

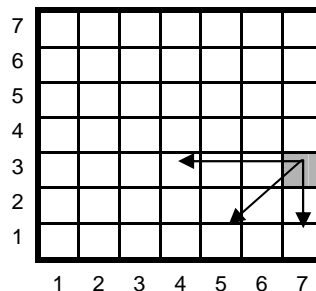
Math en Jeans

Année 2006-2007

Problème 1. Autour du jeu de Wythoff

Le jeu de Wythoff est un jeu d'allumettes à deux joueurs. Au départ, nous avons deux tas d'allumettes, de taille quelconque (par exemple 3 et 7). À tour de rôle, chaque joueur a deux possibilités : retirer un nombre quelconque d'allumettes de l'un des tas, ou bien retirer le même nombre d'allumettes dans chacun des deux tas. Le joueur qui retire la dernière allumette est déclaré vainqueur.

Une autre façon, équivalente, de voir ce jeu est la suivante : plaçons une reine sur un « très grand » échiquier, par exemple en ligne 3, colonne 7. À tour de rôle, chaque joueur déplace la reine en la rapprochant de la case (1,1), c'est-à-dire soit horizontalement vers la gauche, soit verticalement vers le bas, soit en diagonale vers le sud-ouest. Le joueur qui place la reine dans la case (1,1) gagne la partie.



Une *configuration* est une position de jeu, c'est-à-dire, dans cet exemple, les coordonnées de la case sur laquelle se trouve la reine. Une configuration est *gagnante* si le joueur qui doit jouer est certain de gagner, quoi que fasse son adversaire. Par exemple, toutes les cases de la première ligne ou de la première colonne sont des configurations gagnantes ! À l'inverse, une configuration est *perdante* si quoi que fasse le joueur qui doit jouer, il tombe dans une configuration gagnante (pour son adversaire donc...). Par exemple, la case (3,2) est une configuration perdante...

[Remarquons maintenant qu'une configuration est gagnante s'il existe un déplacement qui envoie son adversaire dans une configuration perdante ! Ainsi, la case (5,4) est gagnante car je peux aller en (3,2), qui est perdante...]

- Sauriez-vous déterminer toutes les configurations gagnantes de ce jeu ?

On s'intéresse maintenant à des variantes de ce jeu, obtenues en « remplaçant » la reine par une autre pièce du jeu d'échec ou par une nouvelle pièce ayant des déplacements particuliers (attention, seuls les déplacements qui nous rapprochent de la case (1,1) sont autorisés, sinon le jeu ne se termine pas...). Par exemple :

- Sauriez-vous déterminer toutes les configurations gagnantes du jeu si la reine est remplacée par un roi ?
- Sauriez-vous déterminer toutes les configurations gagnantes du jeu si la reine est remplacée par un « roi puissant » qui peut effectuer 2 (ou 3 ou 4 ou k) déplacements de roi en un seul coup (les zigzags sont autorisés) ?

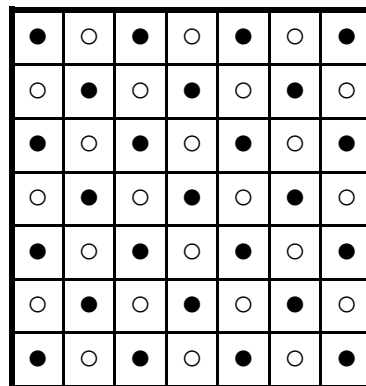
Vous pouvez naturellement « inventer » à volonté d'autres pièces, ou jouer sur des plateaux de jeu autres qu'un échiquier (réseaux de triangles ou d'hexagones, etc.).

Problème 2. Solitaire Clobber 3

Le *Clobber* se joue sur une grille rectangulaire où sont disposées alternativement des pierres blanches et noires. À tour de rôle, chaque joueur (qui possède sa propre couleur de pierre) doit déplacer une pierre de sa couleur sur une case voisine (horizontalement ou verticalement) contenant une pierre adverse en détruisant cette dernière. Le premier joueur qui ne peut plus se déplacer perd la partie.

Le *Solitaire Clobber* est la version solitaire de ce jeu, dans laquelle l'unique joueur alterne les coups blancs et noir en essayant d'éliminer le maximum de pierres (l'idéal étant de n'en laisser qu'une...).

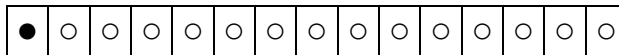
Intéressons nous tout d'abord, en guise d'entraînement, au *Solitaire Clobber 2*, qui se joue comme le Solitaire Clobber si ce n'est que l'on est plus obligé d'alterner les coups blancs et les coups noirs (la seule contrainte est donc de déplacer une pierre d'une couleur quelconque sur



une pierre voisine de couleur opposée). De plus, nous allons jouer à ce jeu simplement sur une « ligne », et non sur une grille, et nous nous intéressons à la meilleure façon de jouer (c'est-à-dire celle laissant à la fin le minimum de pierres) pour une disposition initiale des pierres quelconque (pas seulement « alternée »).

- Sauriez-vous déterminer les dispositions initiales qui permettent de ne laisser qu'une seule pierre en fin de jeu ?

En voici une, très simple, à titre d'exemple :



Il doit certainement y en avoir de plus subtiles !

Et le *Solitaire Clobber 3* ? Toujours le même principe mais, cette fois, avec trois couleurs de pierres : blanches, noires et grises... Un déplacement consiste en la prise d'une pierre d'une autre couleur que la sienne.

- Sauriez-vous déterminer les dispositions initiales du Solitaire Clobber 3 qui permettent de ne laisser qu'une seule pierre en fin de jeu (toujours sur une ligne) ?

Après avoir résolu (en totalité ou en partie) le jeu sur une ligne, on peut chercher à déterminer les dispositions initiales qui permettent de ne laisser en fin de partie que deux, trois, ou k pierres, ou encore considérer le jeu sur un cercle, ou sur une grille (en commençant pour simplifier par une grille ne comportant que deux lignes)...

Problème 3. Le problème des balles de tennis

On dispose d'un nombre pair de balles de tennis, numérotées de 1 à 2n (par exemple de 1 à 6), et on effectue l'opération suivante : on place dans un sac les balles 1 et 2 et on en choisit une au hasard (dans le sac) que l'on met de côté ; on place ensuite les balles 3 et 4 dans le sac (qui en contient donc 3 maintenant) et on en choisit une au hasard que l'on met de côté ; on continue ainsi, en ajoutant les balles 2 par 2 et en en choisissant une au hasard jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de balles. On a alors choisi n balles (3 si l'on avait 6 balles au départ) que l'on a mises de côté. On s'intéresse alors à l'ensemble des numéros des balles mises de côté, sans tenir compte de l'ordre dans lequel elles ont été choisies (sur notre exemple, on pourrait avoir ainsi l'ensemble {1,2,6}).

- Sauriez-vous dire combien d'ensembles différents on peut ainsi obtenir en ayant au départ 4 balles ? 6 balles ? 8 balles ? 2n balles ?

On peut se poser la même question pour d'autres variantes, par exemple :

- on met les balles dans le sac 3 par 3 (en ayant au départ 3n balles), ou 4 par 4, ...
- on met les balles dans le sac 3 par 3 et on en met de côté 2 à chaque tour.

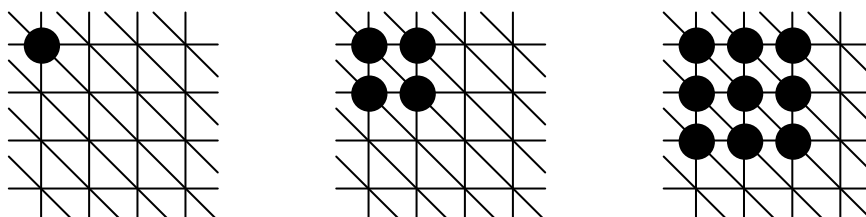
On pourrait aussi se demander, pour un ensemble donné, de combien de façons différentes celui-ci peut apparaître...

Naturellement, vous pouvez imaginer d'autres règles de fonctionnement...

Problème 4. Nombres géométriques

On s'intéresse ici à des suites de nombres engendrées par des suites de figures géométriques (d'où la notion de nombres géométriques...).

Les figures sont obtenues en plaçant des jetons sur des intersections de « réseaux » (ou « quadrillages » particuliers) du plan (infini). Considérons un premier exemple qui va nous aider à mieux comprendre :



Chaque intersection de ce réseau possède 6 voisins que l'on peut naturellement qualifier de Nord, Est, Sud-Est, Sud, Ouest et Nord-Ouest (ou, plus simplement, N, E, SE, S, O et NO). Ce réseau est un réseau triangulaire car les cellules de base sont toutes des triangles...

La règle de construction, dite règle N-O-NO, est la suivante : on démarre avec un seul jeton et, à chaque étape, une intersection ayant une intersection voisine N, O ou NO occupée par un jeton récupère un jeton... La suite de nombres correspondante est obtenue en comptant les jetons : 1, 4, 9, etc. Il est assez facile de se convaincre que le n-ième nombre de cette suite est n^2 (on comprend pourquoi ces nombres sont appelés des carrés...).

Au niveau géométrique, une telle suite est caractérisée par trois informations :

- la structure du « réseau » (carrés, triangles, hexagones, ...),
- la figure initiale (un point, un segment, un « L », un rectangle, ...),
- la règle d'évolution des jetons.

Pour une telle suite, le problème consiste alors à trouver une formule générale donnant la valeur du n-ième nombre de la suite. Cela peut être simple, comme dans notre exemple, ou plus compliqué...

Pour commencer, on pourra se limiter à un réseau de type quadrillage (en supprimant les diagonales dans notre exemple), et considérer les questions suivantes :

- en utilisant la règle N-O, qu'obtient-on à partir d'un point ? d'un segment de longueur p ? à partir d'un rectangle p x q ? et ainsi de suite selon votre imagination...
- que se passe-t-il si l'on modifie la règle d'évolution ? Par exemple, avec la règle N-E-S-O ?

On pourra ensuite considérer le réseau triangulaire vu précédemment (dans notre exemple initial) ou le réseau triangulaire obtenu en rajoutant la deuxième diagonale SO-NE.

Pour chaque problème, la technique à utiliser est généralement :

- construire graphiquement les premiers nombres,
- essayer de « deviner » la formule,
- démontrer que la formule est correcte !

Remarquons par finir que rien ne nous interdit de considérer ensuite des « grilles de dimension 3 », voire des grilles de dimensions supérieures pour les plus courageux (l'étape qui consiste à « dessiner » les premiers nombres est alors beaucoup plus délicate...).

Éric SOPENA
Chercheur au LaBRI
sopena@labri.fr