

Math en Jeans

Année 2009-2010

Problème 1. Le Jeu du Solitaire

On s'intéresse au jeu classique du solitaire sur un plateau de jeu rectangulaire. Initialement, chaque case du plateau contient un pion sauf une case, que l'on appellera *case de départ*.

Voici par exemple ci-contre un plateau 4 x 5, avec pour case de départ b3.

Chaque coup consiste à « manger » un pion en faisant sauter un autre pion par-dessus, horizontalement ou verticalement (la case d'arrivée doit être libre). Sur l'exemple précédent, le pion b1 peut par exemple manger le pion b2 et atterrir dans la case b3...

	1	2	3	4	5
a	•	•	•	•	•
b	•	•		•	•
c	•	•	•	•	•
d	•	•	•	•	•

Le but du jeu est d'aboutir à une configuration finale composée d'un seul pion.

Nous dirons qu'une case est *réalisable* s'il est possible d'obtenir une configuration finale composée d'un seul pion lorsque cette case est choisie comme case de départ. Nous dirons qu'une case est *idéalement réalisable* s'il est possible d'obtenir une configuration finale composée d'un seul pion lorsque cette case est choisie comme case de départ, et que le dernier pion se trouve lui-même sur la case de départ !

Les questions naturelles dans ce cadre sont alors les suivantes.

- Pour un plateau de jeu de taille $n \times m$, quelles sont les cases réalisables ? les cases idéalement réalisables ?
- Lorsqu'une case est réalisable, quelles sont les cases qui peuvent contenir le dernier pion en fin de partie ?
- Lorsqu'une case est réalisable (ou idéalement réalisable), quelle(s) séquence(s) de coups permet(tent) d'aboutir à une configuration finale composée d'un seul pion ?
- Lorsque qu'une case n'est pas réalisable, quel est le nombre minimum de pions que l'on peut espérer laisser en fin de partie ?

On pourra commencer par considérer des tailles de plateau « simples », voire « très simples » : $1 \times n$, $2 \times n$, 3×5 , 3×6 , ..., $3 \times n$...

Quelques variations possibles :

- Considérer d'autres formes de plateaux (triangles par exemple).
- Considérer des configurations initiales qui n'occupent pas la totalité du plateau (par exemple, sur un plateau de taille $m \times n$, placer $(m-2) \times (n-2)$ pions « au centre » (les premières et dernières lignes et colonnes du plateau sont vides).
- etc.

Problème 2. Version « Jeu combinatoire » du Jeu de Solitaire

Nous reprenons les règles du jeu du solitaire mais, cette fois, deux joueurs vont s'affronter. À tour de rôle, chaque joueur doit déplacer un pion pour en manger un autre (on ne mange qu'un seul pion à chaque coup). Le premier joueur qui ne pourra pas jouer perdra la partie. Cette fois, il ne s'agit donc plus de manger un maximum de pions, mais de parvenir à placer son adversaire dans une position bloquée, où aucune prise n'est possible...

La principale question, lorsqu'on étudie un tel jeu (dit jeu combinatoire), est de trouver un critère *simple* qui permet de dire si une configuration de jeu est *gagnante* ou *perdante* (pour le joueur qui doit jouer) :

- une configuration est gagnante si, quelle que soit la façon dont joue son adversaire, le joueur qui doit jouer peut gagner la partie,
- à l'inverse, une configuration est perdante si, quelle que soit la façon dont joue le joueur qui doit jouer, son adversaire peut gagner la partie.

En d'autres termes, une configuration est gagnante si les règles permettent d'arriver en un coup sur une configuration perdante (pour l'adversaire donc). À l'inverse, une configuration est perdante si toutes les configurations atteignables en un coup sont gagnantes (pour l'adversaire donc).

L'autre question, tout aussi intéressante, consiste à définir une *stratégie gagnante*, c'est-à-dire une façon de déterminer, de façon aussi simple que possible, quel coup doit jouer un joueur pour gagner, lorsque qu'il est face à une configuration gagnante...

Pour notre jeu du solitaire, nous allons ainsi nous poser les questions suivantes, en considérant des tailles de plateau de jeu simples (par exemple, un plateau carré, disons 4 x 4) :

- Quelles sont les cases de départ (la case de départ est celle qui ne contient pas de pions) qui donnent des configurations gagnantes pour le premier joueur ? perdantes pour le premier joueur ?
- Quelle stratégie adopter pour gagner la partie dans le cas où la configuration de départ est gagnante ?

On pourra, après s'être « fait la main » sur un plateau 4 x 4, essayer d'obtenir des résultats plus généraux sur des tailles de plateau de type 1 x n, 2 x n, 3 x n, n x n, ...

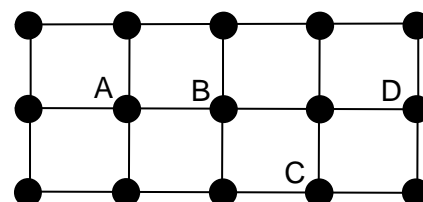
Quelques variations possibles :

- Même variations que dans le précédent problème...
- On peut aussi considérer qu'un « coup » consiste à effectuer une séquence de sauts avec un même pion (et non plus un seul saut par joueur...). Cette modification de la règle du jeu va certainement avoir une (grande ?) influence sur les résultats !...

Problème 3. Colorations de grilles

Un graphe est un ensemble de « points » (appelés sommets) et un ensemble de « traits » (appelés arêtes) reliant des paires de sommets. Les grilles sont des graphes particuliers, dont les sommets sont « organisés » en lignes et colonnes. Le graphe ci-contre, composé de 3 lignes de 5 sommets, est ainsi nommé « grille 3 x 5 ».

Deux sommets reliés par une arête sont dits adjacents (ou voisins). Deux sommets non voisins mais ayant un voisin commun sont dits « à distance 2 ». Dans notre exemple, les sommets A et B sont voisins, les sommets B et C, ainsi que les sommets B et D sont à distance 2.



On va également s'intéresser aux « grilles tubulaires » (les sommets de la première ligne et de la dernière ligne en vis à vis sont reliés par des arêtes), et aux « grilles toriques » (les sommets de la première ligne et de la dernière ligne, ainsi que de la première et dernière colonne, en vis à vis sont reliés par des arêtes).

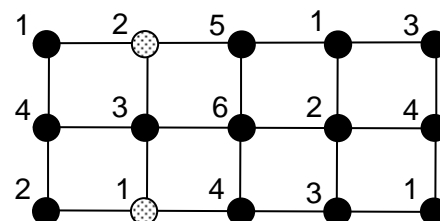
Ainsi, les grilles tubulaires peuvent être vues comme des grilles fermées « dessinées » sur un tube et les grilles toriques comme des grilles dessinées sur un tore (ou une bouée, si vous préférez...).

On va maintenant chercher à « colorier » les sommets de tels graphes à l'aide d'entiers pris dans un ensemble de la forme $S_k = \{1, 2, 3, \dots, k\}$. Ainsi, on va devoir associer un entier à chaque sommet en respectant certaines contraintes, le but du jeu étant de produire une coloration correcte (c'est-à-dire respectant les contraintes) mais en utilisant un ensemble S_k le plus petit possible (ce qui revient à trouver le plus petit k pour lequel l'ensemble S_k permet d'obtenir une coloration correcte).

Nous allons essentiellement considérer les deux types de contraintes suivants :

- Contrainte (2,1) : les couleurs des sommets à distance 2 doivent différer d'au moins 2, les couleurs des sommets voisins doivent différer d'au moins 1.
- Contrainte (1,1) : les couleurs des sommets à distance 2 et des sommets voisins doivent différer d'au moins 1.

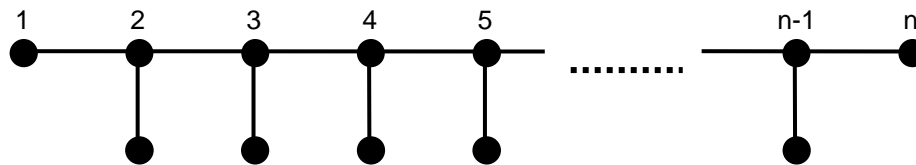
Par exemple, la coloration de la grille ci-contre est de type (1,1) mais pas de type (2,1) (les deux sommets gris sont à distance 2 et leurs couleurs ne diffèrent que de 1).



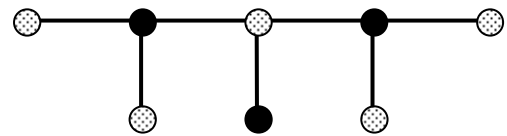
Nous allons donc essayer de répondre à des questions du type : pour un type de grille donné (par exemple, grille tubulaire de taille 3 x n) et un type de coloration donné (par exemple avec contrainte (1,1)), quelle est la plus petite valeur de k (ici, la valeur de k sera exprimée en fonction de n) pour laquelle nous pouvons produire une coloration correcte utilisant k couleurs ?

Problème 4. Jeu de coloration sur les « chenilles »

Nous appelons *chenille de longueur n* (pour $n \geq 3$) un graphe particulier ayant la forme suivante :



Une k -coloration d'un tel graphe consiste à affecter à chaque sommet une couleur prise dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$ de façon telle que deux sommets voisins (reliés par une arête) aient des couleurs distinctes. Il est facile de vérifier que toutes les chenilles (quelle que soit leur taille) admettent une 2-coloration (voir ci-contre).



Nous allons maintenant considérer un jeu à deux joueurs, Alice et Bob. Au départ, nous avons une chenille de taille n dont tous les sommets sont non coloriés, et un ensemble de k couleurs. Alice joue la première et les deux joueurs jouent ensuite à tour de rôle. Chaque joueur doit choisir un sommet non colorié et lui affecter une couleur en respectant la contrainte sur les sommets voisins (qui doivent avoir des couleurs distinctes). Si la chenille finit par être entièrement coloriée, Alice gagne la partie. Dans le cas contraire (ce qui signifie qu'un sommet non colorié possède les k couleurs dans son voisinage), c'est Bob qui gagne la partie.

On souhaite déterminer le plus petit k pour lequel Alice a une stratégie gagnante sur une chenille de taille n (c'est-à-dire une façon de jouer qui lui permette, quoi que fasse Bob, d'aboutir à une coloration complète de la chenille). On notera $C(n)$ cette valeur de k .

Les questions sont alors les suivantes :

- Sauriez-vous démontrer que $C(n) \leq 4$ pour tout n ?
- Pour quelles valeurs de n a-t-on $C(n) = 2$? $C(n) = 3$?

Problème 5. Colorations d'entiers à motif interdit

On va s'intéresser ici à des colorations d'intervalles d'entiers de la forme $[1, n] = \{1, 2, \dots, n-1, n\}$. Colorier un tel intervalle consiste à associer une couleur à chaque entier de façon telle que certaines contraintes soient respectées. On appellera k -coloration une coloration utilisant k couleurs.

Considérons par exemple la contrainte suivante : on souhaite ne pas avoir de triplet d'entiers (x, y, z) ayant tous trois la même couleur (on parle alors de triplet monochromatique) et tel que $x + y = z$ (attention, les trois entiers ne sont pas nécessairement distincts ; on peut en particulier avoir $x = y$ et, donc, $z = 2x$). La question est alors la suivante : si l'on se donne k couleurs, quelle est la plus grande valeur de n pour laquelle il est possible de colorier l'intervalle $[1, n]$ avec k couleurs de façon telle que la contrainte soit respectée ? Cette valeur sera notée $s(k)$.

Si nous prenons $k = 2$, le problème est assez simple. Voici par exemple une 2-coloration de l'intervalle $[1, 4]$ (les éléments coloriés avec la première couleur sont soulignés) : 1 2 3 4. Il suffit ensuite de vérifier que pour toute 2-coloration de l'intervalle $[1, 5]$ (combien y en a-t-il ?), on peut toujours trouver un triplet d'une même couleur satisfaisant l'équation interdite... Ainsi, nous avons $s(2) = 4$. (N'hésitez surtout pas à vérifier cette affirmation !)

- Sauriez-vous déterminer $s(3)$? $s(4)$?

On peut naturellement considérer quelques variations de ce problème :

- Que se passe-t-il si l'on interdit maintenant uniquement les triplets pour lesquels les trois entiers sont distincts ?
- On pourrait également s'autoriser un seul triplet interdit par couleur (mais pas deux !). On noterait alors $s'(k)$ la plus grande valeur de n pour laquelle il existe une k -coloration de l'intervalle $[1, n]$ respectant cette nouvelle contrainte. Que valent alors $s'(2)$? $s'(3)$?
- Une autre variation naturelle consiste à modifier l'équation interdite. Par exemple, interdire les triplets (de trois entiers distincts) monochromatiques tels que $x + y = 2z$...

Bon courage à toutes et tous...

Éric SOPENA
Chercheur au LaBRI
sopena@labri.fr