABLE 7.1 – Table d'addition des bitypes étendus  $\mathcal{AA}^+$ ,  $\mathcal{NN}^+$  et  $\mathcal{BB}^+$ .

Mettons maintenant en évidence l'existence d'une stratégie gagnante pour Bob sur une famille particulière de lc-chenilles : les I-chenilles.

## 7.2 Les I-chenilles

Dans cette Section, nous allons démontrer que pour certaines structures, Bob a une stratégie gagnante triviale.

La proposition qui suit sera démontrée sur la famille des lc-1-chenilles, mais pourrait être étendue à l'ensemble des lc-chenilles.

Nous réutiliserons les notations de la Section 6.3.2, pour les lc-1-chenilles. Le mot d'une lc-1-chenille appartient à l'alphabet  $\{z, 1, 2, 3\}$ . Les couleurs 1, 2 et 3 ne seront pas utilisées directement. Nous utiliserons des variables  $a$ ,  $b$  et  $c$ , en indiquant en indice si elle sont distinctes ou non.

**Proposition 7.2.1 (I-chenilles)** *Soit  $C$  une lc-1-chenille. Si  $C = azb_{a \neq b}$  ou s'il existe  $p > 0$  lettres  $u_1, u_2 \dots u_p$  telles que  $w(C) = azu_1zu_2zu_3 \dots zu_pzb$  alors  $C$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.*

**Preuve:** La preuve est réalisée par récurrence sur  $p$ .

1. Si  $C = azb_{a \neq b}$  alors  $C$  a la  $\mathcal{BB}^+$ -option  $K_{1,3}^{(c)}$ .
2. Si  $p = 1$  alors  $C = azu_1zb$ . Si  $a = b$  ou si  $u_1 \in \{z, a, b\}$  alors Bob choisit l'option  $C' = au_1c + cu_3b$  avec  $c \notin \{a, b\}$ . Dans ce cas  $C'$  a bien deux  $\mathcal{BB}^+$ -options (constitution de  $K_{1,3}^{(c)}$  des deux côtés) et toute option a une  $\mathcal{BB}^+$ -option (constitution de  $K_{1,3}^{(c)}$  sur



le côté où Alice n'a pas joué). Sinon on a  $u_1 = c$  avec  $a \neq b \neq c \neq a$ . Dans ce cas Bob choisit l'option  $C' = acczb$ . Montrons que  $ooo(C') = \mathcal{BB}^+$ .  $C'$  a bien deux  $\mathcal{BB}^+$ -options :  $acb + bzb \cong K_{1,3}^{(c)}$  et  $acca$  sur laquelle toute option est équivalente à  $K_{1,3}^{(c)}$ . De plus toute option a une  $\mathcal{BB}^+$ -option, car Alice doit choisir entre  $aca + azb$  ou  $bczb$  si elle ne veut pas perdre immédiatement. Bob peut choisir respectivement  $aca + acb$  et  $bca + ab$ , donc a toujours une  $\mathcal{BB}^+$ -option.

3. Si  $p \geq 2$  alors Bob choisit l'option  $C' = azc + czu_2zu_3 \dots zu_pzb$ , avec  $c \notin \{a, u_2\}$ . Montrons que  $ooo(C') = \mathcal{BB}^+$ . Par hypothèse de récurrence la partie droite de  $C'$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option, et la partie gauche également, donc Bob a deux  $\mathcal{BB}^+$ -options. De plus si Alice commence à jouer sur une des deux composantes alors Bob joue sur l'autre et obtient ainsi une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Ainsi  $ooo(C') = \mathcal{BB}^+$ . ■

Un lc-chenille vérifiant les conditions de la Proposition 7.2.1 sera appelée **I-chenille**.

Afin de pouvoir utiliser cette proposition sur une famille plus large, étendons ce résultat aux lc-arbres contenant une I-chenille.

**Corollaire 7.2.2** *Soit  $T$  un lc-arbre. S'il existe une I-chenille  $C$  telle que  $C \subseteq U$  alors  $oo(T) \succeq \mathcal{NN}$ .*

**Preuve:** Comme  $C$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option, par le théorème d'inclusion (Théorème 6.6.5) on en déduit que  $T$  a également une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Ainsi  $oo(T) \succeq \mathcal{NN}$ . ■

Ce corollaire sera principalement utilisé pour éliminer certaines options lorsqu'Alice est le Suivant. En effet elle n'a aucun intérêt à choisir une option contenant une I-chenille.

Il sera également utilisé lorsque Bob est le Suivant, par exemple s'il existe une option avec deux composantes contenant chacune une I-chenille cette option sera de bitype  $\mathcal{BB}^+$  par la Proposition 7.1.2.

## 7.3 Les 1-chenilles

Dans cette Section nous allons déterminer les bitypes de l'ensemble des 1-chenilles non coloriées. Nous allons pour cela utiliser quelques notations sur les familles des lc-1-chenilles.

**Définition 7.3.1** *Soit  $\mathcal{F}$  une famille de lc-1-chenilles. S'il existe deux mots non vides  $E$  et  $F$  respectivement de  $\{a, z\}^+$  et  $\{b, z\}^+$  (avec  $a = b$  possible) tels que pour tout  $C \in \mathcal{F}$  il existe  $n \geq 0$  et une assignation de  $a$  et  $b$  tel que  $C = Ez^nF$ , alors  $\mathcal{F}$  est une **L-famille**. La L-famille  $\mathcal{F}$  d'**extrémités**  $E$  et  $F$  est appelée la  $(E, F)$ -famille et est notée  $\mathcal{F} = [E, F]$ .*

Chaque L-famille  $\mathcal{F}$  de lc-1-chenilles est donc définie par ses deux extrémités  $E$  et  $F$ . Une L-famille  $\mathcal{F}$  peut donc être représentée par celles-ci. Par exemple pour la L-famille  $\mathcal{F}$  définie par :

$$\mathcal{F} = \{az^n b, n \geq 0, 1 \leq a, b \leq 3\},$$

on note  $\mathcal{F} = [a, b]$  ou plus simplement  $\mathcal{F} = az^n b$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'objet considéré.

Par conséquent un élément  $C$  d'une telle famille  $\mathcal{F}$  est déterminé par deux paramètres :

- Le nombre  $n$  de "z" au milieu du mot, appelé **taille** de  $C$  (dans  $\mathcal{F}$ ) ;
- L'égalité ou non entre les deux couleurs  $a$  et  $b$

Considérant une telle famille  $\mathcal{F}$ , un élément  $C \in \mathcal{F}$  sera donc noté  $n^v$  avec  $n \geq 0$  et  $v \in \{=, \neq\}$ . Lorsqu'on manipulera un ensemble d'éléments, on notera  $n$  l'ensemble  $\{n^=, n^{\neq}\}$ .

Toujours pour une telle L-famille, on note  $E_{\succeq \mathcal{NN}}(\mathcal{F})$  (resp.  $E_{\mathcal{AA}}(\mathcal{F})$ ,  $E_{\mathcal{BB}}(\mathcal{F})$ , et  $E_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$ ) l'ensemble des éléments de  $\mathcal{F}$  de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  (resp. de bitype  $\mathcal{AA}$ , de bitype  $\mathcal{BB}$ , et de bitype variable  $\mathcal{V}$ ). Ces sous-ensembles de  $\mathcal{F}$  ne sont pas forcément disjoints. On a :

$$E_{\mathcal{BB}}(\mathcal{F}) \subseteq E_{\succeq \mathcal{NN}}(\mathcal{F}) , \text{ et}$$

$$E_{\succeq \mathcal{NN}}(\mathcal{F}) \cap E_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}) \text{ pas nécessairement vide.}$$

Ils ont été définis ainsi pour plus de simplicité dans l'écriture des différentes caractérisations.

Dans les expressions de  $E_{\mathcal{Z}}(\mathcal{F})$ , la notation  $n^+$  (resp.  $n^-$ ) désignera l'ensemble des éléments de  $\mathcal{F}$  de taille supérieure ou égale à  $n$  (resp. inférieure ou égale à  $n$ ).

### 7.3.1 Les lc-1-chenilles de base

Par la suite, pour indiquer qu'une lc-chenille  $C$  a la  $\mathcal{AA}^+$ -option (resp. la  $\mathcal{BB}^+$ -option)  $C_1$ , nous noterons  $C \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} C_1$  (resp.  $C \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} C_1$ ).

Pour déterminer le bitype des 1-chenilles, nous avons également besoin de connaître les bitypes d'un certain nombre d'éléments de petit diamètre. Les lc-chenilles de cet ensemble seront de diamètre au plus 7 (c'est-à-dire au plus 8 lettres dans leur mot), et seront de bitype étendu  $\mathcal{AA}^+$ ,  $\mathcal{NN}^+$  ou  $\mathcal{BB}^+$ .

**Lemme 7.3.2 (Chenilles de base)** *Soient  $\Upsilon_A$ ,  $\Upsilon_N$  et  $\Upsilon_B$  les trois ensembles de lc-1-chenilles définis comme suit :*

$$\Upsilon_A = \left\{ ab(A_0), az(A_1), abb(A_2), aza(A_3), aabb(A_4), azbb(A_5), azzb(A_6), aab^3(A_7), azb^3(A_8), \right.$$

$$azab_{a \neq b}^2(A_9), az^2bb(A_{10}), azbz z(A_{11}), azazb_{a \neq b}^2(A_{12}), az^3b^2(A_{13}), az^4b(A_{14}), azbz^2z(A_{15}),$$

$$az^3a^3(A_{16}), az^4b^2(A_{17}), azaz^3b^2(A_{18}), az^5b^2(A_{19}), az^6b(A_{20}),$$

$$\left. az^3baa_{a \neq b}(A_{21}), azbz zaa(A_{22}), azaz^5aa(A_{23}) \right\};$$

$$\Upsilon_N = \left\{ azb_{a \neq b}(N_0), ab_{a \neq b}^3(N_1), azab_{a \neq b}(N_2), azazb(N_3), azab_{a \neq b}^3(N_4), az^3b(N_5), az^2b^3(N_6), \right.$$

$$\left. azaza^3(N_7), az^3b_{a \neq b}^3(N_8), az^5b(N_9), az^4b^3(N_{10}) \right\};$$

$$\Upsilon_B = \left\{ abc_{a \neq b \neq c \neq a}(B_0), abba_{a \neq b}(B_1), azazb^3_{a \neq b}(B_2) \right\}.$$

Tout élément de  $\Upsilon_A$  (resp.  $\Upsilon_N$ ,  $\Upsilon_B$ ) est de bitype étendu  $\mathcal{AA}^+$  (resp.  $\mathcal{NN}^+$ ,  $\mathcal{BB}^+$ ).

L'élément en position  $i$  dans chaque ensemble est noté  $A_i$ ,  $N_i$  et  $B_i$ , en commençant à l'indice 0.

**Preuve:** Démontrons le bitype étendu de chacun de ces 38 éléments. La preuve de  $A_i$  utilise parfois celle de  $N_j$ , il en est de même entre  $N_i$  et  $B_j$ . Formellement il faudrait effectuer la démonstration par valeurs de  $u(T)$  croissantes, mais pour des raisons de lisibilité nous allons démontrer d'abord  $\Upsilon_A$ , puis  $\Upsilon_N$  et enfin  $\Upsilon_B$ .

Commençons par l'ensemble  $\Upsilon_A$ . Pour tout élément  $A_i$ , il faut prouver l'existence d'une  $\mathcal{AA}^+$ -option et le fait que toute option a une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Cette  $\mathcal{AA}^+$ -option pourra être de la forme  $A_j$  ou, par la Proposition 7.1.2, de la forme  $A_j + A_k$  lorsque le bitype de  $A_j$  et de  $A_k$  aura été préalablement démontré. De même les options de  $A_i$  pourront être de la forme  $A_j$ ,  $N_\ell$  ou, par la Proposition 7.1.2, de la forme  $A_j + A_k$  ou  $A_j + N_\ell$  lorsque les bitypes de  $A_j$ , de  $A_k$  et de  $N_\ell$  auront été préalablement prouvés.

Nous utiliserons fréquemment la réduction  $R_4$  qui sur la familles des lc-1-chenilles, peut s'écrire ainsi :

$$\mathbf{R}_4 : \quad \text{Pour tout mot } U \neq \emptyset, \quad Uabc_{a \neq b \neq c \neq a} \cong Uaa + z.$$

Le bitype étendu de l'élément considéré sera simplement noté  $ooo$ .

$$A_0 = ab : \text{Opt}(A_0) = \emptyset \Rightarrow ooo = \mathcal{AA}^+.$$

$$A_1 = az : \text{Opt}(A_1) = \{A_0\} \Rightarrow ooo = \mathcal{AA}^+.$$

$A_2 = abb : \text{Opt}(A_2) = \{3.A_0\} \Rightarrow ooo = \mathcal{AA}^+$ . Par la suite, les composantes  $A_0$  et  $A_1$  seront la plupart du temps omises. Nous pouvons omettre  $A_1$  car les chenilles étudiées sont toutes de bitype constant.

$$A_3 = aza : \text{Opt}(A_3) = \{A_2, A_1\} \Rightarrow ooo = \mathcal{AA}^+.$$

$$A_4 = aabb : \text{Opt}(A_4) = \{A_2\} \Rightarrow ooo = \mathcal{AA}^+.$$

$A_5 = azbb : \text{Opt}(A_5) = \{A_1 + A_2, A_4, acbb_{a \neq c}, A_3, N_0\}$ . Soit  $b'$  tel que  $b' \in \{a, c\}$  et  $b' \neq b$ .

On a  $acbb_{a \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acb' + b'b = A_2 + A_0$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$A_6 = azzb : \text{Opt}(A_6) = \{A_5, azcb_{b \neq c}, A_3, N_0\}$ . Soit  $a'$  tel que  $a' \neq a$  et  $a' \in \{b, c\}$ . On a

$azcb_{b \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aa' + a'cb = A_0 + A_2$  Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$A_7 = aab^3 : \text{Opt}(A_7) = \{N_1, 2.A_2, aabc_{b \neq c}\}$ . On a  $aabc_{b \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aa' + a'bc = A_0 + A_2$  avec  $a' \in \{b, c\}$  et  $a' \neq a$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$A_8 = azb^3 : \text{Opt}(A_8) = \{A_1 + N_1, A_1 + A_4, A_3 + A_2, N_0 + A_2, azbc_{b \neq c}, acb^3\}$ . On a

$azbc_{b \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aa' + a'bc = A_0 + A_2$  avec  $a' \neq a$  et  $a' \in \{b, c\}$ . Concernant  $acb^3$ , Si  $c = a$  alors  $acb^3 = A_7$ , sinon il existe  $b' \neq b$  tel que  $b' \in \{a, c\}$ , donc  $acb^3 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acb' + b'bb = 2.A_2$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$A_9 = azab_{a \neq b}^2 : Opt(A_9) = \{cab_{c \neq a \neq b}^2, N_0 + A_2, N_2, A_5, acab_{a \neq b}^2\}$ . Si  $c \neq b$  alors  $cab^2 \cong b^3 = A_2$ , sinon  $cab^2 = ab_{a \neq b}^3 = N_1$ . Si  $c = a$  alors  $acab^2 = A_7$ , sinon  $acab_{a \neq c}^2 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + cb^2 = 2.A_2$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$A_{10} = az^2bb : Opt(A_{10}) = \{A_1 + A_5, A_3 + A_2, N_0 + A_2, A_6, aczbb, azcbb\}$ . On a  $aczbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + cbb = 2.A_2$ . Si  $b = c$  alors  $azcbb = A_8$ , sinon  $azcbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azcc = A_5$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$A_{11} = azbzz : Opt(A_{11}) = \{A_1 + cbzz, A_3 + czz, N_0 + czz, azbc + 2.A_1, azbzc, acbzz\}$ . On a  $cbzz \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} cbb + 2.bz = A_2 + 2.A_1$ . Concernant  $czz$ , on a  $Opt(czz) = \{ca + 2.az, czc, cza_{a \neq c}\} = \{A_0 + 2.A_1, A_3, N_0\}$ , donc  $ooo(czz) = \mathcal{AA}^+$ . Pour  $azbc$ , si  $c = b$  alors  $azbc = A_5$ , sinon  $azbc \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aa' + a'bc$  (avec  $a' \neq a, a' \in \{b, c\}$ ). Pour  $azbzc$  si  $b = c$  alors  $azbzc = N_3$ , sinon  $azbzc_{b \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azbb + bc = A_5$ . Enfin pour  $acbzz$ , si  $a = b = c$   $acbzz \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acbza = A_8$ , sinon  $acbzz \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acb' + b'zz$  (avec  $b' \neq b, b' \in \{a, c\}$ ). Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$A_{12} = azazbb_{a \neq b} : Opt(A_{12}) = \{cazbb_{c \neq a \neq b}, N_0 + A_5, A_5 + A_2, N_2 + A_2, N_3, a^3zbb, acazbb_{c \neq a \neq b}, azaabb_{a \neq b}, azacbb_{c \neq a \neq b}\}$ .

$A_{12}$  a bien une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Il reste à trouver une  $\mathcal{AA}^+$ -option pour les cinq options restantes. On a  $cazbb_{c \neq a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} caa + abb = 2.A_2$ ,  $a^3zbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} a^4 + abb = A_4 + A_2$ ,  $acazbb_{c \neq a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + czbb = A_2 + A_5$ ,  $azaabb_{a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aza^3 = A_8$  et  $azacbb_{c \neq a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + abb = A_5 + A_2$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

Par la suite pour plus de clarté l'expression des options de  $A_i$  sera donné en deux phases : dans un premier temps expression avec mots, et dans un second temps remplacement par  $A_j$  et  $N_j$  pour les chenilles de  $\Upsilon_A$  et  $\Upsilon_N$ .

$A_{13} = az^3bb : Opt(A_{13}) = \{cz^2bb, aza+azb^2, azc_{a \neq c}+czbb, azzc+cb, az^3c, aczzbb, azazaa, aczbb, azzb^3, azzcbb_{c \neq b}\}$ .

$$= \{A_{10}, A_3 + A_5, N_0 + A_5, A_6 + A_2, N_5, aczzbb, aczbb, N_6, azzcbb_{c \neq b}\}.$$

On a  $aczzbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} a'zzbb = A_{10}$ ,  $azc_{a \neq c}+czbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azcc + cbb = A_5 + A_2$  et  $azzcbb_{c \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzcc = A_{10}$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$A_{14} = az^4b : Opt(A_{14}) = \{N_5, A_3 + A_6, N_0 + A_6, acz^3b, aczbb\}$ .

On a  $acz^3b \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + czbb = A_2 + A_6$ . Pour  $aczbb$  si  $a \neq c$  alors  $aczbb_{a \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aza + azzb = A_3 + A_6$ , sinon  $azazbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azazb^2 = A_{12}$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$A_{15} = azbz^2z : Opt(A_{15}) = \{cbz^2z, azc + cz^2z, azbc + czz, azbzc, azbzzc, acbz^2z, azbczz\}$ .

Dans la preuve de  $A_{11}$  nous avons vu que  $ooo(azzz) = \mathcal{AA}^+$ , donc la troisième option avec  $c = b$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Montrons que  $ooo(azzz) = \mathcal{AA}^+$ .

$$Opt(azzz) = \{czz, aza+az, azc+cz, azzc, aczz\} = \{czz, A_3 + A_1, N_0 + A_1, A_6, aczz\}.$$

Comme  $aczz \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + cz = A_2 + A_1$ , on en déduit que  $ooo(azzz) = \mathcal{AA}^+$ .

Revenons aux options de  $A_{15}$ . On a  $cbz^2z \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzz$ ,  $azc+cz^2z \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc+cz^2z = A_2 + azzz$ , pour  $azbzc$  voir cas  $A_{11}$ , pour  $azbzzc$  voir cas  $A_{14}$ ,  $acbz^2z \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acb' + b'z^2z = A_2 + azzz$  (avec  $b' \neq b$  et  $b' \in \{a, c\}$ ), si  $b \neq c$   $azbczz \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azbb + bzz = A_5 + bzz$  et sinon  $azbczz \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azb^3 = A_8$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$$A_{16} = az^3a^3 : \text{Opt}(A_{16}) = \{cz^2a^3, aza + aza^3, azc + cza^3, azzc + ca^3, az^3c + ca^2, az^3ac_{c \neq a}, \\ acz^2a^3, azcza^3, azzca^3\}$$

$$\text{Opt}(A_{16}) = \{N_6, A_3 + A_8, N_0 + A_8, A_6 + N_1, N_5 + A_2, az^3ac_{c \neq a}, acz^2a^3, azcza^3, azzca^3\}.$$

On a  $az^3ac_{c \neq a} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} az^2c + cca = A_5 + A_2$ ,  $acz^2a^3 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + cza^3 = A_2 + A_8$ , si  $a \neq c$   $azcza^3 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aza + aza^3 = A_3 + A_8$  et sinon  $azaza^3 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + a^4 = A_5 + A_4$  et si  $a \neq c$   $azzca^3 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzcc + caa = A_{10} + A_2$  et si  $a = c$   $azzca^3 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aza + a^5 = A_3 + A_7$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$$A_{17} = az^4bb : \text{Opt}(A_{17}) = \{cz^3bb, aza + azzbb, azc_{a \neq c} + czzbb, azzc + czbb, az^3c + cbb, az^4c, \\ acz^3bb, azczzbb, azzczbb, az^3cbb\}$$

$$= \{A_{13}, A_3 + A_{10}, N_0 + A_{10}, A_6 + A_5, N_5 + A_2, A_{14}, acz^3bb, azczzbb, azzczbb, az^3cbb\}.$$

On a  $acz^3bb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + czzbb = A_2 + A_{10}$ ,  $azczzbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azcc + czbb = 2.A_5$ ,  $azzczbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzcc + cbb = A_{10} + A_2$  et  $az^3cbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} az^2c + ccbb = A_6 + A_4$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$$A_{18} = aza^3bb :$$

$$\text{Opt}(A_{18}) = \{caz^3bb_{c \neq a}, azc_{a \neq c} + cz^3bb, azaa + az^2bb, azac_{a \neq c} + cz^2bb, azazc + czbb, \\ azazza + abb, azazzc_{a \neq c} + cbb, aza^3c, acaz^3bb, azaczzbb, azazazbb, azazczbb_{a \neq c}, aza^3cbb\} \\ = \{caz^3bb_{c \neq a}, N_0 + A_{13}, A_5 + A_{10}, N_2 + A_{10}, N_3 + A_5, azazza + A_2, azazzc_{a \neq c} + A_2, aza^3c, \\ acaz^3bb, azaczzbb, azazazbb, azazczbb_{a \neq c}, aza^3cbb\}.$$

On a  $caz^3bb_{c \neq a} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} caa + az^2bb = A_2 + A_{10}$ ,  $azazza \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + aza = A_5 + A_3$ ,  $azazzc_{a \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azazcc_{a \neq c} = A_{12}$ ,  $aza^3c \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + az^2c = A_5 + A_6$ , si  $a \neq c$   $acaz^3bb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + cz^3bb$  et sinon  $aaaz^3bb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} a^4 + azzbb = A_4 + A_{10}$ ,  $azaczzbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azacc + czbb \in \{A_8 + A_5, A_9 + A_5\}$ ,  $azazazbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + aazbb = A_5 + aazbb$ ,  $azazczbb_{a \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azazcc_{a \neq c} + cbb = A_{12} + A_2$ , et  $aza^3cbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + azcbb = A_5 + azcbb$ . Il reste à montrer que  $aazbb$  et  $azcbb$  sont de bitype étendu  $\mathcal{AA}^+$ .

$$\text{Opt}(aazbb) = \{czbb, aac + cbb, aacbb\} = \{A_5, 2.A_2, aacbb\}.$$

Comme  $aacbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aac' + c'bb = 2.A_2$ , on en déduit que  $ooo(aazbb) = \mathcal{AA}^+$ . Pour  $azcbb$ , si  $c \in \{a, b\}$  alors  $azcbb \in \{A_8, A_9\}$ . Sinon regardons l'ensemble des options de  $azcbb$

$$\text{Opt}(azcbb_{a \neq c \neq b}) = \{ccbb, a'cbb_{a' \neq c}, aza + abb, azc'_{c' \neq a} + c'bb, azcc, azcb'_{a \neq c \neq b'}, aa'cbb_{a \neq c \neq b}\} \\ = \{A_4, a'cbb_{a' \neq c}, A_3 + A_2, N_0 + A_2, A_5, azcb'_{a \neq c \neq b'}, aa'cbb_{a \neq c \neq b}\}.$$

On a  $a'cbb_{a' \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} b'bb$  avec  $b' \notin \{a', c\}$ ,  $azcb'_{a' \neq c \neq b'} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aa' + a'cb'$  avec  $a' \neq a$  et  $a' \in \{b, c\}$ , et  $aa'cbb_{a' \neq c \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aa'c' + c'bb = 2.A_2$  avec  $c' \neq c$  et  $c' \in \{a, a'\}$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$$\begin{aligned} A_{19} = az^5bb : Opt(A_{19}) &= \{cz^4bb, aza + az^3bb, azc_{a \neq c} + cz^3bb, azzc + czzbb, az^3c + czbb, \\ &\quad az^4c + cbb, az^5c, acz^4bb, azcz^3bb, azzczzbb, az^3czbb, az^4cbb\} \\ &= \{A_{17}, A_3 + A_{13}, N_0 + A_{13}, A_5 + A_{10}, N_5 + A_5, A_{14} + A_2, N_9, acz^4bb, azcz^3bb, \\ &\quad azzczzbb, az^3czbb, az^4cbb\}. \end{aligned}$$

On a  $acz^4bb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + cz^3bb = A_2 + A_{13}$ ,  $azcz^3bb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azcc + cz^2bb = A_5 + A_{10}$ ,  $azzczzbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzcc + czbb = A_{10} + A_5$ ,  $az^3czbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} az^3cc + cbb = A_{13} + A_2$ , et  $az^4cbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} az^4c' + c'bb$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$$A_{20} = az^6b :$$

$$\begin{aligned} Opt(A_{20}) &= \{cz^5b, aza + az^4b, azc_{a \neq c} + cz^4b, azzc + \\ &\quad cz^3b, acz^5b, azaaz^4b, azcz^4b_{a \neq c}, azzcz^3b\} \\ &= \{N_9, A_3 + A_{14}, N_0 + A_{14}, A_6 + N_5, acz^5b, azaaz^4b, azcz^4b_{a \neq c}, azzcz^3b\}. \end{aligned}$$

On a  $acz^5b \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + cz^4b = A_2 + A_{14}$ ,  $azaaz^4b \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaaz^3b^2 = A_{18}$ ,  $azcz^4b_{a \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aza + az^4b = A_3 + A_{14}$  et  $azzcz^3b \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzcc + czzb = A_{10} + A_6$ . Ainsi  $ooo = \mathcal{AA}^+$ .

$$\begin{aligned} A_{21} = az^3baa_{a \neq b} : Opt(az^3baa_{a \neq b}) &= \{cz^2baa, azc + czbaa, azzc + cbaa, az^3c + caa, az^4bc, \\ &\quad aczbaa, azczbaa_{c \neq a}, azazbaa, azzczbaa_{c \neq b}, azzbbaa\}. \end{aligned}$$

On a  $cz^2baa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} czzb' + b'aa = A_6 + A_2$ ,  $azc + czbaa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + czbaa = A_2 + czbaa$ ,  $azzc + cbaa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzc + cba' = A_6 + A_2$ ,  $az^3c + caa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzc' + caa = A_6 + A_2$ ,  $az^4bc \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} az^4b' = A_{14}$ ,  $aczbaa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc + czbaa = A_2 + czbaa$ ,  $azczbaa_{c \neq a} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aza + azbaa = A_3 + azbaa$ ,  $azazbaa_{a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azazbb = A_{12}$ ,  $azzczbaa_{c \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzcc + caa = A_{10} + A_2$  et  $azzbbaa_{a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzc + cbaa_{a \neq b \neq c \neq a} \cong azzc + aaa = A_6 + A_2$ .

Seules les chenilles de la forme  $azbcc$  n'appartiennent pas à la famille  $\Upsilon_A$ . Démontrons que  $azbcc$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  :

$$Opt(azbcc) = \{a'bcc, aza' + a'cc, azba', aa'bcc\}.$$

Comme dans  $aabcc$  un seul sommet est potentiellement non coloriable, on en déduit que  $oo(aabcc) = \mathcal{AA}^+$ , donc la 4e option avec  $a' = a$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . De plus quel que soit l'assignation de couleurs on observe que les trois autres options appartiennent à  $\Upsilon_A$  ou  $\Upsilon_N$ , donc ont toutes une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Pour  $aa'bcc_{a' \neq a}$ , si  $b \notin \{a, a'\}$  alors  $aa'bcc_{a' \neq a} \cong bbcc = A_4$ , sinon sans perte de généralité on peut poser  $a = b$ , donc  $aa'acc_{a' \neq a} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aa'a' + a'cc = 2.A_2$ .

$$\begin{aligned} A_{22} = azbzzaa : Opt(azbzzaa) &= \{cbzzaa, azb' + b'zzaa, azbb + bzaa, azbc_{c \neq b} + czaa, \\ &\quad azbzc + caa, azbzza', acbzzaa, azbczaa, azbzcaa_{c \neq a}, azbza^3\}. \end{aligned}$$

$$\text{Opt}(azbzzaa) = \{cbzxaa, N_0 + A_{10}, 2.A_5, N_2 + A_5 \text{ (ou } \cong A_3 + A_5), azbzc + A_2, azbzza',$$

$$acbzxaa, azbczxaa, azbzcaa_{c \neq a}, azbza^3\}.$$

Au point précédent on a démontré que  $ooo(azbcc) = \mathcal{AA}^+$  quelles que soient les couleurs  $a, b$  et  $c$ . On a donc  $cbzxa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} cbb + bzaa = A_2 + A_5$ ,  $azbzc \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azbcc$ , si  $a \neq b$   $azbzza'_{a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aza + azz'a' = A_3 + A_6$  sinon si  $a = a'$   $azazza \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + aza = A_5 + A_3$  sinon  $azazza'_{a \neq a'} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaza'a'_{a \neq a'} = A_{12}$ ,  $acbzzaa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acb' + b'zza = A_2 + A_6$ ,  $azbczxaa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azbcc + caa = azbcc + A_2$ , si  $a \neq b$   $azbzcaa_{c \neq a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aza + azcaa = A_3 + azcaa$  sinon  $azazcaa_{a \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azazcca_{a \neq c} = A_{12}$ , et enfin si  $a \neq b$   $azbza^3_{a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aza + aza^3 = A_3 + A_8$  sinon  $azaza^3 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + a^4 = A_5 + A_4$ . Ainsi  $ooo(azbzza_{a \neq b}) = \mathcal{AA}^+$

$$A_{23} = azaz^5bb : \text{Opt}(azaz^5aa) = \{caz^5aa, azc_{a \neq c} + cz^5aa_{a \neq c}, azac + cz^4aa, azazc + cz^3aa, azazzc + cz^2aa, azaz^3c + czaa, azaz^4c + caa, azaz^5c_{a \neq c}, acaz^5aa, azacz^4aa, azazcz^3aa, azazzczzaa, azaz^3czzaa, azaz^4caa_{c \neq a}, azaz^4a^3\}.$$

$$\text{Opt}(azaz^5aa) = \{caz^5aa, N_0 + A_{19}, N_2 + A_{17}, N_3 + A_{13}, azazzc + A_{10}, azaz^3c + A_5, azaz^4c + A_2, azaz^5c_{a \neq c}, acaz^5aa, azacz^4aa, azazcz^3aa, azazzczzaa, azaz^3czzaa, azaz^4caa_{c \neq a}, azaz^4a^3\}.$$

Pour les options n'appartenant pas à  $\Upsilon_A$  ou  $\Upsilon_N$ , donnons une  $\mathcal{AA}^+$ -option. On a  $caz^5aa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} cac + cz^4aa = A_2 + A_{17}$ . Pour  $azazzc + A_{10}$  si  $a \neq c$  on a  $azazzc_{a \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azazcc = A_{12}$  sinon on a  $azazza \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + aza = A_5 + A_3$ . On a  $azaz^3c + A_5 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + azzc + A_5 = 2.A_5 + A_6$ ,  $azaz^4c + A_2 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaz^3cc + A_2 = A_{18} + A_2$ ,  $azaz^5c_{a \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + az^4c_{a \neq c} = A_5 + A_{14}$ ,  $acaz^5aa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acd' + d'z^5aa = A_2 + A_{19}$ ,  $azacz^4aa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azacc + cz^3aa \in \{A_8 + A_{13}, A_9 + A_{13}\}$ ,  $azazcz^3aa_{a \neq c} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azazcca_{a \neq c} + czzaa = A_{12} + A_{10}$ ,  $azazaz^3aa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + aaz^3aa \subseteq azaa + az^4aa = A_5 + A_{17}$ ,  $azazzczzaa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + azczzaa = A_5 + A_{22}$ ,  $azaz^3czzaa \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaz^3cc + caa = A_{18} + A_2$ ,  $azaz^4caa_{c \neq a} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + az^3caa_{a \neq c} = A_5 + A_{21}$  et  $azaz^4a^3 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + az^3a^3 = A_5 + A_{16}$ . On en conclut que  $ooo(A_{23}) = \mathcal{AA}^+$ .

Passons maintenant aux 11 chenilles de  $\Upsilon_N$ . Il faut démontrer l'existence d'une  $\mathcal{AA}^+$  et d'une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Rappelons que par la Proposition 7.1.2, les options de la forme  $N_i + N_j$ ,  $N_i + B_j$  ou  $A_i + B_j$  sont des  $\mathcal{BB}^+$ -options.

$$N_0 = azb_{a \neq b} : N_0 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} abb = A_2; N_0 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} acb_{a \neq b \neq c \neq a} = B_0. \text{ Ainsi } ooo = \mathcal{NN}^+.$$

$$N_1 = ab^3_{a \neq b} : \text{Soit } c \notin \{a, b\}. \text{ On a } N_1 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} cbb = A_2 \text{ et } N_1 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} abc = B_0. \text{ Donc } ooo = \mathcal{NN}^+.$$

$$N_2 = azab_{a \neq b} : \text{On a } N_2 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} bab = A_2 \text{ et } N_2 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} cz + cab = A_1 + B_0. \text{ Donc } ooo = \mathcal{NN}^+.$$

$N_3 = azazb$  : On a  $N_3 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} a^3zb = A_8$  et  $N_3 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} azc_{a \neq c} + czb_{c \neq b} = 2.N_0$ . Donc  $ooo = \mathcal{NN}^+$ .

$N_4 = azab^3_{a \neq b}$  : On a  $N_4 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + abb = A_5 + A_2$  et  $N_4 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} azc_{a \neq c} + cb^3_{b \neq c} = N_0 + N_1$ .  
Donc  $ooo = \mathcal{NN}^+$ .

$N_5 = az^3b$  : On a  $N_5 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzbb = A_{10}$  et  $N_5 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} azc_{a \neq c} + czb_{c \neq b} = 2.N_0$ . Donc  $ooo = \mathcal{NN}^+$ .

$N_6 = azzb^3$  : On a  $N_6 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} czb^3 = A_8$  et  $N_6 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} azc_{a \neq c} + cb^3_{b \neq c} = N_0 + N_1$ . Donc  $ooo = \mathcal{NN}^+$ .

$N_7 = azaza^3$  : On a  $N_7 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azaa + a^4 = A_5 + A_4$  et  $N_7 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} azac_{a \neq c} + ca^3_{a \neq c} = N_2 + N_1$ .  
Donc  $ooo = \mathcal{NN}^+$ .

$N_8 = az^3b^3_{a \neq b}$  : On a  $N_8 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzb + b^4 = A_6 + A_4$  et  $N_8 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} azazb^3_{a \neq b} = B_2$ . Donc  $ooo = \mathcal{NN}^+$ .

$N_9 = az^5b$  : On a  $N_9 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzc + czzb = 2.A_6$  et  $N_9 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} az^3c + czb_{c \neq b} = N_5 + N_0$ . Donc  $ooo = \mathcal{NN}^+$ .

$N_{10} = az^4b^3$  : On a  $N_{10} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azzc + czb^3 = A_6 + A_8$  et  $N_{10} \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} az^3c + cb^3_{b \neq c} = N_5 + N_1$ .  
Donc  $ooo = \mathcal{NN}^+$ .

Terminons cette preuve par les trois chenilles de bitype étendu  $\mathcal{BB}^+$ .

$B_0 = abc_{a \neq b \neq c \neq a}$  :  $B_0 = K_{1,3}^{(c)}$ , donc  $ooo = \mathcal{BB}^+$ .

$B_1 = abba_{a \neq b}$  :  $Opt(B_1) = \{K_{1,3}^{(c)}, K_{1,3}^{(c)}\}$ , donc  $ooo = \mathcal{BB}^+$ .

$B_2 = azazb^3_{a \neq b}$  :  $Opt(B_2) = \{cazb^3_{c \neq a \neq b}, azc_{a \neq c} + czb^3, azaa + ab^3_{a \neq b}, azab_{a \neq b} + b^4, azac_{a \neq c} + cb^3_{b \neq c}, acazb^3_{a \neq b}, azacb^3_{a \neq b}\}$ .

$Opt(B_2) = \{cazb^3_{c \neq a \neq b}, N_0 + A_8, A_5 + N_1, N_2 + A_4, N_2 + N_1, acazb^3_{a \neq b}, azacb^3_{a \neq b}\}$ . On observe que  $B_2$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option  $N_2 + N_1$ . Vérifions que toutes les autres options ont une  $\mathcal{BB}^+$ -option. On a  $cazb^3_{c \neq a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} B_0 + a'b^3$ , si  $c \neq a$   $acazb^3_{a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} B_0 + a'zb^3$  et sinon  $a^3zb^3_{a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} a^3c_{a \neq c} + cb^3_{c \neq b} = 2.N_1$ , si  $c \in \{a, b\}$  alors  $azacb^3_{a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} azaa'_{a \neq a'} + a'b^3_{a' \neq b} = N_2 + N_1$  et si  $c \notin \{a, b\}$  alors  $azacb^3_{a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} azb_{a \neq b} + bcb^3_{c \neq b}$  (car  $bcb^3$  a la  $\mathcal{BB}$ -option  $B_0$ ). Il reste à prouver que  $B_2 * f_{s,c}$  a une  $\mathcal{BB}$ -option, où  $J_{s,c}$  est la  $\mathcal{BB}^+$ -option de  $B_2$ . On a  $B_2 * f_{s,c} = azaD_c b^3_{a \neq b \neq c \neq a}$ , où  $D_c$  correspond à un sommet de degré 4 avec une des deux feuilles coloriée avec  $c$ . Comme pour  $azacb^3_{a \neq b \neq c \neq a}$ , on a  $azaD_c b^3_{a \neq b \neq c \neq a} \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} azb_{a \neq b} + bD_c b^3_{b \neq c}$ , car  $bD_c b^3 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} bD_c a \cong K_{1,3}^{(c)}$ . On en conclut que  $ooo = \mathcal{BB}^+$ . ■

Ces 38 lc-1-chenilles nous serviront par la suite à mettre en évidence l'existence ou non d'une stratégie gagnante pour le Suivant.



### 7.3.2 Chenilles à deux extrémités colorées

Passons maintenant à l'étude de la L-famille  $\mathcal{F} = [a, b]$  où  $a$  et  $b$  peuvent être distincts ou non.

Soit  $az^n b$  un élément de  $\mathcal{F}$ . Lorsque  $n$  est impair il s'agit d'une I-chenille, par conséquent par la Proposition 7.2.1 le bitype est au moins  $\mathcal{NN}$ , excepté si  $n = 1$  et  $a = b$ . On a donc déjà effectué une caractérisation partielle de la famille  $[a, b]$  :

$$\{1^\neq\} \cup \{2k + 1, k \geq 1\} \subseteq E_{\succeq \mathcal{NN}}(az^n b).$$

De plus, certains éléments de  $[a, b]$  appartiennent à  $\Upsilon_A$ . Il s'agit de  $A_0 = ab$ ,  $A_3 = aza$ ,  $A_6 = azzb$ ,  $A_{14} = az^4 b$  et  $A_{20} = az^6 b$ . Par le Lemme 7.3.2 on a donc :

$$\{0, 1^=, 2, 4, 6\} \subseteq E_{\mathcal{AA}}(az^n b).$$

Recherchons maintenant un coup gagnant pour Bob sur les éléments de taille paire et supérieure ou égale à 8.

#### Lemme 7.3.3

1. Les chenilles  $az^8 b_{a \neq b}$  et  $az^{2k} b$  pour tout  $k \geq 5$  ont une  $\mathcal{BB}^+$ -option ;
2. La chenille  $az^8 a$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ .

**Preuve:**

1. Commençons par démontrer que  $C_0 = az^8 b_{a \neq b}$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. La stratégie gagnante de Bob sur  $az^8 b_{a \neq b}$  est représentée Figure 7.1. Parmi l'ensemble des choix possibles pour Alice, nous n'avons représenté que ceux n'aboutissant pas à une I-chenille. Nous n'avons en outre pas représenté les composantes trivialement de bitype  $\mathcal{AA}^+$  (de la forme  $A_0$  ou  $A_1$ ). Par la suite les variables  $a$  et  $b$  seront celle de  $C_0$ , on aura donc toujours  $a \neq b$ .

Bob choisit  $C_1 = az^6 bzb$ . Sur cette chenille, Alice n'a qu'un seul choix qui ne constitue pas de I-chenille :  $C_2 = a^2 z^5 bzb$ . Sur cette chenille Bob choisit  $C_3 = a^3 z^4 bzb$ . On observe que les seuls coups ne constituant pas de I-chenille sont  $T_1 = a^3 z^4 b^3$  et  $T_2 = a^3 z^3 b + bbzb$ . La première chenille  $T_1$  possède l'option  $a^3 z^3 c_{a \neq c} + cb^3_{c \neq b} = N_8 + N_1$ . D'autre part on a  $T_2 = N_8 + A_5$ , donc par le Lemme 7.3.2 toute option de  $C_3$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Comme  $C_3 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} a^3 z^3 c + cbzb = N_8 + N_2$  et  $C_3 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} a^3 z^4 c + czb = N_{10} + N_0$  on en déduit que  $ooo(C_3) = \mathcal{BB}^+$ . Ainsi toute option de  $C_1$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Comme  $C_1 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} az^5 c + cbzb = N_9 + N_2$  et  $C_1 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} az^3 c + czzbzb = N_5 + czzbzb$  (car  $czzbzb \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} cza_{a \neq c} + abzb_{a \neq b} = N_0 + N_2$ ), on en conclut que  $ooo(C_1) = \mathcal{BB}^+$ , donc que  $C_0$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.

Concernant  $C'_0 = az^{2k} b$  avec  $k \geq 5$ , il suffit à Bob de choisir l'option  $C'_1 = az^8 c_{a \neq c} + cz^{2k-9} b_{c \neq b}$ . La partie droite est une I-chenille, donc a une  $\mathcal{BB}^+$ -option comme la partie gauche. Ainsi par la Proposition 7.1.2  $oo(C'_1) \succeq \mathcal{NN}^+ \oplus \mathcal{NN}^+ = \mathcal{BB}^+$ .

2. Démontrons maintenant que  $ooo(az^8a) = \mathcal{AA}^+$ . Si Alice commence elle choisit  $az^6a + aza = A_{20} + A_3$ , il reste donc à prouver que Bob n'a aucun coup gagnant sur  $C_0 = az^8a$ , plus précisément que toute option de  $az^8a$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Si Bob choisit  $az^i c + cz^j a$ , alors sans perte de généralité on peut supposer que  $i$  est pair et  $j$  est impair. Alice choisit  $az^i c + cb + bz^{j-1}a$ . Par le Lemme 7.3.2 les trois parties sont de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . De même s'il choisit  $az^i cz^j a$  (en supposant que  $i$  est pair) avec  $i \neq 6$ , alors Alice choisit  $az^i cc + cz^{j-1}a$ . Par le Lemme 7.3.2 les deux parties sont de bitype  $\mathcal{AA}^+$ .

Il reste à traiter le cas  $i = 6$ , c'est-à-dire lorsque  $C_1 = azcz^6a$ . Si  $c \neq a$  Alice choisit  $aza + az^6a = A_3 + A_{20}$ , de bitype  $\mathcal{AA}^+$  par le Lemme 7.3.2. Enfin si  $c = a$  Alice choisit  $azaz^5aa = A_{23}$ . On en conclut que  $ooo(az^8a) = \mathcal{AA}^+$ . ■

La stratégie gagnante de Bob sur  $az^8b_{a \neq b}$  (représentée Figure 7.1) est à la base de la caractérisation des 1-chenilles non coloriées.

Ce lemme permet de conclure quant à la caractérisation des éléments de bitype  $\mathcal{AA}$  et de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  de  $\mathcal{F} = az^n b$  :

#### Corollaire 7.3.4

$$E_{\mathcal{AA}}(az^n b) = \{0, 1^=, 2, 4, 6, 8^=\}.$$

$$E_{\geq \mathcal{NN}}(az^n b) = \{1^\neq, 3, 5, 7, 8^\neq, 9^+\}.$$

**Preuve:** par le Lemme 7.3.2, on sait que  $\{0, 1^=, 2, 4, 6\} \subseteq E_{\mathcal{AA}}(az^n b)$ . De plus, par la Proposition 7.2.1 est par le Lemme 7.3.3, on sait que  $8^= \in E_{\mathcal{AA}}(az^n b)$  et que tout autre élément de la L-famille  $az^n b$  n'est pas de bitype  $\mathcal{AA}$ . Ainsi  $E_{\mathcal{AA}}(az^n b) = \{0, 1^=, 2, 4, 6, 8^=\}$ . Puisque les coups gagnants de Bob, s'ils existent, sont toujours de bitype  $\mathcal{BB}^+$ , la L-famille  $\mathcal{F} = az^n b$  n'a aucun élément de bitype  $\mathcal{AN}$ ,  $\mathcal{NA}$ ,  $\mathcal{PN}$  ou  $\mathcal{NP}$ . On en conclut que  $E_{\geq \mathcal{NN}}(az^n b) = \{1^\neq, 3, 5, 7, 8^\neq, 9^+\}$ . ■

On en déduit également des coups gagnants pour Alice sur certaines chenilles de la forme  $az^n b$  :

#### Corollaire 7.3.5 $E_{\mathcal{BB}}(az^n b) \cap \{17^=, 15, 13, 11, 10^=, 9^-\} = \emptyset$ .

**Preuve:** Sur les chenilles de taille impaire de la forme  $az^{2p+1}b$ , Alice peut couper en deux morceaux de taille paire et inférieure ou égale à 8. En effet, si  $p \geq 5$  elle choisit  $az^8a + az^{2p-8}b$ , qui par le Corollaire 7.3.4 est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  si  $2p+1 \leq 15$  ou si  $2p+1 = 17$  et  $a = b$ . Si  $1 \leq p \leq 4$  elle choisit  $az^2c + cz^{2p-2}b_{c \neq b}$ , qui par le Lemme 7.3.2 est de bitype  $\mathcal{AA}^+ \oplus \mathcal{AA}^+ = \mathcal{AA}^+$ .

Sur les chenilles de taille paire de la forme  $az^{2p}b$ , Alice dispose de l' $\mathcal{AA}^+$ -option  $aza + az^{2p-2}b$ , si et seulement si  $p \leq 4$  ou  $p = 5$  et  $a = b$ . ■

Passons maintenant aux stratégies gagnantes d'Alice sur les chenilles de la forme  $az^n b$  n'appartenant pas à l'ensemble  $\{17^=, 15, 13, 11, 10^=, 9^-\}$  du corollaire précédent.

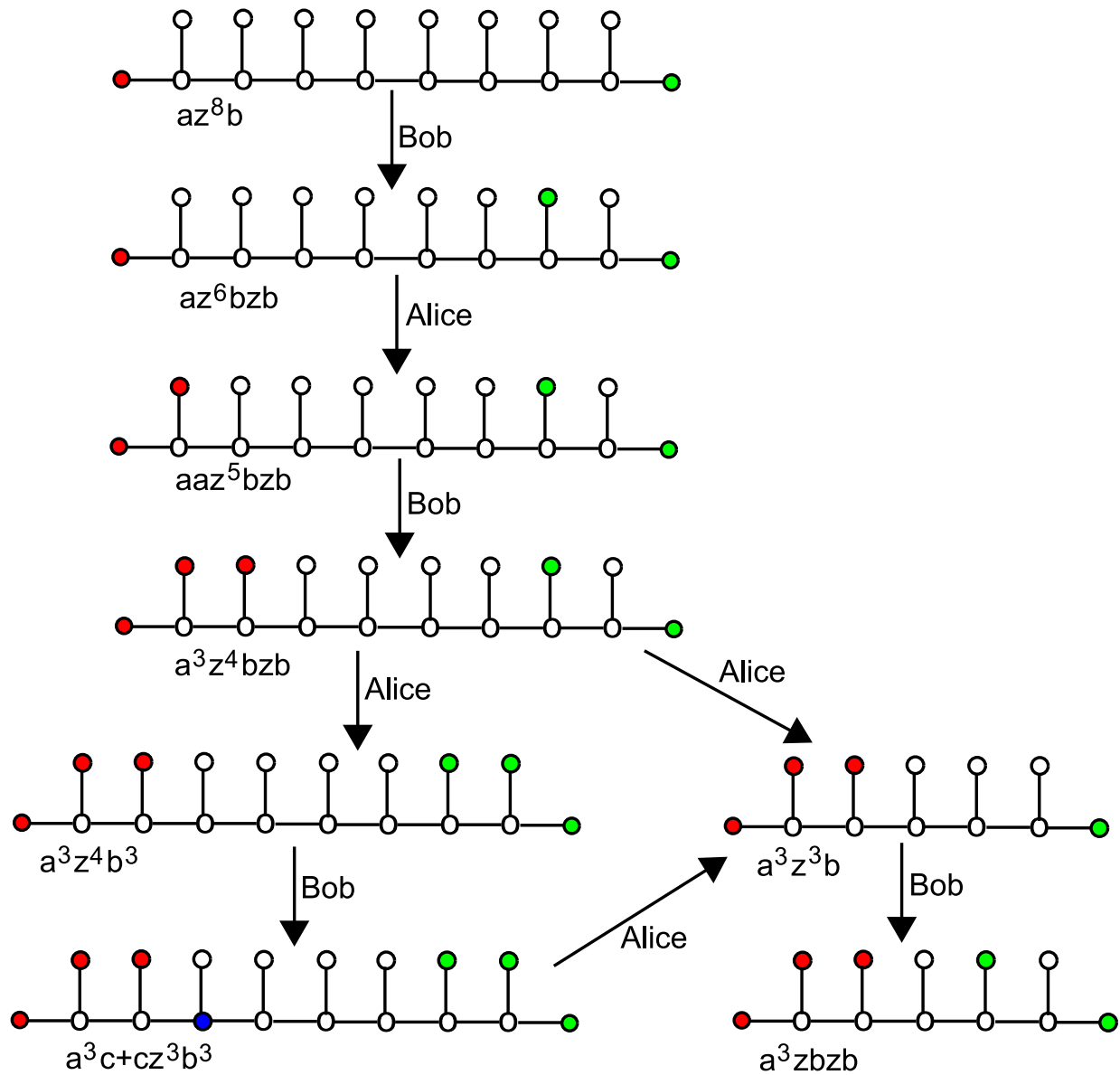


FIGURE 7.1 – Stratégie gagnante de Bob sur  $az^8b_{a \neq b}$ .

**Lemme 7.3.6**

1. Les chenilles  $az^{14}a$ ,  $az^{12}b$  et  $az^{10}b$  ont une  $\mathcal{AA}^+$ -option.
2. Pour tout  $k \geq 0$ , toute option d'une des chenilles  $az^{14}b_{a \neq b}$ ,  $az^{16+2k}b$ ,  $az^{17}b_{a \neq b}$  ou  $az^{19+2k}b$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.

Pour chacune de ces chenilles, on observe que mis à part les options de la forme  $az^nbb$ , toute autre option contient une I-chenille ou une chenille ayant une  $\mathcal{BB}^+$ -option par le Lemme 7.3.3. Le seul coup potentiellement gagnant pour Alice est donc de la forme  $az^nbb$ . Il faut donc étudier la L-famille  $az^nbb$ , plus précisément déterminer les éléments de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Démontrons les deux caractérisations suivantes :

**Lemme 7.3.7**

1.  $E_{\succeq \mathcal{NN}}(az^n b^3) = \{0^\neq, 2, 3^\neq, 4^+\}$ ;
2.  $E_{\mathcal{AA}}(az^n bb) = \{9^-, 10^-, 11, 13^-\}$ .

**Preuve:**

1. Étudions la L-famille  $[a, b^3]$ . On observe que tout élément  $az^{2p}b^3$  de taille paire non nulle a la  $\mathcal{BB}^+$ -option  $az^{2p-1}c + cb^3$  avec  $c \notin \{a, b\}$ , car la partie gauche est une I-chenille et la partie droite correspond à  $N_1$ . De plus par le Lemme 7.3.2  $ooo(ab^3) = \mathcal{NN}^+$  si  $a \neq b$  et  $\mathcal{AA}^+$  sinon (il s'agit respectivement de  $N_1$  et  $A_4$ ). Concernant les éléments de taille impaire, par le Lemme 7.3.2 on sait que  $azb^3(A_8)$  et  $az^3a^3(A_{16})$  sont de bitype  $\mathcal{AA}^+$  et que  $ooo(az^3b_{a \neq b}^3) = ooo(N_8) = \mathcal{NN}^+$ . Par conséquent, sur  $az^{2p+1}b^3$  avec  $p \geq 2$ , Bob gagne en choisissant  $az^{2p-3}c + cz^3b^3$  avec  $c \notin \{a, b\}$ , qui est de bitype au moins  $\mathcal{NN}^+ \oplus \mathcal{NN}^+ = \mathcal{BB}^+$  par la Proposition 7.1.2. On en conclut que :

$$E_{\succeq \mathcal{NN}}(az^n b^3) = \{0^\neq, 2, 3^\neq, 4^+\}.$$

2. Recherchons maintenant des  $\mathcal{BB}^+$ -options sur les chenilles de la forme  $az^nbb$ . Si  $n \leq 5$ , par le Lemme 7.3.2 on sait que  $oo(az^nbb) = \mathcal{AA}^+$  (il s'agit de  $A_2$ ,  $A_5$ ,  $A_{10}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{17}$  et  $A_{19}$ ). Soit  $n$  le plus petit entier tel que  $oo(az^nbb) \neq \mathcal{AA}^+$ . Posons  $T_0 = az^nbb$  avec  $n \geq 6$ . Sur  $T_0$ , si Bob joue sur l'épine dorsale il aboutit à une option de la forme  $az^i c + cz^j bb$ . Par définition de  $n$  la partie droite est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ , et la partie gauche a la  $\mathcal{AA}^+$ -option  $az^{i-1}cc$  (ou est isomorphe à  $ac = A_0$ ). De plus toute coloration d'une feuille de la forme  $az^i cz^j bb$  avec  $j \neq 0$  ou  $c \neq b$  n'est pas un coup gagnant pour Bob. En effet si  $j \neq 0$  Alice peut choisir  $az^i cc + cz^{j-1}bb$  qui par définition de  $n$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+ \oplus \mathcal{AA}^+ = \mathcal{AA}^+$ , et si  $j = 0$  et  $c \neq b$  Alice peut choisir  $az^i cc + cb$  qui par définition de  $n$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Il ne reste que  $T_1 = az^{n-1}b^3$  qui est donc la seule option de  $T_0$  n'ayant pas d' $\mathcal{AA}^+$ -option puisque  $ooo(T_0) \neq \mathcal{AA}^+$ . Regardons les options de  $T_1 = az^{n-1}b^3$ . On a :

$$Opt(T_1) = \{a^2 z^{n-2} b^3, az^i c + cz^{n-i-2} b^3, az^{n-1} c_{c \neq b}, az^n b c_{c \neq b}, az^i c z^{n-i-1} b^3\}.$$

Recherchons dans quelles conditions on peut avoir une  $\mathcal{AA}^+$ -option de  $T_1$ . La seule chenille pour laquelle aucune stratégie de Bob n'est connue est  $T_2 = a^2z^{n-2}b^3$ . Regardons tout d'abord les autres  $\mathcal{AA}^+$ -options potentielles.

- Si  $n$  est pair (on a  $n \geq 6$ ) alors par le premier point la 2e option ne peut être de bitype  $\mathcal{AA}^+$  que si  $n-i-2 = 0$  et  $c = b$ , c'est-à-dire  $az^i c + cz^{n-i-2}b^3 = az^{n-2}b + b^4$  qui est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  si  $n \leq 8$  ou ( $n = 10$  et  $a = b$ ), et de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  sinon par le Corollaire 7.3.4. Dans le cas contraire toutes les options (excepté éventuellement  $T_2$ ) sont de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ .
- Si  $n$  est impair alors par le premier point la 2e option ne peut être de bitype  $\mathcal{AA}^+$  que si  $n-i-2 = 1$  ou ( $n-i-2 = 3$  et  $c = b$ ). Pour  $n-i-2 = 1$  on a  $az^i c + cz^{n-i-2}b^3 = az^{n-3}c + czb^3$  qui est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  si  $n \leq 9$  ou ( $n = 11$  et  $a = c$ ), et de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  sinon par le Corollaire 7.3.4. Pour  $n-i-2 = 3$  et  $c = b$  on a  $az^i c + cz^{n-i-2}b^3 = az^{n-5}b + bz^3b^3$  qui est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  si  $n \leq 11$  ou ( $n = 13$  et  $a = b$ ), et de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  sinon par le Corollaire 7.3.4. Dans le cas contraire toutes les options (excepté éventuellement  $T_2$ ) sont de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ .

De ces coups gagnants d'Alice on en déduit que :

$$\{9^-, 10^-, 11, 13^-\} \subseteq E_{\mathcal{AA}}(az^n bb).$$

Il reste à prouver que si  $T_0 \notin \{9^-, 10^-, 11, 13^-\}$  alors  $T_2 = a^2z^{n-2}b^3$  n'est pas un coup gagnant pour Alice. Sur  $T_2$  Bob choisit  $T_3 = a^3z^{n-3}b^3$ . Regardons les options de  $T_3$  :

$$Opt(T_3) = \{a'az^{n-3}b^3, a'z^{n-3}b^3, a^3z^i c + cz^{n-4-i}b^3, a^3z^i cz^{n-4-i}b^3\}.$$

La première option contient une I-chenille, donc est de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ . Comme  $n \geq 10$  par le premier point la 2e option est de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ . La 3e n'est pas de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  si les deux parties ne sont pas dans  $E_{\mathcal{NN}}(az^n b^3)$ . Il faut donc avoir ( $i = 0$  et  $a = c$ ) ou  $i = 1$  ou ( $i = 3$  et  $a = c$ ) pour que la partie gauche  $a^3z^i c$  soit de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Or pour chacun de ces trois cas la partie droite vaut respectivement  $az^{n-4}b^3$ ,  $cz^{n-5}b^3$  et  $az^{n-7}b^3$ . Mais  $T_0 \notin \{9^-, 10^-, 11, 13^-\}$ , donc chacune de ces trois chenilles est de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ . Enfin la 4e option  $a^3z^i cz^{n-4-i}b^3$  contient forcément une I-chenille,  $a^3z^3 b_{a \neq b}$  ou  $a^3z^5 a$  qui sont de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  par le premier point. On en conclut que  $E_{\mathcal{AA}}(az^n bb) = \{9^-, 10^-, 11, 13^-\}$ . ■

- Preuve du Lemme 7.3.6 :**
1. Du Lemme 7.3.7 on déduit que les chenilles  $az^{14}a$ ,  $az^{12}b$  et  $az^{10}b$  ont une  $\mathcal{AA}^+$ -option :  $az^{13}aa$ ,  $az^{11}bb$  et  $az^9bb$  respectivement.
  2. Pour chacune des quatre chenilles  $az^{14}b_{a \neq b}$ ,  $az^{16+2k}b$ ,  $az^{17}b_{a \neq b}$  et  $az^{19+2k}b$ , les options de la forme  $az^i bb$  ( $az^{13}bb_{a \neq b}$ ,  $az^{15+2k}bb$ ,  $az^{16}bb_{a \neq b}$  et  $az^{18+2k}bb$  respectivement) sont, par le Lemme 7.3.7, de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ . Comme de plus toute autre option

contient une I-chenille ou une chenille gagnante pour Bob par le Corollaire 7.3.4, on en conclut que ces chenilles sont de bitype  $\mathcal{BB}^+$ . ■

Des Lemmes 7.3.2, 7.3.3, 7.3.6 et 7.3.7, on déduit la caractérisation des chenilles à deux extrémités coloriées :

### Théorème 7.3.8

$$E_{\mathcal{AA}}(az^n b) = \{0^\neq, 1^=, 2, 4, 6, 8^=\};$$

$$E_{\mathcal{NN}}(az^n b) = \{1^\neq, 3, 5, 7, 8^\neq, 9^+\};$$

$$E_{\mathcal{BB}}(az^n b) = \{14^\neq, 16, 17^\neq, 18^+\};$$

$$E_{\mathcal{V}}(az^n b) = \emptyset.$$

### 7.3.3 Chenilles à une extrémité coloriée

Continuons avec les chenilles à une extrémité coloriée, c'est-à-dire la famille  $az^n z$  sur laquelle nous allons rechercher une stratégie gagnante pour Bob puis pour Alice. Dans le cas où Bob est le Suivant la détermination des bitypes de tous les éléments de la famille sera inutile. En effet l'existence d'une  $\mathcal{BB}^+$ -option de  $az^n z$  entraînera par le théorème d'inclusion cette même existence pour toute chenille  $az^p z$  avec  $p > n$ .

#### Lemme 7.3.9

1. La chenille  $az^{14}z$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option, et pour tout  $k \leq 13$  la chenille  $az^k z$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ .
2. Pour tout  $k \leq 22$ ,  $az^k z$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option, et la chenille  $az^{23}z$  est de bitype  $\mathcal{BB}^+$ .

#### Preuve:

1. Pour  $az^{14}z$ , par le Théorème 7.3.8 on connaît une  $\mathcal{BB}^+$ -option  $az^{14}b_{a \neq b}$ .

Démontrons maintenant que pour tout  $k \leq 13$ ,  $ooo(az^{13}z) = \mathcal{AA}^+$ . Notons  $n_0$  le plus petit entier tel que  $C_0 = az^{n_0}z$  vérifie  $ooo(C_0) \neq \mathcal{AA}^+$ . Il faut démontrer que  $n_0 = 14$ . Supposons par l'absurde que  $n_0 \leq 13$  pour aboutir à une contradiction.

Soit  $C_1$  une option de  $C_0$ . Si  $C_1$  est issue d'un coup sur l'épine dorsale (posons  $C_1 = az^i b + bz^j z$ ), alors par définition de  $n_0$  la partie droite  $bz^j z$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Or comme  $i \leq n \leq 13$ , par le Théorème 7.3.8 la partie gauche a une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Par conséquent tout coup sur l'épine dorsale de  $C_0$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option. De plus si  $i = 6$  on a  $ooo(C_1) = ooo(az^6 b) \oplus ooo(bz^j z) = \mathcal{AA}^+ \oplus \mathcal{AA}^+ = \mathcal{AA}^+$  par définition de  $n_0$ . Donc  $C_0$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option.

Si  $C_1 = az^i bz^j z$  est issu d'un coup sur une feuille centrale (on a  $i \leq n_0 - 2 \leq 13 - 2 = 11$ ), alors si  $i \neq 10$  Alice a le coup gagnant  $C_2 = az^i bb + bz^{j-1} z$ . En effet la partie gauche est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  pour toute couleur  $b$  si  $i \leq 9$  ou  $i = 11$  (expression de  $E_{\mathcal{AA}}(az^n bb)$  dans le Lemme 7.3.7) et la partie droite l'est également par définition de

$n_0$ . Enfin si  $i = 10$  alors Alice choisit  $az^8a + azbz^jz$ . Par le Théorème 7.3.8 la partie gauche est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Concernant la partie droite, comme  $j = n - i - 1 \leq 2$  on a  $azbz^jz \in \{A_{11}, A_{15}\}$ , donc par le Lemme 7.3.2 elle est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . On en conclut que toute option de  $C_0$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option, donc que  $ooo(C_0) = \mathcal{AA}^+$ . Contradiction.

2. Soit  $k \leq 22$ . Démontrons que  $az^kz$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Si  $k \leq 13$  alors par le premier point on a  $ooo(az^kz) = \mathcal{AA}^+$ , donc  $az^kz$  a bien une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Si  $14 \leq k \leq 22$  alors on a  $az^kz \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} az^8a + az^{k-9}z$ . En effet, par le Théorème 7.3.8 la partie gauche est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ , et comme  $k - 9 \leq 13$  par le premier point on sait que la partie droite est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ .

Sur  $C_0 = az^{23}z$ , tout coup sur l'épine dorsale  $az^ib + bz^jz$  vérifie  $i \geq 9$  ou  $j \geq 14$ . Donc toute option de cette forme a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Regardons un coup sur une feuille centrale  $C_1 = az^ibz^jz$  avec  $i > 0$ . Si  $i \geq 8$  alors comme  $az^{i+1}b \subseteq C_1$  par le théorème d'inclusion et par le Théorème 7.3.8  $C_1$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Si  $i \leq 7$  alors  $j = 22 - i \geq 15$ . Or  $bz^{j+1}z \subseteq C_1$ , donc par le théorème d'inclusion et par le premier point  $C_1$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.

Il reste à traiter le cas  $i = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $C_1 = abz^{22}z$ . Si  $a \neq b$  alors  $C_1 \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} K_{1,3}^{(c)} + cz^{21}z$ . Finalement si  $a = b$  alors démontrons que l'option  $C_2 = a^3z^{21}z$  de  $C_1$  est de bitype  $\mathcal{BB}^+$ . Par le Lemme 7.3.7 on sait que  $E_{\succeq \mathcal{NN}}(az^n b^3) = \{0^\neq, 2, 3^\neq, 4^+\}$ . Donc si dans  $C_2$  Alice joue à distance au moins 6 d'une feuille coloriée, alors elle perd. En effet dans ce cas l'option obtenue contient  $a^3z^n b$  avec  $n \geq 4$ , donc a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Mais si elle joue à distance au plus 5 d'une feuille coloriée, alors cette option contient  $azb_{a \neq b}$  ou  $bz^n z$  avec  $n \geq 17$ . Par le Théorème 7.3.8, là aussi Bob a un coup gagnant de bitype  $\mathcal{BB}^+$ . On en conclut que toute option de  $az^{23}z$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Comme  $az^{23}z$  a plusieurs  $\mathcal{BB}^+$ -options (par exemple  $az^{16}a$  et  $az^{18}a$ ), on en conclut que  $ooo(az^{23}z) = \mathcal{BB}^+$ . ■

De ce théorème on en déduit la caractérisation de la famille  $az^n z$  :

### Corollaire 7.3.10

$$E_{\mathcal{AA}}(az^n z) = \{13^-\} \quad ; \quad E_{\succeq \mathcal{NN}}(az^n z) = \{14^+\} \quad ; \quad E_{\mathcal{BB}}(az^n z) = \{23^+\} \quad ; \quad E_{\mathcal{V}}(az^n z) = \emptyset.$$

**Preuve:** Comme pour tout  $n \geq 14$ ,  $az^{14}z \subseteq az^n z$ , par le théorème d'inclusion on en déduit que toute chenille  $az^n z$  avec  $n \geq 14$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. Il en est de même pour les éléments de bitype  $\mathcal{BB}^+$ . Comme  $ooo(az^{23}z) = \mathcal{BB}^+$ , par le théorème d'inclusion on en déduit que  $ooo(az^n z) = \mathcal{BB}^+$  pour tout  $n \geq 23$ . ■

### 7.3.4 Chenilles non coloriées

Démontrons maintenant un des principaux résultats de ce Chapitre : la caractérisation des 1-chenilles non coloriées.

**Théorème 7.3.11** Soit  $C$  une 1-chenille non coloriée d'épine dorsale de taille  $n$ , c'est-à-dire de mot  $zz^n z$ .

1. Si  $n \leq 22$  alors  $ooo(C) = \mathcal{AA}^+$  ;
2. Si  $23 \leq n \leq 27$  alors  $ooo(C) = \mathcal{NN}^+$  ;
3. Si  $n \geq 28$  alors  $ooo(C) = \mathcal{BB}^+$ .

Ce théorème améliore le résultat de S. Tsai et C. Chou [25], où les auteurs ont démontré que toute 1-chenille de taille au moins 102 est de nombre chromatique ludique 4.

Pour démontrer ce Théorème, il nous faut d'abord déterminer le bitype de certains éléments de la famille  $aaz^n z$ .

**Lemme 7.3.12**

1.  $T = zz^i bz^m a$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  pour tout  $i \in \{1, 2\}$  et pour tout  $m \in \{1, 3, 5, 7\}$ , sauf si  $m = 7$  et  $a \neq b$  ;
2. Pour tout  $k \leq 18$ , la chenille  $aaz^k z$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ .

**Preuve:** 1. Pour  $m = 1$  on a  $T = zz^i bza \in \{A_{11}, A_{15}\}$ , donc par le Lemme 7.3.2 la propriété est vraie. Supposons par l'absurde qu'il existe  $m \in \{3, 5, 7\}$  tel que pour un certain  $i$  on ait  $ooo(T) \neq \mathcal{AA}^+$ . Prenons le plus petit entier  $m$  possible.

Si Bob joue à gauche du "b" central (option de la forme  $Ubz^m a$ ), alors Alice choisit  $Ubb + bz^{m-1}a$ . Si  $i = 1$  alors  $Ubb \in \{czbb, cbb\} = \{A_2, A_5\}$ , et si  $i = 2$  alors  $Ubb \in \{czzbb, czbb, cbb, zzcbb\} = \{A_{10}, A_5, A_2, zzcbb\}$ . Concernant  $zzcbb$ , on a :

$$Opt(zzcbb) = \{azcbb, acbb, zza + abb, zzca\}.$$

On a  $azcbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} azcc = A_5$  si  $c \neq b$  et  $azcbb = A_8$  sinon,  $acbb \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} acc' = A_2$  (avec  $c' \neq b$  et  $c' \in \{a, c\}$ ),  $ooo(zza + abb) = \mathcal{AA}^+$ , et  $zzca \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} zc + cca = A_1 + A_2$ . Ainsi  $ooo(zzcbb) = \mathcal{AA}^+$ , donc  $Ubb$  est toujours de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Comme de plus  $m \in \{3, 5, 7\}$  par le Théorème 7.3.8 on a  $ooo(bz^{m-1}a) = \mathcal{AA}^+$ .

Si Bob choisit  $zz^i b + bz^m a$  alors Alice gagne avec  $zz^i b + cz^{m-1}a$  qui est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  par le Lemme 7.3.9.

Il reste à regarder le cas où Bob joue à droite du "b" central. S'il s'agit d'un coup sur l'épine dorsale posons  $T_1 = zz^i bz^j c + cz^k a$ . Si  $j$  et  $k$  sont impairs alors la partie gauche est de la même forme que  $T = zz^i bz^m a$  (on a  $j \leq m - 2$ ), donc par définition de  $m$  cette partie est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Comme  $k \leq 5$  par le Théorème 7.3.8 la partie droite a une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Si  $j$  et  $k$  sont pairs alors comme  $k \leq 6$  la partie droite est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Alice gagne en choisissant  $zz^i b' + b'z^j c$  sur la partie gauche. En effet comme  $j \leq 6$  et  $j$  est pair par le Théorème 7.3.8  $oo(b'z^j b) = \mathcal{AA}^+$ .

Enfin s'il choisit une option de la forme  $C_3 = zz^i bz^j cz^k a$ , si  $j$  est pair Alice choisit  $C_4 = zz^i bz^{j-1} c + ccz^k a$ . Par définition de  $m$  la partie gauche est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ , et la partie droite également par le Lemme 7.3.7 puisque  $k \leq 6$ . Si  $j$  est impair alors si  $k \neq 1$  ou  $c \neq a$  Alice choisit  $zz^i bz^j cc + cz^{k-1}a$ . Comme  $k$  est impair la



partie droite est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . La partie gauche vérifie  $zz^i az^j bb \subseteq zz^i az^{j+1} b$ , donc par le théorème d'inclusion et par définition de  $m$  on a  $oo(zz^i az^j bb) = \mathcal{AA}^+$ . Il reste à traiter l'option  $C_3 = zz^i bz^{m-2} aza$ . Si  $m \neq 3$  ou  $a \neq b$  alors par le Lemme 7.3.2 on a  $zz^i bz^{m-2} aza \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} zz^{i-1} b + bbz^{m-2} aza$ . En effet  $m \in \{3, 5\}$  ou ( $m = 7$  et  $a = b$ ), donc  $bbz^{m-2} aza \in \{A_{12}, A_{18}, A_{22}\}$ . Enfin si  $m = 3$  et  $a = b$  on a  $C_3 = zz^i azaza \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} zz^i aa + aaza$  (car  $zz^i aa \subseteq zz^{i+1} a$  qui est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ ).

On en déduit que toute option de  $T$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Comme de plus  $T \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} zz^{i-1} b + bbz^m a$  (par le Lemme 7.3.7), on en déduit que  $ooo(T) = \mathcal{AA}^+$ .

2. Démontrons par l'absurde que pour tout  $k \leq 18$ , la chenille  $aa z^k z$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  en supposant qu'il existe un entier  $p \leq 18$  tel que  $ooo(aa z^p z) \neq \mathcal{AA}^+$ . Prenons le plus petit entier  $p$  possible.

Comme  $aa z^p z \subseteq az^{p+1} z$  et comme  $az^{13} z$  est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ , par le théorème d'inclusion on sait que  $p + 1 \geq 14$ , c'est-à-dire  $p \geq 13$ . Commençons par observer que  $aa z^p z \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} aa z^9 a + azp - 10z$  (par les Lemmes 7.3.7 et 7.3.9). Il reste à prouver que toute option de  $T_0$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option pour aboutir à une contradiction. Regardons l'ensemble des options de  $T_0$ .

- $a^3 z^{p-1} z$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option :  $a^3 z^3 a + az^{p-5} z = A_{16} + az^{p-5} z$  (par le Lemme 7.3.9).
- $aabz^{p-1} z_{a \neq b} \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} bbz^{p-1} z$  par définition de  $p$ .
- Soit  $T_1 = aa z^i b + bz^j z$  un coup sur l'épine dorsale. Si  $i \leq 9$  alors la partie gauche est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  par le Lemme 7.3.7 et la partie droite a une  $\mathcal{AA}^+$ -option par le Lemme 7.3.9 (car  $j \leq 18$ ). Si  $i \geq 10$  alors  $j \leq 8$ , donc la partie droite est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  par le Lemme 7.3.9. Sur la partie gauche  $aa z^i b$ , Alice choisit  $aa z^{i-9} b + bz^8 b$ . Comme  $i \leq 18$  par le Lemme 7.3.7 la partie gauche est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ , et la partie droite également par le Théorème 7.3.8.
- Soit  $T_1 = aa z^i b z^j z$  un coup sur une feuille centrale (avec  $i > 0$  et  $j > 0$ ). Si  $i \leq 10$  ou  $i = 12$  alors Alice choisit  $aa z^{i-1} b + cz^j z$ . Par définition de  $p$  la partie droite est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ , et la partie gauche également puisque  $\{9^-, 11\} \subseteq E_{\mathcal{AA}}(az^n bb)$  (Lemme 7.3.7). Sinon si  $i \geq 15$  (on a  $j \leq 2$ ) alors Alice choisit  $aa z^{i-8} b + bz^7 b z^j z$ . La partie gauche est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ , est la partie droite également par le premier point de ce Lemme. Il reste le cas où  $i \in \{11, 13, 14\}$ . Dans ce cas Alice choisit  $aa z^i bb + bz^{j-1} z$ . La partie droite est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  par le Lemme 7.3.9. Regardons l'ensemble des options de la partie gauche  $T_2 = aa z^i bb$ , en posant  $i$  le plus petit entier tel que  $ooo(T_2) \neq \mathcal{AA}^+$ . Soit  $T_3 = aa z^j c + cz^k bb$  un coup sur l'épine dorsale. On ne peut avoir  $i \geq 10$  et  $j \geq 10$ , donc au plus une composante est de bitype  $\mathcal{NN}^+$ , donc Alice a un coup gagnant sur  $T_3$ . Si Bob choisit  $T_3 = a^3 z^{i-1} bb$ , alors Alice choisit  $T_4 = a^3 z^3 a + az^{i-5} bb = A_{16} + az^{i-5} bb$ . Il s'agit d'une  $\mathcal{AA}^+$ -option puisque  $i - 5 \leq 9$  (Lemme 7.3.7). Enfin si Bob choisit  $aa z^j cz^j bb$  avec  $j \geq k > 0$ , alors Alice choisit  $aa z^j cc + cz^{k-1} bb$ . Par définition de  $i$  la partie gauche est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ , et la partie droite également car  $k \leq \frac{i}{2} \leq 7$  (Lemme 7.3.7). On en déduit qu'un tel  $i$  n'existe pas dans  $\{11, 13, 14\}$ , donc que  $ooo(T_2) = \mathcal{AA}^+$ .

On en conclut que  $ooo(aa z^k z) = \mathcal{AA}^+$  pour tout  $k \leq 18$ . ■

**Preuve du Théorème 7.3.11 :** Soit  $C = zz^kz$ . Pour démontrer le théorème, il suffit de prouver que :

1. Si  $k \leq 27$  alors  $C$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option ;
2. si  $k \geq 28$  alors toute option de  $C$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option ;
3. si  $k \geq 23$  alors  $C$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option ;
4. si  $k \leq 22$  alors toute option de  $C$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option ;

1. Soit  $k \leq 27$ . Montrons que  $C$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Si  $k \leq 13$  alors  $C \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} az^kz$  par le Lemme 7.3.9. Si  $14 \leq k \leq 27$  alors  $C \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} zz^{13}a + az^{k-14}z$  par le Lemme 7.3.9.
2. Soit  $k \geq 28$ . On remarque que toute option de  $C$  contient la chenille  $az^{14}z$  qui a une  $\mathcal{BB}^+$ -option par le Lemme 7.3.9. Par le théorème d'inclusion on en déduit que toute option de  $C$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.
3. Soit  $k \geq 23$ . On a  $C \xrightarrow{\mathcal{BB}^+} az^kz$  par le Lemme 7.3.9.
4. Soit  $k \leq 22$ . Montrons que toute option de  $C$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option. Soit  $n_0$  le plus petit entier tel que  $ooo(zz^{n_0}z) \neq \mathcal{AA}^+$ . Il faut montrer que  $n_0 = 23$ . Supposons par l'absurde que  $n_0 \leq 22$ . Notons  $C_0 = zz^{n_0}z$  et regardons les options de  $C_0$ .

Soit  $C_1 = zz^i a + az^j z$  une option de  $C_0$  issue du jeu sur l'épine dorsale. Comme  $n \leq 22$  on ne peut avoir ni  $i \geq 23$  ni ( $i \geq 14$  et  $j \geq 14$ ). Par conséquent d'une part aucune composante n'est de bitype  $\mathcal{BB}^+$ , et d'autre part au plus une composante est de bitype  $\mathcal{NN}^+$  et l'autre est de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Donc tout coup sur l'épine dorsale a une  $\mathcal{AA}^+$ -option.

Soit  $C_1 = zz^i az^j z$  une option issue du jeu sur une feuille centrale (c'est-à-dire avec  $i > 0$  et  $j > 0$ ). Premièrement si  $i \leq 13$  et  $j \leq 13$  alors  $C_1 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} zz^i b + bz^j z$  (par le Lemme 7.3.9). Sinon sans perte de généralité on peut poser  $j \geq 14$ . Si  $j \leq 18$  alors  $C_1 \xrightarrow{\mathcal{AA}^+} zz^{i-1}a + aaz^j z$  par le 2e point du Lemme 7.3.12. Sinon on a  $j \geq 19$  et donc  $i \leq 21 - j \leq 2$ , soit  $i \in \{1, 2\}$ . Dans ce cas Alice choisit  $C_2 = zz^i az^7 a + az^{j-8} z$ . Comme  $i > 0$  on a  $j \leq 21 - i \leq 20$ , donc  $j - 8 \leq 12$ . Par conséquent la partie droite est de bitype  $\mathcal{AA}^+$  par le Lemme 7.3.9, et la partie gauche  $zz^i az^7 a$  est également de bitype  $\mathcal{AA}^+$  par le 1er point du Lemme 7.3.12. On en conclut que toute option de  $C_0$  a une  $\mathcal{AA}^+$ -option, donc qu'un tel entier  $n_0$  n'existe pas. ■

### 7.3.5 Résultats sur quelques L-familles

L'ensemble des résultats concernant douze L-familles de 1-chenilles est rassemblé en Table 7.2. Pour certains ensembles  $E_{\mathcal{X}}(\mathcal{F})$  la preuve n'a pas été effectuée ici car leur détermination n'est pas nécessaire pour connaître les bitypes des 1-chenilles non coloriées. Ils pourront toutefois être utiles lors de travaux ultérieurs, par exemple pour l'étude d'autres familles de graphes comme les chenilles de degré maximal 3 ou les chenilles circulaires.

$\mathcal{F}$	$E_{\mathcal{AA}}(\mathcal{F})$	$E_{\mathcal{NN}}(\mathcal{F})$	$E_{\mathcal{BB}}(\mathcal{F})$	$E_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$
$az^nb$	$0, 1^-, 2, 4, 6, 8^-$	$1^-, 3, 5, 7, 8^-, 9^+$	$14^-, 16, 17^-, 18^+$	$\emptyset$
$az^nb^2$	$9^-, 10^-, 11, 13^-$	$10^-, 12, 13^-, 14^+$	$19^-, 21, 22^-, 23^+$	$\emptyset$
$a^2z^nb^2$	$14^-, 15^-, 16, 18^-$	$15^-, 17, 18^-, 19^+$	$24^-, 26, 27^-, 28^+$	$\emptyset$
$az^nb^3$	$0^-, 1, 3^-$	$0^-, 2, 3^-, 4^+$	$9^-, 11, 12^-, 13^+$	$\emptyset$
$a^2z^nb^3$	$0, 1^-, 2, 3, 4, 5^-, 6, 8^-$	$5^-, 7, 8^-, 9^+$	$14^-, 16, 17^-, 18^+$	$1^-$
$a^3z^nb^3$	$0^-, 2^-$	$1, 2^-, 3^+$	$4^-, 6, 7^-, 8^+$	$0^-$
$az^nbzb$	$0^-$	$0^-, 1^+$	$6^-, 8, 9^-, 10^+$	$\emptyset$
$a^2z^nbzb$	$0, 1^-, 2^-, 3, 5^-$	$2^-, 4, 5^-, 6^+$	$11^-, 13, 14^-, 15^+$	$1^-$
$a^3z^nbzb$	$\emptyset$	$0^+$	$1^-, 3, 4^-, 5^+$	$0^-$
$a^2z^nz$	$18^-$	$19^+$	$28^+$	$\emptyset$
$az^nz$	$13^-$	$14^+$	$23^+$	$\emptyset$
$zz^nz$	$22^-$	$23^+$	$28^+$	$\emptyset$

TABLE 7.2 – Bitypes de douze L-familles de 1-chenilles.

## 7.4 Les chenilles sans trous

La même méthode peut être appliquée aux chenilles avec des sommets de degré au moins 4 (les "D" dans les mots).

Concernant les chenilles avec 1 ou 2 sommets de degré 4, les démonstrations des bitypes sont complexes et utilisent le calcul par informatique. Nous nous contenterons de donner les résultats des caractérisations sans preuve.

À Partir de trois sommets de degré 4, Bob a une stratégie gagnante pour certains très petits éléments. Nous pouvons donc démontrer les bitypes sans grande difficulté.

### 7.4.1 Les 2-chenilles avec au plus deux sommets de degré 4

Pour une chenille  $C = zz^pDz^n z$ , le bitype de  $C$  est donné par la Table 7.3, où un  $A$  (resp.  $N$ ,  $B$ ) apparaît à la case  $(n, p)$  si et seulement si le bitype de  $C$  est  $\mathcal{AA}^+$  (resp.  $\mathcal{NN}^+$ ,  $\mathcal{BB}^+$ ). On observe que comme pour les 1-chenilles, cette famille ne contient aucun élément de bitype variable.

Grâce au théorème d'inclusion, une telle table peut être remplacée par la proposition suivante :

**Proposition 7.4.1** *Tout élément de la famille  $\mathcal{F} = \{zz^pDz^n z, p \geq 0, n \geq 0\}$  est de bitype  $\mathcal{NN}^+$  ou  $\mathcal{BB}^+$  si et seulement s'il contient l'une des quatre chenilles suivantes :*

$$zz^7Dz^7z, zz^5Dz^{11}z, zz^2Dz^{14}z, zDz^{15}z.$$

Les éléments de  $\mathcal{F}$  de bitype  $\mathcal{BB}^+$  sont également générés par quatre chenilles.

**Proposition 7.4.2** *Tout élément de la famille  $\mathcal{F} = \{zz^pDz^n z, p \geq 0, n \geq 0\}$  est de bitype  $\mathcal{BB}^+$  si et seulement s'il contient l'une des quatre chenilles suivantes :*

$$zz^7Dz^{14}z, zz^5Dz^{18}z, zz^2Dz^{21}z, zDz^{22}z.$$

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	$\geq 22$	
0 :	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	N	B
1 :	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	N	B
2 :	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B
3 :	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B
4 :	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B
5 :	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B
6 :	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B
7 :	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
8 :	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
9 :	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
10 :	A	A	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
11 :	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
12 :	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
13 :	A	A	A	A	A	N	N	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
14 :	A	A	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
15 :	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
16 :	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
17 :	N	N	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
18 :	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
19 :	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
20 :	N	N	N	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
21 :	N	N	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
$\geq 22$	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B

TABLE 7.3 – Bitypes des chenilles de la forme  $zz^n Dz^p z$ .

Remarquons que comme pour les 1-chenilles le plus grand élément de bitype  $\mathcal{NN}^+$  (donc de nombre chromatique ludique 3) est de taille 27, il s'agit de  $zz^{13} Dz^{13} z$ . Par contre il existe des éléments de bitype  $\mathcal{BB}^+$  de taille inférieure à 27. Le plus petit d'entre-eux est  $zz^7 Dz^{14} z$  de taille 22.

Passons aux 2-chenilles possédant 2 sommets de degré 4. Une telle 2-chenille non coloriée  $C$  est de la forme  $zz^n Dz^p Dz^q z$ , donc est déterminée par un triplet  $(n, p, q)$ .

La détermination des bitypes s'appuie sur la recherche du plus petit entier  $n_0$  tel que sur un élément  $Ez^{n_0} F$  on ait une stratégie gagnante pour Bob, et dans un second temps tel qu'on n'ait pas de stratégie gagnante pour Alice. Vu le grand nombre d'éléments à étudier (l'ensemble des triplets  $(n, p, q)$  tels que  $n + p + q \leq 28$ ), le calcul par ordinateur a été nécessaire pour obtenir la caractérisation ci-après.

**Proposition 7.4.3** *Tout élément de la famille  $\mathcal{F} = \{zz^n Dz^p Dz^q z, n \geq 0, p \geq 0, q \geq 0\}$  est de bitype  $\mathcal{NN}^+$  ou  $\mathcal{BB}^+$  (resp.  $\mathcal{BB}^+$ ) si et seulement s'il peut être obtenu par inclusions et/ou insertions deux à deux de lettres  $z$  dans la partie " $z^p$ " à partir d'un élément  $C_0 \in$*

$E_{\mathcal{NN}}(\mathcal{F})$  (resp.  $E_{\mathcal{BB}}(\mathcal{F})$ ), défini comme suit :

$$E_{\mathcal{NN}}(\mathcal{F}) = \{(0, 0, 7); (0, 1, 7); (0, 3, 5); (0, 6, 2); (0, 9, 0); (0, 10, 0); (5, 0, 5); (2, 2, 5); (2, 5, 2)\}.$$

$$E_{\mathcal{BB}}(\mathcal{F}) = \{(0, 0, 14); (0, 1, 14); (0, 8, 7); (0, 9, 7); (0, 12, 5); (0, 13, 5); (0, 14, 0); (0, 15, 0)\} \cup \\ \{(2, 5, 7); (2, 9, 5); (5, 2, 7); (5, 6, 5); (7, 0, 7); (7, 1, 7)\}.$$

### 7.4.2 Caractérisation des 2-chenilles avec au moins trois sommets de degré 4

Concernant les 2-chenilles avec un grand nombre de 4-sommets, nous allons voir que Bob a fréquemment une stratégie gagnante simple, ou, le cas échéant, perd rapidement la partie. Ces résultats s'appuient principalement sur la lc-chenille  $aDDa$  (de bitype  $\mathcal{BB}^+$ ), et sur une structure particulière appelée P-chenille.

**Proposition 7.4.4 (P-chenilles)** *Soit  $C$  une lc-chenille de la forme  $w(C) = au_1u_2 \dots u_{2p}b$  avec  $p > 0$  et  $u_i \in \{z, D\}$  pour tout  $1 \leq i \leq 2p$ . S'il existe  $1 \leq k \leq 2p$  tel que  $u_k = D$  alors  $C$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.*

**Preuve:** Quitte à étudier le palindrome de  $w(C)$  on peut supposer que  $k$  est impair.

1. Si  $p = 1$  alors  $C \in \{aDzb, aDDb\}$ . Regardons le cas  $C = aDzb$ . Si  $a \neq b$  Bob choisit l'option  $C_1 = aD_bzb$  et gagne car tout option de  $C_1$  a une option équivalente à  $K_{1,3}^{(c)}$ . Comme d'autre part  $C_1$  a plusieurs options équivalentes à  $K_{1,3}^{(c)}$ , on en déduit que  $ooo(C_1) = \mathcal{BB}^+$ . Si  $a = b$ , Bob choisit  $aD_cza_{a \neq c}$  qui est isomorphe à  $aD_bzb$  traité précédemment. Si  $C = aDDb$  Bob choisit  $C' = aD_cDb_{a \neq c}$  si  $a = b$  et  $C'' = aD_bDb$  si  $a \neq b$ . Comme  $C'$  et  $C''$  sont isomorphes, il suffit de montrer que  $ooo(C') = \mathcal{BB}^+$ . On vérifie aisément qu'Alice ne peut empêcher la mise en place des trois couleurs au voisinage de l'un des deux 4-sommets. Donc toute option de  $C'$  ou de  $C''$  a une option équivalente à  $K_{1,3}^{(c)}$ . Comme d'autre part  $C'$  a plusieurs options équivalentes à  $K_{1,3}^{(c)}$ , on en déduit que  $ooo(C_1) = \mathcal{BB}^+$ .
2. Si  $p > 1$  et  $k = 1$  alors Bob choisit l'option  $C_1 = aDu_2c + cu_4u_5 \dots u_{2p}b_{c \neq b}$ . La partie droite étant une I-chenille, par le 1er point chaque partie a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. On en déduit que  $ooo(C_1) \succeq \mathcal{NN}^+ \oplus \mathcal{NN}^+ = \mathcal{BB}^+$ .
3. Si  $p > 1$  et  $k > 1$  alors Bob choisit l'option  $C_1 = au_1u_2 \dots u_{k-2}c_{a \neq c} + cu_ku_{k+1} \dots u_{2p}b$ . Comme  $k$  est impair la partie gauche est une I-chenille, et la partie droite a été traitée au point précédent. Par conséquent chaque partie a une  $\mathcal{BB}^+$ -option. On en déduit que  $ooo(C_1) \succeq \mathcal{NN}^+ \oplus \mathcal{NN}^+ = \mathcal{BB}^+$ .

■

Ainsi, comme pour les I-chenilles, par le théorème d'inclusion Bob a un coup gagnant sur tout lc-arbre contenant une P-chenille.

De cette propriété sur les P-chenilles on déduit une stratégie gagnante pour Bob sur certaines lc-chenilles possédant deux 4-sommets.

**Proposition 7.4.5** *Pour tous  $n \geq 0$ ,  $p \geq 0$  et  $q \geq 0$ ,  $C = az^n Dz^p Dz^q z$  a une  $\mathcal{BB}^+$ -option.*

**Preuve:**

**Cas 1 :**  $n \leq 1$ . Bob choisit l'option  $C_2 = az^n Dz^p Dc$  avec  $c \neq a$  si  $n + p > 0$  et  $c = a$  sinon. Montrons que  $ooo(C_2) = \mathcal{BB}^+$ . Premièrement, si  $n = p = 0$  alors  $C_2 = aDDa$  qui est de bitype  $\mathcal{BB}^+$  par le Théorème 6.1.2 (démontré par Faigle et al. dans [18]). Si  $n = 0$  et  $p > 0$ , on observe que toute option est ou contient une P-chenille. De plus si Bob commence il peut choisir l'option  $C_3 = aD_b z^p Dc_{a \neq b}$  sur laquelle toute option contient soit une P-chenille soit  $azb_{a \neq b}$ . Enfin si  $n = 1$  alors si Bob commence il choisit  $C_3 = azb_{a \neq b} + bz^p Dc_{b \neq c}$  qui vaut soit  $2.N_0$  soit  $N_0$  plus une P-chenille. Si Alice commence la seule option de  $C_2$  n'étant pas une P-chenille est  $aDz^p Dc$ . Mais comme  $c \neq a$  Bob peut choisir  $cDz^p Dc$  si  $p = 0$  et  $bDz^p Dc_{b \neq c}$  sinon, on se ramène au cas  $n = 0$ .

**Cas 2 :**  $n \geq 2$ . Bob choisit l'option  $az^{n-1}b_{a \neq b} + bDz^p Dz^q z$  si  $n$  est pair et  $az^{n-2}b_{a \neq b} + bzDz^p Dz^q z$  sinon. La partie gauche étant une I-chenille, on se ramène au cas  $n \in \{0, 1\}$ .

Par conséquent même si Alice peut passer son tour Bob gagne, on en conclut que  $C$  a toujours une  $\mathcal{BB}^+$ -option. ■

Cette proposition entraîne le corollaire suivant :

**Corollaire 7.4.6** *Toute chenille non coloriée sans trous  $C$  vérifiant  $n_4(C) \geq 4$  est de bitype  $\mathcal{BB}^+$ .*

**Preuve:** Sur une telle chenille  $C$  si Alice commence elle ne peut éviter de constituer une structure de la forme  $C_1 = az^n Dz^p Dz^q z$  sur laquelle Bob connaît un coup gagnant de bitype  $\mathcal{BB}^+$ . Par conséquent Alice ne peut gagner si elle commence. Si Bob commence il joue sur une extrémité. Ainsi, Alice n'a aucune option ne contenant ni I-chenille ni P-chenille ni une chenille entrant dans les conditions de la Proposition 7.4.5. ■

En ce qui concerne les chenilles avec trois 4-sommets, donc de la forme  $C = zz^n Dz^p Dz^q Dz^r z$ , si Alice commence elle n'a qu'un choix qui ne constitue pas de structure  $az^n Dz^p Dz^q z$  (perdante par la Proposition 7.4.5) : la coloration du 4-sommet central. Elle obtient l'option  $C' = zz^n Dz^p a + az^q Dz^r z$ . Or les éléments de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  de la famille  $az^n Dz^p z$  ont été calculés dans l'algorithme aboutissant aux résultats de la Proposition 7.4.1.

On appelle **ensemble des générateurs** des éléments de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  (resp.  $\mathcal{BB}$ ) de la famille  $\mathcal{F}$  et on note  $E_{\geq \mathcal{NN}}(\mathcal{F})$  (resp.  $E_{\mathcal{BB}}(\mathcal{F})$ ) un ensemble de chenilles tel que toute chenille de  $\mathcal{F}$  de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  (resp.  $\mathcal{BB}$ ) peut être obtenue par inclusion et/ou insertion de lettres  $z$  deux à deux à partir de l'une des chenilles de  $E_{\geq \mathcal{NN}}(\mathcal{F})$  (resp.  $E_{\mathcal{BB}}(\mathcal{F})$ ). L'inclusion ne peut être effectuée qu'à proximité d'une extrémité non coloriée. Si l'on veut ajouter des  $z$  entre deux  $D$  ou entre une extrémité coloriée et un  $D$ , il faudra utiliser l'insertion, donc ajouter les  $z$  deux à deux. Par exemple la chenille  $C_0 = azDDz^3z$  génère l'ensemble suivant :

$$\{az^{1+2i} Dz^{2j} Dz^{3+k} z, i \geq 0, j \geq 0, k \geq 0\}.$$

Concernant la famille  $\mathcal{F} = az^n Dz^p z$ , on a :

$$E_{\succeq \mathcal{NN}}(az^n Dz^p z) = \{aDz^7 z, azDz^7 z, az^2 Dz^5 z, az^5 Dz^2 z, az^8 Dz\}.$$

On en déduit que :

**Proposition 7.4.7** *La famille  $zz^n Dz^p Dz^q Dz^r z$  a les générateurs de bitype  $\mathcal{BB}$  suivants :*

$$E_{\mathcal{BB}}(zz^n Dz^p Dz^q Dz^r z) = \{zz^7 D(z)D(z)Dz, zz^5 Dz^2 D(z)Dz, zz^2 Dz^5 D(z)Dz, zDz^8 D(z)Dz\}.$$

La notation  $(z)$  signifie que  $z$  peut être présent ou non dans le mot. Bien entendu les palindromes de ces chenilles sont également de bitype  $\mathcal{BB}$ .

**Preuve:** Par la Proposition 7.4.5 le seul coup potentiellement gagnant pour Alice est la coloration du  $D$  central. Il suffit d'observer que ce coup aboutit toujours à une chenille de  $E_{\succeq \mathcal{NN}}(az^n Dz^p z)$ , ou pouvant être généré à partir d'un élément de  $E_{\succeq \mathcal{NN}}(az^n Dz^p z)$ . ■

Enfin pour les 2-chenilles de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  vérifiant  $n_4(C) = 3$ , démontrons la proposition suivante :

**Proposition 7.4.8** *Soit  $C$  une chenille vérifiant  $n_4(C) = 3$ . Bob a un coup gagnant si :*

1.  $DDD \notin w(C)$ , ou
2.  $zzzD \in w(C)$ .

**Preuve:** Dans le premier cas Bob joue sur une feuille du  $D$  qui n'a pas de lettre  $D$  voisine et on observe qu'Alice ne peut éviter de constituer soit une P-chenille soit un élément de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  par la Proposition 7.4.5.

Dans le second cas on a  $C = zzzz^k DDDz^p z$  avec  $k, p \geq 0$ . Bob choisit  $C_1 = azzz^k DDDz^p z$ . Le seul choix non immédiatement perdant pour Alice est  $C_2 = aazz^k DDDz^p z$ . Or Bob choisit  $C_3 = aaz^k DDDz^p z$ . On observe que toute option de  $C_3$  contient soit une P-chenille soit un élément de bitype au moins  $\mathcal{NN}$  par la Proposition 7.4.5. On en déduit que Bob a une stratégie gagnante sur une telle chenille  $C$ . ■

On peut aisément démontrer que pour les autres cas Bob n'a aucun coup gagnant. On peut donc écrire :

**Proposition 7.4.9** *Sur l'ensemble des 2-chenilles non coloriées sans trous vérifiant  $n_4(C) = 3$ , les seuls éléments de bitype  $\mathcal{AA}$  sont :*

$$E_{\mathcal{AA}}(zz^n Dz^p Dz^q Dz^r z) = \{zDDDz, zzDDDz, zzDDDzz\}.$$

Cette proposition nous permet de conclure quant à l'absence d'éléments de bitype variable sur la famille des 2-chenilles non coloriées sans trous.

**Proposition 7.4.10** *La famille des 2-chenilles non coloriées sans trous ne contient aucun élément de bitype variable. Le plus petit élément de bitype  $\mathcal{NN}$  est  $zDzDDz$ , et le plus petit élément de bitype  $\mathcal{BB}$  est  $zDDDDz$ .*

**Preuve:** Concernant l'absence d'éléments de bitype variable, il suffit d'observer que lorsque sur une 2-chenille donnée  $C$  nous n'avons trouvé aucun coup gagnant pour le Suivant, il n'en aurait pas eu non plus sur  $C + K_1$ . En effet, dans chacune des preuves, l'existence d'un coup gagnant pour Alice (resp. Bob) entraîne l'existence d'une  $\mathcal{AA}$ -option (resp.  $\mathcal{BB}$ -option). De plus aucune 2-chenille sans trous n'a que des  $\mathcal{NN}$ -options, il n'y a donc aucun élément de bitype  $\mathcal{PN}$ . ■

### 7.4.3 Extension aux chenilles sans trous

Le calcul des bitypes des 2-chenilles sans trous nous a permis en outre d'observer ces deux propriétés :

1. Aucune 2-chenille sans trous non coloriée n'est de bitype variable ;
2. Si Alice a une stratégie gagnante, alors pour tout sommet  $s$  de degré 4 elle peut gagner sans colorier les 2 feuilles voisines de  $s$  avant de colorier  $s$ .

De ces deux propriétés on déduit par exemple que dans  $C = zz^n Dz^p z$ , on peut ajouter  $k$  feuilles voisines au sommet de degré 4 sans modifier le bitype de  $C$ .

Par conséquent l'ensemble des chenilles sans trous non coloriées est caractérisé, il suffit de remplacer les sommets de degré au moins 5 de  $C$  par des sommets de degré 4. On obtient une 2-chenille sans trous non coloriée  $C'$  qui vérifie  $C' \cong C$ .

Toutefois, cette propriété n'est vérifiée que pour les chenilles sans trous **non coloriées**. En ce qui concerne les chenilles coloriées, nous avons découvert un cas où un " $T$ " (sommet de l'épine dorsale avec 3 feuilles voisines non coloriées) à la place d'un  $D$  modifie le bitype de  $C$  :

$$oo(a^3 T a^2) = \mathcal{NN} \text{ alors que } oo(a^3 D a^2) = \mathcal{AN}.$$

La preuve des bitypes de ces deux chenilles sera effectuée au Chapitre suivant, Section 8.4.

Terminons l'étude de la famille des chenilles par des questions ouvertes sur les chenilles avec trous.

## 7.5 À propos des chenilles avec trous

Les trous dans une chenille sont les sommets de degré 2 de cette chenille. Pour certaines chenilles avec trous nous pouvons déterminer le bitype, comme par exemple une extension des I-chenilles où l'on permet des trous à distance paire des extrémités. Mais concernant l'ensemble des chenilles avec trous nous ne bénéficions pas d'un algorithme polynomial de calcul du bitype. En effet, il est bien plus difficile de prouver l'existence d'un coup gagnant pour le Suivant avec ces objets, car les joueurs peuvent avoir intérêt à jouer sur des feuilles à distance 2 ou 3 d'un trou. Par conséquent, une partie sur une chenille  $C$  peut être engagée par des colorations de feuilles sans que l'on puisse dire (a priori) si la stratégie est ou n'est pas optimale.

D'autre part, nous sommes ici en présence d'une famille dont le plus petit élément de bitype  $\mathcal{BB}^+$  croît avec le nombre de trous  $n_2(C)$ . Par exemple, pour les 1-chenilles le plus petit élément de bitype  $\mathcal{BB}^+$  est  $zz^{28}z$ . Par le théorème d'inclusion, on en déduit



qu'une 1-chenille avec trous de bitype  $\mathcal{BB}^+$  a une taille supérieure ou égale à 28. Comme on l'observe avec l'exemple des chemins, il peut arriver qu'une famille donnée ait tous ses éléments de bitype  $\mathcal{AA}^+$ . Cela ajoute une difficulté supplémentaire à l'étude de cette famille.

Enfin on peut avoir jusqu'à trois trous successifs sans que pour autant les deux côtés soient indépendants. Par exemple sur  $C = az^{10}000z^{10}b$  Bob bénéficie du coup gagnant  $az^{10}0c + c0z^{10}b$  avec  $c \notin \{a, b\}$ . Par contre, la chenille  $C' = az^{10}0z + z0z^{10}b$  est de bitype  $\mathcal{AA}$  comme nous l'avons vu pour les 1-chenilles (on a  $oo(az^{11}z) = \mathcal{AA}$ ). À partir de quatre zéros successifs nous pensons tout de même que l'on peut retirer l'arête centrale sans modifier le bitype, bien que cette propriété n'a pour l'instant pas pu être démontrée. Il s'agit de la conjecture sur la réduction de chaîne  $R_6$  (Conjecture 6.8.2).

Toutefois les résultats sur les chenilles sans trous nous permettent d'identifier des structures gagnantes. Par le théorème d'inclusion, on peut trouver des conditions suffisantes pour trouver des coups gagnants pour Bob, ou aucun coup gagnant pour Alice. Mais il faut se méfier de deux propriétés que l'on ne peut étendre aux chenilles sans trous : la propriété dite d'accrétion (insertion de lettres  $z$  deux à deux), et l'absence d'options "déterminantes" de bitype variable, étroitement liées. Ici, a priori des  $\mathcal{PN}$ -options peuvent apparaître à tout moment de la partie, et comme rien n'indique que Bob ou Alice peuvent gagner en les évitant, les chenilles de départ peuvent être de bitype variable et on ne pourra donc pas utiliser le théorème d'inclusion pour mettre en évidence une stratégie gagnante pour Bob sur une chenille plus grande.

Néanmoins, si des structures sans trous gagnantes pour Bob mais pas de bitype  $\mathcal{BB}^+$  sont incluses dans une chenille  $C$ , on peut parfois s'arranger pour que Bob force Alice à jouer dedans, ou pour que Bob déconnecte cette structure du reste du graphe.

La caractérisation de cette famille paraît donc être un problème bien plus difficile que celle des chenilles sans trous : nous ne pouvons donner pour le moment que des conditions suffisantes à l'existence d'un coup gagnant pour le Suivant.

Passons maintenant à l'étude d'une autre famille contenant plusieurs éléments de bitype  $\mathcal{PN}$  : les **1-chenilles circulaires**.

## 7.6 Les 1-chenilles circulaires

Une 1-chenille circulaire est construite à partir d'une 1-chenille  $C = zz^n z$  de taille  $n \geq 3$  en supprimant les deux extrémités et en ajoutant une arête entre les voisins de ces deux extrémités. Les définitions et notations propres à cette famille ont été présentées en Section 6.3.3.

Une 1-chenille circulaire non coloriée s'écrit  $[z^n]$  où  $n$  est la longueur du cycle. L'objectif de cette section est de déterminer le bitype de  $[z^n]$  pour tout  $n \geq 3$ .

Cette détermination s'appuie sur la caractérisation de plusieurs L-familles de 1-chenilles, résultats présentés dans la Table 7.2. En effet, toute coloration d'un sommet du cycle aboutit à une 1-chenille partiellement coloriée.

**Théorème 7.6.1** *Soit  $C = [z^n]$  une 1-chenille circulaire de taille  $n \geq 3$ .*

1. Si  $n \in \{3, 5, 7, 9\}$  alors  $oo(C) = \mathcal{AA}$  ;

2. Si  $n \in \{4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15\}$  alors  $oo(C) = \mathcal{PN}$  ;
3. Sinon  $oo(C) = \mathcal{BB}$ .

**Preuve:** Soit  $C = [z^n]$  une 1-chenille circulaire de taille  $n \geq 3$ . Déterminons pour quelles valeurs de  $n$  le Suivant a une stratégie gagnante sur  $C$ . Deux cas sont à étudier.

**1) Alice est le Suivant :** Commençons par regarder les coups potentiellement gagnants d'Alice sur  $[z^n]$ . Si elle joue sur le cycle, elle obtient la lc-chenille  $az^{n-1}a$  qui par la Table 7.2 n'est jamais de bitype variable et est de bitype  $\mathcal{AA}$  si et seulement si  $n \in \{3, 5, 7, 9\}$ .

Montrons que si  $n \notin \{3, 5, 7, 9\}$  elle n'a aucun coup gagnant sur  $[z^n]$ . À isomorphisme près son seul choix restant est  $C_1 = [az^{n-1}]$ . Mais si  $n$  est pair sur ce lc-graphe Bob connaît une  $\mathcal{BB}$ -option :  $C_2 = [azbz^{n-3}]$  avec  $b \neq a$ . La partie "azb" est une I-chenille. Par conséquent si  $n \geq 6$  les seules options potentiellement gagnantes pour Alice sur  $C_2$  sont  $C_3 = [acbz^{n-3}]$  avec  $c \notin \{a, b\}$  et  $C_4 = aazbz^{n-4}a$ . Sur  $C_3$  (avec  $n \geq 6$ ) Bob choisit  $cacbz^{n-4}a$  et gagne car toute option contient une I-chenille. Enfin comme  $C_4$  contient une I-chenille on en déduit que Bob a une stratégie gagnante sur  $C_1 = [az^{n-1}]$  si  $n$  est pair et supérieur ou égal à 6. Concernant le cas particulier  $[z^4]$ , la stratégie gagnante du Précédent est représentée Figure 7.2. Dans ce cas sur  $C_2$  Alice a les deux choix  $[acbz]$  (avec  $a \neq b \neq c \neq a$ ) et  $[aabbz]$ . Bob choisit respectivement  $cacbc$  (où toute option contient  $K_{1,3}^{(c)}$ ,  $abba = N_1$  ou  $azb_{a \neq b} = N_0$ ) et  $[aabb]$  (où toute option contient  $azb_{a \neq b} = N_0$ ).

Il reste à traiter le cas où  $n$  est impair et supérieur ou égal à 11. Par la Table 7.2, on sait que  $E_{\mathcal{BB}}(az^n bzb) = \{6^\neq, 8, 9^\neq, 10^+\}$ . Par conséquent, l'option  $az^{n-3}aza$  de  $C_1$  est de bitype  $\mathcal{BB}$  pour tout  $n \geq 11$ . On en conclut qu'Alice a un coup gagnant sur  $[z^n]$  si et seulement si  $n \in \{3, 5, 7, 9\}$ .

**2) Bob est le Suivant :** Regardons maintenant les coups potentiellement gagnants de Bob sur  $[z^n]$ . S'il joue sur le cycle, il obtient la lc-chenille  $az^{n-1}a$  qui par la Table 7.2 n'est jamais de bitype variable et est de bitype  $\mathcal{BB}$  si et seulement si  $n = 17$  ou  $n \geq 19$ . Dans le cas contraire s'il veut espérer gagner il doit colorier une feuille, on obtient  $C_1 = [az^{n-1}]$ . Regardons les coups gagnants d'Alice sur  $C_1$ . Par la Table 7.2, on sait que  $E_{\mathcal{NN}}(az^n bb) = \{10^\neq, 12, 13^\neq, 14^+\}$ . Donc l'option  $C_2 = aaz^{n-2}a$  de  $C_1$  est de bitype  $\mathcal{AA}$  si et seulement si  $n = 15$  ou  $n \leq 13$ . Il reste à traiter les cas  $n \in \{14, 16, 18\}$ . Comme  $n$  est pair, tout coup sur le cycle (excepté  $C_2$ ) constitue une I-chenille. Enfin toute coup sur une autre feuille  $C_3 = [az^i bz^{n-i-2}]$  admet une  $\mathcal{BB}$ -option :

- si  $i$  est impair  $C_3$  contient une  $i$  chenille.
- si  $i$  est pair sans perte de généralité (entre  $i$  et  $n-i-2$ ) on peut poser  $i \neq 0$ . Si Bob choisit  $C_4 = [aaz^i bz^{n-i-2}]$ , tout coup d'Alice laisse au moins une I-chenille. Donc Bob gagne.

On en déduit que Bob a un coup gagnant sur  $[z^n]$  si et seulement si  $n \in \{14, 16, 18\} \cup \{17, 19^+\}$ , soit si et seulement si  $n = 14$  ou  $n \geq 16$ , ce qui conclut la preuve du théorème. ■

La stratégie gagnante du Précédent sur  $[z^4]$  est représentée Figure 7.2. Les coups d'Alice aboutissant à une I-chenille n'ont pas été représentés. Remarquons qu'il s'agit du plus petit arbre circulaire non colorié de bitype  $\mathcal{PN}$ . En effet, on peut observer que tout autre arbre ou arbre circulaire d'ordre au plus 8 est de bitype constant.

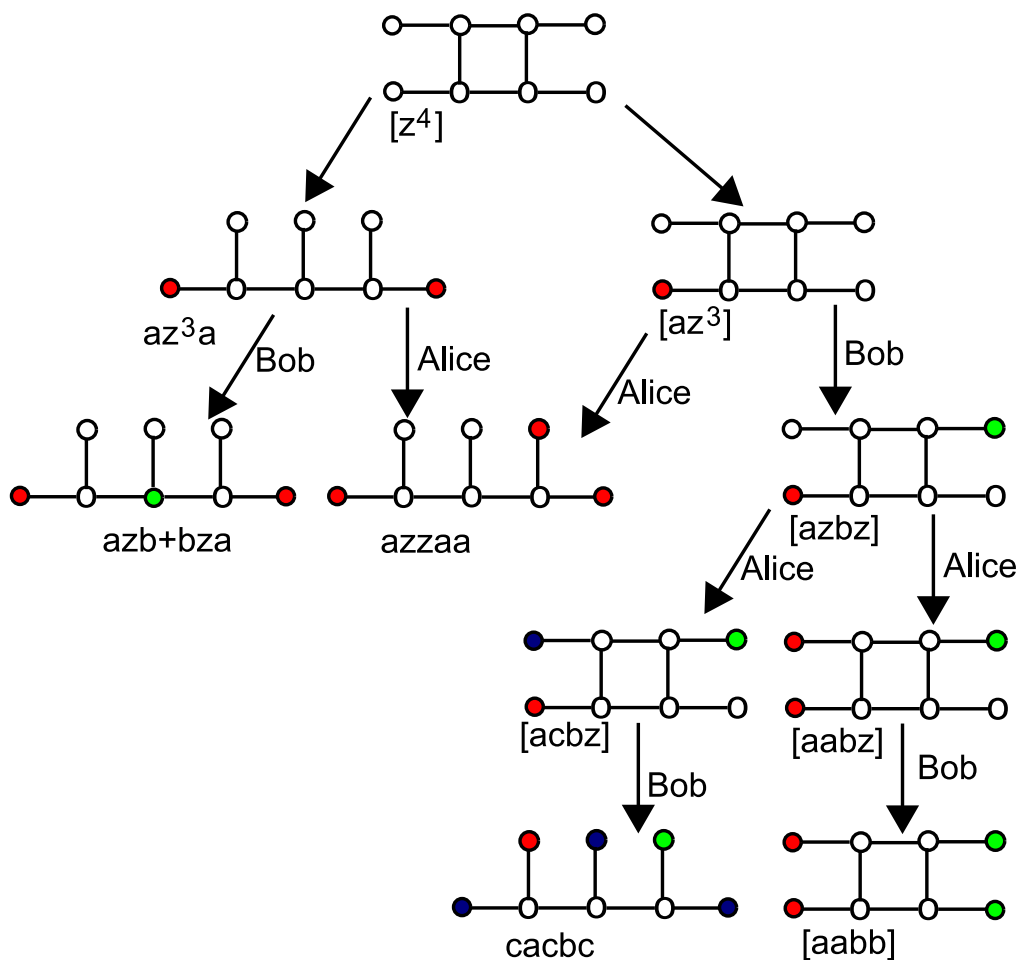


FIGURE 7.2 – Stratégie gagnante du Précédent sur la chenille circulaire  $[z^4]$ .

Les résultats du Théorème 7.6.1 sont récapitulés dans la Table 7.4. On observe que,

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	$\geq 16$
$oo([z^n])$	$\mathcal{AA}$	$\mathcal{PN}$	$\mathcal{AA}$	$\mathcal{PN}$	$\mathcal{AA}$	$\mathcal{PN}$	$\mathcal{AA}$	$\mathcal{PN}$	$\mathcal{PN}$	$\mathcal{PN}$	$\mathcal{PN}$	$\mathcal{BB}$	$\mathcal{PN}$	$\mathcal{BB}$

TABLE 7.4 – Bitypes des 1-chenilles circulaires

contrairement aux L-familles de 1-chenilles, cette famille ne contient aucun élément de bitype  $\mathcal{NN}$  et contient 7 éléments de bitype  $\mathcal{PN}$ . Cette propriété est due à la présence d'un cycle, ce qui entraîne que toute option est isomorphe à l'une des deux options suivantes : la coloration d'un sommet du cycle, ou celle d'une feuille.

Nous supposons qu'il en est de même pour d'autres familles de chenilles circulaires. Une question intéressante est de savoir s'il existe des chenilles circulaires de bitype  $\mathcal{NN}$ . La réponse semble être négative pour les chenilles circulaires sans trous, mais la démonstration nécessiterait la détermination des bitypes d'un grand nombre de L-familles de lc-chenilles.

## 7.7 Perspectives sur les lc-arbres

En ce qui concerne les lc-arbres, nous pouvons, grâce à la caractérisation des chenilles sans trous, donner des conditions suffisantes pour qu'un lc-arbre  $T$  soit de bitype  $\mathcal{NN}^+$  ou  $\mathcal{BB}^+$ . En effet, si  $T$  contient une sous-chenille  $C$  de bitype  $\mathcal{NN}$  et possédant une  $\mathcal{BB}^+$ -option, alors Bob pourra se concentrer sur les sommets de  $C$  et ignorer le reste de l'arbre. Il y appliquera sa stratégie gagnante sans se soucier des coups d'Alice en dehors de  $C$ . Le théorème d'inclusion (Théorème 6.6.5) est donc très utile dans le cas des lc-arbres. De plus, la construction de l'ensemble des sous-chenilles d'un lc-arbre donné  $T$  se fait en temps quadratique par un simple parcours en hauteur, en enracinant  $T$  sur chacun de ses sommets. On peut donc savoir en temps quadratique s'il l'on connaît une sous-chenille  $C$  de bitype  $\mathcal{NN}^+$  ou  $\mathcal{BB}^+$ .

Mais bien entendu ce ne sont là que des conditions suffisantes : rien ne permet de dire qu'un arbre  $T$  n'ayant aucune sous-chenille sans trous de bitype  $\mathcal{NN}^+$  n'est pas de bitype  $\mathcal{NN}^+$ , et il en est de même pour  $\mathcal{BB}^+$ .

On peut construire des arbres de bitype  $\mathcal{AN}$ ,  $\mathcal{NA}$ ,  $\mathcal{PN}$  ou  $\mathcal{NP}$  pour lesquels toute sous-chenille est de bitype  $\mathcal{AA}$ . Ces exemples sont présentés au Chapitre suivant, Section 8.3.

Toutefois, en ce qui concerne le bitype étendu  $\mathcal{BB}^+$  nous n'avons trouvé aucun contre-exemple à cette propriété, nous pouvons donc conjecturer que :

**Conjecture 7.7.1** *Soit  $T$  un arbre non colorié. Si  $T$  n'est pas une chenille et ne contient aucune sous-chenille de bitype  $\mathcal{BB}^+$  alors  $\text{ooo}(T) \neq \mathcal{BB}^+$ .*

L'intuition est qu'il existerait dans tout arbre  $T$  de bitype  $\mathcal{BB}^+$  une **chaîne déterminante** qui serait un chemin  $P$  tel que la chenille  $C = T[N^+(P)]$  (c'est à dire engendrée par l'ensemble des sommets à distance au plus 1 de  $P$ ) soit de bitype  $\mathcal{BB}^+$ .

Cette propriété est facile à démontrer si sur  $C$  Bob peut ne choisir que des  $\mathcal{BB}^+$ -options. C'est le cas si  $T$  contient 4 sommets successifs de degré au moins 4. Il contient la chenille  $zD^4z$  qui est de bitype  $\mathcal{BB}^+$ . Cette conjecture est vérifiée pour l'ensemble des arbres qui ont été étudiés, notamment sur des exemples d'arbres non coloriés de la même forme que ceux du Chapitre 8.

Une partie du problème de caractérisation des arbres est certainement plus facile : la caractérisation des arbres sans 2-sommets. De la même manière que pour les chenilles sans trous, il semble plus facile de limiter l'ensemble des coups potentiellement gagnants pour le Suivant lorsque l'arbre ne contient pas de trous.

Une extension de cette caractérisation des chenilles sans trous pourrait être effectuée sur les **étoiles de chenilles sans trous**, c'est à dire un sommet  $r$  sur lequel sont attachées en leurs extrémités des chenilles sans trous. Il faudrait là aussi trouver un ensemble borné  $\mathcal{E}$  de L-familles : une sous famille de l'ensemble des colorations partielles tel que toute option gagnante pour le Suivant puisse être un élément de  $\mathcal{E}$ . Il semble que l'on puisse construire un tel ensemble  $\mathcal{E}$  sur les étoiles de chenilles sans trous, avec une propriété d'accrétion et un ensemble  $\mathcal{V}$  d'éléments de bitype variable fini.

## Chapitre 8

### À propos des arbres non coloriés

## 8.1 Introduction

Après avoir abordé le problème de caractérisation des lc-graphes de nombre chromatique ludique 3, mettons en évidence le bien fondé de notre définition des bitypes en nous intéressant au problème de recherche d'arbres **connexes non coloriés** d'un bitype donné.

Nous construirons le plus petit exemple possible et tenterons de démontrer qu'il s'agit bien du plus petit.

Cette étude va également nous permettre d'observer quelles caractéristiques ont les lc-arbres, notamment qu'il est difficile de trouver un lc-arbre sur lequel le Suivant n'a aucun coup gagnant de bitype constant mais a tout de même une stratégie gagnante. Par exemple, le plus petit arbre non colorié connu de bitype  $\mathcal{AN}$  a 29 sommets, ce qui renforce l'idée que les lc-graphes de bitype variable  $\mathcal{XY}$  pour  $\mathcal{X} \neq \mathcal{Y}$  sont moins nombreux que les lc-graphes de bitype constants (c'est à dire  $\mathcal{AA}$ ,  $\mathcal{NN}$  ou  $\mathcal{BB}$ ). Par exemple nous observerons que tous les arbres d'ordre au plus 14 sont de bitype constant.

Cette étude permettra également de démontrer qu'il existe des arbres de nombre chromatique ludique 3 mais de nombre chromatique B-ludique 4, c'est à dire sur lesquels Bob a une stratégie gagnante seulement s'il laisse commencer Alice. Pourtant l'intuition nous aurait laissé penser que sur un arbre Bob ou Alice avaient toujours intérêt à commencer.

Plus généralement, un lc-graphe  $G$  de bitype non constant  $\mathcal{XY}$  peut être vu à travers des variantes du jeu  $\mathcal{J}$  sur  $G$ . Par exemple regardons le jeu  $\mathcal{J}_{(B)}$  où la partie se déroule comme dans  $\mathcal{J}$  mais où Bob peut se permettre de passer son tour une ou plusieurs fois dans la partie. Dans ce cas si Bob est le Suivant il gagne sur tout lc-graphe de bitype différent de  $\mathcal{AA}^+$ , et si Alice est le Suivant elle ne gagne que sur les bitypes  $\mathcal{AA}$ ,  $\mathcal{AN}$ ,  $\mathcal{NA}$  ou  $\mathcal{NN}$  possédant une  $\mathcal{AA}^+$ -option.

De même, on peut définir le jeu  $\mathcal{J}_{(A)}$  où la partie se déroule comme dans  $\mathcal{J}$  mais où Alice peut se permettre de passer son tour une ou plusieurs fois dans la partie. Dans ce cas, si Alice est le Suivant elle gagne sur tout graphe de bitype différent de  $\mathcal{BB}$ , et même peut-être sur certains graphes de bitype  $\mathcal{BB}$  : ceux dont elle connaît une option ne possédant pas d'option de bitype  $\mathcal{BB}$ . Il s'agirait d'une nouvelle classe  $\mathcal{BB}^*$  qui ne sera pas étudiée dans cette thèse, mais pourrait faire l'objet d'études ultérieures. Dans le jeu  $\mathcal{J}_{(A)}$ , si Bob est le Suivant alors Alice gagne sur tout graphe n'ayant pas de  $\mathcal{BB}$ -option.

Mais revenons à notre jeu  $\mathcal{J}$  et recherchons des exemples d'arbres connexes non coloriés, et démontrons qu'il s'agit des plus petits exemples.

Par la suite, les arbres qui seront étudiés seront des **arbres non étiquetés et non enracinés**. Les méthodes d'énumération et de génération des éléments de cette famille de graphes sont présentées dans [28]. Deux arbres  $T$  et  $U$  seront donc distincts s'il n'existe aucun isomorphisme  $\varphi$  de  $V(T)$  dans  $V(U)$  tel que pour tout  $uv \in E(T)$  on ait  $\varphi(u)\varphi(v) \in E(U)$ . Ainsi lorsque nous parlerons d'un unique arbre ce sera toujours à isomorphisme près. Pour décrire les lc-arbres nous réutiliserons la notation par mots définie pour les lc-2-chenilles en Section 6.3.2. Nous serons parfois amenés à enrichir cette notation lorsque les arbres considérés ne seront pas des lc-2-chenilles.

Commençons par traiter le cas des bitypes constants  $\mathcal{AA}$ ,  $\mathcal{NN}$  et  $\mathcal{BB}$ .

## 8.2 Bitypes constants

Les trois bitypes constants semblent être les plus fréquents sur la famille des arbres. Nous allons donc les étudier en premier en commençant par observer que pour les petits ordres c'est le bitype  $\mathcal{AA}$  qui domine.

### 8.2.1 Bitype $\mathcal{AA}$

Bien entendu, le plus petit arbre non colorié de bitype  $\mathcal{AA}$  est le graphe vide  $\emptyset$ .

Démontrons maintenant que les arbres de diamètre au plus 4 ont tous  $\mathcal{AA}$  pour bitype. Rappelons que le diamètre d'un arbre est la longueur maximale (nombre d'arêtes) d'un chemin simple.

**Proposition 8.2.1** *Soit  $T$  un arbre non colorié de diamètre  $diam(T) \leq 4$ . Alors  $oo(T) = \mathcal{AA}$ .*

**Preuve:** Il suffit de démontrer l'existence d'une stratégie gagnante pour Alice, qu'elle commence ou non.

Si  $diam(T) \leq 2$ , alors il existe un sommet  $u$  tel que  $diam(T - \{u\}) = 0$ . Dès que c'est à Alice de jouer, elle colorie ce sommet  $u$  avec  $a$ . Ainsi, tous les autres sommets sont coloriables avec une couleur différente de  $a$ .

Si  $diam(T) = 3$  alors il existe deux sommets  $u$  et  $v$  tels que  $diam(T - \{u, v\}) = 0$ . Si Alice commence elle colorie  $u$  avec  $a$ . Ainsi, quel que soit le coup de Bob, elle peut toujours colorier  $v$  avec une couleur  $b \neq a$ , donc tous les autres sommets sont coloriables avec une couleur n'appartenant pas à  $\{a, b\}$ . Si Bob commence et s'il colorie  $u$  (resp.  $v$ ) alors Alice colorie  $v$  (resp.  $u$ ). Les autres sommets n'étant plus liés il sont tous coloriables. S'il colorie un voisin de  $u$  (resp.  $v$ ) avec  $a$  alors Alice colorie  $v$  (resp.  $u$ ) avec la même couleur  $a$ . Ensuite quel que soit le coup de Bob, elle peut toujours colorier  $u$  (resp.  $v$ ) avec une couleur  $b \neq a$ . Ainsi, tous les autres sommets sont coloriables avec une couleur n'appartenant pas à  $\{a, b\}$ .

Si  $diam(T) = 4$  alors il existe un sommet  $u$  tel que  $diam(T - \{u\}) = 1$  et  $diam(T - N^+(u)) = 0$ . Dès que c'est à Alice de jouer, elle colorie  $u$  avec  $a$  (si Bob a commencé elle doit colorier avec la même couleur si c'est possible et une autre couleur sinon). Ensuite si Bob colorie un voisin de  $u$  elle colorie un autre voisin de  $u$ , et s'il colorie un sommet  $x$  à distance 2 de  $u$ , elle colorie  $v \in N(x) \cap N(u)$  avec une couleur  $b \notin \{c(u), c(x)\}$ . Ainsi après au plus  $2 \cdot |N(u)|$  coups tous les voisins de  $u$  seront coloriés. Comme les sommets à distance 2 de  $u$  ne sont que des feuilles, la 3-coloration peut être terminée.

La même stratégie pouvant être appliquée sur  $T + K_1$ , on en conclut que dans tous les cas  $oo(T) = \mathcal{AA}$ . ■

Regardons maintenant une famille particulière d'arbres.

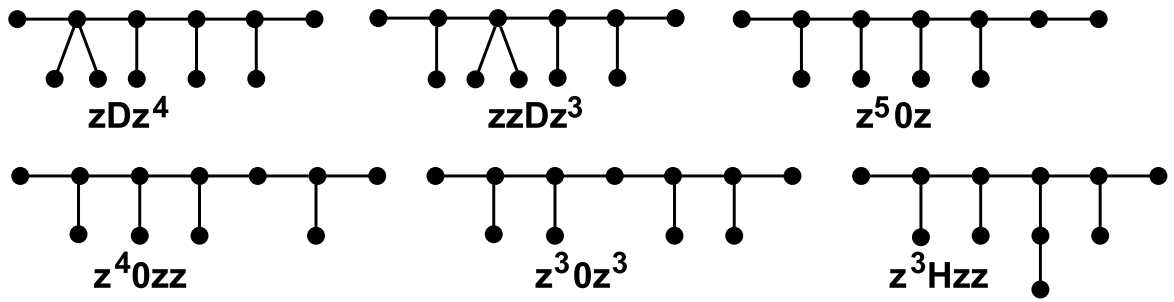


FIGURE 8.1 – Arbres d'ordre 11 où Bob peut a priori avoir une stratégie gagnante.

**Proposition 8.2.2** Soit  $T$  un arbre non colorié dont tout chemin contient au plus 3 sommets de degré au moins 3. Alors  $oo(T) = \mathcal{AA}$ .

**Preuve:** Comme dans  $T$  tout chemin contient au plus 3 sommets de degré au moins 3, il existe un sommet  $v$  tel que toute composante de  $T - \{v\}$  ait au plus un sommet de degré au moins 3. Dès que c'est à Alice de jouer, elle colorie  $v$  avec  $a$  (si Bob a commencé elle doit colorier avec la même couleur, si c'est possible). Ainsi, quel que soit le choix de Bob, elle peut toujours colorier un sommet de degré au moins 3 avec l'une des trois couleurs. Une fois qu'il ne reste que des sommets de degré 2, la 3-coloration peut être complétée.

La même stratégie pouvant être appliquée sur  $T + K_1$ , on en conclut que  $oo(T) = \mathcal{AA}$ . ■

Par la suite, pour tout arbre  $T$  et tout entier  $k > 0$ , nous noterons  $n_{\geq k}(T)$  le nombre de sommets de  $T$  de degré au moins  $k$ .

Grâce à ces deux propositions, le plus petit arbre  $T$  ayant un bitype différent de  $\mathcal{AA}$  doit vérifier  $diam(T) \geq 5$  et  $n_{\geq 3}(T) \geq 4$ . On peut aisément vérifier qu'aucun arbre d'ordre au plus 9 ne satisfait ces deux conditions, et que le seul arbre d'ordre 10 les satisfaisant est  $z^6$  (à isomorphisme près). Or dans le Chapitre précédent nous avons démontré que  $oo(z^6) = \mathcal{AA}$  (Théorème 7.3.11).

Pour  $n = 11$  le nombre d'arbres à étudier est plus important mais reste raisonnable.

L'ensemble  $E_{11}$  des arbres d'ordre 11 vérifiant  $diam(T) \geq 5$  et  $n_{\geq 3}(T) \geq 4$  peut être obtenu à partir de  $z^6$  par ajout de feuille ou par **subdivision d'arête**, c'est-à-dire le remplacement d'une arête  $uv$  par un sommet  $w$  de degré 2 incident à deux nouvelles arêtes  $uw$  et  $vw$ . En notant  $H$  un chemin de longueur 2 rattaché à l'épine dorsale, on a ainsi :

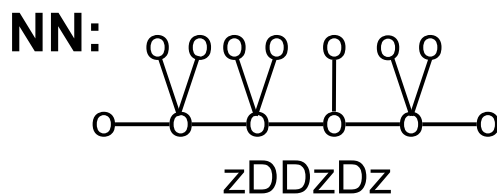
$$E_{11} = \{zDz^4, zzDz^3, z^5 0z, z^4 0zz, z^3 0z^3, z^3 Hzz\}.$$

Seul  $z^3 Hzz$  n'est pas une chenille. Ces six arbres sont représentés Figure 8.1.

On vérifie aisément que sur chacun des 6 arbres de  $E_{11}$ , Bob n'a aucun coup gagnant et Alice en a un, et qu'il en est de même en ajoutant un sommet isolé. Ils sont donc tous de bitype  $\mathcal{AA}$ .

Avec la même méthode, on peut également vérifier que l'ensemble des arbres de  $E_{12}$  sont de bitype  $\mathcal{AA}$ . Pour  $E_{13}$ , on trouve un unique exemple dont le bitype n'est pas  $\mathcal{AA}$ . Il s'agit de  $zDDzDz$  qui sera étudié dans la Section suivante.



FIGURE 8.2 – Plus petit arbre de bitype  $\mathcal{NN}$ . Ordre 13

Pour des raisons de notations et vu le grand nombre d'arbres à décrire (53 pour  $E_{12}$  et environ 300 pour  $E_{13}$ ), les expressions de  $E_{12}$  et  $E_{13}$  ne seront pas détaillées ici, mais elles peuvent être obtenues à partir de  $E_{11}$  par ajout de feuille ou subdivision d'arête.

On peut observer que pour ces ordres les propositions 8.2.1 et 8.2.2 nous permettent de réduire considérablement le nombre d'arbres à étudier. En effet, le nombre  $T(n)$  d'arbres non étiquetés et non enracinés d'ordre exactement  $n$  est calculé dans [28] et vaut 47, 106, 235, 551 et 1301 pour  $n = 9, 10, 11, 12$  et 13 respectivement. Toutefois, lorsque  $n$  augmente, le nombre d'arbres que l'on peut éliminer par les propositions 8.2.1 et 8.2.2 devient négligeable devant  $T(n)$ . Par conséquent, pour  $n = 14$ , il devient difficile d'étudier l'ensemble des arbres vérifiant  $\text{diam}(T) \geq 5$  et  $n_{\geq 3}(T) \geq 4$ , car sa cardinalité est du même ordre que  $T(14)$  qui vaut 3159 par [28].

### 8.2.2 Bitype $\mathcal{NN}$

Le bitype  $\mathcal{NN}$  est celui possédant le plus grand nombre de possibilités d'expressions de  $oo(\text{Opt}(T))$ . En effet, tous les bitypes peuvent être présents parmi les options, de plus il faut seulement que le Suivant ait un coup gagnant sur  $T$  et  $T + K_1$ . Nous avons par exemple découvert des lc-graphes de bitype  $\mathcal{NN}$  n'ayant ni  $\mathcal{BB}$ -option ni  $\mathcal{AA}$ -option.

Mais le plus petit exemple sera "classique", c'est-à-dire qu'il aura, comme la plupart des lc-graphes étudiés dans le Chapitre précédent, des  $\mathcal{AA}$  et des  $\mathcal{BB}$ -options.

Grâce à l'étude de  $E_{13}$  nous connaissons un exemple de chenille à 13 sommets :  $zDDzDz$  représenté en Figure 8.2.

Commençons par démontrer la propriété suivante :

**Proposition 8.2.3** *Soit  $T$  un lc-arbre d'ordre au plus 8, possédant au plus deux feuilles coloriées et non isomorphe à  $aDDa$ . On a alors  $oo(T) \in \{\mathcal{AA}, \mathcal{NN}\}$ .*

En d'autre termes,  $aDDa$  est le seul lc-arbre de bitype  $\mathcal{BB}$  à deux feuilles coloriées et d'ordre au plus 8.

**Preuve:** Il suffit de vérifier que sur un tel lc-arbre  $T$ , Alice a un coup gagnant de bitype  $\mathcal{AA}$ . Si  $n_{\geq 3}(T) = 0$ , alors la 3-coloration de  $T$  peut toujours être terminée. Si  $n_{\geq 3}(T) = 1$ , alors il suffit à Alice de colorier le sommet de degré au moins 3. Ainsi la 3-coloration de  $T$  peut être terminée. Il reste à traiter le cas où  $n_{\geq 3}(T) \geq 2$ . Pour chacun des 13 arbres d'ordre au plus 8 vérifiant  $n_{\geq 3}(T) \geq 2$ , on vérifie aisément que pour toutes feuilles  $f_1$  et  $f_2$  coloriées avec  $a$  et  $b$  respectivement, Alice a un coup gagnant (excepté s'il s'agit du

lc-arbre  $aDDa$ ). Ces 13 arbres, décrits par l'ensemble  $A_8$  ci-après, peuvent être obtenus à partir de  $z^4$  par ajout de feuille ou subdivision d'arête (en au plus deux opérations).

$$A_8 = \{z^4, z^20z^2, z^30z, z^300z, z^20z0z, z^200z^2, z0z^20z, zDz^2, zDz0z, zD0z^2, z0Dz^2, zDDz, z^5\}.$$

L'ensemble  $A_8$  peut également être obtenu à partir des  $T(8) = 23$  arbres non enracinés d'ordre 8 (c.f. [28]), en éliminant les éléments vérifiant  $n_{\geq 3}(T) \leq 1$ . ■

**Proposition 8.2.4** *L'arbre  $T = zDDzDz$  est le plus petit arbre de bitype  $\mathcal{NN}$ .*

**Preuve:** Démontrons que  $oo(zDDzDz) = \mathcal{NN}$  en prouvant l'existence d'une  $\mathcal{AA}$ -option et d'une  $\mathcal{BB}$ -option.

Si Alice commence, elle choisit l'option  $zDa + azDz$  sur laquelle Bob n'a aucun coup gagnant puisque par la Proposition 8.2.3, le plus petit arbre à deux sommets coloriés de bitype n'appartenant pas à  $\{\mathcal{AA}, \mathcal{NN}\}$  est  $aDDa$ .

Si Bob commence, il choisit l'option  $T_1 = zDDzDa$ . Démontrons qu'elle est de bitype  $\mathcal{BB}$ . L'ensemble des options de  $T_1$  est à isomorphisme près :

$$\begin{aligned} Opt(T_1) = \{cDDzDa, cDzDa, zDc + czDa, zDDc + cDa, zDDzc, zDD_czDa\} \\ \cup \{zDDcDa, zDDzD_c a\}. \end{aligned}$$

Comme  $oo(aDDa) = \mathcal{BB}$ , on sait que  $cDDzDa$ ,  $zDDc + zDa$ ,  $zDD_czDa$  et  $zDDcDa$  ont une  $\mathcal{BB}$ -option, donc sont de bitype supérieur ou égal à  $\mathcal{NN}$ .

Il reste à regarder les options  $cDzDa$ ,  $zDc + czDa$ ,  $zDD_czDa$  et  $zDDcDa$ . Elles sont ou contiennent la I-chenille  $cDzDa$  (pour  $cDzDa$  et  $zDD_czDa$ ) ou la P-chenille  $czDa$  (pour  $zDc + czDa$  et  $zDDcDa$ ). Par les Propositions 7.2.1, 7.4.4 et par le Théorème 6.6.5 on en déduit que ces lc-graphes ont tous une  $\mathcal{BB}$ -option.

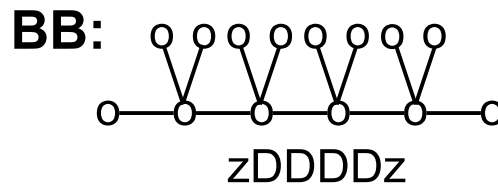
Toutes les options de  $T_1$  sont donc de bitype au moins  $\mathcal{NN}$ . Par conséquent Alice n'a aucun coup gagnant sur  $T_1$  ou sur  $T_1 + K_1$ . On en déduit que  $oo(T_1) = \mathcal{BB}$ , donc que  $oo(T) = \mathcal{NN}$ .

Puisqu'à la Section précédente nous avons démontré que tout autre arbre (non isomorphe à  $T$ ) de  $E_{11}$ ,  $E_{12}$  ou  $E_{13}$  est de bitype  $\mathcal{AA}$ , on conclut que  $zDDzDz$  est le plus petit arbre non colorié de bitype  $\mathcal{NN}$ . ■

### 8.2.3 Bitype $\mathcal{BB}$

L'étude de  $E_{13}$  nous permet de dire que tous les arbres d'ordre au plus 13 ont une  $\mathcal{AA}$ -option. Donc le plus petit arbre de bitype  $\mathcal{BB}$  est d'ordre au moins 14.

Or un exemple d'ordre 14 est connu [18] : il s'agit de  $zDDDDz$ . On en conclut que  $zDDDDz$  est un plus petit arbre de bitype  $\mathcal{BB}$ . Cet arbre est représenté en Figure 8.3. On observe que tout coup d'Alice fabrique une structure de la forme  $aDDz$  de bitype  $\mathcal{NN}$ . Si Bob commence, il choisit l'option  $aDDDDz$  sur laquelle Alice n'a aucun coup gagnant, puisque toute option contient une I-chenille, une P-chenille ou  $aDDz$ .

FIGURE 8.3 – Plus petit arbre de bitype  $\mathcal{BB}$ . Ordre 14.

### 8.3 Bitypes variables

Passons maintenant aux bitypes variables pour lesquels il est bien difficile de trouver une collection de lc-graphes d'un bitype variable donné. Nous pensons que le rapport nombre d'arbres de bitype variable/constant tend vers 0 lorsque la taille de la famille  $\mathcal{F}$  étudiée tend vers l'infini, si toutefois  $\mathcal{F}$  est close par passage au sous-graphe induit.

C'est pourquoi les arbres dont nous allons démontrer le bitype ont un ordre assez élevé (entre 29 et 38). Ces exemples sont basés sur la présence d'une configuration de même bitype mais avec 3 ou 4 sommets coloriés. Cette configuration sera constituée par Bob si c'est dans son intérêt, et dans le cas contraire nous montrerons qu'il n'a aucun autre coup gagnant.

Grâce à [28], on sait que le nombre d'arbres d'ordre au plus 30 vaut environ  $25 \cdot 10^9$ . Pour de tels ordres il n'est donc pas envisageable d'étudier l'ensemble des arbres. Par conséquent, on ne peut a priori pas savoir s'il s'agit des plus petits exemples.

Ces exemples sont construits à partir de la lc-chenille  $aDDa$  qui, par la Proposition 8.2.3, est le plus petit lc-arbre à deux feuilles coloriées de bitype  $\mathcal{BB}$ , et tout autre arbre à deux feuilles coloriées d'ordre inférieur ou égal à 8 a une  $\mathcal{AA}$ -option. Cette proposition entraîne donc que le plus petit lc-arbre à un sommet colorié de bitype  $\mathcal{NN}$  est la chenille  $aDDz$ .

D'autre part, nous avons besoin d'un exemple de lc-arbre connexe pour chaque bitype  $\mathcal{XY}$  souhaité. Nous reprendrons les exemples de la Section 6.4.3 rassemblés dans la Table 6.1 (page 127). En ce qui concerne les bitypes  $\mathcal{NP}$  et  $\mathcal{BN}$ , comme aucun exemple connexe irréductible n'est à ce jour connu sur la famille des lc-arbres, nous prendrons des lc-chenilles des bitypes miroirs  $\mathcal{PN}$  et  $\mathcal{NB}$ .

Insistons sur le fait que rien n'indique que ces lc-1-chenilles permettent de construire les plus petit exemples.

#### 8.3.1 Bitype $\mathcal{AN}$

Démontrons que l'arbre  $T_{AN}$  de la Figure 8.4 est de bitype  $\mathcal{AN}$ , en trouvant un coup gagnant pour Alice sur  $T_{AN}$  et  $T_{AN} + K_1$ , un coup gagnant pour Bob sur  $T_{AN} + K_1$ , et aucun coup gagnant pour Bob sur  $T_{AN}$ .

Commençons par définir quelques notations qui nous serviront dans toute la Section sur les bitypes variables.

On appelle **branche** d'un arbre  $T$  un ensemble  $B$  de sommets tel que  $T[B] = zDDz$  et tel qu'il existe un sommet  $u \in B$  tel que son retrait déconnecte le reste de la branche

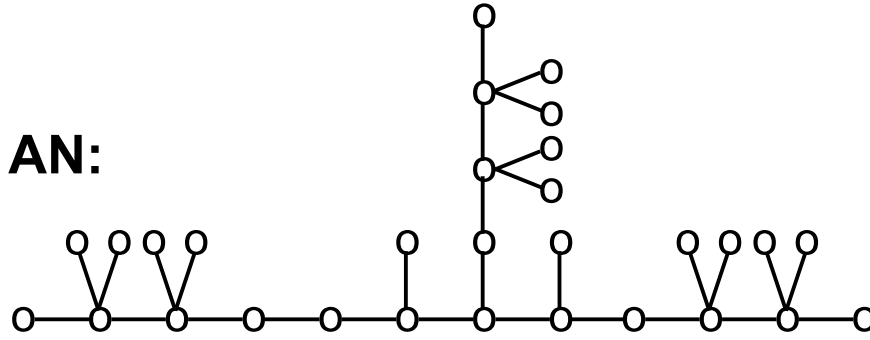


FIGURE 8.4 – Plus petit arbre connu de bitype  $\mathcal{AN}$ . Ordre 30.

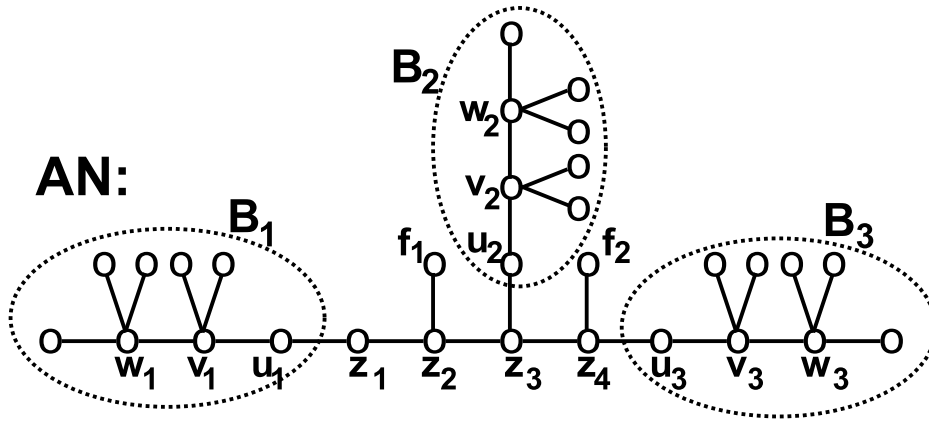


FIGURE 8.5 – Branches et liens de l'arbre  $T_{AN}$ .

$B$  qui vaut  $T[B - \{u\}] = zzDz$ . Le sommet  $u$  est le **lien** de la branche  $B$ .

Dans l'arbre  $T_{AN}$ , on observe qu'il y a 3 branches notées  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  de gauche à droite. Leurs liens sont notés  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  respectivement. Ces notations sont représentées Figure 8.5.

**Proposition 8.3.1** *L'arbre  $T_{AN}$  de la Figure 8.4 est de bitype  $\mathcal{AN}$ .*

**Preuve:** Regardons l'ensemble des coups potentiellement gagnants pour Alice sur  $T_{AN}$  et  $T_{AN} + K_1$ . Si elle joue sur une feuille d'une branche  $B_i$ , alors elle constitue un graphe contenant la structure  $aDDz$ . Il suffit à Bob de choisir l'option contenant  $aDDa$  pour gagner la partie. Si elle joue sur un sommet  $z$  hors d'une branche  $B_i$ , alors dans tous les cas Bob peut jouer sur un lien  $u_i$  à distance impaire de  $v$ , constituant ainsi dans la partie centrale de  $T_{AN}$  une I-chenille. De plus la composante contenant la branche  $B_i$  est  $aDDz$ . Par conséquent cette option est de bitype  $\mathcal{NN} \oplus \mathcal{NN} = \mathcal{BB}$ . On en déduit que les seuls coups potentiellement gagnants pour Alice sont sur un sommet non-feuille d'une branche  $B_i$ , notés  $v_i$  et  $w_i$  sur la Figure 8.5. Soit  $T'$  l'une de ces 6 options de  $T_{AN}$ .

Regardons maintenant l'ensemble des coups potentiellement gagnants pour Bob sur l'un des quatre lc-graphes  $T_{AN}$ ,  $T_{AN} + K_1$ ,  $T'$  ou  $T' + K_1$ .

1. S'il joue sur une feuille  $f_i$  hors d'une branche, alors Alice colorie le sommet  $z_3$  avec la même couleur.

2. S'il joue sur un sommet  $z_i$  hors d'une branche et de degré au moins 2, alors de même il existe un sommet  $s$  hors d'une branche, de degré au moins 2 et à distance 2 de  $z_i$  tel que la coloration de  $s$  avec la même couleur ne forme ni I-chenille ni structure  $aDDz$ . Pour  $i = 1, 2, 3$  et 4 Alice choisit  $s = z_3, Z_4, z_1$  et  $z_2$  respectivement.
3. S'il joue sur une feuille  $x$  d'une branche  $B_i$ , alors Alice joue sur  $v_i$  le voisin de  $u_i$  dans  $B_i$  avec la même couleur si  $d(v_i, x) = 2$  et une autre couleur sinon.
4. S'il joue sur  $v_i$ , Alice joue sur un autre sommet  $v_j$ .
5. S'il joue sur  $w_i$  le sommet de  $B_i$  de degré 4 à distance 2 de  $u_i$ , alors Alice joue sur  $v_i$ .
6. S'il joue sur  $u_i$  le lien de  $B_i$  alors il constitue une composante  $aDDz$ . Par conséquent Alice est forcée de jouer dans  $B_i$ , par exemple sur  $v_i$ .

De cette stratégie d'Alice face aux coups de Bob on déduit que :

- si Bob joue hors d'une branche alors il perd (cas 1 et 2). En effet on vérifie aisément que dans chaque cas toute composante du lc-graphe obtenu est de bitype  $\mathcal{AA}$ .
- si Bob joue hors d'un lien alors cela aboutit à la coloration d'un nouveau sommet  $v_j$ .

De plus on peut vérifier que lorsque deux sommets  $v_i$  et  $v_j$  sont coloriés alors la composante  $C$  contenant encore une branche est de bitype  $\mathcal{AA}$  (si toutefois aucun autre sommet de  $C$  n'est colorié). On en conclut que Bob n'a aucun intérêt à jouer en dehors d'un lien car cela permettra à Alice de former une telle composante  $C$ .

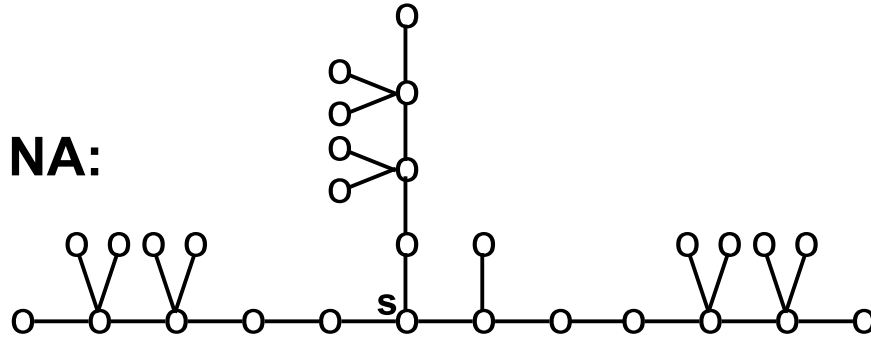
Donc les seuls coups potentiellement gagnants pour Bob sont la coloration d'un lien  $u_i$ . Observons que dans le cas où Alice a déjà joué (on est sur  $T'$  ou  $T' + K_1$ ), Bob n'a aucun intérêt à choisir le lien d'une branche déjà coloriée. En effet, si Alice a commencé elle sait que Bob va choisir un lien. Donc plutôt que de choisir  $w_i$  et laisser la possibilité à Bob de former une I-chenille en jouant sur  $u_i$ , elle a tout intérêt à choisir  $v_i$ . Par conséquent si Bob choisit le lien  $u_i$ , il laisse à Alice la possibilité d'une coloration d'un autre sommet  $v_j$ , voire même si  $i \neq 1$  d'un sommet de degré au moins 2 hors d'une branche.

Donc Bob colorie avec  $a$  un lien  $u_i$  d'une branche non coloriée. Alice est forcée de jouer dans cette branche, par exemple sur  $v_i$ . Ensuite il colorie avec  $a$  un autre lien d'une branche  $B_j$  non coloriée. Alice est forcée de choisir un sommet de  $B_j$ . Enfin Bob colorie avec  $a$  le troisième lien  $u_k$  et constitue ainsi la chenille  $C_0 = a0zaza$  qui est de bitype  $\mathcal{AN}$  puisque le seul coup gagnant pour Bob est la  $\mathcal{NB}$ -option  $a0aaza \cong a^4za$ . Si  $B_k$  n'était pas encore coloriée, alors Alice est forcée d'y jouer. Les sommets non coloriés des branches sont en nombre pair. Par conséquent cette option est de bitype  $\mathcal{AN}$ . Si  $B_k$  était déjà coloriée, Alice choisit une  $\mathcal{AA}$ -option de  $a0zaza$  et gagne.

On en déduit que si Bob a commencé sur  $T_{AN}$  sa meilleure stratégie aboutit à l'obtention d'un lc-graphe de bitype  $\mathcal{AN}$  sur lequel il est le Suivant. On en conclut que Bob a une stratégie gagnante sur  $T_{AN} + K_1$  mais pas sur  $T_{AN}$ , c'est-à-dire  $oo(T_{AN}) = \mathcal{AN}$  puisque Alice a un coup gagnant sur  $T_{AN}$  et  $T_{AN} + K_1$ . ■

### 8.3.2 Bitype $\mathcal{NA}$

Démontrons que l'arbre  $T$  de la Figure 8.6 est de bitype  $\mathcal{NA}$ , en trouvant un coup gagnant pour Alice sur  $T$  et  $T + K_1$ , et un coup gagnant pour Bob sur  $T$  mais pas sur

FIGURE 8.6 – Plus petit arbre connu de bitype  $\mathcal{NA}$ . Ordre 29.

$T + K_1$ .

Commençons par remarquer que cet arbre possède une  $\mathcal{AA}$ -option triviale : la coloration du sommet  $s$  de la Figure 8.6 qui déconnecte les trois branches, aboutissant à l'option  $T_1 = zDD0a + zDD00a + zDD00za$ . Sur chacune de ces trois composantes Bob n'a aucun coup gagnant et c'est également le cas sur  $T_1 + K_1$ . En effet, quel que soit le coup de Bob sur l'une de ces trois composantes, Alice colorie le 4-sommet le plus proche du "a" avec la même couleur que Bob si c'est possible. Ainsi les sommets de degré au moins 3 sont isolés dans des composantes et ont au plus une couleur dans leur voisinage. Donc Alice pourra toujours colorier ces sommets de degré au moins 3. On en déduit que  $oo(T_1) = \mathcal{AA}$ .

Il reste à regarder les coups potentiellement gagnants de Bob. De la même manière que pour l'arbre  $T_{AN}$  de la Section précédente, on peut montrer que les seuls coups potentiellement gagnants pour Bob sur  $T$  sont la coloration d'un lien  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . S'il fait ce choix Alice est forcée de jouer dans la branche  $B_i$ . Bob joue sur les trois liens et Alice est forcée de contrer dans les trois branches. On observe que s'il joue sur ces liens avec des couleurs distinctes, alors une fois les trois liens coloriés la partie centrale est de bitype  $\mathcal{AA}$ . Par contre s'il colorie les trois liens avec la même couleur  $a$ , la partie centrale devient  $C = a0az0a$ . La chenille  $C$  est équivalente à la chenille  $a^3za^2$  qui est de bitype  $\mathcal{NA}$  (c.f. Section 6.4.3). Comme il reste un nombre pair de sommets non coloriés dans les branches, on en déduit que Bob a une stratégie gagnante sur  $T$  mais pas sur  $T + K_1$  puisque l'option  $T$  de  $T + K_1$  est de type  $\mathcal{N}$ .

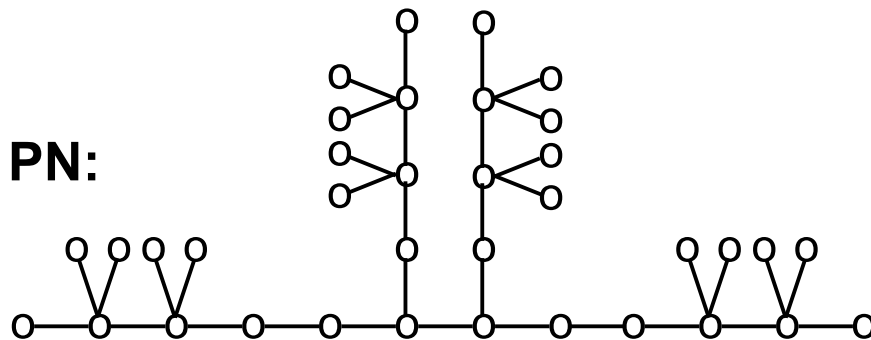
Comme  $T$  possède une  $\mathcal{AA}$ -option, on en conclut que  $oo(T) = \mathcal{NA}$ .

### 8.3.3 Bitype $\mathcal{PN}$

Pour cette classe, l'existence d'un exemple de bitype  $\mathcal{PN}$  implique qu'un arbre peut avoir un nombre chromatique B-ludique 3, strictement inférieur à son nombre chromatique ludique qui est 4.

L'arbre  $T$  de la Figure 8.7 est le plus petit exemple connu. Son ordre est 36. L'arbre  $T$  de la Figure 8.7 a été construit de la même manière que ceux des bitypes  $\mathcal{AN}$  et  $\mathcal{NA}$  : une structure centrale  $S$  dont la coloration de  $k$  sommets (les liens) avec une même couleur  $a$  est de bitype  $\mathcal{PN}$ , et  $k$  branches  $B_i$ , chacune connectée à  $S$  par un lien  $u_i$  tel que la coloration de  $u_i$  aboutit à un lc-graphe de bitype  $\mathcal{NN}$  du côté de la branche  $B_i$ .

La démonstration du bitype de  $T$  est identique à celles des deux exemples précédents :

FIGURE 8.7 – Plus petit arbre connu de bitype  $\mathcal{PN}$ . Ordre 36.

- Les seuls coups potentiellement gagnants pour Alice sont la coloration d'un 4-sommet  $v_i$  voisin d'un lien  $u_i$ .
- Les seuls coups potentiellement gagnants pour Bob sont la coloration d'un lien  $u_i$ .

Du second point on déduit que la seule stratégie potentiellement gagnante pour Bob est d'aboutir à la structure centrale  $a0aa0a$ , avec des composantes de bitype  $\mathcal{AA}$  autour. S'il a commencé alors c'est à lui de jouer sur un graphe de bitype  $\mathcal{PN}$ , et si Alice a commencé ce sera à son tour de jouer sur un graphe de bitype  $\mathcal{NP}$  (si Alice n'a pas joué sur  $a0aa0a$ ) ou  $\mathcal{NN}$  (sinon). On en conclut que  $oo(T) = \mathcal{PN}$ .

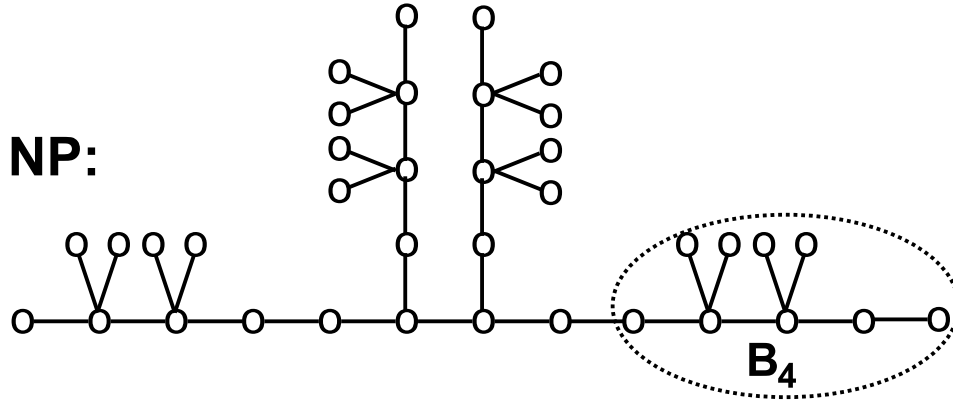
Nous avons choisi pour  $S$  et pour les  $B_i$  les exemples minimisant le nombre de sommets :  $a0aa0a$  pour  $S$  et  $aDDz$  pour les  $B_i$  (après la coloration des liens). Mais nous aurions pu prendre d'autres lc-arbres : pour  $S$  on connaît  $a^40a$ ,  $a^6$  ou encore  $a0aa00aa0a$  qui sont de bitype  $\mathcal{PN}$ . Mais c'est surtout pour les branches que l'on connaît un grand nombre d'exemples de bitype  $\mathcal{NN}$  :  $az^n z$  pour  $14 \leq n \leq 22$ ,  $a0z^n z$  pour  $19 \leq n \leq 27$  ou encore  $az^p Dz^n z$  pour certaines valeurs de  $p$  et  $n$ . Les bitypes de ces chenilles on été calculés au Chapitre 7.

On peut donc construire un grand nombre d'arbres non coloriés de bitype  $\mathcal{PN}$ , celui de la Figure 8.7 étant le plus petit exemple connu. Pour trouver un exemple plus petit il faudrait découvrir un arbre  $T'$  de bitype  $\mathcal{PN}$  possédant 3 sommets coloriés et d'ordre inférieur à 16, le plus petit exemple connu étant  $a0aa0zDDz$ .

### 8.3.4 Bitype $\mathcal{NP}$

Pour cette classe, nous n'avons découvert aucune lc-chenille de bitype  $\mathcal{NP}$ , donc notre construction avec un système de branches ne peut être effectuée directement.

Mais comme l'ajout d'un sommet isolé à un lc-arbre  $T$  change le bitype en son bitype miroir, on connaît des lc-chenilles non connexes de bitype  $\mathcal{NP}$ . Par exemple si  $F$  est une forêt de bitype signé  $\mathcal{AA}_1$  alors on a  $oo(a0aa0a + F) = \mathcal{NP}$ . Nous allons utiliser ce résultat pour construire un arbre  $T$  sur lequel toute stratégie gagnante du Suivant conduit à obtenir  $a0aa0a + F$ . L'arbre de la Figure 8.8 en est le plus petit exemple connu, d'ordre 37. Notons que l'on peut construire d'autres éléments d'ordre 37, (i) en plaçant la "branche impaire"  $B_4 = zDD0z$  en haut plutôt qu'à droite (ii) en prenant une autre branche impaire de même ordre, par exemple  $zTDz$  ou  $zDTz$ , la lettre  $T$  désignant un sommet de l'épine dorsale possédant trois feuilles voisines.

FIGURE 8.8 – Plus petit arbre connu de bitype  $\mathcal{NP}$ . Ordre 37.

Cette branche  $B_4$  vérifie la même propriété que pour les branches étudiées précédemment :

- Si Bob colorie le lien  $u_4$  alors la branche devient  $aDD0z$ , qui est de bitype  $\mathcal{NN}$ .
- Après coloration du lien par Bob, Alice est forcée de jouer dans cette branche. Elle obtient une option de bitype signé  $\mathcal{AA}_1$ .

Comme pour le bitype  $\mathcal{AN}$ , on démontre aisément que tant qu'il y a des liens non coloriés les seuls coups potentiellement gagnants pour Bob sont sur ces liens, et pour Alice sur les voisins de ces liens dans les branches.

Cela entraîne qu'au bout de huit coups on obtient un lc-arbre de la forme  $T_8 = a0aa0a + F$ , où  $F$  est une forêt de bitype  $\mathcal{AA}$ . De plus on a  $u(F) = 6 + 6 + 6 + 7 = 25$ . Par conséquent  $oo(T_8) = \mathcal{NP}$ . Comme toute stratégie gagnante du Suivant aboutit à  $T_8$  on en conclut que l'arbre de départ est également de bitype  $\mathcal{NP}$ .

### 8.3.5 Bitype $\mathcal{NB}$

De même que pour les trois bitypes précédents, nous pouvons construire des arbres non coloriés de bitype  $\mathcal{NB}$  avec toujours la même méthode : une structure  $S$  centrale dont la coloration de  $k$  feuilles aboutit à un lc-arbre de bitype  $\mathcal{NB}$ , et  $k$  branches attachées à  $S$  par des liens. Le plus petit arbre de bitype  $\mathcal{NB}$  est la chenille canonique  $a^4za$  réduite par  $R_3$  en  $a0aaza$ . Par conséquent notre exemple est le plus petit exemple connu est d'ordre 37. La démonstration du bitype de cet arbre ne sera pas effectuée car elle est similaire à celle de  $T_{AN}$  (c.f. Section 8.3.1).

### 8.3.6 Bitype $\mathcal{BN}$

Comme pour le bitype  $\mathcal{NP}$  nous n'avons découvert aucune lc-chenille de bitype  $\mathcal{BN}$ , il faut donc s'appuyer sur une structure centrale  $S$  de bitype  $\mathcal{NB}$  (nous reprenons  $a0aaza$ ) et des branches dont l'ordre total est impair.

L'arbre de la Figure 8.10 en est le plus petit exemple connu, d'ordre 38. La démonstration du bitype est similaire à celle qui a été effectuée pour le bitype  $\mathcal{NP}$ .



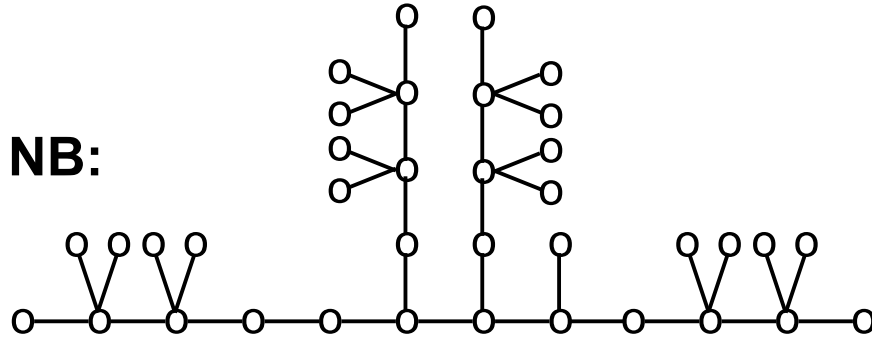


FIGURE 8.9 – Plus petit arbre connu de bitype  $\mathcal{NB}$ . Ordre 37.

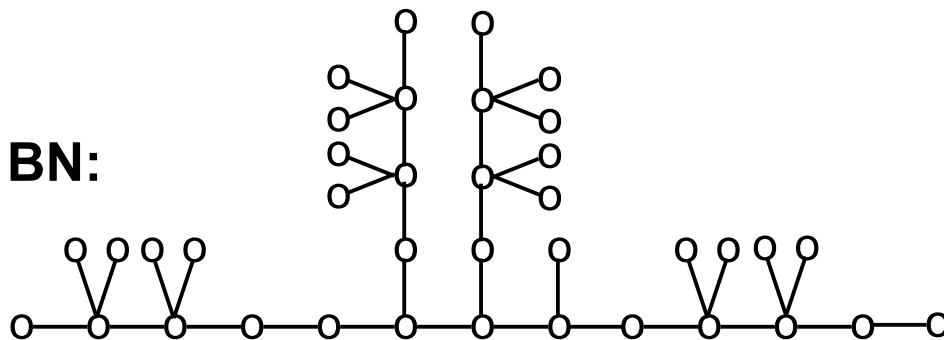


FIGURE 8.10 – Plus petit arbre connu de bitype  $\mathcal{BN}$ . Ordre 38.

## 8.4 Cas des 5-sommets ayant trois feuilles voisines

Cette méthode permettant de construire des arbres non coloriés de bitype variable va être utilisée pour démontrer qu'il existe des arbres non coloriés pour lesquels le bitype change si l'on retire une feuille dont le voisin  $u$  est un 5-sommet possédant 3 feuilles. Nous pensions au commencement de ces travaux sur le nombre chromatique ludique pouvoir effectuer une réduction de feuilles  $R_5$  sur de tels sommets  $u$ , c'est-à-dire qu'à partir de trois feuille voisines non coloriées nous pouvions n'en conserver que deux. Il n'en est rien avec l'exemple de l'arbre  $T$  de la Figure 8.11. Cet arbre  $T$  est construit sur le même principe que les exemples d'arbres de bitype variable : une structure centrale  $S$  et 3 branches attachées à  $S$  par des liens. La structure  $S$  avec les liens coloriés avec la même couleur  $a$  s'écrit  $S = a0aT0a$ , le "T" indiquant un sommet possédant 3 feuilles voisines non coloriées. On démontre aisément que le bitype de  $S$  est  $\mathcal{NN}$  :

- Bob choisit la  $\mathcal{BB}$ -option  $S_1 = a0aT_a0a$ . En effet, toute option de  $S_1$  contient soit une I-chenille soit est isomorphe à  $a^3D_aa^2$  qui est de bitype  $\mathcal{NB}$ . De plus Bob bénéficie de la  $\mathcal{BB}$ -option  $a0aT_a c$ .
- Alice joue sur le sommet de degré 5 pour obtenir la  $\mathcal{AA}$ -option  $a0aa + a0a + z$ .

On en conclut par le même procédé que précédemment que le bitype de  $T$  est également  $\mathcal{NN}$ .

Or on peut aisément vérifier que  $a^3Da^2$  est de bitype  $\mathcal{AN}$ . Par  $R_3$  on obtient que  $oo(a0aD0a) = \mathcal{AN}$ , donc que  $S' = a0aD0a + z$  est de bitype  $\mathcal{NA}$ . Or  $S'$  peut être obtenu

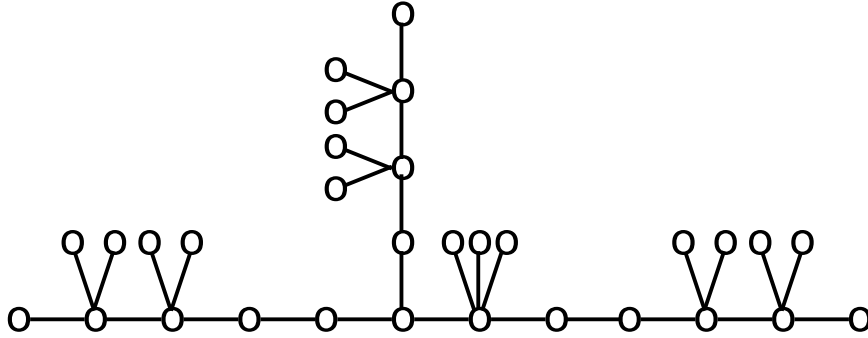


FIGURE 8.11 – Arbre contenant un 5-sommet  $u$  avec 3 feuilles voisines, où le retrait de l'une de ces feuilles modifie le bitype.

à partir de  $S$  en déconnectant une des feuilles voisines de  $u$ . On en conclut que l'arbre  $T'$  obtenu à partir de  $T$  en déconnectant une des feuilles voisines de  $u$  est de bitype  $\mathcal{NA}$ , distinct du bitype de  $T$ .

Cet exemple montre que la Conjecture 6.8.1 de la réduction de feuilles  $R_5$  est la meilleure borne possible.

Par conséquent, dans le cas où la réduction de feuilles pourra être démontrée sur la famille des lc-arbres, lorsque l'on voudra effectuer la caractérisation de l'ensemble des arbres de nombre chromatique ludique 3 il faudra considérer les sommets internes possédant de 0 à 3 feuilles voisines. Toutefois dans certains cas particuliers comme les chenilles sans trous, la caractérisation pour au plus 2 feuilles voisines permet de déduire celle pour 3 feuilles voisines, la 3e feuille n'étant a priori que très rarement nécessaire à Bob.

## 8.5 Conclusion

Dans cette section nous avons donné les plus petits exemples que nous connaissions pour chaque bitype.

Pour les bitypes constants nous avons démontré qu'il s'agissait de plus petits exemples sur la famille des arbres non coloriés. Pour cela nous avons donné des conditions suffisantes pour que le bitype d'un arbre donné soit  $\mathcal{AA}$ . Ainsi nous avons pu considérablement réduire le nombre d'arbres à étudier, ce qui nous a permis de trouver un plus petit arbre pour les bitypes  $\mathcal{NN}$  et  $\mathcal{BB}$ .

Par contre, pour les bitypes variables, l'ordre du plus petit exemple connu est entre 29 et 38. Par conséquent il n'est pas envisageable de regarder l'ensemble des arbres d'ordre inférieur (de l'ordre de  $10^{12}$  pour  $n = 38$ , c.f. [28]), et nous n'avons pu donner de conditions suffisantes qui élimine un grand nombre d'éléments. Nous n'avons donc pu déterminer s'il s'agissait de plus petits exemples.

Toutefois ce problème pourrait être abordé en s'intéressant au plus petit lc-arbre à  $k$  feuilles coloriées ( $1 \leq k \leq 4$ ) de bitype variable  $\mathcal{XY}$  donné. En effet un arbre non colorié de bitype variable a au moins une option de bitype variable, et cette option a une feuille coloriée. Ce problème est résolu avec  $k = 3$  pour les bitypes  $\mathcal{AN}$  et  $\mathcal{NA}$ , et avec  $k = 4$  pour les bitypes  $\mathcal{PN}$  et  $\mathcal{NB}$ .

Une autre question serait de s'intéresser aux **bitypes signés**. On remarque que l'ensemble des exemples que nous avons construit ou que l'on pourrait construire ont leur bitype signé dans l'ensemble  $\mathcal{K}$  suivant :

$$\mathcal{K} = \{\mathcal{AN}_0, \mathcal{NA}_1, \mathcal{PN}_0, \mathcal{NP}_1, \mathcal{BN}_0, \mathcal{NB}_1\}.$$

Par conséquent, pour la moitié des bitypes signés, nous ne connaissons aucun exemple d'arbre non colorié. Il en est de même pour les lc-chenilles comme on peut l'observer sur la table 6.1 (page 127) : tous les exemples de bitype signé n'appartenant pas à  $\mathcal{K}$  sont des lc-chenilles circulaires et non des lc-chenilles. Il en est de même sur les lc-arbres où aucun exemple n'a pu être construit. Nous conjecturons donc que :

**Conjecture 8.5.1 (Conjecture des signes)** *Soit  $T$  un lc-arbre de bitype variable. Alors  $T$  est de bitype  $\mathcal{ZN}_0$  ou  $\mathcal{NZ}_1$  avec  $\mathcal{Z} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{B}\}$ .*

La démonstration de la conjecture des signes aurait des conséquences sur le calcul du bitype d'un arbre non colorié  $T$  donné. En effet, comme on connaît le signe de  $T$ , on pourrait éliminer la moitié des possibilités pour les bitypes variables et passer ainsi de 9 à 6 bitypes possibles pour  $T$ . Nous saurions donc, sans connaître le bitype de  $T$ , si l'éventuelle stratégie gagnante du suivant est **forte**, c'est à dire s'il peut toujours choisir des options de bitype constant. Partant d'un arbre de signe 0, la stratégie gagnante serait forcément forte, et sur un arbre de signe 1 elle pourrait être forte ou non.

Pour démontrer la conjecture des signes il suffirait de prouver qu'aucun lc-arbre de bitype  $\mathcal{PN}$  n'est de signe 1. En effet, un lc-arbre possédant un autre bitype variable que  $\mathcal{PN}$  a forcément une  $k$ -option (option en  $k$  coups) de bitype  $\mathcal{PN}$  ou  $\mathcal{NP}$  que le joueur perdant la partie ne peut éviter.



# Chapitre 9

## Conclusion et perspectives

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés au problème de caractérisation des arbres de nombre chromatique ludique 3. Afin de déterminer les stratégies gagnantes des deux joueurs sur un arbre  $T$ , nous avons dû étudier des positions courantes de notre jeu  $\mathcal{J}$ , c'est-à-dire des lc-arbres.

Dans le Chapitre 6, nous avons introduit la notion de **bitype**, un paramètre de lc-graphe permettant de déterminer qui gagne sur chacune des quatre conditions de jeu.

Ces bitypes sont également utiles pour calculer le nombre chromatique ludique et le nombre chromatique B-ludique d'un lc-graphe non connexe en fonction des **bitypes signés étendus** de ses composantes connexes, si toutefois ces composantes vérifient une propriété définie récursivement : la **conformité**.

Concernant les lc-arbres, Les bitypes permettent également dans certains cas d'étendre une stratégie gagnante à un sous-arbre (pour Alice) ou à un sur-arbre (pour Bob) : il s'agit du **théorème d'inclusion**.

Dans le Chapitre 7, nous avons caractérisé une famille d'arbres, les **chenilles sans trous**. Cette caractérisation a été effectuée en donnant une collection  $\Upsilon$  d'exemples de base et en démontrant que pour toute chenille sans trous un des deux joueurs a une stratégie gagnante lui permettant d'aboutir à une réunion disjointe d'éléments de  $\Upsilon$ , ou se ramenant à  $\Upsilon$  par le Théorème d'inclusion. Concernant les chenilles sans trous avec un ou deux 4-sommets, la preuve formelle n'a pas été effectuée au vu du grand nombre d'éléments à étudier, les résultats ayant été obtenus avec l'aide de l'ordinateur. La démonstration pourra être effectuée lors de travaux ultérieurs.

Nous avons également étudié une famille d'arbres circulaires, les **1-chenilles circulaires**. Nous avons mis en évidence que pour certaines familles de graphes, il peut y avoir plusieurs éléments de bitype  $\mathcal{PN}$ , c'est à dire de nombre chromatique ludique 4 mais de nombre chromatique B-ludique 3.

Nous avons conclu cette partie par un chapitre sur les arbres non coloriés, en se demandant si pour chacun des neuf bitypes il existait un arbre non colorié de ce bitype. La réponse est oui. En ce qui concerne les bitypes constants, nous avons découvert les plus petits exemples à isomorphisme près. Par contre, pour les bitypes variables nous n'avons pu démontrer qu'il s'agissait des plus petits exemples. En effet, étant donné les ordres de nos exemples (entre 29 et 38), il n'est pas envisageable d'étudier l'ensemble des arbres

d'ordre inférieur.

Terminons cette seconde Partie par quelques perspectives et questions ouvertes sur le problème de caractérisation des arbres de nombre chromatique ludique 3.

Concernant les lc-graphes, la découverte d'autres réductions comme la réduction de chaîne  $R_6$  (Conjecture 6.8.2) permettrait de réduire la taille des familles de graphes partiellement 3-coloriés à étudier.

Sur les bitypes, la détermination de l'ensemble des lc-graphes conformes est le problème le plus important. Pour un lc-graphe  $G$  donné, nous ne savons pas à l'heure actuelle dire en temps polynomial si  $G$  est conforme ou non. Cette complexité est notamment due à la définition récursive de la conformité. Nous avons toutefois observé que, pour des familles comme les chenilles sans trous, la conformité n'est pas nécessaire pour effectuer la caractérisation. En effet, vu le peu d'éléments de bitype variable, on peut s'arranger pour que les coups gagnants du Suivant soient toujours de bitype constant.

Ce modèle de bitypes a été choisi dans le cadre du jeu  $\mathcal{J}$  avec 3 couleurs, noté  $\mathcal{J}_3$ , mais il pourrait également être utile pour d'autres jeux partisans, par exemple ceux pour lesquels les joueurs ont les mêmes règles mais pas le même objectif final (jeu constructeur/destructeur).

Il serait également pertinent avec tout autre nombre de couleurs  $k$ , par exemple avec 6 couleurs sur un graphe planaire extérieur (car la borne est ici 7 grâce à Guan et Zhu [14]). Mais pour une telle famille  $\mathcal{O}$ , la caractérisation ne se réduit pas à étudier les bitypes des lc-graphes dans  $\mathcal{J}_6$ , mais plutôt dans  $\mathcal{J}_6$ ,  $\mathcal{J}_5$ ,  $\mathcal{J}_4$  et  $\mathcal{J}_3$  afin de savoir pour tout graphe planaire extérieur avec quel **nombre minimal de couleurs** Alice a une stratégie gagnante, et pas uniquement si elle en a une avec six couleurs. Une méthode pourrait être de diviser la famille  $\mathcal{O}$  en sous-familles pour lesquelles le nombre chromatique ludique est borné par un entier  $k < 6$ . Une question naturelle est donc de se demander quels sont les graphes planaires extérieurs de nombre chromatique ludique et de nombre chromatique B-ludique au plus 4.

Les arbres en sont des exemples (démontré par Faigle et al. [18]), les arbres circulaires également (Proposition 6.3.6). Il semble que l'on puisse étendre ces résultats à une famille plus générale, les graphes planaires extérieurs à cycles sommets-disjoints. Ainsi, sans pour autant effectuer une caractérisation totale, on partitionnerait  $\mathcal{O}$  en sous-familles pour lesquelles il existe un entier  $k$  ( $3 \leq k \leq 6$ ) tel que tout élément ait ses deux nombres chromatiques ludiques compris entre  $k$  et  $k + 1$ .

Concernant la famille des chenilles, il reste à caractériser les chenilles avec trous (sommets de degré 2). Ces trous rendent la recherche de stratégies gagnantes plus complexe. On peut toutefois envisager des résultats avec un petit nombre de trous. Par exemple, pour la famille des 1-chenilles avec au plus 2 trous on pourrait obtenir une caractérisation, avec la même méthode que pour les 1-chenilles sans trous.

Concernant les chenilles circulaires, la caractérisation n'a pas été effectuée pour tous les éléments ne possédant pas de trous. A priori celle-ci devrait être réalisable puisque grâce au Théorème d'inclusion on sait que toute chenille circulaire de taille au moins 16 est de bitype  $\mathcal{BB}$ . Il n'y a donc plus qu'à regarder les éléments de taille comprise entre 3 et 15.

Plus généralement, sur la famille des lc-arbres nous ne pouvons pour l'instant donner

que des conditions suffisantes à l'existence d'une stratégie gagnante pour l'un ou l'autre des deux joueurs.

Puisque pour les chenilles le problème est plus difficile lorsqu'il y a des trous, il serait intéressant d'étudier le problème de caractérisation des arbres sans 2-sommets. Par exemple, pour la famille des **étoiles de chenilles sans trous**, on pourrait envisager une caractérisation.

Enfin le problème de trouver le plus petit arbre non colorié de bitype  $\mathcal{XY}$  reste ouvert pour les bitypes variables. Nous pensons que pour les arbres sans trous certains de nos exemples sont bien les plus petits.





# Bibliographie

- [1] E. W. Adams and E. C. Benson. Nim-type games. Technical Report 13, Carnegie Inst., 1956.
- [2] D. T. Allemang. Generalized genus sequences for misère octal games. *Int. J. Game Theory*, 30 :539–556, 2001.
- [3] C. Berge. *Graphes*. Chap. 14. 3e édition Gauthier-Villars, 1983.
- [4] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning Ways*. Two volumes, Academic Press, London, 1982. Second edition, four volumes (2001-2004), A. K. Peters, Wellesley, Massachussets.
- [5] H. L. Bodlaender. On the complexity of some coloring games. *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 2(2) :133–147, 1991.
- [6] C.L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of Mathematics*, 3 :35–39, 1905.
- [7] J. H. Conway. *On Numbers and Games*. Academic Press, New-York, 1976. Second edition (2001), A. K. Peters, Wellesley, Massachussets.
- [8] T. R. Dawson. *Caissa's wild roses*. 1935. Reprinted in : *Five Classics of Fairy Chess*. Dover Publication, Inc., 1973.
- [9] É. Duchêne. *Jeux combinatoires sur les graphes (in french)*. PhD thesis, Grenoble, France, 2006.
- [10] A. Flammenkamp. *Octal games*.  
<http://wwwhomes.uni-bielefeld.de/achim/octal.html>.
- [11] M. Gardner. Mathematical games. *Scientific American*, 1981.
- [12] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2 :6–8, 1939.
- [13] J. Grytczuk, M. Kovše, Z. Miechowicz, T. Bartnicki, B. Brešar, and I. Peterin. Game chromatic number of cartesian product graphs. *Electronic J. Combinatorics*, 15 :R72, 2008.
- [14] D. Guan and X. Zhu. The game chromatic number of outerplanar graphs. *J. Graph Theory*, 30 :67–70, 1999.
- [15] A. Guignard and E. Sopena. Compound node-kayles on paths. *Theoret. Comput. Sci.*, 410 :21–23, 2009.
- [16] R. K. Guy and C. A. B. Smith. The G-values of various games. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 52 :539–556, 1956.

- [17] D. G. Horrocks and R. J. Nowakowski. Regularity in the g-sequences of octal games with a pass. *Integers, Electr. J. of Combin. Number Theory*, (3) : # G1, 10, 2003.
- [18] H. A. Kierstead, U. Faigle, U. Kern, and W.T. Trotter. On the game chromatic number of some classes of graphs. *Ars Combin.*, 35 :143–150, 1993.
- [19] H. A. Kierstead and W. T. Trotter. Planar graph coloring with an uncooperative partner. *J. Graph Theory*, 18(6) :569–584, 1994.
- [20] H.A. Kierstead, T. Bartnicky, J. Grytczuk, and X. Zhu. The map coloring game. *Amer. Math. Monthly*, 114 :793–803, 2007.
- [21] M. Mitchell. *An Introduction to Genetic Algorithm*. MIT Press, 1996.
- [22] J. Nĕsetřil and É. Sopena. On the oriented game chromatic number. *Electronic J. Combinatorics*, 8(2) :R14, 2001.
- [23] T. E. Plambeck. *Misère Games*. <http://miseregames.org>.
- [24] T. E. Plambeck. Taming the wild in impartial combinatorial games. *INTEGERS : The Electr. J. Combin. Number Theory*, (#G05), 2005.
- [25] Chun-Yen Chou Shu-Yu Tsai. *The game chromatic number and game coloring number of trees and caterpillars*. PhD thesis, Departement of Applied Mathematics, National Sun Yat-sen University, Taiĳwan, 1999.
- [26] W. L. Sibert and J. H. Conway. Mathematical Kayles. *Int. J. Game Theory*, 20 :237–246, 1992.
- [27] E. Sidorowicz. The game chromatic number and the game colouring number of cactuses. *Information Processing Letters*, 102 :147–151, 2007.
- [28] N. J. A. Sloane. *A Handbook of Integers Sequences*. Academic Press, 1973.
- [29] R. Sprague. Über mathematische kampfspiele. *Tohoku Math. J.*, 41 :438–444, 1936.
- [30] W. Stromquist and D. Ullman. Sequential compounds of combinatorial games. *Theoret. Comput. Sci.*, 119 :311–321, 1993.
- [31] X. Zhu. Refined activation strategy for the marking game. *J. Combin. Theory Ser. B*, 98(1) :1–18, 2008.