

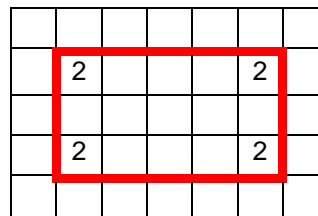
Math en Jeans

Année 2010-2011

Problème 1. Maudits rectangles !

Considérons une grille rectangulaire de $n \times m$ cases. On souhaite placer des entiers de 1 à k (k étant le plus petit possible) dans les cases de la grille de façon telle qu'on ne puisse trouver un « rectangle » dont les quatre coins contiennent le même entier.

L'exemple ci-contre montre un « rectangle interdit » dans une grille 5×7 .



La question principale est la suivante :

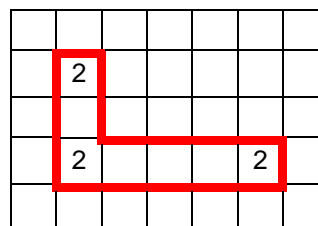
- Peut-on caractériser les grilles (c'est-à-dire leur dimension) que l'on peut remplir de cette façon en utilisant les entiers 1 et 2 ? les entiers 1, 2 et 3 ? etc.

On pourra naturellement commencer par considérer des grilles de taille $2 \times m$, puis $3 \times m$, etc.

Voici par exemple une grille 4×6 correctement remplie avec 3 entiers :

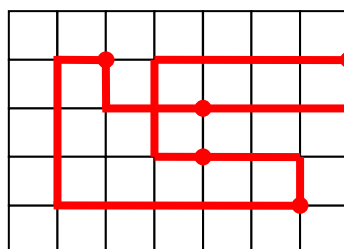
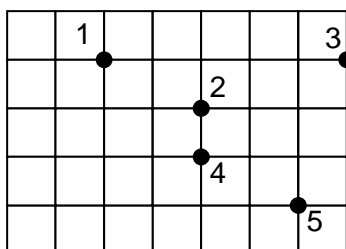
1	1	3	1	3	3
2	3	1	3	1	3
3	2	2	3	3	1
3	3	3	2	2	2

On pourra également considérer d'autres motifs interdits que les rectangles, par exemple les carrés, ou encore les « équerres » telles que celle-ci :



Problème 2. Des circuits imposés...

On considère à nouveau des grilles rectangulaires de taille $n \times m$. Cette fois, on numérote certaines intersections avec des numéros de 1 à k . Le « but du jeu » est de construire un circuit (un chemin qui revient à son point de départ) qui emprunte les lignes de la grille et passe par tous les points numérotés... dans l'ordre des numéros. Le chemin ne peut pas emprunter deux fois un même segment de la grille. Voici un exemple de grille 5×7 ayant quatre cases numérotées de 1 à 4 et la grille contenant le circuit correspondant :



La question qui nous intéresse est alors la suivante :

- Pour une grille de taille donnée, quel est le nombre maximal de points pour lequel on peut toujours trouver un circuit solution et ce, quelle que soit la position des points ?

- Pour une grille de taille donnée, quel est le nombre maximal de points pour lequel on peut toujours trouver un circuit solution, sachant que les points sont placés à une distance d'au moins d du bord de la grille (la distance d'un point au bord est le nombre minimal d'intersections qu'il faut franchir pour atteindre le bord) ?

On pourra par exemple chercher des positions « infaisables » utilisant le moins de points possibles...

Problème 3. Pile et face en solitaire...

On considère une rangée de k pièces, qui peuvent être côté pile ou côté face. Voici par exemple une rangée de cinq pièces :

P F F F P

À chaque coup, on doit retirer une pièce F et retourner les pièces voisines (s'il y en a). On cherche naturellement à retirer toutes les pièces de la rangée. Voici une séquence de coups qui permet de supprimer toutes les pièces de la rangée précédente (la pièce retirée est soulignée) :

P F F F P → F _ P F P → _ _ P F P → _ _ F _ F → _ _ _ _ F → _ _ _ _ _

La question naturelle est alors la suivante :

- Peut-on caractériser les rangées gagnantes (c'est-à-dire celles que l'on peut complètement vider) ?

On remarque dans la séquence précédente que les pièces peuvent avoir 0, 1 ou 2 pièces voisines.

On pourra également s'intéresser à une « variante » de la règle précédente, qui consiste à « resserrer » les pièces dès qu'un trou est créé. De cette façon, les pièces aux extrémités n'ont qu'une seule voisine alors que toutes les autres en ont deux. Dans le cas de cette variante, la séquence précédente devient :

P F F F P → F P F P → F F P → P F → F →

et la rangée est à nouveau gagnante ! Mais en est-il toujours ainsi ?...

Problème 4. Pile et face à deux joueurs...

Cette fois, deux joueurs, Pauline et François, vont jouer à notre jeu de pièces. Ils jouent à tour de rôle. Pauline a le droit de retirer une pièce P et François a le droit de retirer une pièce F. Comme précédemment, lorsqu'ils retirent une pièce, ils retournent les pièces voisines lorsqu'il y en a. Le premier des deux joueurs qui ne peut pas retirer de pièce perd la partie.

Voici un exemple de partie où Pauline joue la première :

P F F F P → _ P F F P → _ F _ P P → _ F _ _ F → _ F _ _ _

Pauline ne peut plus jouer car il n'y a plus de pièce P... elle a donc perdu la partie !

Dans ce jeu, on distingue quatre types de rangées : celles où le joueur qui commence peut gagner la partie, quoi que fasse son adversaire, celles où le joueur qui joue en second gagne la partie, quoi que fasse son adversaire, celles où Pauline gagne toujours, qu'elle commence ou non et, enfin, celles où Paul gagne toujours, qu'il commence ou non.

Voici trois exemples simples de rangées :

F P (le premier gagne toujours)
P (Pauline gagne toujours !)
F (François gagne toujours !)

Sauriez-vous trouver une configuration où le second gagne toujours ?

Vous l'aurez deviné, la question qui va nous intéresser est de pouvoir déterminer le type d'une rangée donnée...

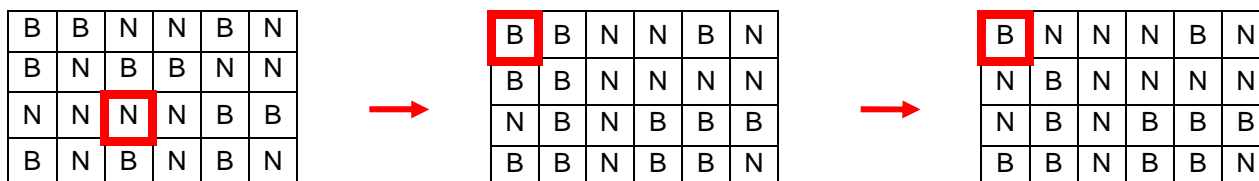
On pourra par exemple commencer par donner une multitude (une infinité ?) d'exemples pour chacune de ces quatre catégories...

Là encore, on pourra considérer la version de base ou bien celle où l'on « resserre » les pièces afin de boucher les trous.

Problème 5. Retournements (flips)...

Revenons à notre grille rectangulaire $n \times m$. Cette fois, on place dans chaque case des pions blancs (B) ou noirs (N) et l'on obtient ainsi une « configuration ». Un « flip » est une opération qui consiste à choisir une case et à

retourner les pions des cases voisines (on ne retourne pas le pion de la case choisie). Voici une séquence de deux flips :



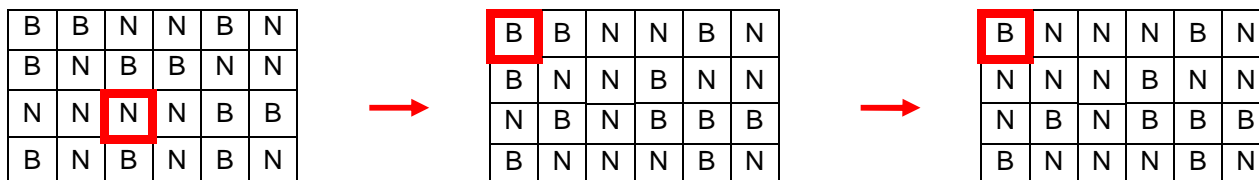
Maintenant, on va dire que deux configurations sont « équivalentes » si l'on peut passer de l'une à l'autre par une séquence de flips.

Les questions qui nous intéressent sont les suivantes :

- Existe-t-il des grilles dont les configurations sont toutes équivalentes ? (et si oui, lesquelles ?)
- Pour une grille donnée (n et m fixés), combien y a-t-il de « familles » de configurations équivalentes ?

On pourra naturellement commencer par des grilles simples, de taille $1 \times n$, puis $2 \times n$, etc.

On pourra également considérer la « variation » qui consiste à considérer que seules les cases ayant une arête commune sont adjacentes. Dans ce cas, la séquence précédente devient :



Bon courage à toutes et tous...

Éric SOPENA
Chercheur au LaBRI
sopena@labri.fr