

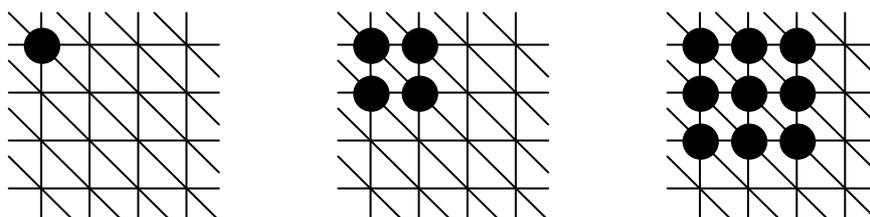
# Math en Jeans

## Année 2003-2004

### Problème 1. Nombres géométriques

On s'intéresse ici à des suites de nombres engendrées par des suites de figures géométriques (d'où la notion de nombres géométriques...).

Les figures sont obtenues en plaçant des jetons sur des intersections de « réseaux » (ou « quadrillages » particuliers) du plan (infini). Considérons un premier exemple qui va nous aider à mieux comprendre :



Chaque intersection de ce réseau possède 6 voisins que l'on peut naturellement qualifier de Nord, Est, Sud-Est, Sud, Ouest et Nord-Ouest (ou, plus simplement, N, E, SE, S, O et NO). Ce réseau est un réseau triangulaire car les cellules de base sont toutes des triangles...

La règle de construction, dite règle N-O-NO, est la suivante : on démarre avec un seul jeton et, à chaque étape, une intersection ayant une intersection voisine N, O ou NO occupée par un jeton récupère un jeton... La suite de nombres correspondante est obtenue en comptant les jetons : 1, 4, 9, etc. Il est assez facile de se convaincre que le n-ième nombre de cette suite est  $n^2$  (on comprend pourquoi ces nombres sont appelés des carrés...).

Au niveau géométrique, une telle suite est caractérisée par trois informations :

- la structure du « réseau » (carrés, triangles, hexagones, ...),
- la figure initiale (un point, un segment, un « L », un rectangle, ...),
- la règle d'évolution des jetons.

Pour une telle suite, le problème consiste alors à trouver une formule générale donnant la valeur du n-ième nombre de la suite. Cela peut être simple, comme dans notre exemple, ou plus compliqué...

Pour commencer, on pourra se limiter à un réseau de type quadrillage (en supprimant les diagonales dans notre exemple), et considérer les questions suivantes :

- en utilisant la règle N-O, qu'obtient-on à partir d'un point ? d'un segment de longueur  $p$  ? à partir d'un rectangle  $p \times q$  ? et ainsi de suite selon votre imagination...
- que se passe-t-il si l'on modifie la règle d'évolution ? Par exemple, avec la règle N-E-S-O ?

On pourra ensuite considérer le réseau triangulaire vu précédemment (dans notre exemple initial) ou le réseau triangulaire obtenu en rajoutant les diagonales SO-NE.

Pour chaque problème, la technique à utiliser est généralement :

- construire graphiquement les premiers nombres,
- essayer de « deviner » la formule,
- démontrer que la formule est correcte !

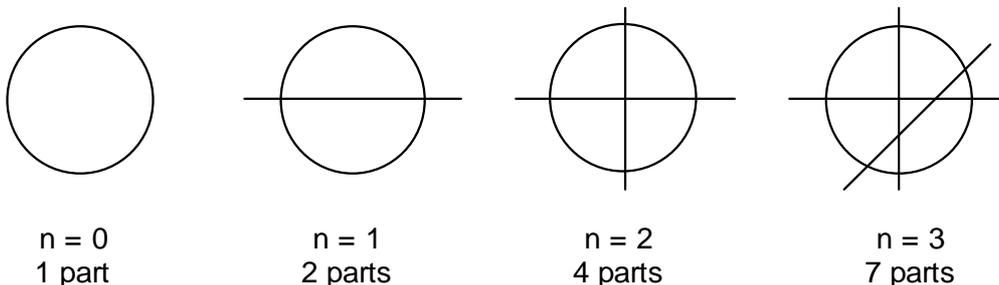
Remarquons par finir que rien ne nous interdit de considérer ensuite des « grilles de dimension 3 », voire des grilles de dimensions supérieures pour les plus courageux (l'étape qui consiste à « dessiner » les premiers nombres est alors beaucoup plus délicate...).

### Problème 2. Découpages pâtisseries

La question de base est la suivante : combien de parts de gâteau est-il possible d'obtenir en un nombre donné  $n$  de coups de couteau (ou « découpes ») ? On suppose que le gâteau a la forme d'un disque sans épaisseur (on ne

peut pas le couper en deux dans le sens de l'épaisseur) et que la lame du couteau a une longueur supérieure au diamètre du gâteau ; par ailleurs, on ne cherche pas à faire des parts égales...

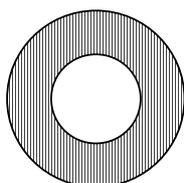
Nous avons ainsi :



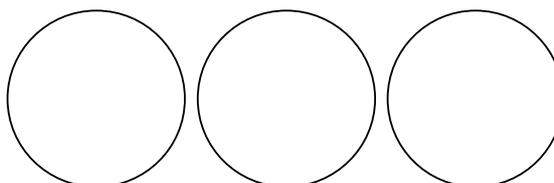
Combien de parts peut-on alors obtenir avec 4 découpes ? 5 découpes ? n découpes (il faut trouver une formule générale donnant le nombre de parts en fonction du nombre de découpes) ?

Il s'agit là d'un problème classique, mais qui peut nous inspirer... En effet, nous pouvons considérer par exemple les questions suivantes :

- Que se passe-t-il si l'on remplace le gâteau par un beignet (voir ci-dessous) ?
- Que se passe-t-il si l'on considère une rangée de p gâteaux (voir ci-dessous), ou de beignets, et un couteau dont la lame permet d'atteindre l'ensemble des gâteaux ?
- Que se passe-t-il si la longueur de la lame est égale au rayon du disque et non plus au diamètre ?
- Que se passe-t-il si l'on prend en compte l'épaisseur du gâteau et si l'on s'autorise les coupes « horizontales » ? (cette fois, on peut par exemple obtenir 8 parts avec 3 découpes...)



un beignet



une rangée de 3 gâteaux (p=3)

Dans chaque cas, le problème consiste à trouver une formule générale donnant le nombre de parts en fonction du nombre de découpes...

Comme pour le problème n°1, la technique à utiliser est généralement :

- construire graphiquement les premiers nombres,
- essayer de « deviner » la formule,
- démontrer que la formule est correcte !

### Problème 3. Les commentaires du mathématicien

Ce problème est issu d'une énigme très difficile à résoudre mais dont la solution est extrêmement « simple » (c'est là tout le charme de cette énigme que vous pouvez tester auprès de vos amis)... La voici :

Soit la suite de nombres :

- 1
- 11
- 21
- 1211
- 111221

...

Quel est le nombre suivant de cette suite ?

Un bon indice pour résoudre cette énigme est le titre du problème : montrons le premier nombre, 1, à un mathématicien... Que voit-il ? il voit un « Un » ! C'est-à-dire 11... S'il regarde 11, il voit deux « Un », c'est-à-dire 21, et ainsi de suite... Après le nombre 111221, c'est-à-dire trois « Un », deux « Deux » et un « Un », nous avons donc 312211 ! C'est d'une simplicité enfantine, non ?

Cette suite de nombres semble avoir de mystérieuses propriétés et intrigue de nombreux mathématiciens...

Par exemple :

- Pouvez-vous démontrer que seuls les chiffres 1, 2 et 3 peuvent apparaître dans cette suite ?
- Pouvez-vous dire combien de chiffres contient le 30-ième nombre de cette suite ? le 50-ième ?
- Quel est le 14-ième chiffre du 100-ième nombre ?
- Combien de 1 contient le 45-ième nombre ? Combien de 2 ? Combien de 3 ?
- Que se passe-t-il si, au lieu de partir du nombre 1, nous partons de 2 ? de 3 ? de 22 ? de 123 ? etc.

Une suite différente, au sujet de laquelle on peut se poser des questions similaires, s'obtient à partir de lettres... Que doit-on écrire pour continuer la suite suivante (maintenant, vous connaissez le « truc »...) ?

u  
 unu  
 unuununu  
 unuununuunuununuununu  
 ... ?

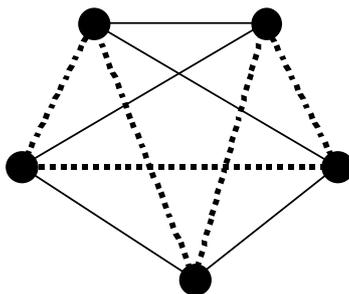
#### Problème 4. Les amis de mes amis sont-ils mes amis ?

Considérons la proposition suivante : dans un groupe de six personnes, il est toujours possible d'en trouver trois qui se connaissent deux à deux (par exemple Anne et Bastien se connaissent, Bastien et Claire se connaissent, Anne et Claire se connaissent), ou trois qui ne se connaissent pas deux à deux (par exemple Damien et Étienne ne se connaissent pas, Étienne et Florence ne se connaissent pas, Damien et Florence ne se connaissent pas).

Cette proposition est vraie... mais sauriez-vous la démontrer ? Reste-t-elle vraie si l'on considère un groupe de 5 personnes ?

On peut modéliser graphiquement cette situation de la façon suivante : on dispose les personnes sur un cercle et on relie deux personnes par un trait plein si elles se connaissent et par un trait en pointillé si elles ne se connaissent pas (c'est plus joli avec deux couleurs, mais plus cher à imprimer...).

Par exemple :



En fait, cette figure répond négativement à la question concernant un groupe de 5 personnes : ici, nous n'avons ni trois personnes qui se connaissent deux à deux, ni trois personnes qui ne se connaissent pas deux à deux...

Qu'est-ce que trois personnes qui se connaissent deux à deux ? Un triangle en traits pleins ! Qu'est-ce que trois personnes qui ne se connaissent pas deux à deux ? Un triangle en pointillés !

Le dessin précédent est ce que l'on appelle un « graphe complet à 5 sommets » : il s'agit d'un graphe (dessin) dont les sommets représentent les personnes et tel que deux personnes quelconques sont toujours reliées par une « arête » (un trait) d'une certaine couleur (plein ou pointillé). Notre proposition peut alors s'énoncer de la façon suivante :

Dans un graphe complet à 6 sommets dont les arêtes sont coloriées à l'aide de deux couleurs, il existe toujours un triangle « monochrome » (c'est-à-dire colorié en une seule couleur).

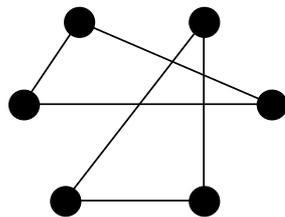
Le graphe complet à  $n$  sommet se note généralement  $K_n$ . Ainsi, la figure précédente représente le graphe  $K_5$  et un triangle est en réalité le graphe  $K_3$  !...

Notre problème se généralise facilement et de nombreuses questions sont à ce jour sans réponse... On pourra par exemple se demander :

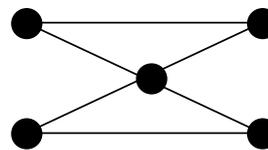
- à partir de combien de sommets est-on sûr de trouver un  $K_4$  monochrome ? un  $K_5$  monochrome ?
- à partir de combien de sommets est-on sûr de trouver deux triangles disjoints (sans sommets communs et sans arêtes communes, voir ci-dessous) monochromes ?
- à partir de combien de sommets est-on sûr de trouver un motif quelconque monochrome, par exemple le graphe X ci-dessous ?

Il est également possible de colorier le graphe complet avec 3 couleurs, voire plus... Dans ce cas, on peut alors se demander :

- à partir de combien de sommets est-on sûr de trouver un triangle monochrome dans un graphe complet colorié avec 3 couleurs ? avec 4 couleurs ?



deux triangles disjoints



le graphe X

Indiquons pour finir de quelle façon de tels résultats peuvent être obtenus en prenant pour exemple notre problème initial des six personnes... Pour montrer que 6 est la bonne réponse à la question « à partir de combien de sommets est-on sûr de trouver un triangle monochrome dans un graphe complet colorié avec deux couleurs ? », il faut :

- montrer que quelle que soit la façon de colorier le graphe  $K_6$  avec deux couleurs, il apparaît toujours un triangle monochrome...
- montrer que 6 est la meilleure solution en montrant qu'il existe une coloration du graphe à 5 sommets sans triangle monochrome (ce que nous avons fait précédemment...).

## Problème 5. L'aiguille de Buffon

Georges Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788) est essentiellement connu pour son oeuvre de naturaliste, mais il fut aussi philosophe et mathématicien. Il a notamment écrit en 1777 un mémoire sur le « Jeu de franc carreau » qui est à l'origine de ce problème.

Le jeu de franc carreau se joue sur un sol carrelé de carreaux carrés (sic) de côté  $C$ . On jette en l'air une pièce ronde, de diamètre  $D$ , qui ne retombe jamais sur la tranche... Le joueur A parie que la pièce retombera à franc carreau (c'est-à-dire qu'elle sera entièrement contenue dans un carreau) et le joueur B parie le contraire (c'est-à-dire qu'elle chevauchera au moins un joint). On suppose pour simplifier que les joints sont « sans épaisseur » et que le sol est « infini »...

La question est alors :

Quelle doit être la valeur du côté des carreaux  $C$  (en fonction du diamètre de la pièce  $D$ ) pour que ce jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que chaque joueur ait une chance sur deux exactement de l'emporter ?

Pour résoudre ce problème, il suffit de remarquer que si le centre de la pièce tombe à une distance inférieure ou égale à  $C-D$  du centre d'un carreau, elle ne chevauchera aucun joint. Dans le cas contraire, elle chevauchera nécessairement au moins un joint... Ainsi, on peut partager le plan en deux zones : la zone A (qui signifie que le joueur A gagne si le centre de la pièce tombe dans cette zone) et la zone B (qui fait gagner le joueur B). Pour que le jeu soit équitable, il faut donc que ces deux zones aient la même surface...

- Saurez-vous montrer que pour que le jeu soit équitable il faut avoir  $C = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \times D$  ?

Plusieurs variantes de ce jeu peuvent être considérées, par exemple :

- Que se passe-t-il si les carreaux sont des triangles équilatéraux ? des hexagones ?
- Que se passe-t-il si la pièce est en forme de carré ? de triangle ? de « L » ?

Le principe de résolution reste le même, mais les formules obtenues sont naturellement différentes...

Une autre variante, connue sous le nom de « l'aiguille de Buffon » est la suivante : le jeu se joue sur un parquet cette fois (un ensemble de lignes parallèles espacées d'une distance  $d$ ) et l'on jette une aiguille de longueur  $l$ ...

- Saurez-vous trouver la solution de ce problème ? (C'est-à-dire calculer la probabilité de gain de chacun des joueurs en fonction de la distance  $d$  et de la longueur  $l$ ).

On peut alors considérer, au gré de notre imagination, de nombreuses variantes (par exemple reprendre nos carrelages précédents et y jeter l'aiguille...), chacune donnant lieu à un intéressant problème de géométrie...

## Problème 6. La stratégie des allumettes

Il existe de nombreux jeux d'allumettes et celui qui nous intéresse est le suivant :

Deux joueurs disposent d'un tas de 50 allumettes et retirent à tour de rôle un certain nombre d'allumettes.

Le premier joueur peut retirer 1 ou 2 allumettes du tas.

Lorsqu'un joueur a retiré  $n$  allumettes, le joueur suivant peut en retirer au maximum  $2n$ .

Le joueur qui retire la dernière allumette est déclaré perdant.

Le problème qui nous intéresse est le suivant :

- existe-t-il une stratégie gagnante pour le premier joueur ? pour le deuxième joueur ? et si oui laquelle !

La technique à mettre en oeuvre est une technique classique en théorie des jeux, qui consiste à déterminer les « positions gagnantes »... Une « position » est une information qui permet de décrire la situation du jeu au moment où l'un des joueurs doit jouer. Dans notre exemple, une position peut être représentée par un couple  $(a,b)$ , où  $a$  représente le nombre d'allumettes restant dans le tas et  $b$  le nombre d'allumettes retirées par le joueur précédent (on sait ainsi que l'on pourra retirer entre 1 et  $2b$  allumettes).

Il est facile de se convaincre par exemple que  $(1,b)$  est toujours une position perdante (il reste une allumette, on a donc perdu) alors que  $(2,b)$  est toujours une position gagnante (en enlevant une allumette, on conduit l'adversaire à une position perdante...).

Ainsi, une position perdante est une position qui ne permet jamais de gagner (on suppose que l'adversaire ne commet jamais de faute) et une position gagnante est une position qui envoie l'adversaire dans une position perdante... simple, non ?

Notre problème consiste alors à répondre à la question suivante :

- Quelles sont les positions gagnantes ? et, en particulier,  $(50,1)$  est-elle une position gagnante ?

Remarquons que  $(50,1)$  modélise bien la position initiale car le premier joueur peut retirer 1 ou 2 allumettes...

La méthode à suivre peut être la suivante :

- Considérer dans un premier temps un nombre plus faible d'allumettes (avec 1 ou 2 cela doit être trivial !).
- Essayer de deviner comment se déterminent les positions gagnantes (et perdantes !).

On pourra également considérer différentes variantes de ce jeu, selon l'inspiration :

- on peut par exemple supposer qu'il y a au départ 2 tas de 25 allumettes et qu'à chaque étape les allumettes retirées par un joueur doivent appartenir à un même tas...

**Éric SOPENA**  
Chercheur au LaBRI  
*sopena@labri.fr*