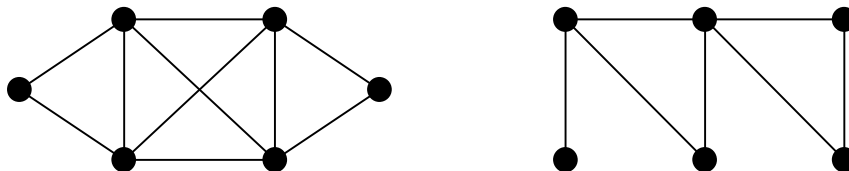


# Math en Jeans

## Année 2002-2003

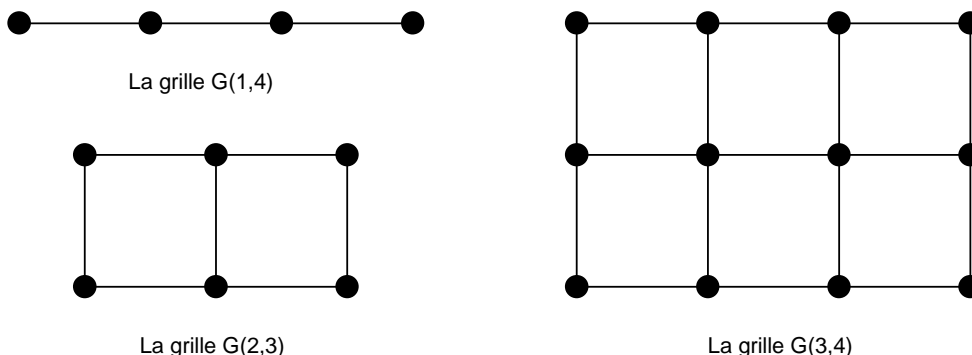
Les problèmes présentés ici sont des problèmes de *théorie des graphes*. Un graphe est un ensemble de points (appelés *sommets*) et de lignes (appelées *arêtes*) reliant des paires de points.

Quelques exemples de graphes :



On s'intéressera surtout à des graphes particuliers, appelés des *grilles*, donnés par un nombre de lignes et de colonnes. On notera  $G(l,c)$  le graphe composé de  $l$  lignes et  $c$  colonnes.

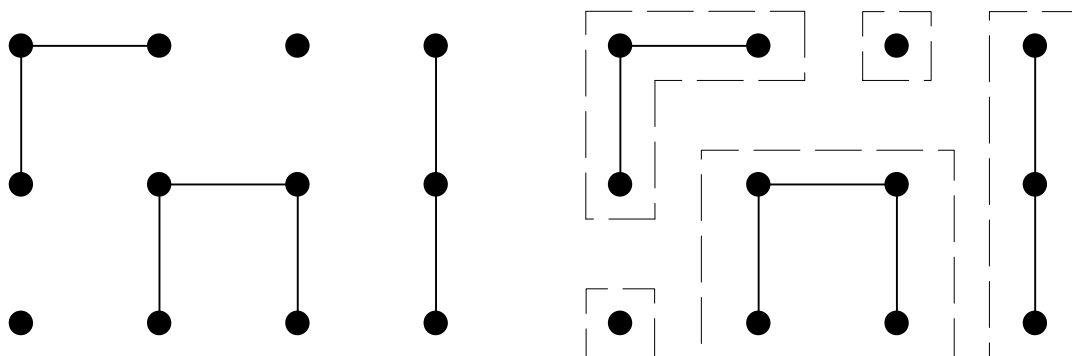
Quelques exemples de grilles :



### Problème 1. Décomposition des grilles en composantes connexes

Considérons par exemple la grille  $G(3,4)$ , et « effaçons » quelques arêtes. Nous obtenons un *sous-graphe* du graphe de départ (voir figure (a)).

Ce sous-graphe contient un certain nombre d'arêtes, ici 7, et un certain nombre de « morceaux » (appelés *composantes connexes*), c'est-à-dire d'ensembles de sommets reliés entre eux grâce aux arêtes. Notre sous-graphe possède 5 composantes connexes (figure (b)).

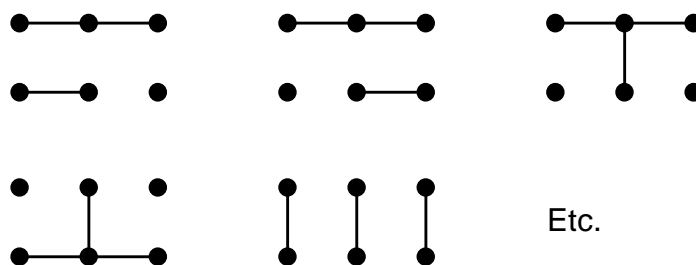


(a) Un sous-graphe de la grille  $G(3,4)$

(b) Les 5 composantes connexes de ce sous-graphe

Le problème que nous allons considérer consiste à déterminer le nombre de façons différentes de décomposer une grille de taille donnée  $G(l,c)$  en un nombre donné  $p$  de composantes connexes et en utilisant un nombre donné  $q$  d'arêtes. On notera  $N(l,c,p,q)$  ce nombre.

Par exemple, si l'on souhaite décomposer la grille  $G(2,3)$  en 3 composantes et en gardant 3 arêtes, nous avons... beaucoup de possibilités ! En voici quelques unes :



La difficulté ne va pas être de déterminer ce nombre pour des situations particulières (il suffit de prendre le temps de compter !...) mais de trouver des « formules générales » pour exprimer ce nombre...

Il est facile de voir que le nombre de sommets de la grille  $G(l,c)$  est exactement  $n = lc$ , alors que son nombre d'arêtes est  $m = l(c-1) + c(l-1) = 2lc - l - c$ .

Ainsi, pour une grille  $G(l,c)$  donnée, on ne pourra considérer que les cas où le nombre  $p$  de composantes est compris entre 1 et  $lc$ , et le nombre  $q$  d'arêtes entre 0 et  $2lc-l-c$  (il y a certainement d'autres liens à découvrir entre les valeurs possibles de  $p$  et de  $q$ ).

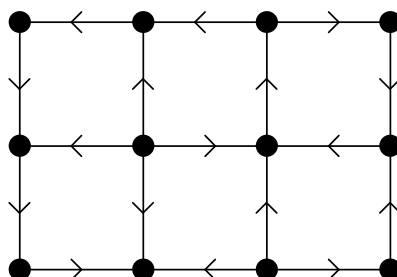
La démarche (progressive) proposée est la suivante :

- Considérer les grilles  $G(1,c)$  à une ligne (ces graphes sont appelés des *chemins*).
- Considérer les grilles  $G(2,c)$  à deux lignes (ces graphes sont appelés des *échelles*).
- Passer ensuite aux grilles à 3 lignes, etc.
- Il est également possible de regarder des cas particuliers dépendant de  $p$  ou  $q$ , indépendamment de la taille de la grille... Par exemple, peut-on trouver une formule générale lorsque  $p = 1$  ?  $p = 2$  ?  $p = 3$  ?

### Problème 2. Coloration des grilles orientées

On considère ici des *orientations* de la grille, obtenues en orientant chaque arête d'un de ses sommets extrémités vers l'autre (nous avons ainsi deux possibilités pour chaque arête). Les arêtes ainsi orientées sont appelées des *arcs*.

Exemple d'orientation d'une grille :

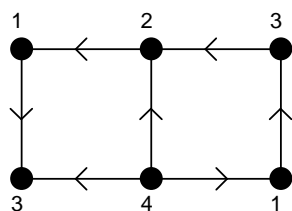


Une orientation de la grille  $G(3,4)$

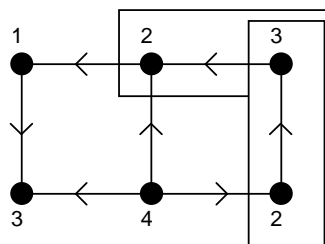
On souhaite maintenant « colorier » les sommets des grilles orientées avec des entiers : 1, 2, 3, etc., de façon telle que :

- les sommets voisins (reliés par un arc) ont des couleurs distinctes,
- pour toute paire de couleurs  $a$  et  $b$ , les arcs reliant les sommets de couleur  $a$  aux sommets de couleur  $b$  ont tous la même direction (tous de la couleur  $a$  vers la couleur  $b$ , ou tous de la couleur  $b$  vers la couleur  $a$ ).

Exemple :

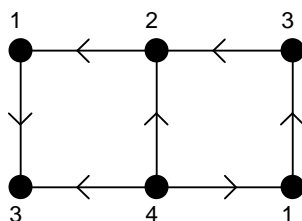


Une coloration autorisée

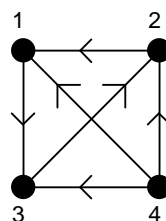


Une coloration interdite : 2 vers 3 et 3 vers 2...

Si l'on considère une coloration valide d'une grille G, on peut construire un « graphe des couleurs » : il s'agit d'un graphe orienté (pas nécessairement une grille !...), dont les sommets sont les couleurs utilisées (1, 2, 3, etc.) et tel qu'il y a un arc de la couleur a vers la couleur b dès qu'il y a un arc dans la grille G d'un sommet colorié a vers un sommet colorié b.



Une coloration de G(2,3)



Le graphe des couleurs correspondant

Le problème qui nous intéresse ici est de trouver le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier ainsi les grilles orientées. Notons K ce nombre. Il est possible de donner une borne inférieure  $B_i$  pour K, c'est-à-dire montrer que  $B_i \leq K$ , en proposant une orientation de grille nécessitant  $B_i$  couleurs (et pas moins...). Il est possible de donner une borne supérieure  $B_s$  pour K, c'est-à-dire montrer que  $K \leq B_s$ , en construisant par exemple un graphe de couleurs ayant  $B_s$  sommets, et en montrant comment utiliser ce graphe de couleurs pour colorier n'importe quelle grille orientée... Naturellement, si on parvient à trouver 2 valeurs  $B_i$  et  $B_s$  égales, on a complètement résolu le problème !...

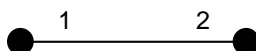
La démarche (progressive) proposée est la suivante :

- Considérer les orientations des grilles G(1,c).
- Considérer les orientations des grilles G(2,c) à deux lignes, puis à trois lignes, etc.
- Il est également possible (et certainement plus simple) de considérer dans un premier temps des orientations particulières : par exemple tous les arcs horizontaux orientés ouest-est et tous les arcs verticaux orientés nord-sud, ou encore un sur deux orientés est-ouest, un sur deux orienté nord-sud, etc.

### Problème 3. Colorations de brins

Nous nous intéressons à nouveau aux graphes non orientés (avec des arêtes), mais cette fois nous allons colorier des « demi-arêtes » appelées *brins*. Ainsi chaque arête aura deux couleurs, placées sur les côtés opposés de l'arête. Nous utilisons toujours les entiers comme couleurs : 1, 2, 3, etc.

Exemple :

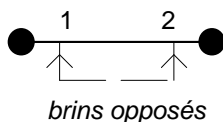


Coloration des deux brins d'une arête

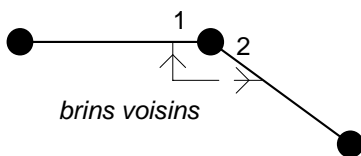
Les contraintes de coloration sont les suivantes :

- les deux brins d'une même arête (brins *opposés*) doivent avoir des couleurs distinctes (A),
- deux brins entrants dans le même sommet (brins *voisins*) doivent avoir des couleurs distinctes (B),
- deux brins tels que l'un entre dans le même sommet que le brin opposé de l'autre (brins *adjacents*) doivent avoir des couleurs distinctes (C).

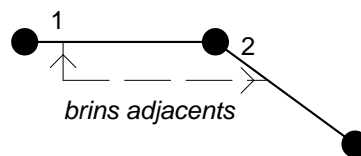
Illustration des contraintes :



Contrainte (A)

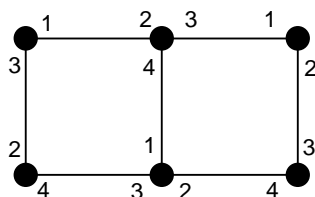


Contrainte (B)



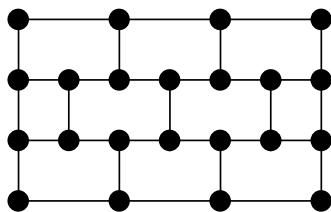
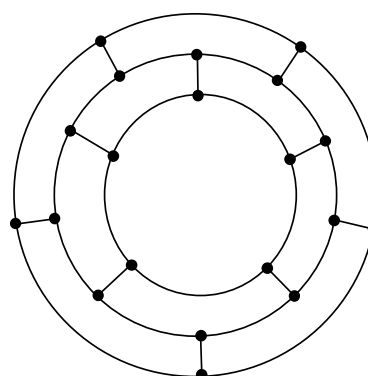
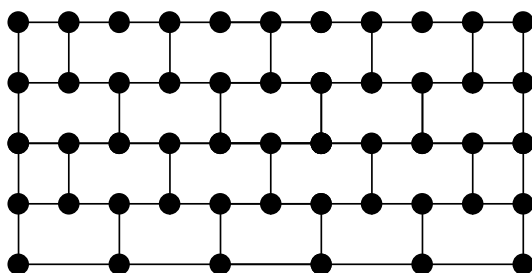
Contrainte (C)

Un exemple de coloration de brins :

Une coloration des brins de la grille  $G(2,3)$ 

Là encore, le problème est de colorier les brins d'un graphe en utilisant le moins possible de couleurs...

On va s'intéresser à diverses familles de graphes : les grilles, déjà présentées, les murs  $M(r,b)$  à  $r$  rangées de  $b$  briques, et les murs circulaires  $MC(r,b)$  à  $r$  rangées de  $b$  briques :

Le mur  $M(3,3)$  - 3 rangées de 3 briquesLe mur circulaire  $MC(2,5)$   
2 rangées de 5 briquesLe mur  $M(4,5)$  - 4 rangées de 5 briques

On pourra considérer les familles de graphes suivantes :

- les grilles (en commençant par les grilles à 1 ligne, puis 2 lignes, etc.),
- les « murs » (en commençant par les murs à une rangée, puis à deux rangées, etc.),
- les « murs circulaires » (en commençant par les murs à une rangée, puis à deux rangées, etc.),
- et enfin, plus généralement, les graphes dont les sommets ont chacun trois voisins (on pourra définir des familles de tels graphes, comme les murs circulaires par exemple...).

Dans chacun des cas, on cherchera à déterminer le nombre exact de couleurs nécessaires pour colorier tous les graphes de la famille. Le cas échéant, on pourra naturellement proposer des bornes inférieures ou des bornes supérieures pour ce nombre...

**Éric SOPENA**  
Chercheur au LaBRI  
*sopena@labri.fr*