

Math en Jeans

Année 2008-2009

Cette année, je vous propose deux catégories de problèmes. Des problèmes concernant des jeux à deux joueurs et d'autres, également intéressants (du moins je l'espère...), liés à des problèmes de « colorations ».

Catégorie 1 : jeux à deux joueurs

Les jeux qui vont nous intéresser ont tous les caractéristiques suivantes :

- Deux joueurs, disons Adeline et Barnabé (A et B...), jouent à tour de rôle, Adeline débutant la partie.
- La configuration de départ du jeu est fixée, on l'appelle *configuration initiale*.
- Les règles du jeu permettent de préciser, à partir de n'importe quelle configuration de jeu, quelles sont les configurations de jeu que l'on peut obtenir en un coup.
- Les deux joueurs connaissent parfaitement les règles, ainsi que la configuration courante du jeu.
- Dans un jeu *impartial*, les règles sont les mêmes pour les deux joueurs (comme, par exemple, dans le jeu de Nim). Dans un jeu *partisan*, les règles sont différentes pour les deux joueurs (comme, par exemple, aux échecs, où chaque joueur ne peut déplacer que les pièces de sa propre couleur). Dans ce dernier cas, les deux joueurs connaissent l'ensemble des règles (voir point précédent).
- La partie s'arrête dès que l'un des joueurs ne peut plus jouer.
- Lorsque la partie s'arrête, il y a deux règles possibles pour déterminer le gagnant de la partie. La règle *normale* dit que le dernier joueur à avoir joué gagne la partie (ainsi, le premier joueur ne pouvant pas jouer est déclaré perdant). La règle *misère* (on pourrait dire « qui perd gagne »...) dit que le premier joueur ne pouvant jouer gagne la partie (ainsi, le dernier joueur à avoir joué est déclaré perdant).
- Les règles sont telles qu'une partie ne peut durer indéfiniment (en pratique, lors d'une partie, on ne peut pas retrouver une configuration que l'on a déjà rencontrée...).

La principale question, lorsqu'on étudie un jeu, est de trouver un critère *simple* qui permet de dire si une configuration est *gagnante* ou *perdante* (pour le joueur qui doit jouer) :

- une configuration est *gagnante* si, quelle que soit la façon dont joue son adversaire, le joueur qui doit jouer peut gagner la partie,
- à l'inverse, une configuration est *perdante* si, quelle que soit la façon dont joue le joueur qui doit jouer, son adversaire peut gagner la partie.

En d'autres termes, une configuration est gagnante si les règles permettent d'arriver en un coup sur une configuration perdante (pour l'adversaire donc). À l'inverse, une configuration est perdante si toutes les configurations atteignables en un coup sont gagnantes (pour l'adversaire donc).

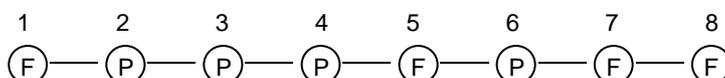
L'autre question, tout aussi intéressante, consiste à définir une *stratégie gagnante*, c'est-à-dire une façon de déterminer, de façon aussi simple que possible, quel coup doit jouer un joueur pour gagner, lorsque qu'il est face à une configuration gagnante...

Problème 1. À pile ou face sur les chemins...

Ce jeu se joue sur un *chemin* à n sommets (par exemple 8 sommets), que l'on peut représenter ainsi :

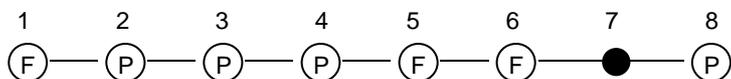


Sur chaque sommet, on place une pièce, côté pile ou côté face. On aura ainsi par exemple :



De façon plus simple, une telle configuration sera notée FPPPF \underline{P} FF.

La règle du jeu est alors la suivante : chaque joueur doit enlever une pièce F (on ne peut pas enlever une pièce positionnée côté pile !...) et retourner les pièces *voisines* (deux pièces sont voisines si elles sont sur des sommets voisins, c'est-à-dire reliés par une *arête* ; le sommet 4 a ainsi 2 voisins, les sommets 3 et 5, alors que le sommet 8 n'a qu'un voisin, le sommet 7). Ainsi, si le premier joueur enlève la pièce située sur le sommet 7, nous obtenons la configuration suivante (les pièces 6 et 8 ont été retournées) :



De façon plus simple, ce coup pourra être noté FPPPF \underline{P} FF \rightarrow FPPPF \underline{F} + P (on note avec un « + », le fait que les pièces ont été séparées en deux portions non voisines). La partie pourrait alors se dérouler ainsi (la pièce choisie par le joueur au coup suivant est soulignée) :

- FPPPF \underline{P} FF \rightarrow \underline{F} PPPF + P (A)
- \rightarrow FPP \underline{F} + P (B)
- \rightarrow F \underline{P} E + P + P (A)
- \rightarrow \underline{F} F + P + P (B)
- \rightarrow P + P + P (A)

Le jeu s'arrête car il n'y a plus de pièces côté face... En version normale, le joueur A a gagné. En version misère, c'est le joueur B qui a gagné.

Une configuration de jeu est ainsi donnée par la succession des portions de pièces. Sur un chemin à n sommets, la configuration initiale est une suite de n symboles P ou F.

Les questions suivantes concernent la version *normale*, c'est-à-dire celle où le premier joueur qui ne peut pas jouer est déclaré perdant.

- La première chose à faire, c'est de jouer à ce jeu sur des chemins ayant peu de sommets, afin de découvrir un maximum de propriétés remarquables...
- La configuration FPPPF (notée également FP^3F) est-elle gagnante ou perdante ? et FP^8F ? et, plus généralement, FP^kF (où k est un entier naturel, avec la convention classique $FP^0F = FF$) ?
- La configuration FP^3 est-elle gagnante ou perdante ? et FP^8 ? et, plus généralement, FP^k ?
- La configuration F^3 est-elle gagnante ou perdante ? et F^6 ? F^8 ? et, plus généralement, F^k ?
- Sauriez-vous trouver d'autres configurations remarquables, pour lesquelles il est « facile » de déterminer si elles sont gagnantes ou perdantes ?

Dans chaque cas, naturellement, on pensera à préciser la stratégie gagnante...

Voici pour finir quelques variantes du jeu précédent, pour lesquelles on peut se poser le même type de questions...

- La première variante est naturellement celle qui consiste à jouer en version *misère*, c'est-à-dire celle où le premier joueur qui ne peut pas jouer est déclaré *gagnant*. Sauriez-vous trouver des configurations remarquables, pour lesquelles il est « facile » de déterminer si elles sont gagnantes ou perdantes ?
- Lorsqu'on enlève une pièce (toujours F), on ne retourne cette fois *que celle située immédiatement à sa droite* (s'il y en a une...). Voici un exemple de partie :

- FF \underline{P} EF \rightarrow \underline{F} FP + P (A)
- \rightarrow PP + P (B)

et la partie s'arrête...

Sauriez-vous trouver des configurations remarquables, pour lesquelles il est « facile » de déterminer si elles sont gagnantes ou perdantes ?

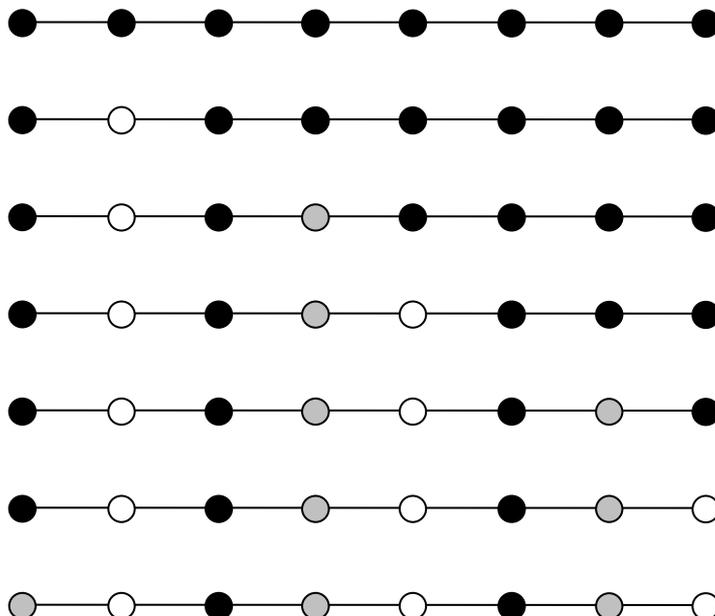
- On peut également considérer une version *partisane* de ce jeu : le joueur A ne peut enlever que les pièces côté face, et le joueur B que les pièces côté pile... Sauriez-vous trouver des configurations remarquables, pour lesquelles il est « facile » de déterminer si elles sont gagnantes ou perdantes ?

Problème 2. Un jeu de coloration...

Ce jeu est un jeu *partisan*, qui, dans un premier temps, peut se jouer sur un chemin à n sommets (voir problème précédent).

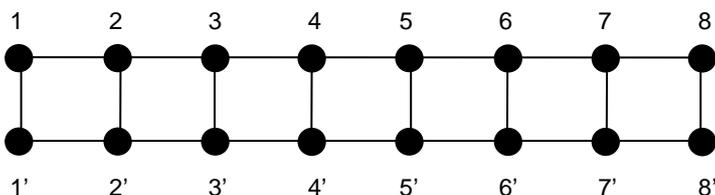
Le joueur A dispose de pions de couleur *blanche* et le joueur B de pions de couleur *grise*. Chaque joueur doit placer un pion de sa couleur sur un sommet inoccupé (au départ, tous les sommets sont inoccupés), en respectant la contrainte suivante : deux sommets voisins ne peuvent porter des jetons de même couleur... (Rappelons que deux sommets voisins sont reliés par une *arête* ; dans le chemin à 8 sommets, le sommet 4 a ainsi 2 voisins, les sommets 3 et 5, alors que le sommet 8 n'a qu'un voisin, le sommet 7).

Observons une partie :



Le joueur A (jetons blancs) ne peut plus jouer... la partie se termine. En version normale, il a perdu, en version misère, il a gagné.

1. Une fois encore, la première chose à faire, c'est de jouer à ce jeu sur des chemins ayant peu de sommets, afin de découvrir un maximum de propriétés remarquables...
2. **Le jeu sur les chemins.** Sauriez-vous dire si un chemin de longueur n est gagnant ou perdant (en fonction de n naturellement) ? Sauriez-vous proposer une stratégie pour les chemins gagnants ? en version normale ? en version misère ?
3. **Le jeu sur les échelles.** On appelle *échelle à n barreaux* le dessin suivant (échelle à 8 barreaux) :



Attention, les règles de voisinage on changé : par exemple, le sommet 2 a maintenant 3 voisins, 1, 3 et 2'...

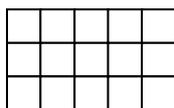
Sauriez-vous dire si une échelle à n barreaux est gagnante ou perdante (toujours en fonction de n) ? Sauriez-vous proposer une stratégie pour les échelles gagnantes ? en version normale ? en version misère ?

4. **Le jeu sur les grilles.** L'échelle exemple ci-dessus est en fait une grille 2×8 , c'est-à-dire une grille à 2 lignes et 8 colonnes. Sauriez-vous dire si une grille $n \times m$, à n lignes et m colonnes, est gagnante ou perdante (cette fois en fonction de n et m) ? Sauriez-vous proposer une stratégie pour les grilles gagnantes ? en version normale ? en version misère ?

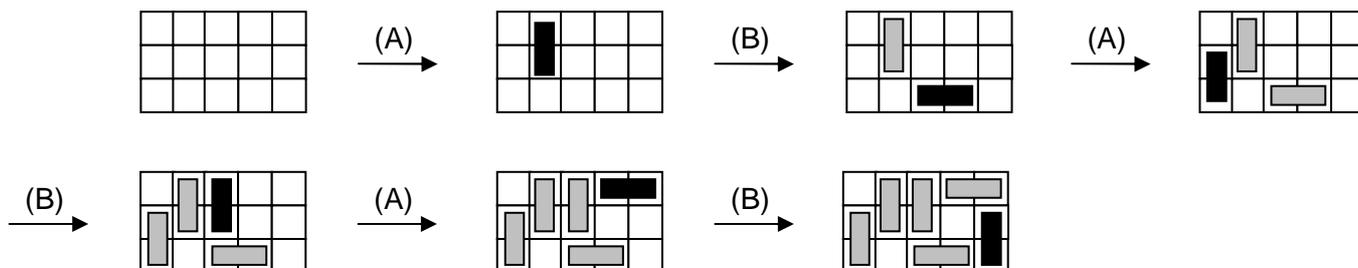
Il semble raisonnable de commencer par étudier les grilles à 3 lignes...

Problème 3. Un jeu de dominos...

Nous allons jouer ici sur des *damiers* $n \times m$, c'est-à-dire à n lignes et m colonnes. Voici par exemple un damier 3×5 , à 3 lignes et 5 colonnes :

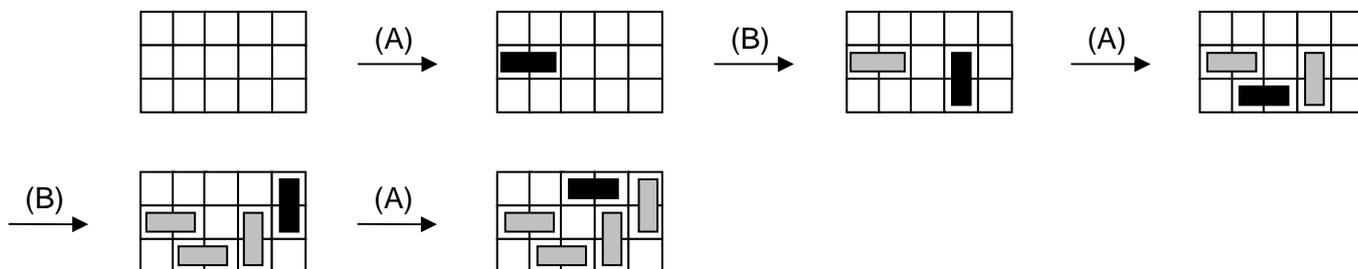


Chaque joueur doit placer un domino sur le damier en utilisant, naturellement, deux cases contiguës libres du damier (un domino couvre exactement deux cases). Voici un exemple de partie (le domino joué apparaît en noir, les dominos déjà présents en gris) :



Il n'est plus possible de placer un domino, la partie est donc terminée. En version normale, le joueur B est déclaré gagnant. En version misère, c'est le joueur A qui est déclaré gagnant...

1. Une fois encore, la première chose à faire, c'est de jouer à ce jeu sur des damiers ayant peu de cases, afin de découvrir un maximum de propriétés remarquables...
2. **Le jeu impartial sur les damiers.** Les règles étant identiques pour les deux joueurs, notre jeu est impartial. Sauriez-vous dire si un damier $n \times m$ est gagnant ou perdant (en fonction de n et m) ? Sauriez-vous proposer une stratégie pour les damiers gagnants ? en version normale ? en version misère ?
3. **Le jeu partisan sur les damiers.** Nous modifions légèrement la règle du jeu, pour obtenir cette fois un jeu partisan : le joueur A doit placer ses dominos horizontalement, le joueur B verticalement... Voici une partie avec ces nouvelles règles :

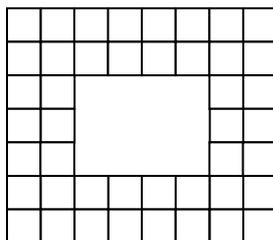
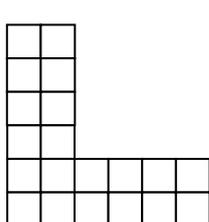


Le joueur B ne peut plus jouer (il y a bien deux cases libres contiguës, mais pour un domino horizontal), la partie est terminée...

Sauriez-vous dire si un damier $n \times m$ est gagnant ou perdant (en fonction de n et m) ? Sauriez-vous proposer une stratégie pour les damiers gagnants ? en version normale ? en version misère ?

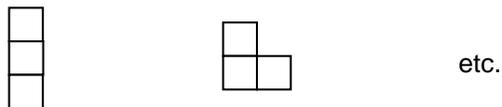
On peut ensuite proposer des variations de ce jeu de base...

4. Il est possible de jouer sur des « damiers » de formes différentes, par exemple :



etc.

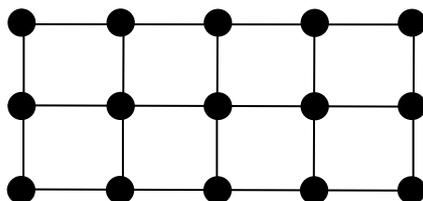
5. On peut également jouer avec des « dominos » de formes diverses :



Catégorie 2 : ce ne sont plus des jeux...

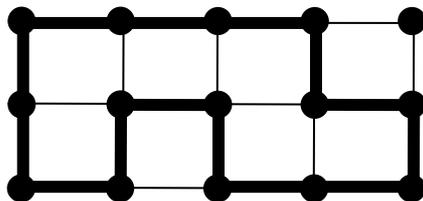
Problème 4. Colorations sans cycles bicolores

On s'intéresse ici aux grilles (vues dans le problème n°2). Voici par exemple la grille 3x5, composée de 3 lignes et 5 colonnes :



Les « points » de cette grille sont appelés des *sommets*, les « lignes » reliant des paires de sommets sont appelées des *arêtes*. Les deux sommets que relie une arête sont les *extrémités* de l'arête.

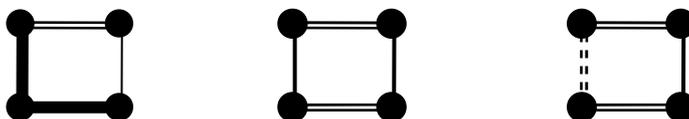
On appelle *cycle* dans une telle grille un « parcours » qui part d'un sommet, passe de sommets en sommets en suivant les arêtes, et revient à son point de départ, sans passer deux fois par le même sommet. Voici un exemple de cycle (en traits épais) sur la grille précédente :



Nous allons maintenant chercher à *colorier* les arêtes de cette grille, en utilisant *le moins de couleurs possible*, de façon à respecter les deux contraintes suivantes :

- deux arêtes ayant une extrémité commune ne doivent pas être de la même couleur,
- tout cycle dans la grille doit « contenir » au moins trois couleurs (on dit qu'il n'y a pas de cycles *bicolores*).

Voici par exemple trois colorations de la grille 2x2 (restons simple pour commencer), où les couleurs sont matérialisées par des styles de traits différents :



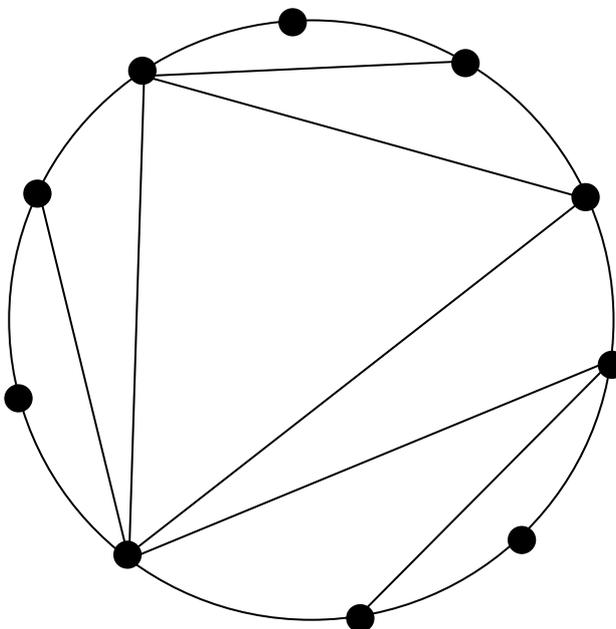
La coloration de gauche respecte la seconde condition mais pas la première, celle du milieu respecte la première mais pas la seconde et, enfin, celle de droite respecte les deux conditions. Il est ainsi nécessaire d'utiliser 3 couleurs pour colorier *correctement* la grille 2x2 (en respectant les deux conditions).

1. La question qui nous intéresse est alors la suivante : combien de couleurs sont nécessaires et suffisantes pour colorier la grille $n \times m$, à n lignes et m colonnes, en respectant les deux conditions ? La réponse à cette question peut naturellement varier en fonction de n et m ... On pourra bien sûr considérer dans un premier temps les grilles $2 \times m$, puis $3 \times m$, et ainsi de suite.

Pour montrer qu'un nombre de couleurs est suffisant, il suffit (sic) de donner une « méthode » permettant de colorier la grille avec ce nombre de couleurs... Pour montrer qu'un tel nombre est nécessaire, il faut montrer

qu'en utilisant moins de couleurs, on tombe nécessairement soit sur deux arêtes de même couleur ayant une extrémité commune, soit sur un cycle n'utilisant que deux couleurs...

2. Avec un peu de courage, on pourrait même s'attaquer aux grilles en dimension 3 (plus difficiles à dessiner).
3. On peut également s'intéresser à d'autres « formes » que celle de la grille... En voici une (qui porte le nom barbare de *graphe planaire extérieur 2-connexe*), obtenue en plaçant tous les sommets sur un cercle (les arcs de cercle reliant des sommets consécutifs sont des arêtes) et en rajoutant des arêtes à l'intérieur du cercle de façon telle que deux arêtes ne se croisent jamais... En voici un exemple :

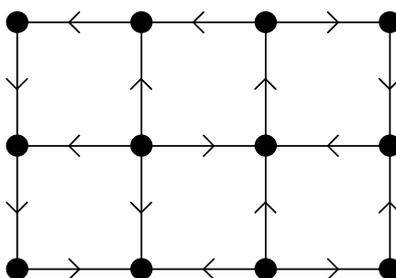


Sauriez-vous résoudre ce problème pour certaines configurations particulières de cette forme ?...

Problème 5. Coloration des grilles orientées

On considère ici des *orientations* de la grille, obtenues en orientant chaque arête d'un de ses sommets extrémités vers l'autre (nous avons ainsi deux possibilités pour chaque arête). Les arêtes ainsi orientées sont appelées des *arcs*.

Voici un exemple d'orientation d'une grille :

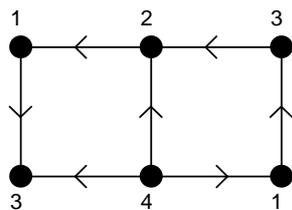


Une orientation de la grille G(3,4)

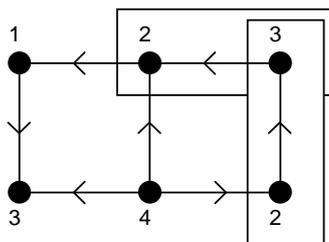
On souhaite maintenant « colorier » les sommets des grilles orientées avec des entiers : 1, 2, 3, etc., de façon telle que :

- les sommets voisins (reliés par un arc) ont des couleurs distinctes,
- pour toute paire de couleurs a et b, les arcs reliant les sommets de couleur a aux sommets de couleur b ont tous la même direction (tous de la couleur a vers la couleur b, ou bien tous de la couleur b vers la couleur a).

Exemple :

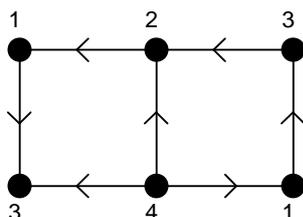


Une coloration autorisée

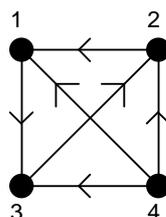


Une coloration interdite : 2 vers 3 et 3 vers 2...

Si l'on considère une coloration valide d'une grille G , on peut construire un *graphe des couleurs* : il s'agit d'un graphe orienté (pas nécessairement une grille !...), dont les sommets sont les couleurs utilisées (1, 2, 3, etc.) et tel qu'il y a un arc de la couleur a vers la couleur b dès qu'il y a un arc dans la grille G d'un sommet colorié a vers un sommet colorié b .



Une coloration de $G(2,3)$



Le graphe des couleurs correspondant

Le problème qui nous intéresse ici est de trouver le nombre *minimum* de couleurs nécessaires pour colorier ainsi les grilles orientées. Notons K ce nombre. Il est possible de donner une borne inférieure B_i pour K , c'est-à-dire montrer que $B_i \leq K$, en proposant une orientation de grille nécessitant B_i couleurs (et pas moins...). Il est possible de donner une borne supérieure B_s pour K , c'est-à-dire montrer que $K \leq B_s$, en construisant par exemple un graphe de couleurs ayant B_s sommets, et en montrant comment utiliser ce graphe de couleurs pour colorier n'importe quelle grille orientée... Naturellement, si on parvient à trouver 2 valeurs B_i et B_s égales, on a complètement résolu le problème !...

La démarche (progressive) proposée est la suivante :

- Considérer les orientations des grilles $G(1,c)$.
- Considérer les orientations des grilles $G(2,c)$ à deux lignes, puis à trois lignes, etc.
- Il est également possible (et certainement plus simple) de considérer dans un premier temps des orientations particulières : par exemple tous les arcs horizontaux orientés ouest-est et tous les arcs verticaux orientés nord-sud, ou encore un sur deux orientés est-ouest, un sur deux orienté nord-sud, etc.

Bon courage à toutes et tous...

Éric SOPENA
 Chercheur au LaBRI
 sopena@labri.fr